Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. С. Драгошанский, О сходимости двойных рядов и интегралов Фурье функций на T^2 и $\mathbb{R}^2$ при поворотах системы координат, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 11, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm496>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:49:13

УДК 517.51

О. С. Драгошанский

О сходимости двойных рядов и интегралов Фурье функций на T^2 и $\mathbb{R}^2$ при поворотах системы координат

Пусть функция $f(\xi, \eta)$, равная нулю при $\xi^2 + \eta^2 > r^2$, где r достаточно мало, имеет равномерно сходящийся или почти всюду сходящийся по прямоугольникам ряд Фурье (как функции на квадрате $(-\pi, \pi]^2$) или интеграл Фурье (как функции на плоскости $\mathbb{R}^2$). В работе показано, что поворот системы координат на угол $\pi/4$

$$\begin{cases} \xi = (x - y)/\sqrt{2}, \\ \eta = (y + x)/\sqrt{2} \end{cases}$$

может “испортить” сходимость ряда или интеграла Фурье полученной функции.

Библиография: 8 названий.

§ 1. Введение

Обозначим через T полуинтервал $(-\pi, \pi]$. Пусть B_m – класс измеримых и ограниченных на $\mathbb{R}^m$, $m = 1$ или 2 , функций $f(\mathbf{x})$, носители которых лежат в открытом квадрате $(-\pi, \pi)^m$, $\tilde{B}_m$ – класс интегрируемых и ограниченных на $\mathbb{R}^m$ функций $f(\mathbf{x})$. Так как функции из B_m отличны от нуля лишь на $(-\pi, \pi)^m$, то мы можем их считать функциями на T^m и разлагать в ряды Фурье по кратной тригонометрической системе. Будем также рассматривать разложения в интеграл Фурье функций из $\tilde{B}_m$.

Для любой функции $f \in B_m$ и для произвольного вектора $\mathbf{N} \in \mathbb{Z}^m$ с неотрицательными компонентами через

$$S_{\mathbf{N}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{n}=-\mathbf{N}}^{\mathbf{N}} a_{\mathbf{n}}(f) e^{i\mathbf{n}\mathbf{x}}$$

обозначим $\mathbf{N}$ -ю прямоугольную частичную сумму ряда Фурье функции f в точке $\mathbf{x}$. Преобразование Фурье функций f из класса B_m определим как в [1]:

$$\hat{f}(\mathbf{t}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{t}\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^m.$$

Для вектора $\omega \in \mathbb{R}^m$, $\omega \geq 0$, обозначим через

$$J_{\omega}(f, \mathbf{x}) = \int_{-\omega}^{\omega} \hat{f}(\mathbf{t}) e^{i\mathbf{t}\mathbf{x}} d\mathbf{t} = \frac{1}{\pi^m} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x} + \mathbf{t}) \frac{\sin(\omega_1 t_1)}{t_1} \dots \frac{\sin(\omega_m t_m)}{t_m} d\mathbf{t}$$

прямоугольный частичный интеграл Фурье функции f в точке $\mathbf{x}$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00062).

Ряд Фурье функции f назовем *сходящимся* к числу S по прямоугольникам в точке $\mathbf{x}$, если

$$S_N(f, \mathbf{x}) \rightarrow S \quad \text{при} \quad \min_j N_j \rightarrow +\infty.$$

Аналогично интеграл Фурье функции f *сходится* к числу S по прямоугольникам в точке $\mathbf{x}$, если

$$J_\omega(f, \mathbf{x}) \rightarrow S \quad \text{при} \quad \min_j \omega_j \rightarrow +\infty.$$

Мы будем рассматривать только сходимости по прямоугольникам. Через $[\mathbf{t}]$ будем обозначать вектор, компоненты которого равны целым частям соответствующих компонент $\mathbf{t}$. Через $X_E(\mathbf{x})$ обозначим характеристическую функцию множества E .

Пусть U_m и $\tilde{U}_m$ — множества функций из B_m и $\tilde{B}_m$, имеющих равномерно сходящиеся по прямоугольникам ряды и интегралы Фурье соответственно. Аналогично пусть V_m и $\tilde{V}_m$ — множества функций из B_m и $\tilde{B}_m$, имеющих почти всюду сходящиеся по прямоугольникам ряды и интегралы Фурье соответственно.

В работах многих авторов затрагивается вопрос о том, как влияет замена независимой переменной $x \rightarrow x'$ на сходимость ряда Фурье функции $f(x) = f(x(x'))$. (Под заменой переменной мы понимаем гомеоморфизм тора T^m или всей плоскости $\mathbb{R}^m$ на себя.)

Изучался вопрос о том, как с помощью замены переменной добиться того, чтобы полученная функция имела равномерно сходящийся ряд Фурье. В одномерном случае хорошо известна

ТЕОРЕМА БОРА (см., например, [2; гл. IV, §12]). *Для любой непрерывной 2π -периодической функции $f(x)$ существует такой гомеоморфизм τ полуинтервала $T = (-\pi, \pi]$ на себя, что ряд Фурье $f(\tau(x))$ сходится равномерно на T .*

А.А. Саакян [3] обобщил этот результат на многомерный случай. Им была доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Для любого натурального m и любой функции $f(\mathbf{x})$, непрерывной на $\mathbb{R}^m$ и 2π -периодической по каждой переменной, существует гомеоморфизм $\tau(\mathbf{x})$ куба T^m такой, что ряд Фурье функции $f(\tau(\mathbf{x}))$ равномерно сходится по прямоугольникам.*

Ставился также вопрос о том, какие замены не выводят функции, принадлежащие некоторому классу W , за пределы этого класса. Относительно класса $A(T)$ функций, непрерывных на T и имеющих абсолютно сходящиеся ряды Фурье, известно такое утверждение.

ТЕОРЕМА (Бёрлинг, Хелсон; см., например, [4; гл. VI, §9]). *Пусть $\varphi: T \rightarrow T$ — произвольная измеримая функция, обладающая тем свойством, что композиция $f(\varphi(x)) \in A(T)$ для любой функции $f(x) \in A(T)$. Тогда существуют целое число n и действительное число a такие, что*

$$\varphi(x) = \arg e^{i(nx+a)} \quad \text{для всех } x.$$

Будем рассматривать лишь линейные замены координат и брать в качестве W классы U_m , $\tilde{U}_m$, V_m и $\tilde{V}_m$. Как известно, любая линейная замена есть композиция поворотов и замен вида $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$, где $\mathbf{A}$ — диагональная матрица.

В одномерном случае нетрудно показать, что если линейное преобразование $x = ay + b$ оставляет функцию $f(x)$, которая принадлежит какому-либо из классов V_1 или U_1 , в множестве B_1 , то функция $f(x(y))$ будет принадлежать тому же самому классу, и что любое линейное преобразование переводит классы $\tilde{V}_1$ и $\tilde{U}_1$ в себя. Почти очевидно также, что в многомерном случае замена $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$, где $\mathbf{A}$ — диагональная матрица, переводит классы $\tilde{V}_m$ и $\tilde{U}_m$ в себя.

Далее мы неоднократно будем использовать следующее утверждение, доказанное И. Л. Блошанским [5].

ТЕОРЕМА (о равносходимости двойных рядов и интегралов Фурье). Пусть функция $f(\mathbf{x})$ принадлежит классу $L_p(\mathbb{R}^2)$ при некотором $p > 1$, и пусть $f_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})X_{T^2}(\mathbf{x})$. Тогда разность $R_\omega(\mathbf{x}) = J_\omega(f, \mathbf{x}) - S_{[\omega]}(f_1, \mathbf{x})$ стремится к нулю для почти всех $\mathbf{x} \in T^2$.

Из этой теоремы вытекает, что если такая замена $\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$ оставляет функцию $f(\mathbf{x}) \in V_2$ в множестве B_2 , то функция $f(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$ будет также принадлежать классу V_2 .

Оказалось, что преобразование поворота на угол $\pi/4$ не обладает этими свойствами, о чем говорят теоремы 1 и 4.

ТЕОРЕМА 1. Существует функция $G(\xi, \eta)$ ($\xi, \eta \in \mathbb{R}$), носитель которой — квадрат $\{(\xi, \eta) : \xi, \eta \in [\frac{2}{4}, \frac{3}{4}]\}$, непрерывная на этом квадрате и обладающая следующим свойством: кратный интеграл Фурье функции G сходится по прямоугольникам для почти всех (ξ, η) . Если рассматривать G как функцию на T^2 , то ее кратный ряд Фурье тоже сходится по прямоугольникам для почти всех (ξ, η) . С другой стороны, при повороте системы координат на угол $\pi/4$:

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y), \\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + x), \end{cases}$$

получается функция $G(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \tilde{G}(x, y)$, кратный интеграл и ряд Фурье которой расходятся по прямоугольникам почти всюду на ее носителе.

Возникает такой вопрос. Можно ли обобщить теорему 1 для случая интегралов Фурье так, чтобы полученная при повороте функция $\tilde{G}(x, y)$ имела почти всюду на плоскости $\mathbb{R}^2$ расходящийся интеграл Фурье? Положительный ответ на этот вопрос дает

ТЕОРЕМА 2. Существует функция $f(\xi, \eta)$ ($\xi, \eta \in \mathbb{R}$), ограниченная и интегрируемая на $\mathbb{R}^2$, обладающая следующим свойством: кратный интеграл Фурье функции f сходится по прямоугольникам для почти всех (ξ, η) , но при повороте системы координат на угол $\pi/4$:

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y), \\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(y + x), \end{cases}$$

получается функция $f(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \tilde{f}(x, y)$, кратный интеграл Фурье которой расходитсся по прямоугольникам почти всюду на $\mathbb{R}^2$.

Теоремы 1 и 2 будут доказаны в § 2.

Н. Н. Лузиным в работе [6] была доказана

ТЕОРЕМА. Существует действительнзначная функция $f(x)$, непрерывная на T , такая, что ряд Фурье f сходится абсолютно на T , но для почти всех $x \in T$ ни одна из последовательностей

$$\left\{ \int_0^\pi f(x+t)D_N(t) dt \right\}_{N=1}^\infty, \quad \left\{ \int_{-\pi}^0 f(x+t)D_N(t) dt \right\}_{N=1}^\infty,$$

где $D_N(t) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}}$ — N -е ядро Дирихле, не ограничена ни сверху, ни снизу.

При доказательстве теоремы 4 мы будем использовать следующую модификацию этого утверждения.

ТЕОРЕМА 3. Существует такая комплекснзначная функция $f(x)$, непрерывная на T , что ряд Фурье f сходится абсолютно на T , но последовательность

$$\left\{ \left| \int_0^\pi f(x+t)D_N(t) dt \right| \right\}_{N=1}^\infty$$

неограничена для любого $x \in T$.

ТЕОРЕМА 4. Существует функция $G(\xi, \eta) \in C(\mathbb{R}^2)$, носитель которой содержится в квадрате $\{|\xi|, |\eta| < 3\pi/5\}$, обладающая следующим свойством: ряд Фурье функции $G(\xi, \eta)$ по кратной тригонометрической системе на T^2 и ее интеграл Фурье сходятся равномерно по прямоугольникам, но после поворота системы координат

$$\begin{cases} x = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \\ y = \frac{\eta - \xi}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

ряд и интеграл Фурье полученной функции $\tilde{G}(x, y)$ расходятся по прямоугольникам в точке $(0, 0)$.

Доказательству теорем 3 и 4 посвящен §3 этой статьи.

Автор выражает благодарность М. И. Дьяченко за постановку задач и ценные рекомендации относительно их решения.

§2. Доказательство теорем 1 и 2

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется несколько утверждений.

ЛЕММА 1. Пусть функция $f(s) = as + b\sqrt{s}$ не обращается в нуль на отрезке $I = [\alpha, \beta]$, $\alpha > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\left| \int_\alpha^\beta \frac{e^{is}}{f(s)} ds \right| \leq 2 \left(\frac{1}{|f(\alpha)|} + \frac{1}{|f(\beta)|} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, интегрируя по частям, получаем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{is}}{f(s)} ds \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{f(s)} de^{is} \right| \leq \frac{1}{|f(\alpha)|} + \frac{1}{|f(\beta)|} + \left| \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{1}{f(s)} \right)' e^{is} ds \right| \\ &\leq \frac{1}{|f(\alpha)|} + \frac{1}{|f(\beta)|} + \text{Var}_I \frac{1}{f(s)}. \end{aligned}$$

Функция $1/f(s)$ монотонна либо на отрезке $[\alpha, \beta]$, либо на отрезках $[\alpha, \gamma]$ и $[\gamma, \beta]$ (где γ – некоторая точка на (α, β)). Поэтому, учитывая то, что максимум модуля функции $1/f(s)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ может достигаться лишь в его концах, мы получаем:

$$\text{Var}_I \frac{1}{f(s)} \leq \frac{1}{|f(\alpha)|} + \frac{1}{|f(\beta)|}.$$

ЛЕММА 2. Пусть отрезок $I \in \mathbb{R}$, не содержащий точку 0, вложен в интервал I' . Тогда существует такая константа $C(I, I')$, что для любых ненулевых действительных H , n таких, что $-\frac{n}{2H} \notin I'$, для любых $x \in \mathbb{R}$ и отрезка $[\alpha, \beta] \subset I$ такого, что расстояние $\rho(x, [\alpha, \beta]) \geq 1/|n|$, верна оценка

$$|J_n| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{iHt^2 + in(t-x)}}{t-x} dt \right| \leq C(I, I').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При одновременной замене знаков у чисел n и H левая часть оценки не изменится, поэтому можно считать, что $H > 0$. У нас

$$|J_n| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{e^{iH\left(t + \frac{n}{2H}\right)^2}}{t-x} dt \right|.$$

Поскольку $-\frac{n}{2H} \notin I'$, то тем более $-\frac{n}{2H} \notin [\alpha, \beta]$. Значит, можно сделать замену переменных

$$s = H\left(t + \frac{n}{2H}\right)^2.$$

Мы получим

$$|J_n| = \frac{1}{2} \left| \int_{H(\alpha + \frac{n}{2H})^2}^{H(\beta + \frac{n}{2H})^2} \frac{e^{is}}{\sqrt{sH}(\sqrt{\frac{s}{H}} - \frac{n}{2H} - x)} ds \right|.$$

Согласно лемме 1

$$\begin{aligned} |J_n| &\leq \left(\left| \frac{1}{\sqrt{sH}(\sqrt{\frac{s}{H}} - \frac{n}{2H} - x)} \right|_{s=H(\beta + \frac{n}{2H})^2} \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{1}{\sqrt{sH}(\sqrt{\frac{s}{H}} - \frac{n}{2H} - x)} \right|_{s=H(\alpha + \frac{n}{2H})^2} \right). \end{aligned}$$

Оценим первый модуль (второй оценивается точно так же). При $s = H\left(\beta + \frac{n}{2H}\right)^2$ выполняется

$$\left| \sqrt{\frac{s}{H}} - \frac{n}{2H} - x \right| = |\beta - x| > \frac{1}{|n|},$$

значит, первый модуль оценивается величиной

$$\left| \frac{1}{H\left(\beta + \frac{n}{2H}\right)\frac{1}{n}} \right| = \frac{|2/\beta|}{\left| \frac{1}{n/(2H)} + \frac{1}{\beta} \right|}.$$

Так как точка $-\frac{n}{2H} \notin I'$, а $\beta \in I$, то

$$\frac{1}{\left| \frac{n}{2H} + \beta \right|} \leq C(I, I').$$

Если $\left| \frac{n}{2H} \right| > 2|\beta|$, то мы будем иметь

$$\frac{|2/\beta|}{\left| \frac{1}{n/(2H)} + \frac{1}{\beta} \right|} \leq \frac{|2/\beta|}{\frac{1}{2\beta}} \leq 4 = C(I, I').$$

Если же $\left| \frac{n}{2H} \right| \leq 2|\beta|$, то мы опять-таки будем иметь

$$\frac{|2/\beta|}{\left| \frac{1}{n/(2H)} + \frac{1}{\beta} \right|} = \frac{|2/\beta| \cdot \left| \frac{n}{2H} \beta \right|}{\left| \beta + \frac{n}{2H} \right|} \leq C(I, I') \cdot \left| \frac{n}{2H} \right| \leq C(I, I') \cdot |\beta| \leq C(I, I'),$$

что и завершает доказательство леммы.

Если B – подмножество прямой, а t – действительное число, то через $t + B$ обозначим множество $\{t + x : x \in B\}$.

ЛЕММА 3. *Рассмотрим функцию*

$$f(x) = e^{iH(x+d)^2} X_I(x),$$

где $H \neq 0$, а отрезок $I \subset [-\pi, \pi]$ и число $d \geq 0$ таковы, что $0 \notin d + I$. Пусть I вложен в интервал I' , а натуральное число N таково, что $-d + \frac{N}{2H} \notin I'$ и $-d - \frac{N}{2H} \notin I'$. Тогда для N -й частичной суммы ряда Фурье функции f справедливо

$$|S_N(f, x)| \leq C(I, I', d) \quad \text{для всех } x.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $|f(x)| \leq 1$, то это утверждение достаточно доказать для модифицированных частичных сумм (см., например, [2; гл. I, §35])

$$S_N^*(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_I f(s) D_N^*(s - x) ds, \quad \text{где } D_N^*(t) = \frac{\sin N(t)}{t}.$$

Мы имеем

$$S_N^*(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_I \frac{e^{iH(s+d)^2} \sin N(s - x)}{s - x} ds = \frac{1}{\pi} \int_{I+d} \frac{e^{iHt^2} \sin N(t - x')}{t - x'} dt,$$

где $x' = x - d$. Далее, поскольку $\left| \frac{\sin N(t - x')}{t - x'} \right| \leq N$, то

$$|S_N^*(f, x)| \leq \frac{1}{\pi} \left| \int_{(I+d) \setminus [x'-1/N, x'+1/N]} \frac{e^{iHt^2} \sin N(t - x')}{t - x'} dt \right| + \frac{1}{\pi} \int_{[x'-1/N, x'+1/N]} N dt.$$

Пусть $(I + d) \setminus [x' - 1/N, x' + 1/N] = I_1 \cup I_2$, где I_1 и I_2 — части $I + d$, лежащие соответственно левее $x' - 1/N$ и правее $x' + 1/N$ (возможно, пустые). Тогда для I_j ($j = 1, 2$) справедливо

$$\left| \int_{I_j} \frac{e^{iHt^2} \sin N(t - x')}{t - x'} dt \right| \leq \frac{1}{2} \left| \int_{I_j} \frac{e^{iHt^2 + iN(t - x')}}{t - x'} dt \right| + \frac{1}{2} \left| \int_{I_j} \frac{e^{iHt^2 - iN(t - x')}}{t - x'} dt \right|.$$

К этим двум интегралам можно применить лемму 2. (Здесь отрезок $[\alpha, \beta]$ — это I_j , он вложен в отрезок $I + d$, который, в свою очередь, вложен в интервал $I' + d$.) В итоге мы имеем

$$|S_N^*(f, x)| \leq C(I + d, I' + d) = C(I, I', d).$$

Теперь введем последовательности $N_k = 2^{2^k}$ и $H_k = N_k/2$, $k \geq 2$. Определим отрезок $I = [2/4, 3/4]$, который вложен в интервал $I' = (1/4, 1)$.

Пусть число $d \geq 0$. Заметим, что если $-d + \frac{N}{2H_k} \in I'$ при некоторых натуральных $k \geq 2$ и N , то $-d + \frac{N}{2H_{k+1}} \notin I'$ и $-d + \frac{N}{2H_{k-1}} \notin I'$. Значит, для любого натурального N найдется не более одного $k \geq 2$ такого, что $-d + \frac{N}{2H_k} \in I'$. Кроме того, для любых натуральных N и $k \geq 2$ выполнено $-d - \frac{N}{2H_k} \notin I'$. Пользуясь этим, можно доказать следующую лемму.

ЛЕММА 4. Пусть число $D \geq 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $A_\varepsilon \subset (-\pi, \pi]$, мера которого не превосходит ε , что при $x \in T \setminus A_\varepsilon$ и $k \geq 2$ для любого натурального N модуль частичных сумм удовлетворяет неравенству

$$|S_N(e^{iH_k(x+d)^2} X_I(x), x)| \leq C(\varepsilon, d)(\ln H_k)^{1/10}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k f_k(x), \quad \text{где } \alpha_k = \frac{1}{(\ln H_k)^{1/10}}, \quad f_k(x) = e^{iH_k(x+d)^2} X_I(x).$$

Этот ряд сходится равномерно на I к непрерывной на I функции f , равной нулю вне I . Из теоремы Карлесона и теоремы Егорова следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют число C_ε и такое множество $A_\varepsilon \subset (-\pi, \pi]$, $\mu A_\varepsilon < \varepsilon$, что при $x \in T \setminus A_\varepsilon$ для любого натурального N частичные суммы ряда Фурье функции f удовлетворяют условию

$$|S_N(f, x)| \leq C_\varepsilon.$$

Так как ряд, определяющий f , сходится равномерно, то для всех таких x

$$\left| \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k S_N(f_k, x) \right| \leq C_\varepsilon.$$

Это значит, что

$$\left| \sum_{k: -d + \frac{N}{2H_k} \notin I'} + \sum_{k: -d + \frac{N}{2H_k} \in I'} \alpha_k S_N(f_k, x) \right| \leq C_\varepsilon.$$

Но условие $-d + \frac{N}{2H_k} \in I'$ может выполняться лишь для одного значения k . Если такое k существует, то обозначим его через k^* . По лемме 3 при $k \neq k^*$

$$|S_N(f_k, x)| \leq C(I, I', d) = C(d)$$

(I и I' у нас уже фиксированы). Поэтому

$$|\alpha_{k^*} S_N(f_{k^*}, x)| \leq C_\varepsilon + \sum_{k=2}^{\infty} C(d) \alpha_k = C(\varepsilon, d).$$

Значит,

$$|S_N(f_{k^*}, x)| \leq \frac{C(\varepsilon, d)}{\alpha_{k^*}} = C(\varepsilon, d) (\ln H_k)^{1/10}.$$

Итак, мы доказали утверждение для “исключительного” значения $k = k^*$, а для остальных k у нас есть более сильная оценка

$$|S_N(f_k, x)| \leq C(d).$$

ЛЕММА 5. Пусть функция $f(\xi, \eta)$ на T^2 равна сумме равномерно сходящегося ряда ограниченных измеримых на T^2 функций f_k :

$$f = \sum_{k=2}^{\infty} f_k.$$

Фиксируем точку (x, y) . Пусть частичные суммы двойного ряда Фурье функций f_k ограничены константами β_k :

$$|S_{n,m}(f_k, (x, y))| \leq \beta_k,$$

причем сумма чисел β_k , $k \geq 2$, конечна. Тогда при условии, что для любого $k \geq 2$ ряд Фурье функции f_k сходится по прямоугольникам в точке (x, y) к значению $f_k(x, y)$, ряд Фурье функции $f(\xi, \eta)$ тоже будет сходиться в точке (x, y) к значению $f(x, y)$.

Доказательство леммы 5 очевидно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим функцию Фейффермана $F(x', y')$ (см. [7]), ряд Фурье которой расходится по прямоугольникам почти всюду на квадрате $[2\pi/3, 4\pi/3]^2$. При $x', y' \in [2\pi/3, 4\pi/3]$ она представляется в виде суммы ряда

$$F(x', y') = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln N_k} e^{iN_k x' y'}, \quad N_k = 2^{2^k}.$$

Выполним сдвиг $x = x' - \pi$, $y = y' - \pi$. На множестве $\{x, y \in [-\pi/3, \pi/3]\}$ F запишется так:

$$F(x, y) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln N_k} e^{iN_k(x+\pi)(y+\pi)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln N_k} e^{iN_k(xy+(x+y)\pi+\pi^2)}.$$

И. Л. Блошанским [8] была доказана

ТЕОРЕМА (об обобщенной локализации почти всюду для рядов и интегралов Фурье). *Если функция f принадлежит классу $L_p(T^2)$ при каком-либо $p > 1$, то из равенства $f(\mathbf{x}) = 0$ на некотором открытом множестве E вытекает, что ряд Фурье f сходится к нулю почти всюду на E . Точно так же, если функция f принадлежит классу $L_p(\mathbb{R}^2)$ при каком-либо $p > 1$, то из равенства $f(\mathbf{x}) = 0$ на некотором открытом множестве E вытекает, что интеграл Фурье f сходится к нулю почти всюду на E .*

Из этого результата следует, что ряд Фурье функции, совпадающей с F в некоторой области внутри $[-\pi/3, \pi/3]^2$, будет расходящимся почти всюду в этой области.

Теперь сделаем поворот системы координат

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta - \xi). \end{cases} \quad (*)$$

В новых координатах при $|\xi| + |\eta| < \pi\sqrt{2}/3$ мы будем иметь

$$F(\xi, \eta) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln N_k} e^{iN_k((\eta^2 - \xi^2)/2 + \sqrt{2}\pi\eta + \pi^2)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln N_k} e^{iH_k(\eta + \sqrt{2}\pi)^2} e^{-iH_k\xi^2}.$$

Теперь положим

$$G(\xi, \eta) = F(\xi, \eta)X_I(\xi)X_I(\eta),$$

где, как и прежде, $I = [2/4, 3/4]$. При повороте системы координат (*) функция $\tilde{G} = G(x, y)$ на своем носителе (повернутом квадрате) будет совпадать с $F(x, y)$. И так как этот повернутый квадрат будет лежать внутри $[-\pi/3, \pi/3]^2$, то $G(x, y)$ будет иметь расходящийся почти всюду на своем носителе ряд Фурье.

Покажем, что ряд Фурье функции $G(\xi, \eta)$ сходится при почти всех (ξ, η) . У нас

$$G(\xi, \eta) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln N_k} f_k^\eta(\eta) \overline{f_k^\xi(\xi)},$$

$$f_k^\eta(\eta) = e^{iH_k(\eta + \sqrt{2}\pi)^2} X_I(\eta), \quad f_k^\xi(\xi) = e^{iH_k\xi^2} X_I(\xi).$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и найдем в соответствии с леммой 4 множества A_ε^ξ и A_ε^η меры, меньшей ε , такие, что при $\xi \in T \setminus A_\varepsilon^\xi$ и $\eta \in T \setminus A_\varepsilon^\eta$ для любых натуральных N^ξ, N^η , $k \geq 2$ выполнено

$$|S_{N^\xi}(f_k^\xi, \xi)| \leq C(\varepsilon)(\ln H_k)^{1/10}, \quad |S_{N^\eta}(f_k^\eta, \eta)| \leq C(\varepsilon)(\ln H_k)^{1/10},$$

а это значит, что для двойной частичной суммы верна оценка

$$\left| S_{N^\xi, N^\eta} \left(\frac{1}{\ln N_k} f_k^\eta(\eta) \overline{f_k^\xi(\xi)} \right) \right| \leq C(\varepsilon) \frac{1}{(\ln H_k)^{1/2}}.$$

Так как при фиксированном k одномерные ряды Фурье функций $f_k^\xi(x)$ и $f_k^\eta(x)$ сходятся на множестве $T \setminus \{2/4, 3/4\}$, то при $\xi, \eta \neq 2/4, 3/4$

$$\begin{aligned} & S_{N^\xi, N^\eta} \left(\frac{1}{\ln N_k} f_k^\eta(\eta) \overline{f_k^\xi(\xi)}, (\xi, \eta) \right) \\ &= \frac{1}{\ln N_k} S_{N^\eta}(f_k^\eta(\eta), \eta) \cdot \overline{S_{N^\xi}(f_k^\xi(\xi), \xi)} \xrightarrow{\min\{N^\xi, N^\eta\} \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln N_k} f_k^\eta(\eta) \overline{f_k^\xi(\xi)}. \end{aligned}$$

Поэтому, применяя лемму 5, мы получаем, что при $\xi \notin A_\varepsilon^\xi \cup \{2/4, 3/4\}$ и $\eta \notin A_\varepsilon^\eta \cup \{2/4, 3/4\}$

$$S_{N^\xi, N^\eta}(G, (\xi, \eta)) \xrightarrow{\min\{N^\xi, N^\eta\} \rightarrow \infty} G(\xi, \eta).$$

А значит, в силу произвольности ε это справедливо для почти всех $(\xi, \eta) \in T^2$.

Мы доказали утверждение теоремы, касающееся рядов Фурье. Но из упомянутой в начале статьи теоремы о равносходимости двойных рядов и интегралов вытекает расходимость интеграла Фурье функции $G(x, y)$ почти всюду на ее носителе и сходимость почти всюду интеграла Фурье функции $G(\xi, \eta)$ на T^2 . А так как G ограничена и равна нулю вне T^2 , то из упомянутой теоремы о локализации для двойного интеграла Фурье следует сходимость $J_\omega(G(\xi, \eta), (\xi, \eta))$ по прямоугольникам к нулю почти всюду вне T^2 , что и завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2 следует из теоремы 1. Действительно, рассмотрим функцию

$$f(\xi, \eta) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} c_n c_m G\left(\xi - \frac{n-2}{4}, \eta - \frac{m-2}{4}\right) = \sum_{n, m=-\infty}^{\infty} f_{nm}(\xi, \eta),$$

где $\{c_n\}_{n, m=-\infty}^{\infty}$ — произвольная последовательность строго положительных чисел, сумма которых конечна, а G — функция, указанная в теореме 1. Ясно, что носитель функции f_{mn} — это квадрат $K_{mn} = [n/4, (n+1)/4] \times [m/4, (m+1)/4]$. Двойной интеграл Фурье функции $f_{nm}(\xi, \eta)$ сходится почти всюду по прямоугольникам на K_{mn} . При разных (n, m) квадраты K_{mn} не имеют общих внутренних точек; вместе эти квадраты заполняют всю плоскость. В силу выбора последовательности $\{c_n\}$ мы будем иметь $f(\xi, \eta) \in L^p(\mathbb{R}^2)$ для всех $p \in [1, +\infty]$. Так как функция f внутри квадрата K_{nm} совпадает с f_{nm} , то по упомянутой выше теореме об обобщенной локализации $f(\xi, \eta)$ имеет сходящийся почти всюду по прямоугольникам на K_{nm} интеграл Фурье. Это справедливо для всех пар (n, m) , значит, двойной интеграл Фурье $f(\xi, \eta)$ действительно сходится почти всюду на $\mathbb{R}^2$.

Те же самые рассуждения показывают, что функция $f(x, y)$, полученная при повороте, будет иметь расходящийся почти всюду на $\mathbb{R}^2$ интеграл Фурье.

§3. Доказательство теорем 3 и 4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Положим

$$f(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \alpha_k e^{iN_k x},$$

где последовательность $N_k = 2^{2^k}$, а $\alpha_k = (\ln N_k)^{-1/2}$. Тогда ряд Фурье f действительно будет абсолютно сходящимся. Фиксируем $x \in T$. Для любых $k, l \geq 2$ выполнено

$$\begin{aligned} I_{k,l} &= \int_0^\pi e^{iN_k(x+t)} D_{N_l}(t) dt \\ &= e^{iN_k x} \left(i \int_0^\pi \sin(N_k t) D_{N_l}(t) dt + \int_0^\pi \cos(N_k t) D_{N_l}(t) dt \right). \end{aligned}$$

Но в силу четности функции $\cos(N_k t) D_{N_l}(t)$ верно

$$\int_0^\pi \cos(N_k t) D_{N_l}(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \cos(N_k t) D_{N_l}(t) dt = \frac{1}{2} X_{l,k} = O(1),$$

где $X_{l,k}$ — это функция, равная единице, если $l \geq k$, и нулю иначе, а под $O(1)$ понимается выражение, ограниченное по модулю абсолютной константой. Далее, так как $\left| D_{N_l}(t) - \frac{\sin(N_l t)}{t} \right| = O(1)$, то

$$\int_0^\pi \sin(N_k t) D_{N_l}(t) dt = \int_{1/N_l}^\pi \frac{\sin(N_k t) \cdot \sin(N_l t)}{t} dt + O(1).$$

Поэтому

$$|I_{k,l}| = \left| \frac{1}{2} \int_{1/N_l}^\pi \frac{\cos(N_k - N_l)t - \cos(N_k + N_l)t}{t} dt \right| + O(1).$$

При $k = l$ мы имеем

$$\begin{aligned} |I_{k,k}| &= \left| \frac{1}{2} \int_{1/N_k}^\pi \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int_{1/N_k}^\pi \frac{\cos(2N_k t)}{t} dt \right| + O(1) \\ &= \left| \frac{1}{2} \ln N_k - \frac{1}{2} \int_2^{2N_k \pi} \frac{\cos s}{s} ds \right| + O(1) = \frac{1}{2} \ln N_k + O(1). \end{aligned}$$

Если же $k \neq l$, то

$$|I_{k,l}| \leq \left| \frac{1}{2} \int_{\frac{|N_k - N_l|}{N_l}}^{|N_k - N_l|\pi} \frac{\cos s}{s} ds \right| + \left| \frac{1}{2} \int_{\frac{|N_k + N_l|}{N_l}}^{|N_k + N_l|\pi} \frac{\cos s}{s} ds \right| + O(1).$$

Учитывая, что при $k \neq l$ верно $|N_k - N_l|/N_l \geq 1/2$ и что для любых чисел $\gamma \geq \beta \geq \alpha > 0$

$$\left| \int_\beta^\gamma \frac{\cos s}{s} ds \right| \leq C(\alpha),$$

мы получаем, что при $k \neq l$ выполнено $|I_{k,l}| = O(1)$. Теперь рассмотрим последовательность

$$\{R_k\} = \left\{ \left| \int_0^\pi f(x+t) D_{N_k}(t) dt \right| \right\}_{k=2}^\infty.$$

В силу равномерной сходимости ряда, определяющего f ,

$$\begin{aligned} R_l &= \left| \sum_{k=2}^\infty \alpha_k \int_0^\pi e^{iN_k(x+t)} D_{N_l}(t) dt \right| = \left| \sum_{k \neq l} \alpha_k I_{k,l} + \alpha_l I_{l,l} \right| \\ &\geq \alpha_l \left(\frac{1}{2} \ln N_l - O(1) \right) - O(1) \cdot \sum_{k=2}^\infty \alpha_k \geq \frac{1}{2} (\ln N_l)^{1/2} - O(1). \end{aligned}$$

Следовательно, $R_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, что и доказывает теорему 3.

Теперь мы получим несколько утверждений, с помощью которых докажем теорему 4.

ЛЕММА 6. Пусть функция $f(x)$ измерима и ограничена на $\mathbb{R}$, а последовательность

$$\left\{ \left| \int_0^\pi f(t) D_N(t) dt \right| \right\}_{N=1}^\infty$$

неограничена. Тогда для любого $\delta \in (0, \pi]$ существует функция $g \in C(\mathbb{R})$, равная нулю при $x \leq 0$, единице при $x \geq \delta$, монотонно неубывающая на $[0, \delta]$, такая, что последовательность

$$\left\{ \left| \int_0^\pi f(t) g(t) D_N(t) dt \right| \right\}_{N=1}^\infty$$

тоже неограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем последовательность монотонно стремящихся к нулю различных положительных чисел $\{x_k\}_{k=0}^\infty$ с $x_0 = \delta$ такую, что функция g , равная 2^{-k} в точках x_k , линейная на каждом отрезке $[x_{k+1}, x_k]$, равная нулю при $x \leq 0$ и единице при $x \geq \delta$, удовлетворяла бы условию леммы. Построенная подобным образом функция g всегда будет непрерывной и неубывающей.

Точки x_k строим по индукции. Положим $x_0 = \delta$.

Допустим, мы уже нашли точки x_k при $k \leq n$ таким образом, что для функции $g_{(x_n)}(x)$, определенной при $x \geq x_n$, равной 2^{-k} в точках x_k и линейной на отрезках $[x_k, x_{k-1}]$ при $k \leq n$, справедливо

$$\left| \int_{x_n}^\pi f(t) g_{(x_n)}(t) D_{[\delta/x_n]}(t) dt \right| \geq n$$

($[x]$ — это целая часть числа x). Обозначим через $g_{(x_{n+1})}(x)$ функцию, равную $g_{(x_n)}(x)$ при $x \geq x_n$ и доопределенную линейно на отрезке $[x_{n+1}, x_n]$ так, что $g_{(x_{n+1})}(x_{n+1}) = 2^{-n-1}$ (естественно, $g_{(x_{n+1})}(x)$ зависит от x_{n+1}).

Покажем, что можно выбрать $x_{n+1} < x_n/2$ так, что

$$I(x_{n+1}) = \left| \int_{x_{n+1}}^\pi f(t) g_{(x_{n+1})}(t) D_{[\delta/x_{n+1}]}(t) dt \right| \geq n+1.$$

В самом деле,

$$I(x_{n+1}) \geq \left| \int_{x_{n+1}}^{x_n} f(x)g_{(x_{n+1})}(x)D_{[\delta/x_{n+1}]}(x) dx \right| - \left| \int_{x_n}^{\pi} f(x)g_{(x_n)}(x)D_{[\delta/x_{n+1}]}(x) dx \right|.$$

Последний интеграл не зависит от x_{n+1} , поэтому

$$I(x_{n+1}) \geq \left| \int_{x_{n+1}}^{x_n} f(x)g_{(x_{n+1})}(x)D_{[\delta/x_{n+1}]}(x) dx \right| - C(x_0, x_1, \dots, x_n, \delta).$$

Далее, в силу линейности $g_{(x_{n+1})}(x)$ на отрезке $[x_{n+1}, x_n]$ мы будем иметь

$$I(x_{n+1}) \geq \left| \int_{x_{n+1}}^{x_n} \frac{f(x)}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{x - x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} \right) D_{[\delta/x_{n+1}]}(x) dx \right| - C(x_0, \dots, \delta).$$

Так как при $x \in [x_{n+1}, x_n]$ выполнено $\left| \frac{x - x_{n+1}}{x_n - x_{n+1}} \right| \leq \frac{x}{x_n}$, то

$$I(x_{n+1}) \geq \left| \int_{x_{n+1}}^{x_n} \frac{f(x)}{2^{n+1}} D_{[\delta/x_{n+1}]}(x) dx \right| - \frac{1}{2^{n+1}} \int_{x_{n+1}}^{x_n} \left| f(x) \frac{x}{x_n} D_{[\delta/x_{n+1}]}(x) \right| dx - C(x_0, \dots, \delta).$$

Учитывая то, что $|f(x)| \leq C$ и $|x \cdot D_n(x)| \leq C$, мы получаем

$$I(x_{n+1}) \geq \left| \int_{x_{n+1}}^{x_n} \frac{f(x)}{2^{n+1}} D_{[\delta/x_{n+1}]}(x) dx \right| - C(x_0, \dots, \delta).$$

А значит, $\overline{\lim}_{x_{n+1} \rightarrow +0} I(x_{n+1}) = \infty$ и указанный выбор возможен.

Осталось проверить, что для построенной по точкам x_k функции $g(x)$ выполняется утверждение леммы. Действительно, для любого k

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\pi} f(t)g(t)D_{[\delta/x_k]}(t) dt \right| &\leq \left| \int_{x_k}^{\pi} f(t)g(t)D_{[\delta/x_k]}(t) dt \right| - \sup |f| \cdot \left[\frac{\delta}{x_k} \right] \cdot x_k \\ &= \left| \int_{x_k}^{\pi} f(t)g_{(x_k)}(t)D_{[\delta/x_k]}(t) dt \right| - \sup |f| \cdot \left[\frac{\delta}{x_k} \right] \cdot x_k \\ &\geq k - C(\delta) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

ЛЕММА 7. Пусть ряд Фурье функции $f(x, y)$, непрерывной на T^2 , сходится по прямоугольникам в точке $(0, 0)$. Тогда ряд Фурье функции $\varphi(x) = f(x, 0)$ сходится в точке $x = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\{f_{n_x, n_y}\}_{n_x, n_y}$ и $\{\varphi_{n_x}\}_{n_x}$ соответственно коэффициенты Фурье функций f и φ . Покажем, что при фиксированном n_x выполнено

$$\varphi_{n_x} = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n_y=-M}^M \frac{M+1-|n_y|}{M+1} f_{n_x, n_y}.$$

Для этого рассмотрим функцию

$$a_{n_x}(y) = \frac{1}{2n} \int_T f(x, y) e^{-in_x x} dx,$$

которая при $y = 0$ равна φ_{n_x} . Так как $a_{n_x}(y)$ непрерывна по y , то ее ряд Фурье суммируем в точке 0 методом (C, 1) к φ_{n_x} . Это значит, что

$$\varphi_{n_x} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_T a_{n_x}(y) K_M(y) dy = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi^2} \int_T \int_T f(x, y) e^{-in_x x} K_M(y) dy dx$$

(здесь K_M — M -е ядро Фейера). Мы получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi_{n_x} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{n_y=-M}^M \left(\frac{M+1-|n_y|}{M+1} \right) \int_T \int_T f(x, y) e^{-in_x x} e^{-in_y y} dy dx \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n_y=-M}^M \frac{M+1-|n_y|}{M+1} f_{n_x, n_y}. \end{aligned}$$

По условию для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N , что при $N_x, N_y \geq N$ выполнено

$$|S_{N_x, N_y}(f, (0, 0)) - f(0, 0)| < \varepsilon.$$

Тогда в силу свойств метода суммирования (C, 1) (см., например, [1; гл. III]) справедливо

$$\overline{\lim}_{M \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{M+1} \sum_{N_y=0}^M S_{N_x, N_y}(f, (0, 0)) - f(0, 0) \right| \leq \varepsilon.$$

Но при фиксированном N_x

$$\begin{aligned} &\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \sum_{N_y=0}^M S_{N_x, N_y}(f, (0, 0)) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \sum_{n_x=-N_x}^{N_x} \sum_{n_y=-M}^M (M+1-|n_y|) f_{n_x, n_y} \\ &= \sum_{n_x=-N_x}^{N_x} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M+1} \sum_{n_y=-M}^M (M+1-|n_y|) f_{n_x, n_y} \\ &= \sum_{n_x=-N_x}^{N_x} \varphi_{n_x} = S_{N_x}(\varphi, 0). \end{aligned}$$

В итоге мы получаем, что при $N_x \geq N$

$$|S_{N_x}(\varphi, 0) - \varphi(0)| \leq \varepsilon,$$

а значит, $S_{N_x}(\varphi, 0) \xrightarrow{N_x \rightarrow \infty} \varphi(0)$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 8. Пусть интеграл Фурье функции $f(x, y)$, непрерывной на $\mathbb{R}^2$ и имеющей носитель, лежащий в квадрате $\{|x|, |y| \leq A\}$, сходится по прямоугольникам в точке $(0, 0)$. Тогда интеграл Фурье функции $\varphi(x) = f(x, 0)$ сходится в точке 0.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма является аналогом предыдущего утверждения для интегралов Фурье, и идея доказательства здесь абсолютно та же. Только вместо $(C, 1)$ -средних для рядов Фурье мы будем использовать средние Гаусса–Вейерштрасса для интегралов Фурье.

Итак, обозначим через

$$W(y, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-\frac{|y|^2}{2\alpha}} \quad (y \in \mathbb{R}, \alpha > 0)$$

одномерное ядро Гаусса–Вейерштрасса. Его преобразование Фурье (по y) есть

$$\widehat{W}(t, \alpha) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\alpha|t|^2}{2}}.$$

Функция $W(y, \alpha)$ удовлетворяет следующим свойствам:

- (i) $W(y, \alpha) \geq 0$,
- (ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} W(y, \alpha) dy = 1$,
- (iii) $\forall \delta > 0 \quad \int_{-\delta}^{\delta} W(y, \alpha) dy \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0+} 1$.

Пусть $\widehat{f}(s, t)$ и $\widehat{\varphi}(s)$ – преобразования Фурье функций f и φ соответственно. Покажем, что

$$\widehat{\varphi}(s) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(s, t) \widehat{W}(t, \alpha) dt,$$

причем сходимость – равномерная на любом отрезке. Для этого рассмотрим функцию

$$a(s, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-isx} dx,$$

которая равна $\widehat{\varphi}(s)$ при $y = 0$. Она обращается в нуль при $y \notin [-A, A]$ и равномерно непрерывна на любом прямоугольнике. Из этого, а также из свойств функции $W(y, \alpha)$ вытекает, что

$$\widehat{\varphi}(s) = a(s, 0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_{-A}^A a(s, y) W(y, \alpha) dy,$$

причем сходимость – равномерная на любом отрезке. Далее, согласно равенству Парсеваля (так как $\widehat{f}(s, t)$ – это преобразование Фурье функции $a(s, y)$ по переменной y)

$$\int_{-A}^A a(s, y) W(y, \alpha) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} a(s, y) W(y, \alpha) dy = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{a}(s, t) \widehat{W}(t, \alpha) dt.$$

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. По условию существует такое число $B = B(\varepsilon) > 0$, что для всех $R_x, R_y \geq B$ выполнено

$$|J_{(R_x, R_y)}(f, (0, 0)) - f(0, 0)| < \varepsilon.$$

Это значит, что

$$\left| \int_{-R_y}^{R_y} \int_{-R_x}^{R_x} \widehat{f}(s, t) ds dt - f(0, 0) \right| < \varepsilon.$$

Рассмотрим при фиксированном $R_x \geq B$ величину

$$I(\alpha) = 2\pi \int_{-R_x}^{+R_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{W}(t, \alpha) \widehat{f}(s, t) dt ds.$$

Выполнив интегрирование по частям, мы получим:

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= -2\pi \int_0^\infty d\xi \widehat{W}'_\xi(\xi, \alpha) \left(\int_{-R_x}^{+R_x} \int_{-\xi}^{+\xi} \widehat{f}(s, t) dt ds \right) \\ &= \left(\int_0^B + \int_B^{+\infty} \right) d\xi \left(-2\pi \widehat{W}'_\xi(\xi, \alpha) \left(\int_{-R_x}^{+R_x} \int_{-\xi}^{+\xi} \widehat{f}(s, t) dt ds \right) \right) \\ &= I_1(\alpha) + I_2(\alpha). \end{aligned}$$

Поскольку $\sup_{\xi \in [0, B]} |\widehat{W}'_\xi(\xi, \alpha)| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0+} 0$, а величина

$$\sup_{\xi \in [0, B]} \left| \int_{-R_x}^{+R_x} \int_{-\xi}^{+\xi} \widehat{f}(s, t) dt ds \right|$$

ограничена константой, не зависящей от α , то

$$I_1(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0+} 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned} I_2(\alpha) &= \int_B^{+\infty} d\xi \left(-2\pi \widehat{W}'_\xi(\xi, \alpha) \left(\int_{-R_x}^{+R_x} \int_{-\xi}^{+\xi} \widehat{f}(s, t) dt ds - f(0, 0) \right) \right) \\ &\quad + \int_B^{+\infty} d\xi (-2\pi \widehat{W}'_\xi(\xi, \alpha)) \cdot f(0, 0) = I_3(\alpha) + I_4(\alpha), \end{aligned}$$

$I_3(\alpha)$ оценивается величиной

$$\varepsilon \cdot \int_B^{+\infty} d\xi |-2\pi \widehat{W}'_\xi(\xi, \alpha)| \leq C\varepsilon$$

и, наконец,

$$I_4(\alpha) = f(0, 0) \cdot (2\pi \widehat{W}(B, \alpha)) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0+} f(0, 0).$$

Мы получили, что

$$\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow 0+} |I(\alpha) - f(0, 0)| \leq C\varepsilon.$$

Но с другой стороны, в силу равномерной на любом отрезке сходимости

$$2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{W}(t, \alpha) \widehat{f}(s, t) dt \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0+} \widehat{\varphi}(s)$$

мы будем иметь:

$$I(\alpha) = 2\pi \int_{-R_x}^{+R_x} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{W}(t, \alpha) \widehat{f}(s, t) dt ds \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0+} \int_{-R_x}^{+R_x} \widehat{\varphi}(s) ds = J_{R_x}(\varphi, 0).$$

Выходит, что для любого $\varepsilon > 0$ при $R_x \geq B = B(\varepsilon)$ верно неравенство

$$|J_{R_x}(\varphi, 0) - f(0, 0)| \leq C\varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 9. Если для измеримой и ограниченной на $\mathbb{R}$ функции f последовательность

$$\left\{ \left| \int_0^\pi f(t) D_N(t) dt \right| \right\}_{N=1}^\infty$$

неограничена, то для любого числа $\alpha > 0$ последовательность

$$\left\{ \left| \int_0^\pi f\left(\frac{t}{\alpha}\right) D_N(t) dt \right| \right\}_{N=1}^\infty$$

тоже неограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть последовательность $\{N_k\}$ такова, что

$$\left| \int_0^\pi f(t) D_{N_k}(t) dt \right| \rightarrow \infty.$$

Используя то, что

$$\left| D_{[N_k/\alpha]}(t) - \frac{\sin[N_k/\alpha]t}{t} \right| = O(1) \quad \text{и} \quad \left| \frac{\sin[N_k/\alpha]t}{t} - \frac{\sin(N_k t/\alpha)}{t} \right| = O(1),$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi f\left(\frac{t}{\alpha}\right) D_{[N_k/\alpha]}(t) dt \right| &\geq \left| \int_0^\pi f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \frac{\sin[N_k/\alpha]t}{t} dt \right| - C(f, \alpha) \\ &\geq \left| \int_0^\pi f\left(\frac{t}{\alpha}\right) \frac{\sin(N_k t/\alpha)}{t} dt \right| - C(f, \alpha) = \left| \int_0^{\alpha\pi} f(s) \frac{\sin(N_k s)}{s} ds \right| - C(f, \alpha) \\ &\geq \left| \int_0^\pi f(s) \frac{\sin(N_k s)}{s} ds \right| - C(f, \alpha) \geq \left| \int_0^\pi f(s) D_{N_k}(s) ds \right| - C(f, \alpha) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty, \end{aligned}$$

что и доказывает утверждение леммы.

ЛЕММА 10. Пусть функция $f(x)$ принадлежит множеству B_1 . Если ряд Фурье функции f расходится в точке 0, то и интеграл Фурье f расходится в точке 0. Если ряд Фурье функции f сходится равномерно на T , то интеграл Фурье f сходится равномерно на $\mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из того, что для натуральных N выполнено

$$J_N(f, 0) = S_N^*(f, 0) = S_N(f, 0) + O(1)$$

(здесь, как и раньше, $S_N^*(f, x)$ — модифицированные частичные суммы ряда Фурье f).

Для доказательства второго утверждения нам понадобится

ТЕОРЕМА (см., например, [1; гл. XVI, теорема 1.3]). Пусть $|g(t)|/(1+|t|)$ интегрируема на $(-\infty, +\infty)$, и пусть $g_a(t)$ — периодическая функция, совпадающая с g внутри заданного интервала $I_a = (a, a+2\pi)$. Тогда на любом отрезке I'_a , лежащем внутри I_a , разность $|S_{[w]}(g_a, x) - J_w(g, x)|$ равномерно стремится к нулю при $w \rightarrow +\infty$.

Из этой теоремы следует, что $J_w(f, x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на любом отрезке длины меньше 2π . Но так как при $r > \pi, r \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \in (-\infty, -r] \cup [r, +\infty)} |J_w(f, x)| \leq \left(C \int_{-\pi}^{+\pi} |f(s)| ds \right) \cdot \frac{1}{r - \pi} \rightarrow 0,$$

то $J_w(f, x)$ сходится к $f(x)$ равномерно на всей числовой прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Положим $\varepsilon = 0.001$. Пусть $f(\eta)$ и $g(\xi)$ – функции, указанные в теореме 3 и лемме 6 соответственно. В качестве параметра δ для леммы 6 можно взять единицу. И пусть $h_\varepsilon(x)$ – бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}$, равная единице при $|x| \leq 1$ и нулю при $|x| \geq 1 + \varepsilon$. Определим функцию G следующим образом:

$$G(\xi, \eta) = f(\eta)h_\varepsilon\left(\frac{\pi}{2}\eta\right)g(\xi)h_\varepsilon\left(\frac{\pi}{2}\xi\right).$$

Одномерный ряд Фурье функции $g(\xi)h_\varepsilon(\pi\xi/2)$ сходится равномерно на T , поскольку она непрерывна и имеет ограниченную вариацию. Одномерный ряд Фурье $f(\eta)h_\varepsilon(\pi\eta/2)$ тоже сходится равномерно, поскольку домножение на гладкую функцию сохраняет равномерную сходимость ряда Фурье (см., например, [2; гл. I, § 34]). Из леммы 10 следует, что интегралы Фурье функций $g(\xi)h_\varepsilon(\pi\xi/2)$ и $f(\eta)h_\varepsilon(\pi\eta/2)$ сходятся равномерно на $\mathbb{R}$. Значит, $G(\xi, \eta)$ действительно имеет равномерно сходящийся ряд и интеграл Фурье.

При повороте (*) функция G будет иметь вид

$$\tilde{G}(x, y) = f\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)g\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)h_\varepsilon\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)h_\varepsilon\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x-y}{\sqrt{2}}\right).$$

При $y = 0$ мы получим

$$\tilde{G}(x, 0) = f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)g\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)h_\varepsilon^2\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

Согласно леммам 7, 8 и 10 нам достаточно показать, что одномерный ряд Фурье функции $\tilde{G}(x, 0)$ расходится в точке $x = 0$. Так как $h_\varepsilon^2(\pi x/(2\sqrt{2}))$ – гладкая функция, а домножение на гладкую ненулевую в точке 0 функцию не влияет на сходимость ряда Фурье в нуле, то нужно установить расходимость последовательности частичных сумм

$$S_N = S_N\left(f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \cdot g\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), 0\right).$$

Учитывая то, что $g(x) = 0$ при $x < 0$, мы будем иметь:

$$|S_N| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^\pi f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)g\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)D_N(t) dt \right|,$$

и применение леммы 9 завершает доказательство теоремы 4.

Список литературы

1. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965.
2. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1961.
3. Саакян А. А. О теореме Бора для кратных тригонометрических рядов // Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 6. С. 913–924.
4. Казан Ж.-П. Абсолютно сходящиеся ряды Фурье. М.: Мир, 1970.
5. Блошанский И. Л. О равносходимости разложений в кратный тригонометрический ряд Фурье и интеграл Фурье // Матем. заметки. 1975. Т. 18. № 2. С. 153–168.
6. Лузин Н. Н. Об одном виде сходимости интеграла Дирихле // Интеграл и тригонометрический ряд. М.–Л.: Гостехиздат, 1951. С. 320–324.
7. Базбух М., Никишин Е. М. О сходимости двойных рядов Фурье от непрерывных функций // Сиб. матем. журн. 1973. Т. 14. № 6. С. 1189–1199.
8. Блошанский И. Л. Обобщенная локализация почти всюду и сходимость двойных рядов Фурье // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242. № 1. С. 11–13.