Общероссийский математический портал

М. И. Кузнецов, Н. Г. Чебочко, Деформации классических алгебр Ли, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 8, 69–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm499>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 14:52:56

УДК 512.554.31

М. И. Кузнецов, Н. Г. Чебочко

Деформации классических алгебр Ли

Для классической алгебры Ли L характеристики $p > 2$, отличной от C_2 при $p = 3$, доказывается, что $H^2(L, L) = 0$. Под классической алгеброй Ли понимается алгебра Ли простой алгебраической группы, либо ее факторалгебра по центру, либо алгебра Ли A_l^z , $l + 1 \equiv 0(p)$, или E_6^z при $p = 3$.

Библиография: 14 названий.

§ 1. Введение

В настоящей работе изучаются деформации классических алгебр Ли над полем K характеристики $p > 2$. Под классической алгеброй Ли над K мы понимаем алгебру Ли простой алгебраической группы либо ее факторалгебру по центру. Кроме того, к классическим алгебрам мы относим алгебры Ли A_l^z , когда $l + 1 \equiv 0(p)$, и E_6^z при $p = 3$, которые будут описаны ниже (см. § 2).

Известно [1], что над полем характеристики $p > 3$ все классические алгебры Ли являются жесткими. Над полем характеристики 3 корневую систему типа C_2 могут иметь неизоморфные алгебры Ли (см. [2]). Глобальные деформации алгебры Ли C_2 построены в [3]. В [4] анонсирован результат, согласно которому алгебра Ли C_2 единственная среди алгебр Ли серий A_n , B_n , C_n , D_n , допускающая нетривиальные деформации при $p = 3$. Полное описание глобальных деформаций алгебры Ли C_2 получено в [5].

В данной работе доказывается

ТЕОРЕМА. *Все классические алгебры Ли над полем K характеристики $p > 2$ являются жесткими, кроме алгебры Ли C_2 при $p = 3$.*

Жесткость алгебры Ли типа G_2 при $p = 3$ была доказана в работе [6], и в настоящей работе алгебра этого типа исключается из рассмотрения.

Условие $H^2(L, L) = 0$ является достаточным условием жесткости алгебры Ли L (см. [5], [7]). В работе предлагается следующая схема вычисления $H^2(L, L)$, пригодная для полей характеристики $p > 2$. Группа $\text{Aut } L$ содержит присоединенную группу Шевалле $G(L)$ (см. [8]). Мы раскладываем основной комплекс в прямую сумму весовых подкомплексов, используя естественное действие максимального тора группы $G(L)$. Соответствующие группы когомологий являются весовыми подпространствами в группе когомологий основного комплекса. В § 3 мы показываем, что $H^2(L, L) = H_0^2(L, L)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 96-01-01756, 99-01-00398).

В § 4 доказывается тривиальность $H_0^2(L, L)$. Для коцикла ψ нулевого веса строится алгебра Ли $L(\varepsilon)$ над алгеброй двойных чисел $K[\varepsilon]$. Алгебра $L(\varepsilon)$ имеет градуировку с коэффициентами в группе $Q(R)$, где $Q(R)$ – подгруппа в евклидовом пространстве, порожденная корнями. Выбирая одну из стандартных градуировок, мы получим градуировку в алгебре $L(\varepsilon)$ глубины 1 или 2.

Теперь можно применить индукцию по рангу алгебры и считать, что коцикл ψ тривиален на компоненте L_0 градуировки. Несложные рассуждения показывают, что исходный коцикл когомологичен коциклу, для которого $\psi(L_{-1}, L_0) = \psi(L_{-1}, L_{-1}) = 0$. После этого можно применить теорию продолжений Картана. Дело в том, что для каждого элемента l из L_1 $\psi(l, -)$ принадлежит продолжению Картана $L^{(1)}$ пары (L_{-1}, L_0) и нетривиальность ψ означает наличие еще одного L_0 -подмодуля в $L^{(1)}$, изоморфного L_1 , но отличного от L_1 . Отметим, что именно так возникают деформации $L(\varepsilon)$ в работе [3]. Исследование картановского продолжения показывает, что таких подмодулей не существует. Поэтому, заменяя ψ на когомологичный коцикл, можно считать, что $\psi(L_1, L_{-1}) = 0$. Из полученных условий следует, что ψ – тривиальный коцикл. Таким образом, $H_0^2(L, L) = 0$.

§ 2. Классические алгебры Ли

Пусть $L_{\mathbb{C}}$ – комплексная классическая алгебра Ли, R – ее система корней, $Q(R)$ – подгруппа, порожденная корнями, $W(R)$ – группа Вейля. Через e_α , $\alpha \in R$, обозначаются корневые векторы из базиса Шевалле, $h_\alpha = [e_\alpha, e_{-\alpha}]$, $L_{\mathbb{Z}}$ – соответствующая форма Шевалле. Классическая алгебра Ли L над полем K характеристики $p > 0$ определяется как $L_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} K$. Отметим, что равенство $[e_\alpha, e_\beta] = 0$ при $\alpha + \beta \in R$ возможно только в алгебре Ли типа G_2 при $p = 3$. Если $L_{\mathbb{C}}$ имеет тип A_l , $l + 1 \equiv 0(p)$, или E_6 , $p = 3$, то алгебра Ли L имеет одномерный центр. Через $\bar{A}_l$, $\bar{E}_6$ будем обозначать соответствующую факторалгебру по центру. Эти алгебры Ли мы также будем относить к классическим алгебрам Ли. Система корней R , группы $W(R)$, $Q(R)$ будут в равной степени относиться как к алгебрам Ли L , так и к их факторалгебрам по центру. Ранг системы R будет называться *рангом* алгебры Ли L . Отметим, что R является системой векторов в вещественном евклидовом пространстве $V_{\mathbb{R}}$. Элементы из R можно рассматривать как линейные функции на картановской подалгебре $\mathcal{H}$ в L (со значениями в K). Чтобы избежать двусмысленности, мы будем иногда обозначать функцию на $\mathcal{H}$, соответствующую $\alpha \in R$, через $\alpha|_{\mathcal{H}}$.

Глобальной деформацией алгебры Ли L называется семейство алгебр Ли, параметризованных точками связного гладкого многообразия, одной из точек которого соответствует алгебра Ли L . Пусть $\mathcal{L}$ – многообразие структур алгебр Ли на векторном пространстве V . Алгебра Ли $L \in \mathcal{L}$ называется *жесткой*, если существует окрестность L (в топологии Зарисского на $\mathcal{L}$), все точки которой являются алгебрами Ли, изоморфными L .

Орбиты естественного действия группы $G = GL(V)$ на $\mathcal{L}$ соответствуют классам изоморфизма алгебр Ли. Пусть $T_L(\mathcal{L})$ – касательное пространство к многообразию $\mathcal{L}$ в точке $L \in \mathcal{L}$, $T_L(G_L)$ – касательное пространство к G -орбите точки L . Согласно [5] пространство локальных деформаций $H_{\text{loc}}(L) = T_L(\mathcal{L})/T_L(G_L)$ является фактором группы когомологий $H^2(L, L)$.

Таким образом, условие $H^2(L, L) = 0$ является достаточным условием жесткости алгебры Ли L .

Обозначим через $Q_*(R)$ множество всех $\mu \in Q(R)$ таких, что $\mu(\mathcal{H}) = 0$. Очевидно, если матрица Картана алгебры L невырождена, то $Q_*(R) = pQ(R)$.

Пусть $C^\bullet(L, L)$ – стандартный комплекс алгебры Ли L . Группа $\text{Aut}(L)$ действует естественным образом на $C^\bullet(L, L)$. Разложим $C^\bullet(L, L)$ в прямую сумму весовых подкомплексов относительно максимального тора T группы $G(L)$:

$$C^\bullet(L, L) = \bigoplus_{\mu \in Q(R)} C_\mu^\bullet(L, L).$$

Пусть $\Lambda_i(R) \subset Q(R)$ – подмножество весов $H^i(L, L)$ относительно T ,

$$H^i(L, L) = \bigoplus_{\mu \in \Lambda_i(R)} H_\mu^i(L, L).$$

Выбирая базис из корневых векторов в L , мы естественным образом получаем базис в $C^i(L, L)$. Если $e_{\alpha_1}^* \wedge \dots \wedge e_{\alpha_i}^* \otimes e_{\alpha_{i+1}} \in C_\mu^i(L, L)$, то $\mu(H) = (-\alpha_1 - \dots - \alpha_i + \alpha_{i+1})(H)$, $H \in \mathcal{H}$. Используя тривиальность действия L на $H^\bullet(L, L)$, получаем, что $\Lambda_i(R) \subset Q_*(R)$.

В дальнейшем нам понадобятся сведения о дискриминанте формы Киллинга в базисе Шевалле. Согласно [9; гл. I, § 4, утверждение 4.8.] дискриминант Δ формы Киллинга в базисе Шевалле можно вычислить по формуле

$$\Delta = (-1)^n (2m^*)^l c^{n_1+n_2} f, \quad (1)$$

где n – число положительных корней системы R , n_1 (соответственно n_2) – число коротких (соответственно коротких простых) корней, l – размерность алгебры L , c – отношение квадрата длины длинного корня к квадрату длины короткого корня, $m^* = \sum m_i^* + 1$, $m_i^* = m_i$, если α_i – длинный корень, и $m_i^* = m_i/c$, если α_i – короткий корень, $\sum m_i \alpha_i$ – разложение максимального корня по простым корням, f – определитель матрицы Картана.

Следующее утверждение хорошо известно в случае нулевой характеристики, но, по-видимому, требует некоторых комментариев в случае характеристики $p > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если L – алгебра Ли с невырожденной формой Киллинга, то $H^2(L, L) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на применении элемента Казимира $k = \sum_{i=1}^n e_i e^i$, $k \in U(L)$, где $\{e_i\}$ – базис Шевалле в L , $\{e^i\}$ – базис, двойственный к $\{e_i\}$ относительно формы Киллинга. Надо показать, что k действует ненулевым образом на L . Для этого рассмотрим алгебру Ли $L_{\mathbb{Q}}$ над полем рациональных чисел с базисом Шевалле $\{e_i\}$ и алгебру $L_{\mathbb{Z}(p)}$ с тем же базисом над локализацией $\mathbb{Z}$ по простому идеалу (p) , $L_{\mathbb{Z}(p)} \subset L_{\mathbb{Q}}$.

Так как дискриминант формы Киллинга в базисе Шевалле $\{e_i\}$ является целым числом, взаимно простым с p , то элементы двойственного базиса e^i лежат в $L_{\mathbb{Z}(p)}$. Поэтому элемент Казимира $k = \sum_{i=1}^n e_i e^i \in U(L_{\mathbb{Z}(p)})$.

Очевидно, классическая алгебра Ли L над полем K характеристики p получается из $L_{\mathbb{Z}(p)}$ расширением скаляров $L = L_{\mathbb{Z}(p)} \otimes_{\mathbb{Z}(p)} K$. Здесь K рассматривается как алгебра над $\mathbb{Z}(p)$ относительно естественного гомоморфизма $\mathbb{Z}(p) \rightarrow \mathbb{F}_p \subset K$. Для всякого линейного над $\mathbb{Z}(p)$ оператора $\varphi: L_{\mathbb{Z}(p)} \rightarrow L_{\mathbb{Z}(p)}$ имеем линейный над K оператор $\varphi \otimes 1: L \rightarrow L$.

Как известно, оператор Казимира k действует тождественно на $L_{\mathbb{Q}}$ и, в частности, на $L_{\mathbb{Z}(p)}$. Следовательно, $k \otimes 1$ действует тождественно на L . Элементы $e_i \otimes 1 \in L = L_{\mathbb{Z}(p)} \otimes_{\mathbb{Z}(p)} K$ образуют базис Шевалле в L , $e^i \otimes 1$ – двойственный к нему базис относительно формы Киллинга. Поэтому $k \otimes 1 = (\sum_{i=1}^n e_i e^i) \otimes 1 = \sum_{i=1}^n (e_i \otimes 1)(e^i \otimes 1)$ – оператор Казимира в L . Дальнейшее доказательство предложения проходит так же, как в случае нулевой характеристики.

В дальнейшем мы можем исключить из рассмотрения алгебры с невырожденной формой Киллинга.

Пусть L – алгебра ранга l , $l \geq 2$, L отлична от G_2 , $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ – базис R , $L = \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{\gamma \in R} L_{\gamma}$ – корневое разложение. В L можно получить градуировку вида

$$L = L_{-2} + L_{-1} + L_0 + L_1 + L_2,$$

где $L_0 = M_0 + I$, M_0 – алгебра классического типа ранга $l - 1$, $\dim I \leq 1$. Действительно, пусть $\alpha \in B$ и α связан в схеме Дынкина только с одним из корней в B . Положим $L_0 = \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{\gamma \in R_0} L_{\gamma}$, $L_i = \bigoplus_{\gamma \in R_i} L_{\gamma}$, $i \in \{-2, -1, 1, 2\}$, R_i – подмножество корней из R , в разложение которых по базису корень α входит с коэффицентом i . Корень α можно выбрать таким образом, что $\dim L_{\pm 2} \leq 1$. Если L – алгебра типа $\overline{A}_l$ или $\overline{E}_6$, то $L_0 = M_0$. В остальных случаях $L_0 = M_0 + \langle h_0 \rangle$, $h_0 \in \mathcal{H}$.

Таблица 1 показывает, как это реализуется в конкретных алгебрах. В таблице также приведены данные о форме Киллинга алгебры L . Из формулы (1) следует, что при $p > 2$ форма Киллинга вырождена на L , только если $m^* \equiv 0(p)$ или $f \equiv 0(p)$.

ТАБЛИЦА 1

Тип R	Тип R_0	Глубина градуировки	m^*	f
A_l	A_{l-1}	1	$l + 1$	$l + 1$
B_l	B_{l-1}	1	$2l - 1$	2
C_l	A_{l-1}	1	$l + 1$	2
D_l	D_{l-1}	1	$2(l - 1)$	4
E_6	D_5	1	12	3
E_7	D_6	2	18	2
E_8	E_7	2	30	1
F_4	C_3	1	12	1

Отметим, что матрица Картана для M_0 вырождена только для алгебр L типа A_l , C_l , $l \equiv 0(p)$. На таких алгебрах форма Киллинга невырождена, так как $l + 1 \not\equiv 0(p)$ и, значит, $H^2(L, L) = 0$. В остальных случаях центр в L_0 выделяется

прямым слагаемым, $L_0 = M_0 \oplus \langle h_0 \rangle$, M_0 – классическая алгебра Ли с невырожденной матрицей Картана. Легко проверяется, что при $p > 2$ $L_{\pm 1}$ – неприводимые L_0 -модули.

Определим алгебры Ли A_l^z , $l + 1 \equiv 0(p)$, и E_6^z , $p = 3$. Пусть L – одна из алгебр $\overline{A}_l$, $\overline{E}_6$, $L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$ – градуировка в алгебре Ли L , описанная выше. Добавляя к L_0 элемент z такой, что $\text{ad } z|_{L_s} = s \text{ id}$, $s = 0, \pm 1$, мы получаем алгебры Ли типов A_l^z и E_6^z . Эти алгебры Ли мы также относим к классическим. Отметим, что алгебра Ли L типа A_l^z или E_6^z имеет градуировку $L = L_{-1} + L_0 + L_1$ и $\langle z \rangle$ – центр L_0 . Иногда мы будем обозначать z через h_0 .

Из формулы (1) следует, что форма Киллинга алгебры Ли типа G_2 вырождена только при $p = 2, 3$. Поэтому жесткость алгебры Ли типа G_2 при $p > 3$ следует из предложения 1.

Следующая лемма носит вспомогательный характер и будет использоваться в § 4.

ЛЕММА 1. Пусть L_0 – нулевая компонента в градуировке алгебры Ли L , $L_0 = M_0 \oplus \langle h_0 \rangle$. Если $H_0^2(M_0, M_0) = 0$, то $H_0^2(L_0, L_0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства тривиальности $H_0^2(L_0, L_0)$ применим спектральную последовательность Серра–Хохшильда $\{E_r^{p,q}\}$ для алгебры L_0 , идеала $I = \langle h_0 \rangle$ и присоединенного L_0 -модуля. Очевидно, все члены спектральной последовательности инвариантны относительно максимального тора T и, следовательно, раскладываются на весовые подпространства $E_r^{p,q}$. $\{E_r^{p,q}\}$ является спектральной последовательностью Серра–Хохшильда для подкомплекса $C_\mu^\bullet(L, L)$, сходящейся к $H_\mu^\bullet(L, L)$. В частности, для $H_0^2(L, L)$ получаем

$$\begin{aligned} E_{2,0}^{2,0} &= H_0^2(L_0/I, H^0(I, L_0)) = H_0^2(M_0, H^0(I, L_0)), \\ E_{2,0}^{1,1} &= H_0^1(L_0/I, H^1(I, L_0)) = H_0^1(M_0, H^1(I, L_0)), \\ E_{2,0}^{0,2} &= H_0^0(L_0/I, H^2(I, L_0)) = H_0^0(M_0, H^2(I, L_0)). \end{aligned}$$

Очевидно, что $H^0(I, L_0) = L_0$, $H^1(I, L_0) = L_0$, $H^2(I, L_0) = 0$, $H^1(M_0) = 0$ и, значит,

$$\begin{aligned} E_{2,0}^{0,2} &= 0, \\ E_{2,0}^{1,1} &= H_0^1(M_0, L_0) = H_0^1(M_0, M_0) \oplus H_0^1(M_0) = H_0^1(M_0, M_0), \\ E_{2,0}^{2,0} &= H_0^2(M_0, L_0) = H_0^2(M_0, M_0) \oplus H_0^2(M_0) = H_0^2(M_0); \end{aligned}$$

$H_0^2(M_0, M_0) = 0$ по условию.

Пусть $\varphi \in H_0^1(M_0, M_0) = \text{Der}_0 M_0 / \text{ad}_0 M_0$, где Der_0 (соответственно ad_0) – пространство дифференцирований (соответственно внутренних дифференцирований) нулевого веса. Тогда $\varphi(e_\alpha) = \hat{\varphi}(e_\alpha)e_\alpha$, $\hat{\varphi}(e_\alpha) \in K$, для любого $e_\alpha \in M_0$. Обозначим через $\mathcal{H}_0$ подалгебру Картана алгебры Ли M_0 . Из равенства

$$0 = d\varphi(e_\alpha, e_{-\alpha}) = [e_\alpha, \varphi(e_{-\alpha})] - [e_{-\alpha}, \varphi(e_\alpha)] - \varphi(h_\alpha)$$

следует, что $\varphi(h_\alpha) = \widehat{\varphi}(h_\alpha)h_\alpha$, $\widehat{\varphi}(h_\alpha) \in K$. Тогда

$$0 = d\varphi(h_\alpha, e_\alpha) = [h_\alpha, \varphi(e_\alpha)] - [e_\alpha, \varphi(h_\alpha)] - \varphi([h_\alpha, e_\alpha]) = -\widehat{\varphi}(h_\alpha)[e_\alpha, h_\alpha],$$

значит, $\varphi(h_\alpha) = \widehat{\varphi}(h_\alpha)h_\alpha = 0$, когда $h_\alpha \in \mathcal{H}_0$. Следовательно, $\varphi(h) = 0$, если $h \in \mathcal{H}_0$. Так как матрица Картана для M_0 невырождена, то по коэффициентам $\widehat{\varphi}(e_\alpha)$ мы можем найти $h \in \mathcal{H}_0$ такой, что $\varphi(e_\alpha) = \widehat{\varphi}(e_\alpha)e_\alpha = \text{ad } h(e_\alpha)$ и, следовательно, $\varphi = \text{ad } h$. Таким образом, $E_{2,0}^{1,1} = H_0^1(M_0, M_0) = 0$.

Докажем, что $E_{2,0}^{2,0} = H_0^2(M_0) = 0$. Для $\chi \in Z_0^2(M_0)$

$$\begin{aligned} 0 = d\chi(e_\alpha, e_{-\alpha}, h_\beta) &= -\chi([e_\alpha, e_{-\alpha}], h_\beta) + \chi([e_\alpha, h_\beta], e_{-\alpha}) - \chi([e_{-\alpha}, h_\beta], e_\alpha) \\ &= -\chi(h_\alpha, h_\beta) \end{aligned}$$

для любых $\alpha, \beta \in R_0$. Таким образом, $\chi(h_1, h_2) = 0$, если $h_1, h_2 \in \mathcal{H}_0$.

Присоединенное представление M_0 эквивалентно сопряженному представлению, следовательно, на M_0 определено невырожденное инвариантное спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Следуя [10], запишем $\chi \in Z_0^2(M_0)$ в виде $\chi(x, y) = \langle Dx, y \rangle$, где D — линейный оператор на M_0 , $\langle Dx, y \rangle = -\langle Dy, x \rangle$ (кососимметричность χ). Из инвариантности формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ следует, что $D \in \text{Der}_0(M_0)$ и $H_0^2(M_0) = \text{Der}_0 M_0 / \text{ad}_0 M_0 = H_0^1(M_0, M_0)$. Как показано выше, $H_0^1(M_0, M_0) = 0$.

Итак, $\{E_{r,0}^{p,q}\} = 0$ при $p + q = 2$. Следовательно, $H_0^2(L_0, L_0) = 0$.

§ 3. Когомологии ненулевого веса

В этом параграфе мы докажем, что $H^2(L, L) = H_0^2(L, L)$ для всех алгебр Ли L , отличных от C_2 при $p = 3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 1) Если R — система корней одного из типов A_l , $l \geq 3$, D_l , E_6 , E_7 , E_8 , то $\Lambda_2(R) = \{0\}$.

2) Если $\Lambda_2(R) \neq \{0\}$, то справедливо одно из следующих утверждений:

- (a) R — система корней ранга 2;
- (b) R — система корней одного из типов B_l , C_l , $l \geq 3$, F_4 . Кроме того, пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, $l \geq 3$, — базис системы R , $\{\alpha_{l-2}, \alpha_{l-1}, \alpha_l\}$ — базис системы корней R_3 типа B_3 или C_3 . Для всех $\alpha, \beta, \gamma \in R$, для которых $\alpha + \beta + \gamma \in \Lambda_2(R)$, существует $w \in W(R)$ такой, что $w\alpha, w\beta, w\gamma \in R_3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu \in \Lambda_2(R)$, $\mu \neq 0$, тогда $\mu = \alpha + \beta + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq \beta$. Рассмотрим векторное подпространство $V_1 = \langle \alpha, \beta, \gamma \rangle_{\mathbb{R}}$ в $V_{\mathbb{R}}$. Очевидно, что $R_1 = V_1 \cap R$ является системой корней в V_1 ранга не более 3. Согласно [11; гл. VI, § 1, п. 7, предложение 24] существует базис системы R , содержащий базис системы R_1 . Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ — такой базис. Исследуя строение системы R_1 , мы сможем получить сведения о системе R .

Предположим, что R_1 — приводимая система с базисом $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ и δ_1 не связан с δ_2, δ_3 , т.е. $\delta_2(h_{\delta_1}) = \delta_3(h_{\delta_1}) = 0$. Один из корней α, β, γ совпадает с δ_1 , а два другие — линейные комбинации δ_2, δ_3 . Следовательно, $\mu = \alpha + \beta + \gamma = \delta_1 + x\delta_2 + y\delta_3$, $x, y \in \mathbb{Z}$, и $\mu(h_{\delta_1}) = \delta_1(h_{\delta_1}) \neq 0(p)$, что противоречит условию $\mu \in \Lambda_2(R) \subset Q_*(R)$.

Аналогично, R_1 не может являться приводимой системой ранга 2 или системой ранга 1. Значит, R_1 – неприводимая система ранга 2 или 3.

Предположим, R_1 – система типа A_3 . Матрица Картана для системы типа A_3 невырождена, следовательно, $\Lambda_2(R_1) \subset pQ(R_1)$. Однако из вида корней в A_3 (суммы простых корней) следует, что $\Lambda_2(R_1) \cap pQ(R_1) = \{0\}$. Следовательно, $\mu = 0$. Полученное противоречие показывает, что R_1 является системой корней одного из типов A_2, G_2, C_2, B_3, C_3 .

Рассмотрим случай, когда R_1 – система типа A_2 . Пусть R_1 имеет базис $\{\delta_1, \delta_2\} \subset \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$. Если $R \neq R_1$, то существует i такой, что α_i связан только с одним из простых корней δ_1, δ_2 , предположим с δ_1 . Для веса $\mu = \alpha + \beta + \gamma = x\delta_1 + y\delta_2$, $x, y \in \mathbb{Z}$, имеем $\mu(h_{\alpha_i}) = x\delta_1(h_{\alpha_i})$. Так как $\mu \in \Lambda_2(R)$, то $x \equiv 0(p)$, следовательно, $y \equiv 0(p)$ и $\mu \in pQ(R_1)$. Но в системе типа A_2 невозможно набрать такой вес из трех различных корней. Поэтому если R_1 имеет тип A_2 , то R также имеет тип A_2 . Тем самым доказано 1).

Если R_1 – система типа G_2 , то R также имеет тип G_2 .

Пусть R_1 – система корней одного из типов C_2, B_3, C_3 . Если $R = R_1 = C_2$, то выполняется 2) (а). В остальных случаях система R должна иметь тип B_l, C_l ($l \geq 3$) или F_4 . Группа $W(R)$ действует транзитивно на множестве базисов R . Поэтому найдется $w \in W$ такой, что $w(R_1) \subset R_3$. Следовательно, если R_1 имеет тип C_2 и $R \neq R_1$ или R_1 имеет тип B_3 или C_3 , то выполняется 2) (б).

СЛЕДСТВИЕ. Если $p > 3$, то $\Lambda_2(R) = \{0\}$ для любой системы корней R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения следует, что $\Lambda_2(R)$ может быть отлично от $\{0\}$ только для систем типа A_2, G_2, B_l, C_l, F_4 . При $p > 3$ матрица Картана для этих систем невырождена и $\mu \in Q(R)$ принадлежит $\Lambda_2(R)$, только если μ является линейной комбинацией простых корней с коэффициентами, сравнимыми с 0 по модулю p . Простая проверка показывает, что при $p > 3$ в системах корней $A_2, G_2, C_2, B_3, C_3, F_4$ нельзя выбрать три корня, хотя бы два из которых различны, которые в сумме дают ненулевую линейную комбинацию простых корней с коэффициентами, кратными p . Таким образом, $\Lambda_2(R) = \{0\}$ при $p > 3$ для всех систем R .

ЛЕММА 2. Пусть $p = 3$, R – система корней одного из типов B_l, C_l, F_4 , $l \geq 3$. Если $\Lambda_2(R) \neq \{0\}$, то $\Lambda_2(R) = \{3\delta, \delta - \text{короткий корень системы } R\} \cup \{0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu \in \Lambda_2(R)$, $\mu \neq 0$, тогда $\mu = \alpha + \beta + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq \beta$. Согласно предложению 2 существует $w \in W$ такое, что $w\alpha, w\beta, w\gamma \in R_3$, где R_3 – система типа B_3 или C_3 . Заменяя μ на $w\mu$, будем считать, что $\alpha, \beta, \gamma \in R_3$.

Так как матрица Картана для L невырождена, то $\Lambda_2(R) \subset pQ(R)$ и μ можно представить в виде 3δ для некоторого $\delta \in Q(R_3)$. Если $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ – базис системы R_3 , то $\mu = x\delta_1 + y\delta_2 + z\delta_3$, где $x, y, z \equiv 0(3)$.

Так как $\mu = 3\delta \in \Lambda_2(R_3)$, то условие $\delta \notin R_3$ влечет, что μ не пропорционален никакому корню из R_3 . Следовательно, можно считать, что коэффициент x положительный, а один из y, z (например, y) отрицательный (см. [12; гл. VIII, § 4, п. 3, лемма 10]). Абсолютная величина коэффициентов в разложении корней системы R_3 по базису не превосходит 2. Для того чтобы $x > 0$ делился на 3, хотя бы два

из корней α, β, γ должны быть положительными, а для того чтобы $y < 0$ делился на 3, хотя бы два из корней α, β, γ должны быть отрицательными. Получили противоречие. Следовательно, δ является корнем системы R_3 .

Предположим, что δ – длинный корень. Так как максимальный корень γ_0 системы R является длинным корнем и W действует транзитивно на множестве корней одинаковой длины, то $3\gamma_0 \in \Lambda_2(R)$. Очевидно, $3\gamma_0$ только одним способом представляется в виде суммы трех корней: $3\gamma_0 = \gamma_0 + \gamma_0 + \gamma_0$. Поэтому $3\gamma_0$ не является весом $C^2(L, L)$ и, следовательно, $3\gamma_0 \notin \Lambda_2(R)$. Полученное противоречие показывает, что δ – короткий корень.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $H^2(L, L) = H_0^2(L, L)$ для классической алгебры Ли L над полем характеристики $p > 2$, отличной от алгебры Ли типа C_2 при $p = 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2 и следствию из него остается доказать утверждение только при $p = 3$ для алгебр типов $B_l, C_l, l \geq 3, F_4, A_2, \bar{A}_2, A_2^z$.

Пусть L – алгебра Ли одного из типов $B_l, C_l, l \geq 3, F_4$. Из леммы 2 следует, что если $\Lambda_2(R) \neq \{0\}$, то ненулевые веса из $\Lambda_2(R)$ имеют вид 3δ , где δ – короткий корень из R , и, следовательно, группа W действует транзитивно на множестве ненулевых элементов $\Lambda_2(R)$. Таким образом, группы $H_{\mu_1}^2(L, L)$ и $H_{\mu_2}^2(L, L)$ изоморфны для любых ненулевых μ_1, μ_2 .

Покажем, что $H_\mu^2(L, L) = Z_\mu^2(L, L)$ для $\mu = 3\delta \in \Lambda_2(R)$. Каждый вес $C^1(L, L)$ является суммой двух корней. Пусть $\alpha, \beta \in R$ и $\alpha + \beta = 3\delta$. Так как $p = 3$, то $\alpha|_{\mathcal{H}} = -\beta|_{\mathcal{H}}$. Согласно [13; § 4, предложение 4.2] корневые пространства относительно $\mathcal{H}$ в L одномерны, т.е. все корни как функции на $\mathcal{H}$ различны. Следовательно, $\alpha = -\beta$ и $\alpha + \beta = 0$ в R . Таким образом, ни для каких $\alpha, \beta \in R$ не выполняется равенство $\alpha + \beta = 3\delta$. Поэтому $C_{3\delta}^1(L, L) = 0$ и $H_\mu^2(L, L) = Z_\mu^2(L, L)$ для $\mu \in \Lambda_2(R), \mu \neq 0$.

Пусть $\psi \in Z_{3\delta}^2(L, L), \psi \neq 0$. Существуют $\alpha, \beta, \gamma \in R$ такие, что $\psi(e_\alpha, e_\beta) = xe_\gamma, x \neq 0$. Из предложения 2 следует, что существует $w \in W$ такое, что $w\alpha, w\beta, w\gamma \in R_3$. Тогда $\varphi = w\psi|_{L_3} \neq 0$, где L_3 – подалгебра в L с системой корней R_3 . Так как φ имеет вес $3w\delta$, то φ переводит $L_3 \times L_3$ в L_3 и, следовательно, $\varphi \in Z_{3w\delta}^2(L_3, L_3)$. Форма Киллинга для алгебр типа B_3 или C_3 невырождена над полем характеристики 3, что следует из формулы (1). Это дает тривиальность $H^2(L_3, L_3)$ для L_3 типа B_3 и C_3 , в частности, $H_{3\delta}^2(L_3, L_3) = Z_{3\delta}^2(L_3, L_3) = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\psi = 0$ и $H_{3\delta}^2(L, L) = 0$ для любого короткого корня δ .

Пусть L – алгебра Ли типа $A_2, \bar{A}_2$ или $A_2^z, p = 3, \{\alpha, \beta\}$ – базис системы корней R . Матрица Картана для R при $p = 3$ вырождена. Нетрудно показать, что если $\Lambda_2(R) \neq \{0\}$, то $\Lambda_2(R) = \{0, \pm(\alpha + 2\beta), \pm(\alpha - \beta), \pm(2\alpha + \beta)\}$. Так как $\alpha - \beta = w_\beta(\alpha + 2\beta), -2\alpha - \beta = w_\alpha(\alpha - \beta)$, то все ненулевые элементы в $\Lambda_2(R)$ сопряжены относительно группы Вейля и, следовательно, достаточно доказать, что $H_{\alpha+2\beta}^2(L, L) = 0$. Если L имеет тип A_2^z , то базисные векторы $C_{\alpha+2\beta}^2(L, L)$ являются собственными для z с ненулевыми собственными значениями. Так как L действует тривиально на $H^2(L, L)$, то $H_{\alpha+2\beta}^2(L, L) = 0$. Если L имеет тип $A_2, \bar{A}_2$, то тривиальность $H_{\alpha+2\beta}^2(L, L)$ проверяется непосредственным вычислением.

Пространство $C_{\alpha+2\beta}^1(L, L)$ двумерно и порождается векторами $b_1 = e_{-\alpha-\beta}^* \otimes e_\beta$ и $b_2 = e_{-\beta}^* \otimes e_{\alpha+\beta}$.

Имеем

$$\begin{aligned} db_1(e_{-\beta}, e_{-\alpha-\beta}) &= [e_{-\beta}, b_1(e_{-\alpha-\beta})] = [e_{-\beta}, e_\beta] = -h_\beta, \\ db_2(e_{-\beta}, e_{-\alpha-\beta}) &= -[e_{-\alpha-\beta}, b_2(e_{-\beta})] = -[e_{-\alpha-\beta}, e_{\alpha+\beta}] = h_\alpha + h_\beta. \end{aligned}$$

Таким образом, если L имеет тип A_2 , то db_1, db_2 линейно независимы и

$$\dim B_{\alpha+2\beta}^2(L, L) = 2.$$

Если L имеет тип $\overline{A}_2$, то

$$1 \leq \dim B_{\alpha+2\beta}^2(L, L) \leq 2.$$

Пусть L имеет тип A_2 . Пространство $C_{\alpha+2\beta}^2(L, L)$ имеет размерность 8 и порождается векторами

$$\begin{aligned} c_1 &= h_\alpha^* \wedge e_{-\alpha-\beta}^* \otimes e_\beta, & c_2 &= h_\alpha^* \wedge e_{-\beta}^* \otimes e_{\alpha+\beta}, \\ c_3 &= h_\beta^* \wedge e_{-\alpha-\beta}^* \otimes e_\beta, & c_4 &= h_\beta^* \wedge e_{-\beta}^* \otimes e_{\alpha+\beta}, \\ \psi_1 &= e_{-\alpha-\beta}^* \wedge e_\alpha^* \otimes e_{\alpha+\beta}, & \psi_2 &= e_{-\beta}^* \wedge e_{-\alpha}^* \otimes e_\beta, \\ \psi_3 &= e_{-\alpha-\beta}^* \wedge e_{-\beta}^* \otimes h_\alpha, & \psi_4 &= e_{-\alpha-\beta}^* \wedge e_{-\beta}^* \otimes h_\beta. \end{aligned}$$

Пусть $\psi \in Z_{\alpha+2\beta}^2(L, L)$,

$$\psi = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + a_4 c_4 + x_1 \psi_1 + x_2 \psi_2 + x_3 \psi_3 + x_4 \psi_4.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= d\psi(h, e_{-\alpha-\beta}, e_{-\beta}) = -[e_{-\alpha-\beta}, \psi(h, e_{-\beta})] + [e_{-\beta}, \psi(h, e_{-\alpha-\beta})] \\ &\quad - \psi([h, e_{-\alpha-\beta}], e_{-\beta}) + \psi([h, e_{-\beta}], e_{-\alpha-\beta}) = -[e_{-\alpha-\beta}, \psi(h, e_{-\beta})] \\ &\quad + [e_{-\beta}, \psi(h, e_{-\alpha-\beta})] + (\alpha + 2\beta)(h)\psi(e_{-\alpha-\beta}, e_{-\beta}) \\ &= -[e_{-\alpha-\beta}, \psi(h, e_{-\beta})] + [e_{-\beta}, \psi(h, e_{-\alpha-\beta})]. \end{aligned} \tag{2}$$

При $h = h_\alpha$ получим

$$0 = a_2(h_\alpha + h_\beta) - a_1 h_\beta = a_2 h_\alpha + (a_2 - a_1)h_\beta.$$

Если $h = h_\beta$, то

$$0 = a_4 h_\alpha + (a_4 - a_3)h_\beta.$$

Таким образом, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

Покажем, что размерность $Z_{\alpha+2\beta}^2(L, L)$ не превышает 2.

$$\begin{aligned} 0 &= d\psi(e_{-\alpha-\beta}, e_\alpha, e_{-\beta}) = [e_{-\beta}, \psi(e_{-\alpha-\beta}, e_\alpha)] - [e_\alpha, \psi(e_{-\alpha-\beta}, e_{-\beta})] \\ &= [e_{-\beta}, x_1 e_{\alpha+\beta}] - [e_\alpha, x_3 h_\alpha + x_4 h_\beta] = (Nx_1 + 2x_3 - x_4)e_\alpha, \end{aligned} \tag{3}$$

где $[e_{-\beta}, e_{\alpha+\beta}] = Ne_{\alpha}$, $N \in K^*$. Аналогично,

$$0 = d\psi(e_{-\beta}, e_{-\alpha}, e_{-\alpha-\beta}) = (Mx_2 + 2x_3 - x_4)e_{-\alpha}, \quad (4)$$

где $[e_{-\alpha-\beta}, e_{\beta}] = Me_{-\alpha}$, $M \in K^*$.

Мы получили два линейно независимых соотношения: $Nx_1 + 2x_3 - x_4 = 0$, $Mx_2 + 2x_3 - x_4 = 0$. Следовательно,

$$\dim Z_{\alpha+2\beta}^2(L, L) \leq 2.$$

Так как $\dim B_{\alpha+2\beta}^2(L, L) = 2$, то $H_{\alpha+2\beta}^2(L, L) = 0$.

Пусть L имеет тип $\overline{A}_2$. В этом случае $h_{\alpha} = h_{\beta}$, $h_{\alpha+\beta} = -h_{\alpha}$. Пространство $C_{\alpha+2\beta}^2(L, L)$ имеет размерность 5 и порождается векторами $c_1, c_2, \psi_1, \psi_2, \psi_3$. Пусть $\psi \in Z_{\alpha+2\beta}^2(L, L)$, $\psi = a_1c_1 + a_2c_2 + x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + x_3\psi_3$. Из (2) при $h = h_{\alpha_1}$ получим

$$0 = a_2(-h_{\alpha}) - a_1h_{\alpha} = (-a_2 - a_1)h_{\alpha}.$$

Из (3), (4) при $x_4 = 0$ получим

$$\begin{aligned} (Nx_1 + 2x_3)e_{\alpha} &= 0, \\ (Mx_2 + 2x_3)e_{-\alpha} &= 0, \end{aligned}$$

$N, M \in K^*$. Имеем

$$\begin{aligned} 0 &= d\psi(e_{\alpha}, e_{-\alpha}, e_{-\alpha-\beta}) \\ &= -[e_{-\alpha}, \psi(e_{\alpha}, e_{-\alpha-\beta})] - \psi([e_{\alpha}, e_{-\alpha}], e_{-\alpha-\beta}) + \psi([e_{\alpha}, e_{-\alpha-\beta}], e_{-\alpha}) \\ &= [e_{-\alpha}, x_1e_{\alpha+\beta}] - \psi(h_{\alpha}, e_{-\alpha-\beta}) + \psi(N_2e_{-\beta}, e_{-\alpha}) \\ &= (N_1x_1 - a_1 + N_2x_2)e_{\beta}, \end{aligned}$$

где $[e_{-\alpha}, e_{\alpha+\beta}] = N_1e_{\beta}$, $[e_{\alpha}, e_{-\alpha-\beta}] = N_2e_{-\beta}$, $N_1, N_2 \in K^*$.

Получили 4 линейно независимых соотношения:

$$-a_1 - a_2 = 0, \quad Nx_1 + 2x_3 = 0, \quad Mx_2 + 2x_3 = 0, \quad N_1x_1 - a_1 + N_2x_2 = 0.$$

Следовательно, $\dim Z_{\alpha+2\beta}^2(L, L) \leq 1$. Так как $1 \leq \dim B_{\alpha+2\beta}^2(L, L) \leq 2$, то $H_{\alpha+2\beta}^2(L, L) = 0$.

§ 4. Вычисление $H_0^2(L, L)$

В этом параграфе для классической алгебры Ли L при $p > 2$ индукцией по рангу доказывается тривиальность группы $H_0^2(L, L)$ (при $p = 3$ L отлична от C_2 и G_2). Напомним, что в силу предложения 1 мы можем рассматривать только алгебры Ли с вырожденной формой Киллинга.

Предложение 3 позволяет нам считать, что $H^2(L, L) = H_0^2(L, L)$. Если характеристика поля равна 3, то индукцию будем начинать с алгебр Ли L типов A_1, B_3, C_3 ; если $p > 3$, то индукция начинается с A_1, B_2 . Из формулы (1) следует, что

форма Киллинга для этих алгебр невырождена, и из предложения 1 следует, что $H_0^2(L, L) = 0$.

Пусть L – алгебра Ли ранга l . Предположим, что $H_0^2(L, L) = 0$ для алгебр L ранга меньше l . Выберем коцикл $\psi \in Z_0^2(L, L)$. Обозначим $L \otimes K[\varepsilon]$, где $K[\varepsilon]$ – алгебра двойных чисел, через $L(\varepsilon)$ и отождествим пространство L с $L \otimes 1$. На $L(\varepsilon)$ можно определить структуру алгебры Ли $(L(\varepsilon), [\cdot, \cdot])$, если продолжить лиевское умножение с L . При помощи коцикла ψ определим на $L(\varepsilon)$ новую структуру алгебры Ли, полагая $x \circ y = [x, y] + \varepsilon \psi(x, y)$, $x, y \in L$. Очевидно, коцикл ψ когомологичен нулю тогда и только тогда, когда алгебры Ли $(L(\varepsilon), [\cdot, \cdot])$ и $(L(\varepsilon), \circ)$ изоморфны. В дальнейшем через $L(\varepsilon)$ будем обозначать алгебру Ли $(L(\varepsilon), \circ)$.

Так как коцикл ψ имеет нулевой вес, то для корневых векторов e_α, e_β

$$e_\alpha \circ e_\beta \equiv [e_\alpha, e_\beta] \pmod{\varepsilon L_{\alpha+\beta}}, \quad h \circ e_\alpha \equiv [h, e_\alpha] \pmod{\varepsilon L_\alpha}. \quad (5)$$

В частности, если $\alpha + \beta \notin R$, то $e_\alpha \circ e_\beta = 0$.

Для $\gamma \in R$ положим $L_\gamma(\varepsilon) = L_\gamma \otimes K[\varepsilon]$; $L_\gamma(\varepsilon)$ имеет базис $\{e_\gamma, \varepsilon e_\gamma\}$ над K . Из (5) следует, что в $L(\varepsilon)$ можно построить градуировку по системе корней, как это сделано для L в § 2:

$$L(\varepsilon) = L_{-2}(\varepsilon) + L_{-1}(\varepsilon) + L_0(\varepsilon) + L_1(\varepsilon) + L_2(\varepsilon),$$

где $L_0(\varepsilon) = (\mathcal{H} \otimes K[\varepsilon]) \oplus \bigoplus_{\gamma \in R_0} L_\gamma(\varepsilon)$, $L_i(\varepsilon) = \bigoplus_{\gamma \in R_i} L_\gamma(\varepsilon)$, $i \in \{-2, -1, 1, 2\}$, R_i – подмножества системы R (см. табл. 1).

Согласно лемме 1 по предположению индукции можно считать, что $\psi|_{L_0} = 0$ и алгебра Ли $L_0 \otimes K[\varepsilon]$ с умножением $[\cdot, \cdot]$ изоморфна $L_0(\varepsilon)$ с умножением $\circ$. Подалгебру $L_0 \otimes 1$ отождествим с L_0 . Напомним, что $L_0 = M_0 \oplus \langle h_0 \rangle$, где M_0 – алгебра Ли классического типа ранга $l - 1$, $\langle h_0 \rangle$ – центр L_0 (во всех случаях, когда форма Киллинга на L вырождена, центр в L_0 отщепляется, см. табл. 1), $\dim L_{\pm 2} \leq 1$.

Пусть $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \langle h_0 \rangle$, где $\mathcal{H}_0$ – подалгебра Картана в M_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. 1) $L_{-1}(\varepsilon)$ является ограниченным M_0 -модулем.

2) $\psi(h, L_{-1}) = 0$ для любого $h \in \mathcal{H}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Σ множество всех корней $\alpha \in R_0$, для которых существует $\gamma \in R_{-1}$ такой, что α -серия, содержащая γ , имеет длину 1. Пусть $L(\alpha) = \langle e_\alpha, e_{-\alpha}, h_\alpha \rangle$. Очевидно, если $\alpha \in \Sigma$, то в L_{-1} содержится двумерный $L(\alpha)$ -подмодуль.

Для доказательства предложения 4 понадобится следующая лемма.

ЛЕММА 3. $\mathcal{H}_0 = \langle h_\alpha, \alpha \in \Sigma \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ – базис R . Длина α -серии, содержащей β , равна 1 для неортогональных корней α, β одинаковой длины. Поэтому $\alpha \in \Sigma$, если существует корень $\beta \in R_{-1}$ такой, что $(\alpha, \beta) \neq 0$ и $\|\alpha\| = \|\beta\|$. Если такой корень β для α существует, обозначим его через $\hat{\alpha}$.

Пусть γ_1, γ_2 – корни одинаковой длины из R_0 . Для некоторого $w_0 \in W(R_0)$ выполняется $w_0 \gamma_1 = \gamma_2$. Для любого корня $\gamma \in R_{-1}$ $w_0 \gamma$ снова принадлежит R_{-1} . Следовательно, если для γ_1 существует $\hat{\gamma}_1$, то и для γ_2 существует $\hat{\gamma}_2$, так как w_0

сохраняет скалярное произведение. Таким образом, Σ инвариантно относительно $W(R_0)$.

Все корни в системах A_l, D_l, E_6, E_7, E_8 имеют одинаковую длину, и, следовательно, для всех корней $\alpha \in R_0$ существует $\hat{\alpha}$ и $\Sigma = R_0$.

Если L – алгебра типа $B_l, l \geq 3$, то R_0 – система типа B_{l-1} с базисом $\{\alpha_2, \dots, \alpha_l\}$, где $\alpha_2, \dots, \alpha_{l-1}$ – длинные корни, α_l – короткий корень. Для α_2 существует $\hat{\alpha}_2 = -\alpha_1$, следовательно, для любого длинного корня α существует $\hat{\alpha}$. Таким образом, Σ содержит все длинные корни. Покажем, что элементы h_γ, γ – длинный корень, порождают $\mathcal{H}_0$. Любой элемент $h_\gamma \in \mathcal{H}_0$ раскладывается по h_{α_i}, α_i – простой корень. Покажем, что h_{α_i} раскладывается в линейную комбинацию h_γ, γ – длинный корень.

Число Картана $\langle \alpha_l, \alpha_{l-1} \rangle = -1$, следовательно, $h_{w_{\alpha_l} \alpha_{l-1}} = w_{\alpha_l} h_{\alpha_{l-1}} = h_{\alpha_{l-1}} - \langle \alpha_l, \alpha_{l-1} \rangle h_{\alpha_l} = h_{\alpha_{l-1}} + h_{\alpha_l}$ и $h_{\alpha_l} = h_{w_{\alpha_l} \alpha_{l-1}} - h_{\alpha_{l-1}}$. Так как α_{l-1} – длинный корень, то $w_{\alpha_l} \alpha_{l-1}$ – длинный корень.

Пусть L – алгебра типа C_l , и пусть R имеет базис $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, R_0 имеет базис $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}\}$, R_0 – система типа A_l и все корни в R_0 короткие. Для α_1 существует $\hat{\alpha}_1 = -\alpha_2 - \dots - \alpha_l$, следовательно, для всех $\alpha_i \in R_0$ существует $\hat{\alpha}_i$ и $\Sigma = R_0$.

Пусть R – система корней типа F_4 с базисом $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, где α_1, α_2 – длинные корни, α_3, α_4 – короткие корни, R_0 имеет базис $\{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$. Легко найти $\hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_4$: $\hat{\alpha}_2 = -\alpha_1$ и $\hat{\alpha}_4 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3$; $\hat{\alpha}_3$ существует, так как $\|\alpha_3\| = \|\alpha_4\|$. Следовательно, $\Sigma = R_0$.

Продолжим доказательство предложения 4. Пусть $V = L_{-1}(\varepsilon)$, обозначим через V_γ векторное пространство над K , натянутое на $e_\gamma, \varepsilon e_\gamma$. Положим $\text{ad}_\varepsilon m(v) = m \circ v, m \in M_0, v \in V$. Очевидно, что $\text{ad}_\varepsilon^p e_\alpha = \text{ad}_\varepsilon^p e_{-\alpha} = 0$ для любого $\alpha \in R_0$. Для $v \in V_\lambda, h_\alpha \in \mathcal{H}_0$ можно записать $\text{ad}_\varepsilon h_\alpha(v) = (\lambda(h_\alpha) + \varepsilon \hat{\psi}(h_\alpha, v))v$, где $\hat{\psi}(h, v)$ из $K, \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{F}_p$. Здесь

$$\varepsilon \hat{\psi}(h_\alpha, v)v = x\varepsilon\psi(h_\alpha, e_\lambda), \quad (6)$$

где $v = xe_\lambda + y\varepsilon e_\lambda, x, y \in K$. Тогда $\text{ad}_\varepsilon^p h_\alpha(v) = (\lambda(h_\alpha) + \varepsilon \hat{\psi}(h_\alpha, v))^p v = \lambda^p(h_\alpha)v = \lambda(h_\alpha)v$. Если положить $f_h(v) = (\text{ad}_\varepsilon^p h - \text{ad}_\varepsilon h)(v)$, то $f_{h_\alpha}(v) = -\varepsilon \hat{\psi}(h_\alpha, v)v$. Отображение f_{h_α} переводит V в εV и на εV действует нулевым образом, значит, f_{h_α} можно рассматривать как отображение из $V/\varepsilon V$ в εV . Поскольку $V/\varepsilon V \cong \varepsilon V$ (изоморфизм неприводимых M_0 -модулей) и f_{h_α} перестановочен с действием M_0 , то по лемме Шура f_{h_α} действует умножением на скаляр и $\hat{\psi}(h_\alpha, v)$ не зависит от v .

Покажем, что если $\alpha \in \Sigma$, то $f_{h_\alpha} = 0$. Пусть $U = \langle e_\gamma, e_{\gamma+\alpha} \rangle$ – соответствующий двумерный $L(\alpha)$ -подмодуль в L_{-1} в алгебре L ; $U(\varepsilon) = U \otimes K[\varepsilon]$ является $L(\alpha)$ -подмодулем в V в алгебре $(L(\varepsilon), \circ)$ и имеет композиционный ряд $U(\varepsilon) \supset \varepsilon U(\varepsilon) \supset 0$, факторы которого изоморфны U . Кроме того, $U(\varepsilon)$ как модуль над $L(\alpha)$ расщепляется. Действительно,

$$\text{Ext}^1(U, U) = H^1(L(\alpha), U^* \otimes U) = H^1(\mathfrak{sl}(2), \mathfrak{gl}(2)) = 0.$$

Таким образом, $U(\varepsilon) \cong U \oplus \varepsilon U$ и $\hat{\psi}(h_\alpha, -) = 0$ на $U(\varepsilon)$, значит, $f_{h_\alpha} = \text{ad}_\varepsilon^p h_\alpha - \text{ad}_\varepsilon h_\alpha = 0$. Из леммы 3 следует, что $f_h = 0$ для любого $h \in \mathcal{H}_0$. Тем самым доказано 1).

Докажем 2). Так как $\widehat{\psi}(h_\alpha, -) = 0$ для любого $\alpha \in \Sigma$, то из (6) получаем, что $\psi(h_\alpha, L_{-1}) = 0$ для $\alpha \in \Sigma$. Из леммы 3 следует, что $\psi(h, L_{-1}) = 0$ для любого $h \in \mathcal{H}_0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. M_0 -модуль $L_{-1}(\varepsilon)$ раскладывается в прямую сумму подмодулей, изоморфных L_{-1} , $L_{-1}(\varepsilon) = L'_{-1} + \varepsilon L'_{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V = L_{-1}(\varepsilon)$. Обозначим через $u(M_0)$ u -алгебру алгебры Ли M_0 , $u(M_0) = u(M_0^-)u(\mathcal{H}_0)u(M_0^+)$, где $M_0 = M_0^- + \mathcal{H}_0 + M_0^+$ — треугольное разложение алгебры M_0 . Пусть $\mu \in R_{-1}$ — такой корень, что $\mu + \alpha \notin R_{-1}$ для любого $\alpha \in R_0^+$. Очевидно, μ — старший вес L_0 -модуля L_{-1} . Пусть $v_\mu \in L_\mu(\varepsilon)$, $v_\mu \notin \varepsilon V$. Тогда $u(M_0^+)v_\mu = 0$, $u(\mathcal{H}_0)v_\mu = \langle v_\mu \rangle$ (предложение 3). Отсюда получаем, что $u(M_0)v_\mu = u(M_0^-)v_\mu$. Покажем, что $V = u(M_0)v_\mu \oplus \varepsilon u(M_0)v_\mu$ — прямая сумма M_0 -модулей.

Пусть $\pi: V \rightarrow V/\varepsilon V$ каноническая проекция, $\pi(v_\mu) = \bar{v}_\mu \neq 0$. Так как $V/\varepsilon V$ — неприводимый M_0 -модуль, то $\pi(u(M_0)v_\mu) = u(M_0)\bar{v}_\mu = V/\varepsilon V$. Предположим, что $A = u(M_0)v_\mu \cap \varepsilon V \neq 0$, A — подмодуль в εV . Так как εV — неприводимый M_0 -модуль, то $A = \varepsilon V$ и $u(M_0)v_\mu \supset \varepsilon V$. Пусть по-прежнему $V_\gamma = L_\gamma(\varepsilon)$ для $\gamma \in R_{-1}$. Так как $u(M_0)v_\mu = u(M_0^-)v_\mu$, то $u(M_0)v_\mu \subset \langle v_\mu \rangle \oplus \bigoplus_{\gamma \neq \mu} V_\gamma$.

Следовательно, $u(M_0)v_\mu \cap V_\mu = \langle v_\mu \rangle$. С другой стороны, $\langle \varepsilon v_\mu \rangle = \varepsilon V \cap V_\mu \subset u(M_0)v_\mu \cap V_\mu = \langle v_\mu \rangle$. Полученное противоречие доказывает, что $A = 0$ и $V = u(M_0)v_\mu \oplus \varepsilon u(M_0)v_\mu$.

Согласно предложению 5 можно считать, что $\psi(v_1, v_0) = 0$, если $v_1 \in L_{-1}$, $v_0 \in M_0$. Поэтому M_0 -модуль $V = L_{-1}(\varepsilon)$ можно представить в виде $L_{-1} \oplus \varepsilon L_{-1}$, где $L_{-1} = L_{-1} \otimes 1$. Аналогично, для $L_1(\varepsilon)$ получаем разложение в прямую сумму изоморфных неприводимых M_0 -модулей: $L_1(\varepsilon) = L_1 \oplus \varepsilon L_1$ (т.е. можно считать, что $\psi(L_1, M_0) = 0$).

Дальнейшее доказательство тривиальности коцикла ψ будет различным для случаев, когда L не имеет центра и когда L имеет центр.

Предположим, что алгебра Ли L не имеет центра.

Если $L_{-2} \neq 0$, то $[L_{-1}, L_{-1}] = L_{-2} = \langle e_\gamma \rangle$. Так как L_{-2} одномерно, то $\psi(e_\alpha, e_\gamma) = 0$ для любого $\alpha \in R_0$. Отсюда, учитывая, что $\psi(L_0, L_0) = 0$, получаем $0 = d\psi(e_\alpha, e_{-\alpha}, e_\gamma) = -\psi([e_\alpha, e_{-\alpha}], e_\gamma) = -\psi(h_\alpha, e_\gamma)$. Следовательно, $\psi(L_{-2}, M_0) = 0$. Аналогично, $\psi(L_2, M_0) = 0$.

Для $v_1, v_2 \in L_{-1}$ положим $[v_1, v_2] = \langle v_1, v_2 \rangle_1 e_\gamma$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ — M_0 -инвариантная невырожденная кососимметрическая форма на L_{-1} . В $L(\varepsilon)$ $v_1 \circ v_2 \in L_{-2}(\varepsilon)$ и $v_1 \circ v_2 = \langle v_1, v_2 \rangle_1 e_\gamma + \varepsilon \langle v_1, v_2 \rangle_2 e_\gamma$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ — также M_0 -инвариантная невырожденная кососимметрическая форма на L_{-1} . Так как L_{-1} — неприводимый M_0 -модуль, то форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ пропорциональна $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, т.е. $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 = a \langle \cdot, \cdot \rangle_1$, $a \in K$. Заменяя e_γ на $e_\gamma + \varepsilon a e_\gamma$, получаем $v_1 \circ v_2 = \langle v_1, v_2 \rangle_1 e_\gamma$. Таким образом, можно считать, что $\psi(L_{-1}, L_{-1}) = 0$. Аналогично, подправив базис в $L_2(\varepsilon)$, можно считать, что $\psi(L_1, L_1) = 0$.

Вясним, как действует $h_0 \in \mathcal{H}$ на $L_{-1}(\varepsilon)$. Напомним, что $L_0 = M_0 \oplus \langle h_0 \rangle$, $\langle h_0 \rangle$ — центр L_0 . Если $v \in L_{-1}$, то $[v, h_0] = av$, $a \in K^*$. Так как $L_{-1}(\varepsilon) = L_{-1} + \varepsilon L_{-1}$ — прямая сумма изоморфных неприводимых M_0 -модулей, то $h_0 \circ v = av + \varepsilon bv = (a + \varepsilon b)v$, $a, b \in K$, a, b не зависят от v , $a \neq 0$. Заменяя h_0

на $h_0 - \varepsilon \frac{b}{a} h_0$, получим $h_0 \circ v = av$. Поэтому можно считать, что $\psi(h_0, L_{-1}) = 0$. Так как $L_{-2} = [L_{-1}, L_{-1}]$ и $\psi(L_{-1}, L_{-1}) = 0$, то из условия коцикла следует, что $\psi(h_0, L_{-2}) = 0$.

Из тождества Якоби в $(L(\varepsilon), \circ)$ следует, что для построенного элемента h_0 $\psi(h_0, L_1) = 0$ и, следовательно, $\psi(h_0, L_2) = 0$.

Итак, мы доказали, что коцикл ψ когомологичен коциклу, удовлетворяющему условиям $\psi(L_0, L_i) = 0, i = 0, \pm 1, \pm 2, \psi(L_i, L_i) = 0, i = 0, \pm 1$.

В дальнейшем нам понадобится понятие продолжений Картана. Пусть $L^- = L_{-2} + L_{-1} + L_0, L_{-2} = [L_{-1}, L_{-1}]$ (в нашем случае $\dim L_{-2} \leq 1$) – транзитивная градуированная алгебра Ли, т.е. в L_0 выполняется условие: для $0 \neq x \in L_0, [x, L_{-1}] \neq 0$. Напомним, что множество $L^{(1)}$, состоящее из всех $\varphi \in \text{Hom}(L_{-1}, L_0) \oplus \text{Hom}(L_{-2}, L_{-1})$ таких, что $[\varphi(v_1), v_2] - [\varphi(v_2), v_1] = \varphi([v_1, v_2])$ для любых $v_1, v_2 \in L_{-1}$, называется *первым продолжением Картана*. $L^{(1)}$ имеет естественную структуру L_0 -модуля: $(v_0 \varphi)(v) = [v_0, \varphi(v)] - \varphi([v_0, v]), v_0 \in L_0, \varphi \in L^{(1)}, v \in L_{-i}, i = 1, 2$. Аналогично индукцией по i определяются продолжения Картана $L^{(i)}, i > 1$. На пространстве $L^\infty = L_{-2} + L_{-1} + L_0 + L_{(1)} + L_{(2)} + \dots$ имеется единственная структура алгебры Ли, относительно которой $L_{-2} + L_{-1} + L_0$ – подалгебра, изоморфная L^- , и $[\varphi, l_j] = \varphi(l_j)$ для $\varphi \in L^{(i)}, l_j \in L_j, j = -1, -2$.

Для классической алгебры Ли L без центра, рассматриваемой вместе со стандартной градуировкой, можно считать, что $L_1 \subset L^{(1)}$, отождествляя $w \in L_1$ с $\text{ad } w|_{L_{-1}} \in L^{(1)}$. Аналогично, $L_2 \subset L^{(2)}$ и алгебра L является однородной подалгеброй в L^∞ .

ЛЕММА 4. Пусть L – классическая алгебра одного из типов $\bar{A}_l, A_l^z, B_l (l > 2), C_l (l > 2), D_l, \bar{E}_6, E_6^z, E_6 (p > 3), E_7, E_8, F_4$. В $L^{(1)}$ существует единственный L_0 -подмодуль, изоморфный L_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ – базис системы $R, \{\alpha_2, \dots, \alpha_l\}$ – базис системы R_0, α_1 связан в схеме Дынкина только с α_2 . Легко видеть, что младший вес L_0 -модуля L_1 равен α_1 , а старший вес L_{-1} равен $-\alpha_1$.

Допустим, что $\widehat{L}_1$ – L_0 -подмодуль в $L^{(1)}$, изоморфный L_1, f – младший вектор подмодуля $\widehat{L}_1, f$ имеет вес α_1 . В алгебре Ли L^∞ положим $[f, e_{-\alpha_1}] = h, h \in \mathcal{H}$. Если $h = 0$, то $[f, v] = 0$ для любого $v \in L_{-1}$, следовательно, $f = 0$ и $\widehat{L}_1 = 0$. Если ранг l больше 2, то из тождества Якоби для $f, e_{-\alpha_1}, e_{\alpha_i}$ следует, что $[h, e_{\alpha_i}] = \alpha_i(h)e_{\alpha_i} = 0, i = 3, \dots, l$. Так как L не имеет центра, то $\alpha_3, \dots, \alpha_l$ линейно независимы как функции на $\mathcal{H}$. Следовательно, h лежит в $\ker \alpha$ для $n-1$ линейно независимых функций $\alpha, \alpha = \alpha_3, \dots, \alpha_l$. Пересечение ядер этих функций двумерно и натянуто на h_{α_1}, h_0 , где h_0 содержится в одномерном центре подалгебры L_0 . Предположим, что h не пропорционален h_0 . Тогда, домножая при необходимости f на константу, можем записать, что $[f, e_{\alpha_{-1}}] = h = h_{\alpha_1} + xh_0, x \in K$. Если ранг $l = 2$, то полученное равенство сразу следует из того, что $\dim \mathcal{H} \leq 2$. Докажем, что $x = 0$.

Так как f – младший вектор $\widehat{L}_1$, то $[e_{-\alpha_2}, f] = 0$. Запишем тождество Якоби для $f, e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_2}$:

$$\begin{aligned} [[f, e_{-\alpha_1}], e_{-\alpha_2}] + [[e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_2}], f] &= 0, \\ [h_{\alpha_1} + xh_0, e_{-\alpha_2}] + [[e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_2}], f] &= 0. \end{aligned}$$

Так как $e_{-\alpha_2}$ принадлежит L_0 , то $[h_0, e_{-\alpha_2}] = 0$ и из последнего равенства получаем

$$[h_{\alpha_1}, e_{-\alpha_2}] = [f, [e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_2}]].$$

Из тождества Якоби для $e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_2}$ следует, что

$$[h_{\alpha_1}, e_{-\alpha_2}] = [e_{\alpha_1}, [e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_2}]].$$

Отсюда, так как $[e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_2}] = Ne_{-\alpha_1-\alpha_2}$, $N \in K^*$,

$$[f, e_{-\alpha_1-\alpha_2}] = [e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}]. \quad (7)$$

Запишем тождество Якоби для $f, e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}$:

$$[[f, e_{-\alpha_1}], e_{-\alpha_1-\alpha_2}] - [[f, e_{-\alpha_1-\alpha_2}], e_{-\alpha_1}] = [f, [e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}]]. \quad (8)$$

Отметим, что $[e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}] \in L_{-2}$; $L_{-2} \neq 0$ только для алгебр Ли типов E_7 и E_8 (см. табл. 1). В системах корней типа E_7, E_8 длина α -серии корней, содержащей β , меньше 2 для любых $\alpha, \beta \in R$. Если $-\alpha_1 + (-\alpha_1 - \alpha_2) = -2\alpha_1 - \alpha_2 \in R$, то длина $-\alpha_1$ -серии, содержащей $-\alpha_2$, не менее 2. Полученное противоречие показывает, что $[e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}] = 0$. Тогда из (8) получаем

$$[[f, e_{-\alpha_1}], e_{-\alpha_1-\alpha_2}] - [[f, e_{-\alpha_1-\alpha_2}], e_{-\alpha_1}] = 0. \quad (9)$$

Из (7) и того, что $[f, e_{-\alpha_1}] = h_{\alpha_1} + xh_0$, следует, что

$$[h_{\alpha_1} + xh_0, e_{-\alpha_1-\alpha_2}] - [[e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}], e_{-\alpha_1}] = 0.$$

Отсюда, используя тождество Якоби для $e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}$, получаем

$$0 = [h_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}] + x[h_0, e_{-\alpha_1-\alpha_2}] - [[e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}], e_{-\alpha_1-\alpha_2}] = x[h_0, e_{-\alpha_1-\alpha_2}].$$

Так как L не имеет центра, то $[h_0, e_{-\alpha_1-\alpha_2}] \neq 0$ и, следовательно, $x = 0$.

Поэтому $[f, e_{-\alpha_1}] = h_{\alpha_1} = [e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}]$. Так как $e_{\alpha_{-1}}$ — старший вектор L_{-1} , а e_{α_1} — младший вектор L_1 , то из того, что $[f, e_{-\alpha_1}] = [e_{\alpha_1}, e_{-\alpha_1}]$, получаем, что $[f, v] = [e_{\alpha_1}, v]$ для любого v из L_1 . Следовательно, $f = e_{\alpha_1}$, $\widehat{L}_1 = L_1$.

Осталось рассмотреть случай, когда h пропорционален h_0 . В этом случае можно считать, что $[f, e_{-\alpha_1}] = h_0$. Тогда из тождества Якоби для $f, e_{-\alpha_1}, e_{-\alpha_2}$ следует, что $[f, e_{-\alpha_1-\alpha_2}] = 0$. Поэтому из (9) получаем, что $0 = [[f, e_{-\alpha_1-\alpha_2}], e_{-\alpha_1}] = [h_0, e_{-\alpha_1-\alpha_2}]$. Однако, как отмечалось выше, $[h_0, e_{-\alpha_1-\alpha_2}] \neq 0$. Полученное противоречие показывает, что h не может быть пропорционален h_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть L — алгебра Ли одного из типов $\overline{A}_l, A_l^z, B_l$ ($l > 2$), C_l ($l > 2$), $D_l, \overline{E}_6, E_6^z, E_6$ ($p > 3$), E_7, E_8, F_4 . Если $\psi \in Z_0^2(L, L)$ такой, что $\psi(L_0, L_i) = 0$, $i = 0, \pm 1, \pm 2$, $\psi(L_i, L_i) = 0$, $i = 0, \pm 1$, то ψ когомологичен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства предложения достаточно установить, что помимо условий, накладываемых на коцикл ψ , выполняются также условия: $\psi(L_{-i}, L_i) = 0$, $i = 1, 2$, и $\psi(L_{-1}, L_2) = \psi(L_1, L_{-2}) = 0$.

Для $v_1, v_2 \in L_{-1}$, $w \in L_1$ $w \circ v_i \in L_0(\varepsilon)$, $i = 1, 2$. Так как $\psi(v, v_0) = 0$ для $v_0 \in L_0$, $v \in L_{-1}$, то в $L(\varepsilon)$

$$(v_1 \circ v_2) \circ w = [v_1, [v_2, w]] + \varepsilon[v_1, \psi(v_2, w)] - [v_2, [v_1, w]] - \varepsilon[v_2, \psi(v_1, w)]. \quad (10)$$

Если $L_{-2} = 0$, то

$$[v_1, \psi(v_2, w)] - [v_2, \psi(v_1, w)] = 0. \quad (11)$$

Если $L_{-2} \neq 0$, то из условий на коцикл ψ получаем $v_1 \circ v_2 = [v_1, v_2] = \langle v_1, v_2 \rangle e_\gamma$, где $\langle v_1, v_2 \rangle \in K$, $\langle e_\gamma \rangle = L_{-2}$. Из (10) следует

$$[v_1, \psi(v_2, w)] - [v_2, \psi(v_1, w)] = \langle v_1, v_2 \rangle \psi(e_\gamma, w). \quad (12)$$

Тождества (11), (12) означают, что $\psi(w, -)$ принадлежит продолжению Картана $L^{(1)}$.

Обозначим через $\widehat{L}_1$ подпространство в $L^{(1)}$, состоящее из отображений $\psi(w, -)$, $w \in L_1$. Из соотношения $d\psi(l_0, v, w) = 0$, $l_0 \in L_0$, $v \in L_{-1}$, $w \in L_1$, и условий на коцикл ψ следует, что

$$l_0 \psi(w, -) = \psi([l_0, w], -).$$

Таким образом, $\widehat{L}_1 - L_0$ -подмодуль в $L^{(1)}$ и соответствие $w \mapsto \psi(w, -)$ является морфизмом L_0 -подмодулей L_1 и $\widehat{L}_1$. Допустим, что $\widehat{L}_1 \neq 0$. Тогда $\widehat{L}_1$ - неприводимый L_0 -модуль и L_0 -модули L_1 и $\widehat{L}_1$ изоморфны. Из леммы 4 получаем, что $L_1 = \widehat{L}_1$. Более того, по лемме Шура существует $c \in K$, $c \neq 0$, такое, что $sw = \psi(w, -)$ для всех $w \in L_1$. Следовательно, для $v \in L_{-1}$, $w \in L_1$ в $L(\varepsilon)$ имеем $v \circ w = [v, w] + \varepsilon c[v, w]$. Заменяя ψ на $\psi + \delta\varphi$, где $\varphi(v) = cv$, если $v \in L_{-1}$, $\varphi(v) = 2cv$, если $v \in L_{-2}$, и $\varphi|_{L_0 \oplus L_1 \oplus L_2} = 0$, получаем, что $\psi(L_{-1}, L_1) = 0$.

Предположим, что $L_{\pm 2} \neq 0$, $v_1, v_2 \in L_{-1}$, $v \in L_1$. Из условий на коцикл ψ и полученного условия $\psi(L_{-1}, L_1) = 0$ следует, что

$$0 = d\psi(v_1, v_2, v) = -\psi([v_1, v_2], v).$$

Так как $[L_{-1}, L_{-1}] = L_{-2}$, то $\psi(L_{-2}, L_1) = 0$. Аналогично, $\psi(L_2, L_{-1}) = 0$. Если $w \in L_2$, то из условий на коцикл ψ следует

$$0 = d\psi(v_1, v_2, w) = -\psi([v_1, v_2], w).$$

Поэтому $\psi(L_{-2}, L_2) = 0$.

Если L имеет центр, то $L = A_l$, $l + 1 \equiv 0(p)$, или при $p = 3$ $L = E_6$. В этих алгебрах $L_{\pm 2} = 0$.

Согласно предложению 1 мы можем не рассматривать алгебры Ли типа A_l , когда $l + 1 \not\equiv 0(p)$, так как в этом случае форма Киллинга невырождена (см. табл. 1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть L – алгебра Ли одного из типов A_l , $l + 1 \equiv 0(p)$, или E_6 ($p = 3$), $\psi \in Z_0^2(L, L)$. Если $\psi(M_0, L_{\pm 1}) = 0$, $\psi(L_i, L_i) = 0$, $i = 0, \pm 1$, то ψ когомологичен нулю.

Пусть $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ – базис системы R , а $\{\alpha_2, \dots, \alpha_l\}$ – базис системы R_0 .

ЛЕММА 5. (а) $W(R_0)\alpha_1 = R_1$;

(б) если $\alpha \in R_1$, $\beta \in R_0$, $\alpha + \beta \in R$, то $h_{\alpha+\beta} = h_\alpha + h_\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha, \beta \in R$, $\beta - q\alpha, \dots, \beta + r\alpha$, $q, r \in \mathbb{Z}^+$, $-\alpha$ – серия корней, содержащая β , $p + q$ – ее длина. Так как все корни в системах типа A_l , E_6 имеют одинаковую длину, то из [11; гл. VI, §1, п. 3, замечание к предложению 9] следует, что $r + q \leq 1$. Поэтому если $\alpha + \beta \in R$, то $q = 0$, $r = 1$ и $\langle \alpha, \beta \rangle = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = q - r = -1$. Следовательно, $\alpha + \beta = \alpha - \langle \alpha, \beta \rangle \beta = w_\beta \alpha$.

(а) Любый корень $\beta \neq \alpha_1$ из R_1 мы можем получить последовательным прибавлением к α_1 корней из базиса R_0 , при этом на каждом шаге получаем корни из R_1 . Из приведенного выше рассуждения следует, что $\beta = w_0 \alpha_1$, $w_0 \in W(R_0)$.

(б) Напомним, как группа W действует на $\mathcal{H}$: $w_{\alpha_i} h_{\alpha_j} = h_{\alpha_j} - \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle h_{\alpha_i}$ (см., например, [14]). Так как все корни системы R имеют одинаковую длину, то $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ и $w_{\alpha_i} h_{\alpha_j} = h_{\alpha_j} - \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle h_{\alpha_i}$. Мы видим, что если $w_{\alpha_i} \alpha_j = \alpha_j - \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \alpha_i = \alpha_j + \alpha_i$, то $w_{\alpha_i} h_{\alpha_j} = h_{\alpha_j} + h_{\alpha_i}$. Согласно (а) для любого $\alpha \in R_1$ существует $w \in W(R_0)$ такой, что $w\alpha_1 = \alpha$. Так как $W(R)$ порождается w_{α_i} , $i = 1, \dots, l$, то $w\alpha_1 = x_1 \alpha_1 + \dots + x_l \alpha_l$ – разложение α по базису R . Действие w_{α_i} на α_j полностью аналогично действию w_{α_i} на h_{α_j} . Поэтому если $\alpha = x_1 \alpha_1 + \dots + x_l \alpha_l$ – разложение α по базису R , то $x_1 h_{\alpha_1} + \dots + x_l h_{\alpha_l}$ – разложение h_α по h_{α_i} . Отсюда если $\alpha + \beta \in R$, то $h_{\alpha+\beta} = h_\alpha + h_\beta$.

Из леммы 5 следует, что для $\alpha \in R_1$ существует $w_0 \in W(R_0)$ такой, что $\alpha = w_0 \alpha_1$. Тогда $h_\alpha = h_{w_0 \alpha_1} = w_0 h_{\alpha_1} = h_{\alpha_1} + h$, где $h \in \mathcal{H}_0$. Так как $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus I$, где I – одномерный центр L , то $h_{\alpha_1} = h(\alpha_1) - h_0$, $h(\alpha_1) \in \mathcal{H}_0$, $h_0 \in I$. Следовательно, для любого $\alpha \in R_1$ h_α представляется в виде: $h_\alpha = h(\alpha) - h_0$, где $h(\alpha) \in \mathcal{H}_0$, т.е. компонента h_α в I не зависит от α .

Любой корень γ из $\{\alpha_3, \dots, \alpha_l\} \subset R_0$ ортогонален к α_1 и $\gamma + \alpha_1$, $\gamma - \alpha_1$ не являются корнями. Теперь из п. (а) леммы 5 следует, что для любого $\alpha \in R_1$ существует ровно $l - 2$ линейно независимых корня $\gamma \in R_0$ таких, что $\gamma + \alpha$, $\gamma - \alpha$ не являются корнями. Если $\gamma + \alpha \notin R$, $\gamma - \alpha \notin R$, то $e_\alpha \circ e_\gamma = e_{-\alpha} \circ e_\gamma = 0$. Для $\alpha \in R_1$

$$e_\alpha \circ e_{-\alpha} = h_\alpha + \varepsilon H_\alpha,$$

где H_α – некоторый элемент из $\mathcal{H}$. Так как $e_\gamma \in L_0$ и $\psi(L_0, L_0) = 0$, то из тождества Якоби для e_α , $e_{-\alpha}$, e_γ следует, что $[H_\alpha, e_\gamma] = \gamma(H_\alpha)e_\gamma = 0$. Таким образом, H_α содержится в пересечении ядер $l - 2$ линейно независимых функций γ . Так как $h(\alpha)$ и h_0 также содержатся в этом пересечении, то $H_\alpha = x_\alpha h(\alpha) + y_\alpha h_0$, где $x_\alpha, y_\alpha \in K$. Таким образом,

$$e_\alpha \circ e_{-\alpha} = h(\alpha) - h_0 + \varepsilon(x_\alpha h(\alpha) + y_\alpha h_0). \quad (13)$$

ЛЕММА 6. (а) Пусть R – система корней типа A_l , $l > 2$, $l + 1 \equiv 0(p)$, или E_6 ($p = 3$), $\alpha, \beta \in R_1$. Если существует простой корень $\gamma \in R_0$ такой, что $\alpha = \beta + \gamma$, то $x_\alpha = x_\beta$, $y_\alpha = y_\beta$.

(б) Если R – система типа A_2 , то $x_\alpha = x_\beta$, $y_\alpha = y_\beta$ для любых $\alpha, \beta \in R_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Из п. (б) леммы 5 следует, что $h_\alpha = h_\beta + h_\gamma$. Поэтому $h(\alpha) = h(\beta) + h_\gamma$. Пусть $[e_\gamma, e_{-\alpha}] = Be_{-\beta}$, $[e_\gamma, e_\beta] = Ae_\alpha$, $e_\beta \circ e_{-\alpha} = Ce_{-\gamma}$, где $A, B \in K^*$, C – обратимый элемент из $K[\varepsilon]$. Так как $e_\gamma \in L_0$, то из тождества Якоби

$$e_\gamma \circ (e_\beta \circ e_{-\alpha}) = (e_\gamma \circ e_\beta) \circ e_{-\alpha} + e_\beta \circ (e_\gamma \circ e_{-\alpha})$$

и условий на коцикл ψ следует, что

$$Ch_\gamma = Ae_\alpha \circ e_{-\alpha} + Be_\beta \circ e_{-\beta}.$$

Из (13) получаем, что

$$Ch_\gamma = A(h(\alpha) - h_0 + \varepsilon(x_\alpha h(\alpha) + y_\alpha h_0)) + B(h(\beta) - h_0 + \varepsilon(x_\beta h(\beta) + y_\beta h_0)).$$

Так как $h(\alpha) = h(\beta) + h_\gamma$, то

$$\begin{aligned} Ch_\gamma &= (B + A)h(\beta) - (B + A)h_0 + Ah_\gamma + \varepsilon(Bx_\beta + Ax_\alpha)h(\beta) \\ &\quad + \varepsilon(By_\beta + Ay_\alpha)h_0 + \varepsilon Ax_\alpha h_\gamma. \end{aligned}$$

Докажем, что в разложение $h(\beta)$ по h_{α_i} , α_i – простые корни системы R_0 , с ненулевым коэффициентом входит хотя бы один h_{α_i} , $\alpha_i \neq \gamma$, и, следовательно,

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ Bx_\beta + Ax_\alpha = 0, \\ By_\beta + Ay_\alpha = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x_\alpha = x_\beta$, $y_\alpha = y_\beta$.

Предположим, что $h(\beta) = xh_\gamma$, где $x \in K^*$, γ – простой корень системы R_0 . Тогда $h_0 = h(\beta) - h_\beta = xh_\gamma - h_\beta$. Следовательно, $(x\gamma - \beta)(h_\alpha) = 0$ для любого $\alpha \in R$.

Рассмотрим векторное пространство над K

$$V_K = Q(R) \otimes_{\mathbb{Z}} K$$

с базисом $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$. Предположим, что $x\gamma = \beta$. Так как $\beta \in R_{-1}$, $\gamma \in R_0$, то $\beta = \alpha_1 - \alpha_0$, $\alpha_0, \gamma \in \langle \alpha_2, \dots, \alpha_l \rangle_K$. Тогда $\alpha_1 = x\gamma + \alpha_0 \in \langle \alpha_2, \dots, \alpha_l \rangle_K$. Получили противоречие, следовательно, $x\gamma - \beta \neq 0$.

Обозначим подпространство в $V_{\mathbb{R}}$, натянутое на γ, β , через U . Так как корни γ и β линейно независимы над $\mathbb{R}$, то $R_U = R \cap U$ является системой корней ранга 2. Согласно [11; гл. VI, §1, п. 7, предложение 24] существует базис $\{\delta_1, \dots, \delta_l\}$ системы R , содержащий базис системы R_U . Будем считать, что R_U имеет базис $\{\delta_1, \delta_2\}$. По-прежнему $\langle \delta_1, \dots, \delta_l \rangle_K = V_K$. Определим спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространств V_K и $\mathcal{H}$, полагая $\langle \delta_i, h_{\delta_j} \rangle = \langle \delta_i, \delta_j \rangle = a_{ij}$, a_{ij} – числа Картана. Обозначим через V_1

ядро спаривания. Поскольку $(x\gamma - \beta)(h_\alpha) = 0$ для всех α из R , то $x\gamma - \beta \in V_1$. Векторы γ, β раскладываются по δ_1, δ_2 и $\mu = x\gamma - \beta = x_1\delta_1 + x_2\delta_2$. Если $x_2 = 0$, то $0 = \langle \mu, h_{\delta_1} \rangle = x_1 \langle \delta_1, \delta_1 \rangle$. Следовательно, $x_1 = 0$. Аналогично, если $x_1 = 0$, то $x_2 = 0$. Однако $x\gamma - \beta \neq 0$, поэтому $x_1, x_2 \in K^*$. Если δ_1 не связан в схеме Дынкина с δ_2 , то $0 = \langle \mu, h_{\delta_1} \rangle = x_1 \langle \delta_1, \delta_1 \rangle$, следовательно, $x_1 = 0$. Получили противоречие, значит, δ_1 связан с δ_2 в схеме Дынкина и R_U – система типа A_2 . Так как ранг $l > 2$, то существует i такой, что δ_i связан в схеме Дынкина только с одним из δ_1, δ_2 (можно считать, что с δ_1). Тогда $0 = \langle \mu, h_{\delta_i} \rangle = x_1 \langle \delta_1, \delta_i \rangle$. Получили противоречие.

(b) Рассмотрим случай $A_2, p = 3$.

Пусть система корней R типа A_2 имеет базис $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, R_0 имеет базис $\{\alpha_1\}$. Тогда $h_0 = h_{\alpha_1} - h_{\alpha_2}$, $h_{\alpha_1+\alpha_2} = h_{\alpha_1} + h_{\alpha_2} = -h_{\alpha_1} - h_0$,

$$\begin{aligned} e_{\alpha_2} \circ e_{-\alpha_2} &= (1 + \varepsilon x_{\alpha_2})h_{\alpha_1} - (1 - \varepsilon y_{\alpha_2})h_0, \\ e_{\alpha_1+\alpha_2} \circ e_{-\alpha_1-\alpha_2} &= -(1 + \varepsilon x_{\alpha_1+\alpha_2})h_{\alpha_1} - (1 - \varepsilon y_{\alpha_1+\alpha_2})h_0. \end{aligned}$$

Из тождества Якоби для $e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, e_{-\alpha_1-\alpha_2}$ и тождества Якоби для $e_{-\alpha_1-\alpha_2}, e_{\alpha_2}, e_{-\alpha_2}$ легко получить, что $x_{\alpha_1+\alpha_2} = x_{\alpha_2}$ и $y_{\alpha_1+\alpha_2} = y_{\alpha_2}$.

Теперь, так как любой корень из R_1 может быть включен в цепочку корней, получающуюся последовательным прибавлением к α_1 простых корней из R_0 , то из леммы 6 следует, что $x_\alpha = x_\beta = x$ и $y_\alpha = y_\beta = y$ для любых $\alpha, \beta \in R_1$.

Преобразуем (13) следующим образом:

$$e_\alpha \circ e_{-\alpha} = (1 + \varepsilon x) \left(h(\alpha) - \frac{1 - \varepsilon y}{1 + \varepsilon x} h_0 \right). \quad (14)$$

Заменяя базис $\{e_\alpha, \alpha \in R_1\}$ в L_1 на $\{(1 - \varepsilon x)e_\alpha\}$ и заменяя h_0 на $\frac{1 - \varepsilon y}{1 + \varepsilon x} h_0$, получим из (14):

$$e_\alpha \circ e_{-\alpha} = h(\alpha) - h_0 = h_\alpha$$

для любого $\alpha \in R_1$. Поэтому мы можем считать, что $\psi(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 0$.

Если $\alpha - \beta \notin R$ для $\alpha \in R_1, -\beta \in R_{-1}$, то $\psi(e_\alpha, e_{-\beta}) = 0$. Если $\alpha_0 = \alpha - \beta \in R_0$, то $\alpha = \beta + \alpha_0$. Так как длина β -последовательности, содержащей α_0 , не больше 1, то $\alpha_0 - \beta \notin R$. Тогда

$$0 = d\psi(e_\beta, e_{-\beta}, e_{\alpha_0}) = \psi([e_\beta, e_{\alpha_0}], e_{-\beta}) = c\psi(e_\alpha, e_{-\beta}),$$

где $[e_\beta, e_{\alpha_0}] = ce_\alpha, c \in K^*$. Следовательно, $\psi(e_\alpha, e_{-\beta}) = 0$ для любых $\alpha, \beta \in K$ и $\psi(L_{-1}, L_1) = 0$.

Пусть $\alpha, \beta \in R_1$. Из условий на коцикл ψ следует, что

$$0 = d\psi(e_\alpha, e_{-\alpha}, e_\beta) = -\psi([e_\alpha, e_{-\alpha}], e_\beta) = -\psi(h_\alpha, e_\beta).$$

Следовательно, $\psi(\mathcal{H}, L_1) = 0$. Аналогично, $\psi(\mathcal{H}, L_{-1}) = 0$. Объединяя все условия, полученные на коцикл ψ , имеем $\psi(L, L) = 0$.

Итак, мы установили, что любой коцикл ψ нулевого веса когомологичен нулю и, следовательно, $H_0^2(L, L) = 0$. Объединяя это с результатами §3, получаем, что все классические алгебры Ли над полем характеристики $p > 2$ являются жесткими, кроме алгебры типа C_2 ($p = 3$).

Список литературы

1. Рудаков А. Н. Деформации простых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. С. 1113–1119.
2. Brown G. Lie algebras of characteristic three with non-degenerate Killing form // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 137. P. 259–268.
3. Кострикин А. И. Параметрическое семейство простых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. С. 744–756.
4. Джумадильдаев А. С. К деформациям классических простых алгебр Ли // УМН. 1976. Т. 31. №3. С. 211–212.
5. Кострикин А. И., Кузнецов М. И. О деформациях классических алгебр Ли характеристики три // Докл. РАН. 1995. Т. 343. №3. С. 299–301.
6. Кириллов С. А., Кузнецов М. И., Чебочко Н. Г. О деформациях алгебры Ли типа G_2 характеристики три // Изв. вузов. Матем. В печати.
7. Gerstenhaber M. On the deformation of rings and algebras // Ann. of Math. (2). 1964. V. 79. №1. P. 59–103.
8. Frohardt D. E., Griess R. L. (Jr.). Automorphisms of modular Lie algebras // Nova J. Algebra Geom. 1992. V. 1. P. 339–345.
9. Спрингер Т. А., Штейнберг Р. Классы сопряженных элементов // Сб. трудов семинара по алгебраическим группам. М.: Мир, 1973. С. 162–262.
10. Seligman G. B. Modular Lie algebras. New York: Springer-Verlag, 1967.
11. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. IV–VI. М.: Мир, 1972.
12. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Гл. VII–VIII. М.: Мир, 1978.
13. Кострикин А. И., Острик В. В. К теореме распознавания для алгебр Ли характеристики 3 // Матем. сб. 1995. Т. 186. №10. С. 73–88.
14. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.

Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию
21.10.1999