Общероссийский математический портал

А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин, Эллиптические операторы в нечетных подпространствах, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 8, 89–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm500>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 18:07:28

УДК 517.9

А. Ю. Савин, Б. Ю. Стернин

Эллиптические операторы в нечетных подпространствах

Строится эллиптическая теория для операторов, действующих в подпространствах, определяемых нечетными псевдодифференциальными проекторами. Доказана формула индекса для компактных многообразий без края и для общих краевых задач. Найдена связь с теорией η -инвариантов Гилки.

Библиография: 25 названий.

Введение

Настоящая работа является продолжением статьи [1]. Напомним, что в ней рассматривались подпространства, определяемые псевдодифференциальными проекторами, и при этом в классе так называемых четных подпространств на нечетномерных многообразиях был построен гомотопически инвариантный функционал

$$d: \widehat{\text{Even}}(M^{\text{odd}}) \rightarrow \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right], \quad (1)$$

который в некотором смысле является обобщением понятия размерности конечномерного векторного пространства. В терминах этого функционала авторами были получены формулы индекса для эллиптических операторов, действующих в четных подпространствах, а также для общих краевых задач с граничными данными, принадлежащими четным подпространствам.

С помощью результатов П. Гилки [2] было установлено, что (при некоторых несущественных ограничениях) функционал d совпадает с η -инвариантом Атьи–Патоди–Зингера для некоторого самосопряженного эллиптического оператора A четного порядка. Отметим, что в этом случае η -инвариант оказывается инвариантным относительно гомотопий самосопряженного оператора по модулю целочисленных скачков, связанных со спектральным потоком (см. [3]).

В то же время хорошо известно, что наряду с классом операторов четного порядка на нечетномерных многообразиях η -инвариант является гомотопическим инвариантом (также по модулю целочисленных скачков) и в классе операторов нечетного порядка на четномерных многообразиях (см. [4]). Операторы такого вида и их η -инварианты нашли многочисленные применения в дифференциальной геометрии и топологии многообразий (см., например, [5]–[9]).

Таким образом, возникает естественный вопрос об определении функционала d на подпространствах, отвечающих эллиптическим самосопряженным операторам нечетного порядка.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-01-01254, 99-01-01100, 00-01-00161), Соросовской программы образования в области точных наук (грант № a99-1763) и Arbeitsgruppe Partielle Differentialgleichungen und Komplexe Analysis, Institut für Mathematik, Universität Potsdam.

Настоящая работа и посвящена построению соответствующего функционала на множестве “нечетных” подпространств, т.е. подпространств, отвечающих самосопряженным операторам нечетного порядка. В терминах функционала d , так же как и в [1], получены формулы индекса общих краевых задач для “нечетных подпространств”, а также формула индекса для эллиптических операторов, действующих в подпространствах.

Более того, получено равенство функционала d и η -инварианта. Из этого равенства следует, в частности, справедливость гипотезы о двоичной рациональности η -инварианта [4].

Тематика и проблемы, исследуемые в настоящей работе, в значительной степени аналогичны нашей предыдущей статье, хотя ряд конструкций, проведенных здесь, носит принципиально иной (нежели в [1]) характер. Поэтому мы позволили себе быть достаточно краткими в той части работы, которая проводится параллельно статье [1], сосредоточив свое внимание на вопросах, принципиально отличающихся от рассматриваемых в [1].

Коротко о содержании работы.

В §1 вводится понятие нечетного подпространства и указывается связь таких подпространств со спектральными подпространствами эллиптических самосопряженных операторов с нечетными символами. Показано, что произвольное нечетное подпространство может быть преобразовано в спектральное подпространство такого типа. В §2 определяется функционал d нечетных подпространств на четномерных многообразиях, в терминах которого в §§3 и 5 получены гомотопически инвариантные формулы индекса для эллиптических операторов, действующих в нечетных подпространствах, а также в теории общих краевых задач. В §4 установлено равенство функционала d и η -инварианта Атьи–Патоде–Зингера. Далее, в §6 рассмотрен пример, в котором обе части формулы индекса оператора в подпространствах вычислены независимо и показано их равенство. Работу завершает краткое дополнение, в котором обсуждается понятие относительного индекса проекторов и подпространств, определяемых ими.

Результаты работы были доложены на международной конференции “Operator Algebras and Asymptotics on Manifolds with Singularities” [10]. Английская версия этой работы опубликована в качестве препринта [11].

§1. Нечетные расслоения и нечетные подпространства

Пусть M – гладкое замкнутое многообразие и $E \in \text{Vect}(M)$ – векторное расслоение на нем. Рассмотрим инволюцию на кокасательном расслоении

$$\alpha: T^*M \rightarrow T^*M, \quad \alpha(x, \xi) = (x, -\xi).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подрасслоение $L \subset \pi^*E$, $\pi: S^*M \rightarrow M$, называется *нечетным* относительно инволюции α , если оно является дополнительным к расслоению α^*L , т.е. эти расслоения в прямой сумме порождают объемлющее расслоение π^*E

$$L \oplus \alpha^*L = \pi^*E. \quad (2)$$

Для нечетного расслоения $L \subset \pi^*E$ *нечетным проектором* будем называть проектор в π^*E

$$p_L: \pi^*E \rightarrow \pi^*E, \quad (3)$$

действующий на L вдоль подрасслоения α^*L . Условие нечетности проектора можно записать в виде

$$p_L + \alpha^*p_L = \text{Id}. \quad (4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Размерность нечетного подрасслоения $L \subset \pi^*E$ достаточно велика по сравнению с размерностью многообразия M . Более точно, на многообразии M размерности n имеет место импликация

$$\left. \begin{array}{l} n-1 = 2k, \\ n-1 = 2k+1 \end{array} \right\} \Rightarrow \dim L \text{ делится на } 2^{k-1}. \quad (5)$$

Действительно, для нечетного проектора p_L матричнозначная функция

$$2p_L - \text{Id}$$

является нечетной на сфере S^{n-1} . Теперь приведенное выше соотношение непосредственно следует из теоремы 1 работы [12], утверждающей, что нечетная функция на сфере, принимающая значения в невырожденных матрицах размерности $\dim E$, подчинена как раз соотношениям (5).

ПРИМЕР 1. В качестве многообразия M рассмотрим окружность S^1 , а векторное расслоение E положим равным тривиальному одномерному расслоению: $E = \mathbb{C}$. Пространство кокасательных сфер является несвязным объединением двух окружностей:

$$S^*S^1 = S_+^1 \sqcup S_-^1, \quad S_\pm^1 = \{(x, \xi) \in T^*S^1 : \xi = \pm 1\}.$$

Рассмотрим подрасслоение $L \subset \pi^*E$, $\pi: S^*S^1 \rightarrow S^1$, которое над подпространством S_+^1 совпадает с расслоением E , а на остающейся части S_-^1 имеет нулевую размерность. Очевидно, что получающееся расслоение является нечетным.

В случае, когда в расслоении E введена метрика, полезно рассматривать более узкий класс нечетных расслоений L , для которых прямая сумма (2) является ортогональной. Расслоения L такого типа будем называть *ортогонально-нечетными*.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Под действием изоморфизма векторных расслоений

$$\sigma: \pi^*E \rightarrow \pi^*F,$$

являющегося четным

$$\alpha^*\sigma = \sigma,$$

нечетное подрасслоение $L \subset \pi^*E$ переходит в нечетное $\sigma L \subset \pi^*F$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Подпространство $\widehat{L} \subset C^\infty(M, E)$ называется *допустимым*, если для некоторого псевдодифференциального проектора P нулевого порядка, действующего в сечениях расслоения E , имеет место равенство

$$\widehat{L} = \text{Im } P.$$

Подрасслоение $L = \text{Im } \sigma(P)$ называется (главным) *символом подпространства* $\widehat{L}$ (оно не зависит от выбора проектора на $\widehat{L}$). Подпространство $\widehat{L}$ называется *нечетным*, если его символ L является нечетным. Полугруппу нечетных подпространств (относительно прямой суммы объемлющих пространств) обозначим через $\widehat{\text{Odd}}(M)$.

Нечетные подпространства можно строить как при помощи нечетных проекторов (т.е. псевдодифференциальных проекторов, главные символы которых удовлетворяют соотношению (4)), так и при помощи самосопряженных эллиптических операторов в силу следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть A – эллиптический самосопряженный оператор на многообразии M , главный символ $\sigma(A)$ которого является нечетным, т.е. антиинвариантным относительно инволюции α :

$$\alpha^* \sigma(A) = -\sigma(A). \quad (6)$$

Тогда подпространство $\widehat{L}_+(A)$, порожденное собственными векторами оператора A , отвечающими неотрицательным собственным значениям, является нечетным.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условию, сформулированному в предложении 1, удовлетворяют, например, все дифференциальные операторы нечетного порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Хорошо известно (см., например, [13]), что ортогональный проектор на неотрицательное спектральное подпространство $\widehat{L}_+(A)$ имеет главный символ, равный оператору проектирования на неотрицательное спектральное подпространство $L_+(A)$ главного символа $\sigma(A)$ оператора A вдоль соответствующего отрицательного подпространства. Таким образом, в силу условия (6) подрасслоение $L_+(A) \subset \pi^* E$ является нечетным. Предложение доказано.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим пространство Харди, т.е. подпространство в пространстве гладких функций на окружности

$$\widehat{L} \subset C^\infty(S^1),$$

состоящее из граничных значений функций, голоморфных в диске

$$D \subset \mathbb{C}, \quad \partial D = S^1.$$

Простое вычисление с рядами Фурье показывает, что пространство Харди $\widehat{L}$ совпадает с неотрицательным спектральным подпространством эллиптического самосопряженного оператора $A = -i \frac{d}{d\varphi}$ на окружности S^1 . В частности, символ пространства Харди равен

$$L_{\varphi, \xi} = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{при } \xi = 1, \\ 0 & \text{при } \xi = -1. \end{cases}$$

Отсюда видно, что символ пространства Харди в точности совпадает с нечетным расслоением из примера 1.

Общие нечетные подпространства могут быть сведены к ортогонально-нечетным в силу следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для нечетного подпространства $\widehat{L}$ существует такой обратимый оператор U с четным символом

$$U: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, E),$$

что символ подпространства $U\widehat{L}$ является ортогонально-нечетным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На расслоении π^*E рассмотрим две метрики: g_0 – индуцированную некоторой метрикой на E , и g_1 – произвольную четную относительно инволюции α метрику, для которой сумма подрасслоений $L \oplus \alpha^*L$ является ортогональной. Для линейной гомотопии этих метрик, обозначаемой через g_t ,

$$g_t = (1 - t)g_0 + tg_1,$$

рассмотрим покрывающее ее семейство унитарных преобразований

$$u_t: (\pi^*E, g_0) \rightarrow (\pi^*E, g_t).$$

Построим оператор U_1 по главному символу u_1 . Его можно выбрать обратимым, так как его символ гомотопен единичному. Обратный к нему оператор является искомым: $U = (U_1)^{-1}$.

Такая редукция позволяет распространять на общий случай результаты, справедливые для ортогонально-нечетных подпространств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для нечетного подпространства $\hat{L}$ существует определяющий его нечетный проектор $P_{\hat{L}}$. В частности, у нечетного подпространства существует нечетное дополнение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда подпространство $\hat{L}$ является ортогонально-нечетным, таким проектором является проектор ортогонального проектирования на $\hat{L}$. Общий случай сводится к ортогонально-нечетному при помощи оператора U из предложения 2.

§2. Структура нечетных подпространств. Функционал размерности

В настоящем параграфе получена стабильная классификация нечетных подпространств на четномерных многообразиях относительно обратимых преобразований, задаваемых четными эллиптическими операторами, т.е. операторами с четными по кокасательным переменным главными символами. На основе этой классификации в конце параграфа введен аналог понятия размерности для подпространств рассматриваемого вида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Подпространства $\hat{L}_1 \subset C^\infty(M, E)$ и $\hat{L}_2 \subset C^\infty(M, F)$ будем называть эквивалентными, если существует четный обратимый оператор

$$U: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F),$$

переводящий $\hat{L}_1$ в $\hat{L}_2$.

Абелеву полу группу классов эквивалентности нечетных подпространств обозначим через $\widehat{\text{Odd}}/\sim$. Группу Гротендика, отвечающую этой абелевой полу группе, обозначим через $K(\widehat{\text{Odd}}/\sim)$. Рассмотрим также следующее отношение эквивалентности в обычной полу группе векторных расслоений $\text{Vect}(M)$:

$$E \sim F,$$

если существует четный эллиптический символ

$$\sigma: \pi^*E \rightarrow \pi^*F$$

с нулевым (топологическим) индексом. Соответствующую группу Гротендика обозначим через $K(\text{Vect}(M)/\sim)$.¹

Определим последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} K(\widehat{\text{Odd}}/\sim) \xrightarrow{j} K(\text{Vect}(M)/\sim) \longrightarrow 0. \quad (7)$$

Здесь гомоморфизм i целому числу k сопоставляет элемент

$$i(k) = [\widehat{L} + k] - [\widehat{L}], \quad (8)$$

где $\widehat{L} \subset C^\infty(M, E)$ – некоторое нечетное подпространство, а подпространство $\widehat{L} + k \subset C^\infty(M, E)$ состоит из $\widehat{L}$ и произвольного пространства размерности k в дополнении к $\widehat{L}$. Заметим, что разность (8) не зависит от выбора подпространства $\widehat{L}$. Гомоморфизм j индуцирован отображением “забывания”:

подпространству $\widehat{L} \subset C^\infty(M, E)$ сопоставляем расслоение E .

Такое отображение сохраняет отношения эквивалентности в полугруппах подпространств $\widehat{\text{Odd}}/\sim$ и векторных расслоений $\text{Vect}(M)/\sim$, т.е. имеет место импликация

$$\widehat{L}_1 \sim \widehat{L}_2 \implies j(\widehat{L}_1) \sim j(\widehat{L}_2).$$

Заметим наконец, что последовательность (7) является комплексом: $ji = 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Последовательность (7) на четномерном многообразии M является 2-точной, т.е. отображение i является вложением, а группы $\text{coker } j$ и $\ker j / \text{Im } i$ являются 2-примарными, т.е. группами с кручением в степенях двойки.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В терминах локализации (см. [14; § 1]) теорема 1 гласит: локализация последовательности вне двойки является точной, т.е. точна последовательность

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \xrightarrow{i} K(\widehat{\text{Odd}}/\sim) \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \xrightarrow{j} K(\text{Vect}(M)/\sim) \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \rightarrow 0, \quad (9)$$

где через $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ обозначены двоично-рациональные числа и тензорные произведения берутся над кольцом $\mathbb{Z}$.

Доказательство теоремы разобьем на несколько лемм.

ЛЕММА 1. *Отображение i является изоморфизмом на подгруппу, порожденную разностями подпространств с одинаковыми символами, которую обозначим через $K_0(\widehat{\text{Odd}}/\sim)$. В частности, на этой подгруппе корректно определен относительный индекс подпространств (см. дополнение).*

¹Описанное отношение эквивалентности индуцирует эквивалентность элементов из группы Гротендика $K(M)$. В частности, имеет место естественный изоморфизм групп $K(\text{Vect}(M)/\sim)$ и $K(M)/\sim$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем по построению

$$\mathrm{Im} \, i \subset K_0(\widehat{\mathrm{Odd}}/\sim)$$

(см. формулу (8)). Проверим, что отображение i является вложением. Пусть $i(k) = 0$, тогда пространства $\widehat{L} + k$ и $\widehat{L}$ являются эквивалентными², т.е. переводятся одно в другое при помощи четного обратимого оператора D .

Рассмотрим оператор, являющийся аналогом теплицевых операторов (см., например, [15; с. 129]), т.е. оператор, действующий в подпространствах с равными символами

$$D: \widehat{L} + k \rightarrow \widehat{L}.$$

В силу обратимости оператора D имеем

$$\mathrm{ind}(D, \widehat{L} + k, \widehat{L}) = 0. \quad (10)$$

В то же время, применяя к оператору D формулу индекса теплицевых операторов³, получим

$$\mathrm{ind}(D, \widehat{L} + k, \widehat{L}) = \mathrm{ind}(\sigma(D)|_L \oplus 1_{\alpha^*L}) + k. \quad (11)$$

Покажем, что на четномерном многообразии для четного оператора D имеет место формула

$$\mathrm{ind}(\sigma(D)|_L \oplus 1_{\alpha^*L}) = \frac{1}{2} \mathrm{ind} \, D. \quad (12)$$

Действительно, из (когомологической) формулы Атьи–Зингера с учетом того, что инволюция α сохраняет ориентацию кокасательного пространства T^*M , получаем

$$\mathrm{ind}(\sigma(D)|_L \oplus 1_{\alpha^*L}) = \mathrm{ind}(\alpha^*(\sigma(D)|_L \oplus 1_{\alpha^*L})).$$

Но из четности оператора D и нечетности расслоения L следует

$$\alpha^*(\sigma(D)|_L \oplus 1_{\alpha^*L}) = \sigma(D)|_{\alpha^*L} \oplus 1_L.$$

Отсюда получаем

$$2 \cdot \mathrm{ind}(\sigma(D)|_L \oplus 1_{\alpha^*L}) = \mathrm{ind}(\sigma(D)|_{L \oplus \alpha^*L} \oplus 1_{\alpha^*L \oplus L}) = \mathrm{ind} \, D.$$

Подставляя (10), (12) в формулу (11) и учитывая обратимость оператора D , получаем, что $k = 0$, что и требовалось.

²Здесь и далее стандартные рассуждения, связанные со стабилизацией элементов в группе Гротендика, будут опускаться. Те случаи, когда требуются дополнительные построения, рассматриваются отдельно.

³Для эллиптического оператора, действующего в подпространствах с равными символами

$$D: \widehat{L}_1 \rightarrow \widehat{L}_2, \quad L_1 = L_2,$$

эта формула гласит

$$\mathrm{ind}(D, \widehat{L}_1, \widehat{L}_2) = \mathrm{ind}(\sigma(D)|_L \oplus 1_{L^\perp}) + \mathrm{ind}(\widehat{L}_1, \widehat{L}_2).$$

Проверка этой формулы является несложным упражнением на логарифмическое свойство индекса.

Убедимся в обратном включении $K_0(\widehat{\text{Odd}}/\sim) \subset \text{Im } i$. Пусть $\widehat{L}_{1,2}$ – нечетные подпространства с одинаковыми символами. Ортогональные проекторы $P_{1,2}$ на подпространства $\widehat{L}_{1,2}$ соответственно являются псевдодифференциальными операторами с равными главными символами. Поэтому из гомотопической классификации проекторов с равными главными символами следует, что проектор P_1 гомотопен P_2 по модулю конечномерного проектора (см. [16], ср. с [17]). Более точно, проекторы становятся гомотопными после прибавления к одному из них проектора конечного ранга.

Для гомотопии проекторов P_t рассмотрим обратимый оператор U_t , являющийся решением задачи Коши

$$\dot{U}_t = [\dot{P}_t, P_t]U_t, \quad U_1 = \text{Id}.$$

Прямая проверка показывает, что $\text{Im } P_t = \text{Im } U_t P_1$. Отсюда следует, что подпространство $\widehat{L}_1$ эквивалентно $\widehat{L}_2$ по модулю конечномерного подпространства, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2. *Факторгруппа $\text{coker } j = K(\text{Vect}(M)/\sim)/\text{Im } j$ является 2-примарной группой, т.е. для любого векторного расслоения $E \in \text{Vect}(M)$ при достаточно большом натуральном N в расслоении*

$$2^N \pi^* E, \quad \text{где} \quad 2^N E = \underbrace{E \oplus \cdots \oplus E}_{2^N \text{ штук}},$$

можно построить нечетное подрасслоение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим справедливость этого утверждения для тривиального расслоения. Вложим многообразие M в евклидово пространство размерности N . Тогда кокасательное расслоение вкладывается в тривиальное расслоение

$$T^*M \oplus \nu = \mathbb{R}^N, \quad (13)$$

где через ν обозначено нормальное расслоение к многообразию M в пространстве $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим алгебру Клиффорда $\text{Cl}(\mathbb{C}^N)$, $\dim \text{Cl}(\mathbb{C}^N) = 2^N$, эрмитова пространства $\mathbb{C}^N$. Очевидно, что $\mathbb{C}^N$, а следовательно, и $\mathbb{R}^N$ действует на пространстве $\text{Cl}(\mathbb{C}^N)$ умножением Клиффорда. Более того, используя вложение (13), получаем гомоморфизм векторных расслоений

$$T^*M \xrightarrow{\text{cl}} \text{End}(\text{Cl}(\mathbb{C}^N)),$$

задаваемый умножением Клиффорда. Для ковариантного дифференциала $\nabla = d \otimes 1_{2^N}$ в векторном расслоении со слоем $\text{Cl}(\mathbb{C}^N)$ рассмотрим самосопряженный оператор Дирака (см., например, [15; с. 152])

$$C^\infty(M, \text{Cl}(\mathbb{C}^N)) \xrightarrow{\nabla} C^\infty(M, T^*M \otimes \text{Cl}(\mathbb{C}^N)) \xrightarrow{\text{cl}} C^\infty(M, \text{Cl}(\mathbb{C}^N)).$$

“Положительное” расслоение его главного символа является нечетным. Для тривиального расслоения лемма доказана. Доказательство в случае общего расслоения $E \in \text{Vect}(M)$ сводится к только что разобранным случаю путем тензорного умножения на расслоение E .

ЛЕММА 3. Для произвольного нечетного расслоения L при достаточно большом N существует изоморфизм векторных расслоений

$$2^N L \sim 2^N \alpha^* L$$

над пространством кокасательных сфер S^*M . Более того, можно найти четный изоморфизм с нулевым (топологическим) индексом, переводящий подрасслоение $2^N L \subset 2^N \pi^* E$ в $2^N \alpha^* L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы о стабилизации⁴ (см., например, [18]) следует, что для доказательства первой части утверждения достаточно проверить равенство элементов $2^N L$ и $2^N \alpha^* L$ в группе $K(S^*M)$.

Рассмотрим отображение проектирования расслоения кокасательных сфер на его проективизацию

$$p: S^*M \rightarrow P^*M. \quad (14)$$

Над фиксированной точкой x многообразия M соответствующее стандартное отображение

$$p_x: S^{2n-1} \rightarrow \mathbb{RP}^{2n-1}$$

индуцирует 2-изоморфизм в K -теории

$$p^*: K^*(\mathbb{RP}^{2n-1}) \rightarrow K^*(S^{2n-1}), \quad \ker p^* = \mathbb{Z}_{2n-1}, \quad \operatorname{coker} p^* = \mathbb{Z}_2,$$

следовательно, в силу принципа Майера–Виеториса проекция (14) индуцирует 2-изоморфизм

$$p^*: K^*(P^*M) \rightarrow K^*(S^*M)$$

в K -теории тотальных пространств. Из этого непосредственно следует, что для некоторого числа N имеем $[2^N L] \in \operatorname{Im} p^*$, т.е. $[2^N L] = [2^N \alpha^* L]$. Первая часть леммы доказана.

Для доказательства оставшейся части леммы рассмотрим произвольный изоморфизм

$$\sigma: 2^N L \rightarrow 2^N \alpha^* L,$$

а затем распространим его на все пространство $2^N \pi^* E \supset 2^N L$ в соответствии с разложениями

$$\tilde{\sigma}: 2^N \pi^* E = 2^N L \oplus 2^N \alpha^* L \rightarrow 2^N \alpha^* L \oplus 2^N L = 2^N \pi^* E$$

по формуле

$$\tilde{\sigma}(\xi) = \sigma(\xi) \oplus \sigma(-\xi).$$

Тогда четный символ

$$\tilde{\sigma} \oplus \tilde{\sigma}^{-1}: 2^{N+1} \pi^* E \rightarrow 2^{N+1} \pi^* E$$

является искомым: он имеет нулевой (топологический) индекс (даже гомотопен единице) и переводит $2^{N+1} L$ в $2^{N+1} \alpha^* L$. Лемма доказана.

⁴По этой теореме из равенства элементов K -функтора $[E_1] = [E_2] \in K(X)$ следует изоморфизм векторных расслоений E_1 и E_2 при условии, что размерность этих расслоений достаточно велика по сравнению с размерностью пространства X .

ЛЕММА 4. *Факторгруппа $\ker j / \operatorname{Im} i$ является 2-примарной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$j([\widehat{L}_1] - [\widehat{L}_2]) = 0$$

для элементов $\widehat{L}_1 \subset C^\infty(M, E)$, $\widehat{L}_2 \subset C^\infty(M, F)$. Из определения группы Гротендика $K(\operatorname{Vect}(M)/\sim)$ следует, что существует обратимый четный оператор D , действующий в следующих пространствах

$$D: C^\infty(M, E \oplus E') \rightarrow C^\infty(M, F \oplus E').$$

Рассматривая большое число экземпляров расслоения E' , можно без ограничения общности считать, что в E' существует нечетное подрасслоение (см. лемму 2). Обозначим его через L .

Разность нечетных подпространств

$$[D(\widehat{L}_1 \oplus \widehat{L})] - [\widehat{L}_2 \oplus \widehat{L}] \in K(\widehat{\operatorname{Odd}}/\sim)$$

совпадает с исходным элементом $[\widehat{L}_1] - [\widehat{L}_2]$, а оба подпространства

$$D(\widehat{L}_1 \oplus \widehat{L}) \quad \text{и} \quad \widehat{L}_2 \oplus \widehat{L}$$

лежат в одном и том же пространстве $C^\infty(M, F \oplus E')$.

Таким образом, подпространства $\widehat{L}_{1,2}$ можно считать расположенными в одном и том же пространстве $C^\infty(M, E)$. В силу леммы 3 при большом N существуют четные обратимые операторы

$$D_{1,2}: C^\infty(M, 2^N E) \rightarrow C^\infty(M, 2^N E),$$

главные символы которых осуществляют изоморфизмы подрасслоений

$$\sigma(D_{1,2}): 2^N L_{1,2} \rightarrow 2^N \alpha^* L_{1,2}.$$

Поэтому подпространства

$$2^N \widehat{L}_{1,2} \quad \text{и} \quad (D_{1,2})^{-1} 2^N \widehat{L}_{1,2}^\perp$$

(здесь через $\widehat{L}^\perp$ обозначено произвольное нечетное дополнение к подпространству $\widehat{L}$) имеют одинаковые символы. Отсюда получаем, что в равенстве

$$2^{N+1}[\widehat{L}_{1,2}] = 2^N[\widehat{L}_{1,2} \oplus \widehat{L}_{1,2}^\perp] + [2^N \widehat{L}_{1,2}] - [D_{1,2}^{-1} 2^N \widehat{L}_{1,2}^\perp] \in K(\widehat{\operatorname{Odd}}/\sim)$$

последние два подпространства имеют равные символы. Следовательно, по лемме 1

$$[2^N \widehat{L}_{1,2}] - [D_{1,2}^{-1} 2^N \widehat{L}_{1,2}^\perp] \in \operatorname{Im} i.$$

Для завершения доказательства покажем равенство элементов

$$[\widehat{L}_1 \oplus \widehat{L}_1^\perp] \quad \text{и} \quad [\widehat{L}_2 \oplus \widehat{L}_2^\perp].$$

Четный обратимый оператор D'

$$D': \begin{array}{ccc} C^\infty(M, E) & & C^\infty(M, E) \\ \oplus & \longrightarrow & \oplus \\ C^\infty(M, E) & & C^\infty(M, E), \end{array} \quad (15)$$

переводящий эти подпространства одно в другое, в терминах нечетных проекторов P, Q на $\widehat{L}_{1,2}$ соответственно имеет вид

$$D' = \begin{pmatrix} QP + (1-Q)(1-P) & (1-Q)P + Q(1-P) \\ Q(1-P) + (1-Q)P & QP + (1-Q)(1-P) \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы завершено.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При доказательстве леммы 2 для произвольного векторного расслоения $E \in \text{Vect}(M)$ в пространстве сечений прямой суммы $2^N E$ было построено нечетное подпространство $\widehat{L} \subset C^\infty(M, 2^N E)$. Покажем, что отображение, сопоставляющее расслоению E подпространство $\widehat{L} \oplus \widehat{L}^\perp$, является по существу расщеплением последовательности (9). Более точно, справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Отображение*

$$j': (K(\text{Vect}(M)/\sim)) \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \rightarrow K(\widehat{\text{Odd}}/\sim) \otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right],$$

индуцированное сопоставлением

$$E \rightarrow [\widehat{L} \oplus \widehat{L}^\perp] \otimes \frac{1}{2^{N+1}},$$

корректно определено и является расщеплением последовательности (9), т.е. имеет место равенство $jj' = \text{Id}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно убедиться в том, что для корректности определения отображения j' достаточно проверить равенство

$$[\widehat{L} \oplus \widehat{L}^\perp] = [\widehat{L}_1 \oplus \widehat{L}_1^\perp]$$

для двух разных разбиений пространства $C^\infty(M, 2^N E)$ на нечетные составляющие. Но такая проверка уже была нами проделана в конце доказательства леммы 4 (см. формулу (15)).

Требуемое равенство $jj' = \text{Id}$ непосредственно следует из определения. Утверждение доказано.

Расщепление j' точной последовательности (9) немедленно приводит к следующему результату.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Гомоморфизмы групп*

$$K(\widehat{\text{Odd}}(M)/\sim) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (16)$$

продолжающие относительный индекс подпространств с равными главными символами

$$\text{ind}: K_0(\widehat{\text{Odd}}/\sim) \rightarrow \mathbb{Z},$$

находятся во взаимно однозначном соответствии с гомоморфизмами

$$\chi: K(\text{Vect}(M)/\sim) \rightarrow \mathbb{R};$$

при этом целочисленным нормировкам χ соответствуют гомоморфизмы, принимающие двоично-рациональные значения.

Рассмотрим более подробно гомоморфизм (16), определяемый нулевой нормировкой $\chi \equiv 0$. Из определения групп Гротендика, нормировки χ и расщепления j' точной последовательности (9) немедленно получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Существует единственный аддитивный функционал*

$$d: \widehat{\text{Odd}}(M) \rightarrow \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right],$$

обладающий следующими свойствами:

- 1) *инвариантность: для любого обратимого оператора U с четным главным символом справедливо равенство*

$$d(U\widehat{L}) = d(\widehat{L});$$

- 2) *относительная размерность: для двух подпространств $\widehat{L}_1$ и $\widehat{L}_2$ с равными символами имеет место формула*

$$d(\widehat{L}_1) - d(\widehat{L}_2) = \text{ind}(\widehat{L}_1, \widehat{L}_2);$$

- 3) *дополнительность: для любого (нечетного) подпространства $\widehat{L}$ имеет место равенство*

$$d(\widehat{L}) + d(\widehat{L}^\perp) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Из первого свойства функционала d следует его гомотопическая инвариантность.

Действительно, в доказательстве леммы 1 было показано, что для гладкой гомотопии нечетных проекторов P_t , отвечающих семейству подпространств $\widehat{L}_t$, можно так построить семейство обратимых операторов U_t , что $\widehat{L}_t = U_t \widehat{L}_0$. Таким образом, в силу свойства инвариантности функционала d получаем

$$d(\widehat{L}_t) = \text{const}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Вопрос о явной формуле для инварианта подпространств d не прост. Из предыдущей теоремы следует только, что этот инвариант может быть выражен в терминах относительного индекса подпространств и четного обратимого оператора

$$D: C^\infty(M, 2^N E) \rightarrow C^\infty(M, 2^N E),$$

строящегося по главному символу

$$\sigma(D): 2^N L \rightarrow 2^N \alpha^* L$$

в соответствии с леммой 3 по формуле

$$d(\widehat{L}) = \frac{1}{2^{N+1}} \text{ind}(D 2^N \widehat{L}, 2^N \widehat{L}^\perp).$$

В § 4 получена формула для функционала d в терминах η -инварианта Атьи–Пато-ди–Зингера.

§ 3. Индекс эллиптических операторов в нечетных подпространствах

Напомним понятие псевдодифференциального оператора, действующего в подпространствах [1].

Говорят, что псевдодифференциальный оператор D порядка m

$$D: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$$

действует в подпространствах

$$\widehat{L}_1 \subset C^\infty(M, E), \quad \widehat{L}_2 \subset C^\infty(M, F),$$

если выполнено включение

$$D\widehat{L}_1 \subset \widehat{L}_2.$$

При этом для ограничения оператора D на подпространства

$$D: \widehat{L}_1 \rightarrow \widehat{L}_2 \tag{17}$$

справедлив критерий фредгольмовости замыкания оператора по норме пространств Соболева (см. [19]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Оператор*

$$D: \widehat{L}_1 \rightarrow \widehat{L}_2,$$

где

$$\widehat{L}_1 \subset H^s(M, E), \quad \widehat{L}_2 \subset H^{s-m}(M, F),$$

фредгольмов тогда и только тогда, когда он эллиптичен, т.е. его главный символ

$$\sigma(D): L_1 \rightarrow L_2$$

является изоморфизмом расслоений L_1 и L_2 .

Для нашего случая (оператор действует в нечетных подпространствах на четномерных многообразиях) имеет место следующая формула индекса в терминах функционала d .

ТЕОРЕМА 3. *Для оператора*

$$D: \widehat{L}_1 \rightarrow \widehat{L}_2,$$

где

$$\widehat{L}_{1,2} \in \widehat{\text{Odd}}(M^{\text{ev}}), \quad \widehat{L}_1 \subset C^\infty(M, E), \quad \widehat{L}_2 \subset C^\infty(M, F),$$

имеет место формула индекса

$$\text{ind}(D, \widehat{L}_1, \widehat{L}_2) = \frac{1}{2} \text{ind } \widetilde{D} + d(\widehat{L}_1) - d(\widehat{L}_2), \tag{18}$$

причем эллиптический оператор

$$\widetilde{D}: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$$

определяется своим главным символом

$$\sigma(\widetilde{D}): \pi^* E \rightarrow \pi^* F$$

по формуле

$$L_1 \oplus \alpha^* L_1 \xrightarrow{\sigma(D) \oplus \alpha^* \sigma(D)} L_2 \oplus \alpha^* L_2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изменяя подпространства $\widehat{L}_{1,2}$ на конечномерные подпространства, можно считать, что оператор D , действующий в подпространствах, является изоморфизмом⁵. Выберем оператор $\widetilde{D}$ таким образом, чтобы он совпадал с исходным оператором D на подпространстве $\widehat{L}_1$. Для определенности можно также считать, что $\text{ind } \widetilde{D} \geq 0$ и выполнены соотношения

$$\text{coker } \widetilde{D} = 0, \quad \ker \widetilde{D} \subset \widehat{L}_1^\perp. \quad (19)$$

(Если $\text{ind } \widetilde{D} < 0$, то формулу индекса можно доказывать, рассматривая обратный к D оператор.) Проверим в этом случае формулу индекса (18).

Прежде всего в силу требований (19) имеем

$$\text{ind}(D, \widehat{L}_1, \widehat{L}_2) = 0, \quad \text{ind } \widetilde{D} = \dim \ker \widetilde{D}. \quad (20)$$

Вычислим теперь разность $d(\widehat{L}_1) - d(\widehat{L}_2)$. Для этого рассмотрим четный обратимый оператор U

$$U: \begin{array}{c} C^\infty(M, E) \\ \oplus \\ C^\infty(M, F) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C^\infty(M, E) \\ \oplus \\ C^\infty(M, F) \end{array}, \quad U = \begin{pmatrix} P_{\ker \widetilde{D}} & \widetilde{D}^{-1} \\ \widetilde{D} & 0 \end{pmatrix},$$

где $P_{\ker \widetilde{D}}$ – проектор на (конечномерное) ядро оператора $\widetilde{D}$, а оператор $\widetilde{D}^{-1}$ действует в ортогональное дополнение к этому ядру.

Нетрудно проверить, что оператор U изоморфно отображает нечетные подпространства

$$\widehat{L}_1 \oplus \widetilde{D}\widehat{L}_1^\perp \quad \text{на} \quad (\widehat{L}_1^\perp \ominus \ker \widetilde{D}) \oplus \widehat{L}_2. \quad (21)$$

Из (19) следует, что $\widetilde{D}\widehat{L}_1^\perp = \widehat{L}_2^\perp$. Применяя функционал d к подпространствам в формуле (21), получаем

$$d(\widehat{L}_1) - d(D\widehat{L}_1) = -d(\widehat{L}_1) - \dim \ker \widetilde{D} + d(\widehat{L}_2).$$

Поэтому

$$d(\widehat{L}_1) - d(\widehat{L}_2) = -\frac{1}{2} \dim \ker \widetilde{D} = -\frac{1}{2} \text{ind } \widetilde{D},$$

что вместе с соотношениями (20) доказывает требуемое соотношение

$$\text{ind}(D, \widehat{L}_1, \widehat{L}_2) = \frac{1}{2} \text{ind } \widetilde{D} + d(\widehat{L}_1) - d(\widehat{L}_2).$$

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для оператора, действующего между подпространством и пространством, справедлива следующая формула индекса:

$$\text{ind}(D, \widehat{L}, C^\infty(M, F)) = \frac{1}{2} \text{ind } \widetilde{D} + d(\widehat{L}), \quad (22)$$

где главный символ оператора $\widetilde{D}$

$$\widetilde{D}: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F \oplus F)$$

определяется формулой

$$\sigma(\widetilde{D}) = \sigma(D) \oplus \alpha^* \sigma(D).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2 для достаточно большого числа N можно разложить пространство $C^\infty(M, 2^N E)$ в прямую сумму двух его нечетных подпространств. Тогда формула (22) непосредственно следует из (18).

⁵ Для этого можно, например, удалить из подпространства $\widehat{L}_1$ ядро оператора D , а из $\widehat{L}_2$ – коядро этого оператора.

§ 4. Размерность и η -инвариант

Напомним [2], что классический псевдодифференциальный оператор A целого положительного порядка m называется *допустимым*, если его полный символ

$$a(x, \xi) \sim a_m(x, \xi) + a_{m-1}(x, \xi) + \dots$$

удовлетворяет условиям четности

$$a_\alpha(x, -\xi) = (-1)^\alpha a_\alpha(x, \xi) \quad \forall \xi \neq 0, \quad \alpha = m, m-1, m-2, \dots$$

(допустимость оператора не зависит от выбора системы координат, в которой рассматривается полный символ).

ТЕОРЕМА 4. *Для допустимого самосопряженного эллиптического оператора A нечетного порядка с неотрицательным спектральным подпространством $\hat{L}$ на четномерном многообразии имеет место формула*

$$d(\hat{L}) = \eta(A). \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из допустимости оператора A следует, что его главный символ является нечетным

$$\alpha^* \sigma(A) = -\sigma(A).$$

Поэтому из предложения 1 получаем, что неотрицательное спектральное подпространство $\hat{L}$ является нечетным (и даже ортогонально-нечетным). По лемме 3 существует четный изоморфизм σ

$$\sigma: 2^N \pi^* E \rightarrow 2^N \pi^* E$$

с нулевым (топологическим) индексом, переводящий подрасслоение $2^N L$ в $2^N \alpha^* L$. Рассмотрим обратимый оператор U_0 нулевого порядка с главным символом, равным σ . Будем также считать, что оператор U_0 является допустимым. Такой оператор можно построить следующим образом. Используя обычный метод построения псевдодифференциального оператора по главному символу σ в локальных картах на многообразии, получаем допустимый эллиптический оператор. Затем, изменяя полученный оператор на конечномерный, добиваемся обратимости. Построим унитарный оператор U по формуле

$$U = U_0(\sqrt{U_0^* U_0})^{-1}.$$

Он изоморфно переводит подпространство $2^N \hat{L}$ в подпространство с главным символом, равным $2^N \alpha^* L$. Таким образом, для функционала d имеем выражение через относительный индекс подпространств (см. замечание 7)

$$2^{N+1} d(\hat{L}) = \text{ind}(U 2^N \hat{L}, 2^N \hat{L}^\perp). \quad (24)$$

С другой стороны, η -инвариант эллиптического самосопряженного оператора определяется спектром. Поэтому из унитарности оператора U получаем

$$\eta(2^N A) = \eta(U 2^N A U^{-1}).$$

Операторы $-2^N A$ и $U2^N AU^{-1}$ имеют равные главные символы и являются допустимыми операторами нечетного порядка на четномерном многообразии. Отсюда следует, что разность их η -инвариантов равна относительному индексу неотрицательных спектральных подпространств для этих самосопряженных операторов

$$\eta(-2^N A) - \eta(U2^N AU^{-1}) = \text{ind}(\widehat{L}_+(-2^N A), \widehat{L}_+(U2^N AU^{-1})).$$

Таким образом, в терминах относительного индекса η -инвариант равен

$$2^{N+1}\eta(A) = \text{ind}(U2^N \widehat{L}, 2^N \widehat{L}^\perp).$$

Сравнивая последнюю формулу с выражением (24), получаем (23).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Нечетное подпространство $\widehat{L} \subset C^\infty(M, E)$ можно реализовать как неотрицательное спектральное подпространство для допустимого эллиптического самосопряженного оператора нечетного порядка тогда и только тогда, когда оно является ортогонально-нечетным, ортогональный проектор P на него является классическим

$$\sigma(P)(x, \xi) \sim \sum_{j \leq 0} p_j(x, \xi),$$

а младшие однородные составляющие полного символа удовлетворяют при $j < 0$ соотношениям

$$p_j(x, -\xi) = (-1)^{j+1} p_j(x, \xi). \quad (25)$$

Действительно, для обратимого самосопряженного эллиптического оператора A положительный спектральный проектор равен

$$P_+(A) = \frac{1}{2}(1 + A|A|^{-1}).$$

Из этого равенства, пользуясь исчислением полных символов псевдодифференциальных операторов, убеждаемся в необходимости требований (25).

Обратно, для классического псевдодифференциального ортогонального проектора P , удовлетворяющего (25), искомый самосопряженный оператор может быть задан формулой

$$A = \sqrt[4]{\Delta} (2P - 1) \sqrt[4]{\Delta},$$

где через Δ обозначен положительный оператор Лапласа в расслоении E .

§ 5. Индекс краевых задач с нечетными проекторами

Напомним, что в работе [19] был введен класс краевых задач для общих эллиптических операторов, т.е. операторов, вообще говоря, не удовлетворяющих условию Аты–Ботта [20]. Эти краевые задачи имеют вид

$$\begin{cases} Du = f \in H^{s-m}(M, F), & u \in H^s(M, E), \\ Bu = g \in \widehat{L} \subset H^\delta(\partial M, G), \end{cases} \quad (26)$$

где подпространство $\widehat{L}$ является образом псевдодифференциального проектора, а B – некоторый граничный оператор.

В работе [1] была произведена редукция общей краевой задачи вида (26) к так называемой *спектральной краевой задаче* [21] для оператора первого порядка, имеющего специальный вид в окрестности края многообразия M . Поэтому в настоящей работе можно ограничиться рассмотрением проблемы индекса спектральных краевых задач. Опишем эти задачи более подробно.

Рассмотрим на гладком компактном многообразии M с краем $X = \partial M$ эллиптический оператор

$$D: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F),$$

вне некоторой окрестности края являющийся эллиптическим псевдодифференциальным оператором первого порядка, а в воротниковой окрестности

$$U_{\partial M} = [0, 1) \times \partial M$$

с нормальной к краю координатой t имеющий вид

$$D|_{U_{\partial M}} = \chi(t) \left[-i \frac{\partial}{\partial t} - iA(t) \right]. \quad (27)$$

Здесь $\chi(t)$ — гладкий изоморфизм векторных расслоений E и F , а $A(t)$ — гладкое семейство псевдодифференциальных операторов первого порядка на крае с главными символами $\sigma(A(t))(\xi')$, у которых нет чисто мнимых собственных значений при $|\xi'| \neq 0$. Более того, можно считать, что главный символ оператора $A(0)$ на единичных кокасательных сферах к краю S^*X имеет только 2 собственных значения ± 1 :

$$\sigma(A(0))^2 = 1 \quad \text{при} \quad |\xi'| = 1 \quad (28)$$

и имеет базис, состоящий из собственных векторов.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Оператор D в формуле (27) в общем случае является эллиптическим оператором с *непрерывным* символом в смысле [22].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Спектральной краевой задачей* для эллиптического оператора D на многообразии M с краем называется система вида

$$\begin{cases} Du = f \in H^{s-1}(M, E), & u \in H^s(M, F), \\ Pu|_{\partial M} = g \in \widehat{L} = \text{Im } P \subset H^{s-1/2}(\partial M, E|_{\partial M}) \end{cases} \quad (29)$$

(см. [1]), где символ допустимого подпространства $\widehat{L}$ на крае ∂M равен неотрицательному спектральному подпространству символа $\sigma(A(0))$.

Краевую задачу вида (29) будем обозначать через $(D, \widehat{L})$.

Рассмотрим спектральную краевую задачу (29), в которой подпространство $\widehat{L}$ является нечетным. В этом случае главный символ оператора D может быть продолжен на дубль

$$2M \stackrel{\text{def}}{=} M \bigcup_{\partial M} M$$

многообразия M по формуле

$$\sigma(D) \bigcup_{S^*M|_{\partial M}} \alpha^* \sigma^{-1}(D).$$

Проверим непрерывность получающегося символа в месте склейки многообразий, т.е. убедимся в совпадении символов $\sigma(D)$ и $\alpha^*\sigma^{-1}(D)$ на расслоении $S^*M|_{\partial M}$ кокасательных сфер к многообразию M над краем.

Обозначим через τ и ξ' переменные, двойственные соответственно нормальной и касательным координатам к краю ∂M . Главный символ оператора $A(0)$ обозначим через $\sigma(\xi')$. Тогда из формулы (27) получаем (полагая для краткости $\chi(0) = \text{Id}$)

$$\sigma(D)(\tau, \xi') = \tau - i\sigma(\xi').$$

С другой стороны, в силу нечетности символа $\sigma(\xi')$ имеем

$$\sigma(D)(\tau, -\xi') = \tau + i\sigma(\xi').$$

Поэтому в силу (28) на единичных сферах $S^*M|_{\partial M}$: $\tau^2 + |\xi'|^2 = 1$ имеем

$$\sigma^{-1}(D)(\tau, -\xi') = \tau - i\sigma(\xi').$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\sigma(D)(\tau, \xi') = \sigma^{-1}(D)(\tau, -\xi'),$$

которое, как нетрудно видеть, эквивалентно условию непрерывной склейки эллиптических символов $\sigma(D)$ и $\alpha^*\sigma^{-1}(D)$, определенных на соответствующих половинках дубля $2M$.

Эллиптический оператор, получающийся по построенному символу

$$\sigma(\tilde{D}) = \sigma(D) \bigcup_{S^*M|_{\partial M}} \alpha^*\sigma^{-1}(D), \quad (30)$$

обозначим через $\tilde{D}$.

На четномерном многообразии M эта операция приводит к одному из слагаемых в формуле индекса краевых задач с нечетными подпространствами. Формулу индекса сформулируем в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 5. *Для спектральной краевой задачи $(D, \hat{L})$ с нечетным подпространством $\hat{L} \in \widehat{\text{Odd}}(M^{\text{ev}})$ имеет место формула индекса*

$$\text{ind}(D, \hat{L}) = \frac{1}{2} \text{ind } \tilde{D} - d(\hat{L}), \quad (31)$$

где эллиптический оператор на дубле $2M$ определен формулой (30), а функционал d определен в §2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в случае четных краевых задач [1], основная идея доказательства состоит в редукции к краевой задаче, являющейся в некотором смысле классической.

Проверим сначала, что доказываемая формула индекса справедлива в ситуации, когда подпространство $\widehat{L}$ есть сумма дополнительных подпространств

$$\widehat{L} = \widehat{L}_0 \oplus \widehat{L}_0^\perp, \quad \widehat{L}_0 \subset C^\infty(\partial M, G). \quad (32)$$

В силу свойства дополненности (см. теорему 2) получаем $d(\widehat{L}) = 0$. Поэтому наша проверка сводится к выяснению справедливости равенства

$$\text{ind}(D, \widehat{L}_0 \oplus \widehat{L}_0^\perp) = \frac{1}{2} \text{ind } \widetilde{D}. \quad (33)$$

Для этого рассмотрим более внимательно спектральную задачу $(D, \widehat{L}_0 \oplus \widehat{L}_0^\perp)$. Такая задача в силу изоморфизма

$$B_0: \widehat{L}_0 \oplus \widehat{L}_0^\perp \rightarrow C^\infty(\partial M, G), \quad u \oplus v \rightarrow u + v,$$

может рассматриваться как классическая краевая задача. Тогда из (когомологической) формулы индекса классических краевых задач получаем

$$\text{ind}_t(\sigma(D), L_0 \oplus \alpha^* L_0) = -\text{ind}_t(\alpha^*[\sigma(D), L_0 \oplus \alpha^* L_0])$$

(ср. с доказательством формулы (12)).

Таким образом,

$$2 \cdot \text{ind}(D, \widehat{L}_0 \oplus \widehat{L}_0^\perp) = \text{ind}_t(\sigma(D), L_0 \oplus \alpha^* L_0) - \text{ind}_t(\alpha^*[\sigma(D), L_0 \oplus \alpha^* L_0]).$$

Аддитивность топологического индекса дает окончательно

$$\begin{aligned} \text{ind}_t(\sigma(D), L_0 \oplus \alpha^* L_0) - \text{ind}_t(\alpha^*[\sigma(D), L_0 \oplus \alpha^* L_0]) \\ = \text{ind}_t(\sigma(D) \cup \alpha^* \sigma^{-1}(D)) = \text{ind } \widetilde{D}. \end{aligned}$$

Таким образом, формула индекса в случае разложения (32) установлена. Убедимся теперь в справедливости формулы индекса при условии, что разложение (32) имеет место только на уровне символов подпространств

$$L = L_0 \oplus \alpha^* L_0. \quad (34)$$

Действительно, по логарифмическому свойству индекса имеем

$$\text{ind}(D, \widehat{L}) = \text{ind}(D, \widehat{L}_0 \oplus \widehat{L}_0^\perp) + \text{ind}(\widehat{L}_0 \oplus \widehat{L}_0^\perp, \widehat{L}). \quad (35)$$

При этом, с одной стороны,

$$\text{ind}(\widehat{L}_0 \oplus \widehat{L}_0^\perp, \widehat{L}) = d(\widehat{L}_0 \oplus \widehat{L}_0^\perp) - d(\widehat{L}) = -d(\widehat{L}),$$

а с другой, по уже доказанному

$$\text{ind}(D, \widehat{L}_0 \oplus \widehat{L}_0^\perp) = \frac{1}{2} \text{ind } \widetilde{D}.$$

Подставляя эти два результата в формулу (35), убеждаемся в справедливости формулы индекса и в этой ситуации.

Для завершения доказательства формулы индекса (31) произведем редукцию краевой задачи $(D, \widehat{L})$ к уже рассмотренному случаю. С этой целью воспользуемся доставляемым леммой 3 § 2 четным обратимым оператором

$$U: C^\infty(\partial M, 2^N E) \rightarrow C^\infty(\partial M, 2^N E)$$

с главным символом u , осуществляющим изоморфизм нечетных расслоений

$$u: 2^N L \rightarrow \alpha^* 2^N L.$$

Такой оператор позволяет продеформировать нечетное подпространство $2^{N+2} \widehat{L}$ в подпространство, главный символ которого имеет разложение вида (34)

$$2^{N+1}(L \oplus \alpha^* L),$$

по формуле

$$\begin{aligned} U_\varphi: C^\infty(\partial M, 2^{N+2} E) &\rightarrow C^\infty(\partial M, 2^{N+2} E), \quad \varphi \in [0, \pi/2], \\ U_\varphi &= 1_{2^{N+2} E} \oplus \begin{pmatrix} \cos \varphi & -U^{-1} \sin \varphi \\ U \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (36)$$

В работе [23] показано, что деформируя оператор D в окрестности края, гомотопию подпространств, участвующих в краевой задаче, можно поднять до гомотопии спектральных краевых задач. Таким образом, спектральная краевая задача

$$(2^{N+2} D, 2^{N+2} \widehat{L})$$

гомотопна спектральной краевой задаче с главным символом вида (33)

$$(\sigma(D'), 2^{N+1}(L \oplus \alpha^* L)).$$

На этом доказательство теоремы завершено, так как составляющие формулы индекса (31) являются гомотопическими инвариантами.

§6. Пример

На компактном гладком многообразии M без края рассмотрим эллиптический псевдодифференциальный оператор

$$D: C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F).$$

По оператору D построим эллиптический самосопряженный оператор A , полагая

$$A = \begin{pmatrix} 0 & D^* \\ D & 0 \end{pmatrix}: \begin{array}{c} C^\infty(M, E) \\ \oplus \\ C^\infty(M, F) \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C^\infty(M, E) \\ \oplus \\ C^\infty(M, F) \end{array}.$$

Через $\widehat{L}_+(A)$ обозначим подпространство, порожденное собственными векторами оператора A , отвечающими неотрицательным собственным значениям

$$\widehat{L}_+(A) \subset C^\infty(M, E) \oplus C^\infty(M, F). \quad (37)$$

Оператор ортогонального проектирования на второе слагаемое в этой формуле обозначим через P_0 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Оператор в подпространствах*

$$P_0: \widehat{L}_+(A) \rightarrow C^\infty(M, F)$$

является эллиптическим, а его индекс может быть вычислен по формуле

$$\ker P_0 = \ker D \oplus 0, \quad \text{coker } P_0 = 0, \quad \text{ind}(P_0, \widehat{L}_+(A), C^\infty(M, F)) = \dim \ker D.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим, прежде всего, подпространство $\widehat{L}_+(A)$ в терминах разложения (37). Несложное вычисление показывает, что это подпространство порождено собственными векторами оператора A вида

$$\begin{pmatrix} u \\ Du/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u' \in \ker D, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad v \in \ker D^*, \quad (38)$$

где u – собственный вектор неотрицательного оператора D^*D , отвечающий положительному собственному значению λ . Доказываемое утверждение об индексе непосредственно следует из этой формулы.

Найдем теперь индекс оператора P_0 , пользуясь формулой индекса операторов в подпространствах (см. формулу (22)). Для этого предположим, что оператор D является, например, дифференциальным оператором нечетного порядка и что он задан на четномерном многообразии M .

Вычислим слагаемые в формуле индекса

$$\text{ind}(P_0, \widehat{L}_+(A), C^\infty(M, F)) = \frac{1}{2} \text{ind } \widetilde{P}_0 + \eta(A). \quad (39)$$

Эллиптический оператор $\widetilde{P}_0$

$$\widetilde{P}_0: C^\infty(M, E \oplus F) \rightarrow C^\infty(M, F \oplus F)$$

по определению имеет главный символ, равный

$$\sigma(\widetilde{P}_0)(\xi) = \sigma(P_0)(\xi) \oplus \sigma(P_0)(-\xi): L_+(A) \oplus L_-(A) \rightarrow \pi^*(F \oplus F),$$

что в соответствии с формулой (38) позволяет переписать этот символ в виде

$$\sigma(\widetilde{P}_0) = \frac{\sigma(D)}{\sqrt{\sigma(D^*)\sigma(D)}} \oplus 1: \pi^*(E \oplus F) \rightarrow \pi^*(F \oplus F).$$

Отсюда получаем

$$\text{ind } \widetilde{P}_0 = \text{ind } D.$$

Вычислим, наконец, η -инвариант оператора A . Оператор A имеет спектральную симметрию (т.е. его собственные значения расположены на вещественной оси симметрично относительно точки нуль образом и значения с противоположными знаками имеют равные кратности). Поэтому η -функция оператора равна константе

$$\eta(A)(s) = \frac{1}{2} \left(\dim \ker A + \sum_{\lambda_i \neq 0} |\lambda_i|^{-s} \text{sgn } \lambda_i \right) \equiv \frac{1}{2} \dim \ker A.$$

Для η -инварианта получаем

$$\eta(A) = \eta(A)(0) = \frac{1}{2} (\dim \ker D + \dim \ker D^*) = -\frac{1}{2} \text{ind } D + \dim \ker D.$$

Таким образом, правая часть формулы индекса равна

$$\frac{1}{2} \text{ind } \widetilde{P}_0 + \eta(A) = \frac{1}{2} \text{ind } D - \frac{1}{2} \text{ind } D + \dim \ker D = \dim \ker D,$$

что совпадает с индексом оператора P_0 , вычисленным в предложении 6.

Дополнение

Рассмотрим два подпространства $\widehat{L}_{1,2}$ с одинаковыми символами. *Относительным индексом подпространств $\widehat{L}_1$ и $\widehat{L}_2$* называется число, равное индексу фредгольмова оператора, определяемого псевдодифференциальными проекторами на эти подпространства

$$\text{ind}(\widehat{L}_1, \widehat{L}_2) = \text{ind}(P_2: \text{Im } P_1 \rightarrow \text{Im } P_2) \quad \text{для } \widehat{L}_{1,2} = \text{Im } P_{1,2}.$$

Относительный индекс не зависит от выбора проекторов $P_{1,2}$ на соответствующие подпространства. Он имеет геометрическую интерпретацию.

Действительно, рассмотрим грассманиан $\text{Gr}(L)$, состоящий из допустимых подпространств с символом, равным L (будем считать, что символ L нетривиален, т.е. выполнены неравенства $0 < \dim L < \dim E$). В работе [16] доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. *Грассманиан $\text{Gr}(L)$ является классифицирующим пространством для K -теории.*

С другой стороны, хорошо известно (Атья–Яних [24]), что классифицирующим пространством для K -теории является пространство фредгольмовых операторов $\text{Fred}(H)$ в некотором фиксированном сепарабельном гильбертовом пространстве H , т.е. для пространства X имеет место изоморфизм групп

$$\text{ind}: [X, \text{Fred}(H)] \rightarrow K(X), \quad (40)$$

причем отображение задается индексом семейства фредгольмовых операторов.

Обе реализации K -теории (т.е. по теореме 6 и теореме Атья–Яниха) связаны простой формулой – относительным индексом подпространств. А именно, зафиксируем некоторое подпространство $\widehat{L}_0$ с главным символом, равным L , и для каждого подпространства $\widehat{L} \in \text{Gr}(L)$ рассмотрим фредгольмов оператор:

$$P_0: \widehat{L} \rightarrow \widehat{L}_0, \quad \widehat{L}_0 = \text{Im } P_0.$$

Таким образом, определено отображение

$$\text{Gr}(L) \rightarrow \text{Fred}$$

во множество фредгольмовых операторов в гильбертовых пространствах. Следует отметить, что в этом случае получается фредгольмов оператор, который в зависимости от точки грассманиана $\widehat{L} \in \text{Gr}(L)$ действует в разных гильбертовых пространствах⁶. В терминах грассманиана $\text{Gr}(L)$ отображение, осуществляющее изоморфизм

$$\beta: [X, \text{Gr}(L)] \xrightarrow{\beta} K(X),$$

и обратное к нему задаются формулами

$$\beta(\widehat{L}(x)) = \text{ind}(P_0: \widehat{L}(x) \rightarrow \widehat{L}_0) \in K(X),$$

⁶ Впрочем, в силу теоремы Кюйпера [25] о стягиваемости унитарной группы гильбертова пространства получающийся оператор можно свести к оператору, действующему в фиксированном гильбертовом пространстве.

где через $\widehat{L}(x)$ обозначено семейство подпространств с символом, равным L , с параметром $x \in X$. Обратное отображение задается формулой

$$\beta^{-1}([E] - [F]) = [(\widehat{L}_0 \ominus F) \oplus E] \in [X, \text{Gr}(L)],$$

где семейство подпространств, обозначаемое через $(\widehat{L}_0 \ominus F) \oplus E$, строится следующим образом. Используя бесконечную размерность пространства $\widehat{L}_0$ и его бесконечную коразмерность, вложим векторное расслоение F в тривиальное векторное расслоение над X со слоем $\widehat{L}_0$, а E вложим в расслоение со слоем $\widehat{L}_0^\perp$ — ортогональным дополнением к $\widehat{L}_0$.

Список литературы

1. Савин А. Ю., Стернин Б. Ю. Эллиптические операторы в четных подпространствах // Матем. сб. 1999. Т. 190. №8. С. 125–160.
2. Gilkey P. B. The eta invariant of even order operators // Differential geometry. Proc. 3rd Internat. Symp. (Peniscola, Spain, 1988). Lecture Notes in Math. 1989. V. 1410. P. 202–211.
3. Atiyah M. F., Patodi V. K., Singer I. M. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. II // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1976. V. 78. P. 405–432.
4. Gilkey P. B. The eta invariant for even dimensional Pin^c manifolds // Adv. Math. 1985. V. 58. P. 243–284.
5. Bahri A. P., Gilkey P. B. The eta invariant, Pin^c bordism, and equivariant Spin^c bordism for cyclic 2-groups // Pacific J. Math. 1987. V. 128. №1. P. 1–24.
6. Gilkey P. B. The eta invariant of Pin manifolds with cyclic fundamental groups // Periodica Math. Hungarica. 1998. V. 36. P. 139–170.
7. Stolz S. Exotic structures on 4-manifolds detected by spectral invariants // Invent. Math. 1988. V. 94. P. 147–162.
8. Liu K., Zhang W. Elliptic genus and η -invariant // Internat. Math. Res. Notices. 1994. V. 8. P. 319–328.
9. Liu K. Modular invariance and characteristic numbers // Comm. Math. Phys. 1995. V. 174. №1. P. 29–41.
10. Savin A. Yu., Sternin B. Yu. On the index of boundary value problems for general elliptic operators // Proc. Conf. "Operator Algebras and Asymptotics on Manifolds with Singularities", Warsaw, 1999. P. 30–32.
11. Savin A. Yu., Sternin B. Yu. Elliptic operators in odd subspaces // Preprint № 99/11. Univ. Potsdam, Institut für Mathematik, Potsdam, Juni 1999.
12. Gilkey P. B. The eta invariant and non-singular bilinear products on $\mathbb{R}^n$ // Canad. Math. Bull. 1987. V. 30. P. 147–154.
13. Atiyah M. F., Patodi V. K., Singer I. M. Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1975. V. 77. P. 43–69.
14. Сулливан Д. Геометрическая топология. Локализация, периодичность и симметрия Галуа. М.: Мир, 1975.
15. Baum P., Douglas R. G. K -homology and index theory // Operator algebras and applications. Proc. Symp. Pure Math. 38, Part 1, Kingston/Ont. 1980, 1982. P. 117–173.
16. Wojciechowski K. A note on the space of pseudodifferential projections with the same principal symbol // J. Operator Theory. 1986. V. 15. №2. P. 207–216.
17. Epstein C., Melrose R. Contact degree and the index of Fourier integral operators // Math. Res. Lett. 1998. V. 5. №3. P. 363–381.
18. Husemoller D. Fiber bundles. New York: McGraw-Hill, 1966.
19. Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., Шульце Б.-В. Об общих краевых задачах для эллиптических уравнений // Матем. сб. 1998. Т. 189. №10. С. 145–160.
20. Atiyah M. F., Bott R. The index problem for manifolds with boundary // Bombay Colloquium on Differential Analysis. Oxford: Oxford Univ. Press, 1964. P. 175–186.
21. Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е., Шульце Б.-В. Спектральные краевые задачи и эллиптические уравнения на многообразиях с особенностями // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. №5. С. 695–708.

- 22. *Rempel S., Schulze B.-W.* Index theory of elliptic boundary problems. Berlin: Akademie-Verlag, 1982.
- 23. *Савин А. Ю., Стернин В. Ю., Шульце Б.-В.* Об инвариантных формулах индекса спектральных краевых задач // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 5. С. 705–714.
- 24. *Atiyah M. F.* *K*-Theory. Cambridge: Addison-Wesley, 1989.
- 25. *Kuiper N. H.* The homotopy type of the unitary group of Hilbert spaces // Topology. 1965. V. 3. P. 19–30.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
13.07.1999