Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Толстоногов, Сходимость по Моско интегральных функционалов и ее приложения, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 3, 119–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm5007>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:32:43

УДК 517.987.4

А. А. Толстоногов

Сходимость по Моско интегральных функционалов и ее приложения

Изучаются вопросы сходимости по Моско интегральных функционалов, определенных на пространстве интегрируемых с квадратом функций со значениями в гильбертовом пространстве. Интегрантами у этих функционалов являются зависящие от времени собственные выпуклые полунепрерывные снизу функции, определенные на гильбертовом пространстве. Полученные результаты применяются к изучению зависимости от параметра решений эволюционных уравнений с зависящими от времени субдифференциальными операторами. В качестве примера рассмотрено параболическое включение, в правую часть которого входит сумма p -лапласиана и субдифференциала индикаторной функции зависящего от времени выпуклого замкнутого множества. Исследована сходимость решений этого включения при $p \rightarrow +\infty$.

Библиография: 20 названий.

Ключевые слова: сходимость по Моско, интегральные функционалы, p -лапласиан.

§ 1. Введение

Пусть $T = [0, 1]$ – отрезок числовой прямой $\mathbb{R}$, H – гильбертово пространство. Функция $\varphi: H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ называется *собственной*, если она не равна тождественно $+\infty$, т.е. если ее эффективная область $\text{dom } \varphi = \{x \in H; \varphi(x) < +\infty\}$ не пуста. Множество всех функций $\varphi: H \rightarrow (-\infty, +\infty]$, которые являются собственными выпуклыми и полунепрерывными снизу, будем обозначать через $\Gamma_0(H)$. Для $\varphi \in \Gamma_0(H)$ через $\partial\varphi(x)$ будем обозначать ее субдифференциал в точке x (см. [1]), а через $\text{dom } \partial\varphi = \{x \in H; \partial\varphi(x) \neq \emptyset\}$ – область определения $\partial\varphi$. Известно (см. [1]), что отображение $\partial\varphi: H \rightarrow H$, которое мы будем называть *субдифференциалом функции φ* , является максимально монотонным оператором, $\text{dom } \partial\varphi \subset \text{dom } \varphi$ и $\overline{\text{dom } \partial\varphi} = \overline{\text{dom } \varphi}$, где черта означает замыкание в H .

Пусть $\varphi_n^t \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, $n \geq 1$. При соответствующих предположениях относительно зависимости φ_n^t , $n \geq 1$, от t мы можем определить функционалы

$$\Phi_n(x) = \int_T \varphi_n^t(x(t)) dt, \quad x \in L^2(T, H). \quad (1.1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00247) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1676.2008.1).

Нас будут интересовать вопросы сходимости по Моско (см. [2]) последовательности Φ_n , $n \geq 1$, при $n \rightarrow \infty$.

Со сходимостью по Моско последовательности Φ_n , $n \geq 1$, тесно связана задача о предельных переходах при $n \rightarrow \infty$ в эволюционных включениях в гильбертовом пространстве

$$-\dot{x}_n(t) \in \partial\varphi_n^t(x_n(t)) + f_n(t), \quad n \geq 1, \quad f_n \in L^2(T, H). \quad (1.2)$$

Вопрос о том, что является пределом последовательности решений $x_n(\cdot)$, $n \geq 1$, включения (1.2), возникает при изучении различных физических задач (см. [3]–[8] и др.).

В качестве примера мы рассматриваем следующую задачу. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с гладкой границей; $K^t \subset \mathbb{R}$, $t \in T$, – зависящее от времени выпуклое замкнутое множество, содержащее нуль; $I(K^t)$ – индикаторная функция множества K^t и $\partial I(K^t)$ – субдифференциал функции $I(K^t)$.

Возникает вопрос: что является пределом последовательности $u(p)(\cdot)$, $N < p < +\infty$, решений включений

$$-\dot{u}_t(p)(t, x) \in -\operatorname{div}(\|\nabla u(p)(t, x)\|^{p-2} \nabla u(p)(t, x)) + \partial I(K^t)(u(p)(t, x)) + f(p)(t, x)$$

при $p \rightarrow +\infty$, когда $f(p)$ слабо сходится в $L^2(T \times \Omega)$ к f ?

В приложении мы даем ответ на этот вопрос. Сходимость функционалов (1.1) и предельные переходы во включениях (1.2) с субдифференциальными операторами, зависящими от времени, изучались в [6], [9].

Предельный переход во включениях

$$-u_t(p)(t, x) \in -\operatorname{div}\left(\left(\frac{1}{\gamma(x, t)}\right)^p \|\nabla u(p)(t, x)\|^{p-2} \nabla u(p)(t, x)\right) + f(p)(t, x)$$

при $p \rightarrow \infty$, когда $f(p)$ сходится в $L^2(T, L^2(\Omega))$ к f , рассматривался в [9]. Здесь $\gamma(x, t) = \pi(x)\theta(t)$, $\pi \in L^\infty(\Omega)$, $\theta \in W^{1,2}(T)$, $\gamma(x, t) \geq \delta > 0$ для почти всех $x \in \Omega$ и всех $t \in T$. Наши результаты обобщают и дополняют известные результаты подобного типа, в том числе результаты работ [6], [9].

§ 2. Основные обозначения, определения и предложения

Пусть H – гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Для банахова пространства X символ ω - X означает, что пространство X наделено слабой $\sigma(X, X^*)$ топологией (см. [10]), где X^* – пространство, топологически сопряженное к X . Такое же обозначение мы используем и для подмножеств пространства X с топологией, индуцированной топологией пространства ω - X . В остальных случаях пространство X и его подмножества наделены сильной (нормированной) топологией.

Пусть $W^{1,2}(T, H)$ – пространство абсолютно непрерывных функций $x: T \rightarrow H$ с производной $\dot{x}(\cdot) \in L^2(T, H)$. Через $C(T, H)$ мы обозначаем пространство непрерывных функций $x: T \rightarrow H$ с топологией равномерной сходимости на T .

Многозначное отображение $F: H \rightarrow H$ называется *полунепрерывным снизу по Вьеторису* в точке $x_0 \in H$, если для любого открытого множества $U \subset H$,

$F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что $F(x) \cap U \neq \emptyset$ для любого $x \in V(x_0)$.

Воспользовавшись утверждением 3.19 из [2], введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть X – рефлексивное банахово пространство, $F_n: X \rightarrow (-\infty, +\infty]$, $n \geq 1$, – последовательность функций. Последовательность F_n , $n \geq 1$, *сходится к* $F: X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ *в смысле Моско* ($F_n \xrightarrow{M} F$), если:

- 1) для любого $x \in X$ существует последовательность $x_n \rightarrow x$ такая, что $F_n(x_n) \rightarrow F(x)$;
- 2) для любого $x \in X$ и любой последовательности $x_n \in X$, $n \geq 1$, сходящейся к x в пространстве ω - H , имеет место неравенство

$$F(x) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n).$$

Отметим, что введенное в [2] определение сходимости по Моско (определение 3.17) отличается от нашего. Однако согласно утверждению 3.19 из [2] эти определения эквивалентны.

Пусть $\varphi \in \Gamma_0(H)$. Поскольку $\partial\varphi$ является максимально монотонным оператором (см. [1]), то для него будут определены операторы из H в H :

$$J_\lambda = (I + \lambda \partial\varphi)^{-1}, \quad (\partial\varphi)_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda), \quad \lambda > 0, \quad (2.1)$$

где I – тождественный оператор на H , которые называются *резольвентой* и *аппроксимацией Иосиды* оператора $\partial\varphi$ соответственно. Эти операторы обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \|J_\lambda(x) - J_\lambda(y)\| &\leq \|x - y\|, & \|(\partial\varphi)_\lambda(x) - (\partial\varphi)_\lambda(y)\| &\leq \frac{1}{\lambda}\|x - y\|, \\ \lambda &> 0, & x, y &\in H. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Для каждого $\lambda > 0$ *регуляризацией Моро–Иосиды* функции $\varphi \in \Gamma_0(H)$ называется функция

$$\varphi_\lambda(x) = \inf \left\{ \varphi(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y - x\|^2, \ y \in H \right\}.$$

Следующие свойства функций φ_λ и операторов J_λ , $(\partial\varphi)_\lambda$ хорошо известны (см. [1], [9] и др). Поскольку эти свойства используются в наших доказательствах, приведем их.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть $\varphi \in \Gamma_0(H)$. Тогда:

- (1) φ_λ является конечной непрерывной и выпуклой функцией на H ;
- (2) φ_λ является дифференцируемой по Фреше, и для ее производной $\partial\varphi_\lambda$ по Фреше имеет место равенство

$$\partial\varphi_\lambda = (\partial\varphi)_\lambda, \quad \lambda > 0; \quad (2.3)$$

- (3) для любых $x \in H$, $\lambda > 0$

$$\varphi_\lambda(x) \leq \varphi(x), \quad \varphi_\lambda(x) \uparrow \varphi(x) \quad \text{при } \lambda \downarrow 0; \quad (2.4)$$

(4) если $x \in \text{dom } \partial\varphi$, то

$$\|\partial\varphi_\lambda(x)\| \leq \|(\partial\varphi)^\circ(x)\|, \quad \partial\varphi_\lambda(x) \rightarrow (\partial\varphi)^\circ(x) \text{ при } \lambda \downarrow 0, \quad (2.5)$$

где $(\partial\varphi)^\circ(x)$ – единственный элемент множества $\partial\varphi(x)$ такой, что

$$\|(\partial\varphi)^\circ(x)\| = \min\{\|y\|; y \in \partial\varphi(x)\};$$

(5) для любых $\lambda, \mu > 0$, $x \in H$

$$J_\lambda(x) = J_\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}x + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)J_\lambda(x)\right); \quad (2.6)$$

(6) для любых $\lambda > 0$, $x \in H$

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{1}{2\lambda}\|x - J_\lambda(x)\|^2 + \varphi(J_\lambda(x)); \quad (2.7)$$

(7) для любых $\lambda > 0$, $x, y \in H$

$$\varphi_\lambda(x) \leq \varphi_\lambda(y) + \|\partial\varphi_\lambda(x)\| \|x - y\|; \quad (2.8)$$

(8) если $\lambda_n \downarrow 0$ и $x_n \in H$, $n \geq 1$, $x_n \rightarrow x$, то

$$\varphi(x) \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\lambda_n}(x_n). \quad (2.9)$$

Пусть Λ – компактное метрическое пространство и $\varphi^t(p) \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, $p \in \Lambda$. Рассмотрим включения

$$\begin{aligned} -\dot{x}(p)(t) &\in \partial\varphi^t(p)(x(p)(t)) + f(t), \\ f &\in L^2(T, H), \quad x(p)(0) = y(p) \in \text{dom } \varphi^0(p), \quad p \in \Lambda. \end{aligned} \quad (2.10)$$

При фиксированном $p \in \Lambda$ под решением включения (2.10) понимается функция $x(p) \in W^{1,2}(T, H)$, $x(p)(0) = y(p)$, такая, что $x(p)(t) \in \text{dom } \partial\varphi^t(p)$ почти всюду и почти всюду на T имеет место включение (2.10).

Введем следующее

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ $H(\varphi)$. Семейство функций $\varphi^t(p) \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, $p \in \Lambda$, обладает следующими свойствами:

- (1) $\varphi^t(p_n) \xrightarrow{M} \varphi^t(p)$, $t \in T$, для любого $p \in \Lambda$ и любой последовательности $p_n \in \Lambda$, $n \geq 1$, $p_n \rightarrow p$;
- (2) существует $c_0 > 0$ такое, что

$$\{x \in H; \varphi^0(p)(x) < c_0\} \neq \emptyset \quad \forall p \in \Lambda; \quad (2.11)$$

- (3) для любых $r > 0$, $p \in \Lambda$ существуют функции $a_r(p) \in W^{1,2}(T)$, $b_r(p) \in W^{1,1}(T)$ такие, что для любых $s, t \in T$, $s \leq t$, $x \in \text{dom } \varphi^s(p)$ с $\|x\| \leq r$ найдется $x_1 \in \text{dom } \varphi^t(p)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\|x_1 - x\| \leq |a_r(p)(t) - a_r(p)(s)| (1 + |\varphi^s(p)(x)|^{1/2}), \quad (2.12)$$

$$\varphi^t(p)(x_1) - \varphi^s(p)(x) \leq |b_r(p)(t) - b_r(p)(s)| (1 + |\varphi^s(p)(x)|); \quad (2.13)$$

(4) для каждого $r > 0$ множества

$$\{\dot{a}_r(p), p \in \Lambda\}, \quad \{\dot{b}_r(p), p \in \Lambda\}$$

относительно компактны в $\omega\text{-}L^2(T)$ и $\omega\text{-}L^1(T)$ соответственно.

Всюду в дальнейшем мы предполагаем, что предположения $H(\varphi)$ имеют место.

§ 3. Вспомогательные результаты

Рассмотрим многозначное отображение $F(c): \Lambda \rightarrow H$, определенное по правилу

$$F(c)(p) = \{x \in H; \varphi^0(p)(x) \leq c\}, \quad c \geq c_0, \quad p \in \Lambda, \quad (3.1)$$

где $c_0 > 0$ – константа, фигурирующая в неравенстве (2.11).

ЛЕММА 3.1. *Для любого $c \geq c_0$ многозначное отображение $F(c): \Lambda \rightarrow H$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису с замкнутыми выпуклыми значениями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $c = c_0$, поскольку при $c > c_0$ доказательство проводится аналогично. Пусть

$$U(p) = \{x \in H; \varphi^0(p)(x) < c_0\}. \quad (3.2)$$

Из (2.11) следует, что значениями отображения $p \rightarrow U(p)$ являются непустые выпуклые множества пространства H . Пусть $p \in \Lambda$, $y \in U(p)$, $p_n \geq 1$ произвольны и $p_n \rightarrow p$, $n \rightarrow \infty$.

Так как $\varphi^0(p_n) \xrightarrow{M} \varphi^0(p)$, то существует последовательность $y_n \rightarrow y$, $n \geq 1$, такая, что $\varphi^0(p_n)(y_n) \rightarrow \varphi^0(p)(y)$. Тогда согласно (3.2) при достаточно больших n будет иметь место неравенство $\varphi(p_n)(y_n) < c_0$. Последнее означает, что $y_n \in U(p_n)$ при достаточно больших n . Поэтому отображение $p \rightarrow U(p)$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису.

Пусть $y \in F(c_0)(p)$ и $x \in U(p)$. Рассмотрим последовательность $x_n = \lambda_n y + (1 - \lambda_n)x$, $\lambda_n \rightarrow 1$, $0 < \lambda_n < 1$. Из выпуклости функции $\varphi^0(p)$ следует, что $\varphi^0(p)(x_n) < c_0$. Поэтому $x_n \in U(p)$, $n \geq 1$, и $x_n \rightarrow y \in F(c_0)(p)$. Так как $F(c_0)(p)$ является выпуклым замкнутым множеством, то $F(c_0)(p) = \overline{U(p)}$, $p \in \Lambda$, где черта сверху означает замыкание в H . Поскольку многозначное отображение $p \rightarrow U(p)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису, то и многозначное отображение $p \rightarrow F(c_0)(p) = \overline{U(p)}$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису с замкнутыми выпуклыми значениями. Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Для любых $p_0 \in \Lambda$, $c \geq c_0$, $y_0 \in H$, $\varphi^0(p_0)(y_0) \leq c$ существует непрерывная функция $y^0: \Lambda \rightarrow H$ такая, что*

$$y^0(p_0) = y_0, \quad \varphi^0(p)(y^0(p)) \leq c, \quad p \in \Lambda. \quad (3.3)$$

Поскольку $\varphi^0(p_0)(y_0) \leq c$, то $y_0 \in F(c)(p_0)$, где $F(c)(p)$ – многозначное отображение, определенное по правилу (3.1). Так как отображение $p \rightarrow F(c)(p)$ полунепрерывно снизу по Вьеторису с замкнутыми выпуклыми значениями, то согласно теореме Майкла (см. [11]) о непрерывных селекторах существует непрерывная функция $y^0: \Lambda \rightarrow H$ такая, что $y^0(p_0) = y_0$ и $y^0(p) \in F(c)(p)$, $p \in \Lambda$. Последнее означает, что имеют место соотношения (3.3).

ЛЕММА 3.2. *Существует $\alpha^0 > 0$ такое, что*

$$\varphi^0(p)(x) + \alpha^0 \|x\| + \alpha^0 \geq 0, \quad x \in H, \quad p \in \Lambda. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем его от противного. Предположим, что неравенство (3.4) не имеет места. Тогда существуют последовательности $p_n \in \Lambda$, $x_n \in H$, $n \geq 1$, такие, что

$$\varphi^0(p_n)(x_n) + n(\|x_n\| + 1) < 0. \quad (3.5)$$

Возможны два случая.

Случай 1. Последовательность x_n , $n \geq 1$, ограничена. Не нарушая общности, будем считать, что $p_n \rightarrow p$ и $x_n \rightarrow x$ в ω - H . Так как $\varphi^0(p_n) \xrightarrow{M} \varphi^0(p)$, то из (3.5) следует

$$\varphi^0(p)(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^0(p_n)(x_n) \leq -\infty.$$

Поскольку $\varphi^0(p)(x) \in (-\infty, +\infty]$, то последнее неравенство приводит нас к противоречию.

Случай 2. Последовательность x_n , $n \geq 1$, не ограничена. Тогда мы можем считать, что $p_n \rightarrow p$ и $\|x_n\| \rightarrow +\infty$. Пусть $y^0: \Lambda \rightarrow H$ – непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству (3.3) при $c = c_0$. Положим

$$\beta_n = (\sqrt{n} \|x_n - y^0(p_n)\|)^{-1}, \quad z_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) y^0(p_n).$$

Поскольку $\|x_n\| \rightarrow +\infty$ и $y^0(p_n) \rightarrow y^0(p)$, $n \rightarrow \infty$, то $\beta_n \in (0, 1)$ при достаточно больших n . Из равенства

$$\|z_n - y^0(p_n)\| = \beta_n \|x_n - y^0(p_n)\| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

следует, что $z_n \rightarrow y^0(p)$ при $n \rightarrow +\infty$. Воспользовавшись выпуклостью функций $\varphi^0(p_n)$, $n \geq 1$, и неравенством (3.5), получаем, что при достаточно больших n

$$\begin{aligned} \varphi^0(p_n)(z_n) &\leq \beta_n \varphi^0(p_n)(x_n) + (1 - \beta_n) \varphi^0(p_n)(y^0(p_n)) \\ &\leq -\sqrt{n} \frac{\|x_n\| + 1}{\|x_n - y^0(p_n)\|} + (1 - \beta_n) \varphi^0(p_n)(y^0(p_n)). \end{aligned}$$

Из этого неравенства, сходимости $\varphi^0(p_n) \xrightarrow{M} \varphi^0(p)$ и неравенства в (3.3) вытекает, что

$$\varphi^0(p)(y^0(p)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^0(p_n)(z_n) \leq -\infty.$$

Последнее неравенство приводит нас к противоречию. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. *Существуют константа C и непрерывные функции $y^t: \Lambda \rightarrow H$, $t \in T$, такие, что*

$$\|y^t(p)\| < C, \quad \varphi^t(p)(y^t(p)) < C, \quad p \in \Lambda, \quad t \in T. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 3.1, 3.2 следует, что существуют $c_1 > c_0$ и непрерывная функция $y^0: \Lambda \rightarrow H$ такие, что

$$\|y^0(p)\| \leq c_1, \quad |\varphi^0(p)(y^0(p))| \leq c_1, \quad p \in \Lambda. \quad (3.7)$$

Воспользовавшись (2.12), (2.13) и (3.7), мы получаем, что существует $c_2 > 0$ такое, что для любых $t \in T$, $p \in \Lambda$ найдется $z^t(p) \in H$ такое, что

$$\|z^t(p)\| < c_2, \quad \varphi^t(p)(z^t(p)) < c_2.$$

Пусть $U^t(p) = \{x \in H : \varphi^t(p)(x) < c_2\}$ и $B_{c_2} = \{x \in H : \|x\| < c_2\}$. Как и при доказательстве леммы 3.1, мы получаем, что отображение $p \rightarrow U^t(p)$, $t \in T$, является полунепрерывным снизу по Вьеторису с непустыми выпуклыми значениями. Так как $z^t(p) \in U^t(p) \cap B_{c_2}$, $p \in \Lambda$, $t \in T$, то отображение $p \rightarrow U^t(p) \cap B_{c_2}$, $t \in T$, является полунепрерывным снизу по Вьеторису с непустыми выпуклыми значениями. Таковым является и многозначное отображение $p \rightarrow \overline{U^t(p) \cap B_{c_2}}$, где черта означает замыкание в H . Согласно теореме Майкла (см. [11]) для каждого $t \in T$ существует непрерывный селектор $y^t: \Lambda \rightarrow H$ отображения $p \rightarrow \overline{U^t(p) \cap B_{c_2}}$. Ясно, что функции y^t , $t \in T$, удовлетворяют неравенствам (3.6) при $C > c_2$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. *Для любого $t \in T$ существует $\alpha^t > 0$ такое, что для любых $x \in H$ и $p \in \Lambda$ имеет место неравенство*

$$\varphi^t(p)(x) + \alpha^t \|x\| + \alpha^t \geq 0. \quad (3.8)$$

Доказательство леммы дословно повторяет доказательство леммы 3.2 с использованием неравенств (3.6).

ТЕОРЕМА 3.1. *Существует $\alpha > 0$ такое, что*

$$\varphi^t(p)(x) + \alpha \|x\| + \alpha \geq 0, \quad t \in T, \quad p \in \Lambda, \quad x \in H. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $r = C + 1$, где C – константа из неравенств (3.6). Воспользовавшись свойством (4) предположения $H(\varphi)$ и теоремой Данфорда–Петтиса (см. [12; теорема 4.21.2]), выберем разбиение $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$ отрезка $T = [0, 1]$ так, чтобы

$$\begin{aligned} |a_r(p)(s_i) - a_r(p)(t)| &\leq \frac{1}{2}, & |b_r(p)(s_i) - b_r(p)(t)| &\leq \frac{1}{2}, \\ i = 1, \dots, n, & & t \in [s_{i-1}, s_i], & p \in \Lambda. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Пусть $p \in \Lambda$, $t \in [0, 1]$ произвольны и фиксированы. Тогда $t \in [s_{i-1}, s_i]$ при некотором $1 \leq i \leq n$. Согласно лемме 3.3 существует $x \in \text{dom } \varphi^t(p)$ с $\|x\| \leq r$.

Используя неравенства (2.12), (2.13) и (3.10), мы получим, что для каждого $x \in \text{dom } \varphi^t(p)$, $\|x\| \leq r$, найдется $\tilde{x} \in \text{dom } \varphi^{s_i}(p)$ такое, что

$$\|\tilde{x} - x\| \leq \frac{1}{2}(1 + |\varphi^t(p)(x)|^{1/2}), \quad (3.11)$$

$$\varphi^t(p)(x) \geq \varphi^{s_i}(p)(\tilde{x}) - \frac{1}{2}(1 + |\varphi^t(p)(x)|). \quad (3.12)$$

Согласно лемме 3.4 существует $m > 0$ такое, что

$$\varphi^{s_i}(p)(x) \geq -m\|x\| - m, \quad x \in H, \quad p \in \Lambda, \quad i = 0, \dots, n. \quad (3.13)$$

Из неравенства (3.11) и неравенства Коши следует, что

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \frac{1}{2} + \frac{m}{4} + \frac{1}{4m}|\varphi^t(p)(x)|. \quad (3.14)$$

Воспользовавшись (3.12)–(3.14), мы получаем

$$\varphi^t(p)(x) + \frac{3}{4}|\varphi^t(p)(x)| \geq -m\|x\| - \frac{3}{2}m - \frac{m^2}{4} - \frac{1}{2}, \quad p \in \Lambda, \quad t \in [0, 1].$$

Из последнего неравенства и неравенства (3.8) при $t = 1$ вытекает, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$\varphi^t(p)(x) \geq -\delta\|x\| - \delta, \quad t \in T, \quad p \in \Lambda, \quad x \in \text{dom } \varphi^t(p), \quad \|x\| \leq r. \quad (3.15)$$

Пусть $t \in T$, $p \in \Lambda$ произвольны и фиксированы. Возьмем $x \in \text{dom } \varphi^t(p)$ с $\|x\| > r = C + 1$. Согласно лемме 3.3 существует $z^t \in \text{dom } \varphi^t(p)$ с $\|z^t\| < C$ и $\varphi^t(p)(z^t) < C$. Положим

$$x^t = \lambda x + (1 - \lambda)z^t, \quad \lambda = \frac{1}{\|z^t - x\|}.$$

Поскольку $\|x\| > C + 1$ и $\|z^t\| < C$, то $0 < \lambda < 1$. Поэтому $x^t \in \text{dom } \varphi^t(p)$ и $\|x^t\| < r$. Тогда в соответствии с (3.15)

$$\lambda\varphi^t(p)(x) + (1 - \lambda)\varphi^t(p)(z^t) + \delta\|x^t\| + \delta \geq \varphi^t(p)(x^t) + \delta\|x^t\| + \delta \geq 0.$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$\varphi^t(p)(x) + \frac{1}{\lambda}\{(1 - \lambda)\varphi^t(p)(z^t) + \delta\|x^t\| + \delta\} \geq 0.$$

Поскольку $\lambda^{-1} = \|z^t - x\| \leq \|x\| + C$ и

$$(1 - \lambda)\varphi^t(p)(z^t) + \delta\|x^t\| + \delta \leq (1 - \lambda)C + \delta(C + 1) + \delta,$$

то

$$\varphi^t(p)(x) + (\|x\| + C)\{C + \delta(1 + C) + \delta\} \geq 0. \quad (3.16)$$

Теперь из (3.15), (3.16) вытекает, что существует $\alpha > 0$ такое, что неравенство (3.9) имеет место для любых $p \in \Lambda$, $t \in T$ и $x \in \text{dom } \varphi^t(p)$. Если $x \notin \text{dom } \varphi^t(p)$, то неравенство (3.9) выполняется автоматически. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. *Существуют число $R > 0$ и непрерывные функции $y^t: \Lambda \rightarrow H$, $t \in T$, удовлетворяющие неравенствам*

$$\|y^t(p)\| < R, \quad |\varphi^t(p)(y^t(p))| < R, \quad p \in \Lambda, \quad t \in T. \quad (3.17)$$

Следствие вытекает из леммы 3.3 и теоремы 3.1.

ЛЕММА 3.5. *Существует константа $K > 0$ такая, что*

$$\|J_\lambda^t(p)(x)\| \leq K + \|x\|, \quad (3.18)$$

$$\|\partial \varphi_\lambda^t(p)(x)\| \leq \frac{1}{\lambda}(K + 2\|x\|), \quad x \in H, \quad t \in T, \quad p \in \Lambda, \quad \lambda \in (0, 1]. \quad (3.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись (2.4), (2.7), (3.9) и (3.17), мы получим при $\lambda = 1$

$$\begin{aligned} R &\geq \varphi_1^t(p)(y^t(p)) = \varphi^t(p)(J_1^t(p)(y^t(p))) + \frac{1}{2}\|y^t(p) - J_1^t(p)(y^t(p))\|^2 \\ &\geq -\alpha\|J_1^t(p)(y^t(p))\| - \alpha + \frac{1}{2}\|y^t(p) - J_1^t(p)(y^t(p))\|^2. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и (3.17) вытекает, что

$$\|J_1^t(p)(y^t(p))\| \leq d, \quad p \in \Lambda, \quad t \in T, \quad (3.20)$$

при некотором $d > 0$.

Принимая во внимание первое неравенство (2.2), (2.6) и (3.20), мы приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \|J_\lambda^t(p)(y^t(p))\| &\leq \|J_1^t(p)(y^t(p))\| + \|J_\lambda^t(p)(y^t(p)) - J_1^t(p)(y^t(p))\| \\ &\leq \|J_1^t(p)(y^t(p))\| + (1 - \lambda)\|y^t(p) - J_1^t(p)(y^t(p))\| \\ &\leq 2d + \|y^t(p)\|, \quad p \in \Lambda, \quad \lambda \in (0, 1]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Теперь из (2.2), (3.21) вытекает

$$\|J_\lambda^t(p)(x)\| \leq \|J_\lambda^t(p)(y^t(p))\| + \|x - y^t(p)\| \leq 2d + 2R + \|x\|, \quad \lambda \in (0, 1].$$

Полагая $K = 2d + 2R$ в последнем неравенстве, мы приходим к неравенству (3.18). Неравенство (3.19) вытекает из второго неравенства (2.1) и (3.18). Лемма доказана.

§ 4. Априорные оценки

Пусть $r = R + 1$, $M = R + \alpha r + \alpha + 1$, где R – константа из неравенства (3.17), $0 \leq t_0 < 1$ произвольно и $y^{t_0}: \Lambda \rightarrow H$ – непрерывная функция, удовлетворяющая неравенствам (3.17). Воспользовавшись свойством (4) предположения $H(\varphi)$, мы получим, что существует $t_1 > t_0$ такое, что

$$\left\{ 1 + M \exp \left(\int_0^1 |\dot{b}_r(p)(\tau)| d\tau \right) \right\} \int_{t_0}^{t_1} |\dot{a}_r(p)(\tau)| d\tau \leq 1, \quad p \in \Lambda.$$

ЛЕММА 4.1. *Существует функция $h(p) \in W^{1,2}([t_0, t_1], H)$, $p \in \Lambda$, удовлетворяющая соотношениям*

$$h(p)(t_0) = y^{t_0}(p), \quad p \in \Lambda; \quad (4.1)$$

$$\|h(p)(t)\| \leq r, \quad t \in [t_0, t_1], \quad p \in \Lambda; \quad (4.2)$$

$$|\varphi^t(p)(h(p)(t))| \leq M + M \exp\left(\int_0^1 |\dot{b}_r(p)(\tau)| d\tau\right) \int_{t_0}^t |\dot{b}_r(p)(\tau)| d\tau, \quad (4.3)$$

$$p \in \Lambda, \quad t \in [t_0, t_1];$$

$$\|\dot{h}(p)(t)\| \leq \left\{1 + M \exp\left(\int_0^1 |\dot{b}_r(p)(\tau)| d\tau\right)\right\} |\dot{a}_r(t)|, \quad (4.4)$$

$$p \in \Lambda, \quad \text{н.в. на } [t_0, t_1].$$

Подобная лемма была доказана в [9] для случая, когда функции $\varphi^t(p)$ не зависят от p , т.е. $\varphi^t(p) = \varphi^t$, $t \in T$, $p \in \Lambda$. Доказательство нашей леммы дословно повторяет доказательство леммы 1.5.3 из [9] с использованием свойства (4) предположения $H(\varphi)$ и теоремы 3.1.

ЛЕММА 4.2. *Существуют разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ отрезка $T = [0, 1]$ и функции $h(p): T \rightarrow H$, $p \in \Lambda$, такие, что: $h(p)$, $p \in \Lambda$, непрерывна на отрезке $[t_0, t_1]$ и на каждом полуинтервале $(t_{k-1}, t_k]$, $k = 2, \dots, N$, разбиения; функция $h(p)$, $p \in \Lambda$, абсолютно непрерывна на каждом интервале (t_{k-1}, t_k) , $k = 1, \dots, N$; функция $p \rightarrow h(p)(t_{k-1})$, $k = 1, \dots, N$, непрерывна и справедливы неравенства*

$$\|h(p)(t)\| \leq r, \quad t \in T, \quad p \in \Lambda; \quad (4.5)$$

$$|\varphi^t(p)(h(p)(t))| \leq M + M \exp\left(\int_0^1 |\dot{b}_r(p)(\tau)| d\tau\right) \int_0^t |\dot{b}_r(p)(\tau)| d\tau, \quad (4.6)$$

$$t \in T, \quad p \in \Lambda;$$

$$\|\dot{h}(p)(t)\| \leq \left\{1 + M \exp\left(\int_0^1 |\dot{b}_r(p)(\tau)| d\tau\right)\right\} |\dot{a}_r(p)(t)|, \quad (4.7)$$

$$p \in \Lambda, \quad \text{н.в. на } T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $r = R + 1$, $M = R + \alpha r + \alpha + 1$ и выберем разбиение $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ отрезка $T = [0, 1]$ так, чтобы

$$\left\{1 + M \exp\left(\int_0^1 |\dot{b}_r(p)(\tau)| d\tau\right)\right\} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\dot{a}_r(p)(\tau)| d\tau \leq 1, \\ k = 1, \dots, N, \quad p \in \Lambda.$$

Существование такого разбиения следует из свойства (4) предположения $H(\varphi)$. Пусть $y^{t_k}: \Lambda \rightarrow H$, $k = 0, \dots, N - 1$, — непрерывная функция, удовлетворяющая неравенствам (3.17). Тогда согласно лемме 4.1 существуют функции $h_k(p) \in W^{1,2}([t_{k-1}, t_k], H)$, $k = 1, \dots, N$, $p \in \Lambda$, такие, что $h_k(p)(t_{k-1}) = y^{t_{k-1}}(p)$, $p \in \Lambda$, $k = 1, \dots, N$, и на каждом из отрезков $[t_{k-1}, t_k]$ функции $h_k(p)$ удовлетворяют неравенствам, аналогичным неравенствам (4.2)–(4.4). Теперь построение функции $h(p)$ с требуемыми свойствами очевидно. Лемма доказана.

Из предположений $H(\varphi)$, теоремы 1.5.1 и леммы 1.2.2 из [9] вытекает, что для любой функции $x \in L^2(T, H)$ функции $t \rightarrow \varphi^t(p)(x(t))$, $t \rightarrow \varphi_\lambda^t(p)(x(t))$, $t \rightarrow \partial\varphi_\lambda^t(p)(x(t))$, $t \rightarrow J_\lambda^t(p)(x(t))$, $p \in \Lambda$, $\lambda \in (0, 1]$, измеримы.

Пусть $y^0: \Lambda \rightarrow H$ – непрерывная функция, удовлетворяющая неравенствам (3.17).

Рассмотрим включение

$$\begin{aligned} -\dot{x}(p)(t) &\in \partial\varphi^t(p)(x(p)(t)) + f(t), \\ x(p)(0) &= y^0(p) \in \text{dom } \varphi^0(p), \quad p \in \Lambda, \quad f \in L^2(T, H), \end{aligned} \quad (4.8)$$

и уравнение

$$\begin{aligned} -\dot{x}_\lambda(p)(t) &= \partial\varphi_\lambda^t(p)(x_\lambda(p)(t)) + f(t), \\ x_\lambda(p)(0) &= y^0(p), \quad p \in \Lambda, \quad \lambda \in (0, 1]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

При фиксированном $p \in \Lambda$ под *решением уравнения* (4.9) понимается функция $x_\lambda(p) \in W^{1,2}(T, H)$, $x_\lambda(p)(0) = y^0(p)$, почти всюду на T удовлетворяющая (4.9).

Хорошо известно (см. [9] и др.), что при выполнении предположений $H(\varphi)$ для любых $p \in \Lambda$, $f \in L^2(T, H)$, $\lambda \in (0, 1]$ включение (4.8) и уравнение (4.9) имеют единственные решения $x(p)$ и $x_\lambda(p)$.

В дальнейшем, чтобы подчеркнуть зависимость решений включения (4.8) и уравнения (4.9) от p и f , мы их будем обозначать через $x(p, f)$ и $x_\lambda(p, f)$.

Пусть

$$S_L = \{f \in L^2(T, H); \|f\|_{L^2(T, H)} \leq L\}, \quad L > 0, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{R}_L = \{x(p, f); p \in \Lambda, f \in S_L\}, \quad (4.11)$$

$$\mathcal{R}_L^* = \{x_\lambda(p, f); p \in \Lambda, f \in S_L, \lambda \in (0, 1]\}. \quad (4.12)$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Существует константа $N > 0$, зависящая только от L , такая, что*

$$\|x_\lambda(p, f)(t)\| \leq N, \quad (4.13)$$

$$\|\dot{x}_\lambda(p, f)\|_{L^2(T, H)} \leq N, \quad (4.14)$$

$$|\varphi_\lambda^t(p)(x_\mu(p, f)(t))| \leq N, \quad t \in T, \quad \lambda, \mu \in (0, 1], \quad p \in \Lambda, \quad f \in S_L. \quad (4.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_\lambda(p, f) \in \mathcal{R}_L^*$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} = 1$ – разбиение отрезка T и соответствующая этому разбиению функция $h(p): T \rightarrow H$ со свойствами, установленными в лемме 4.2. Тогда для почти каждого $s \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, \dots, N$, используя понятие субдифференциала выпуклой функции, мы получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \|x_\lambda(p, f)(s) - h(p)(s)\|^2 &= 2\langle \dot{x}_\lambda(p, f)(s) - \dot{h}(p)(s), x_\lambda(p, f)(s) - h(p)(s) \rangle \\ &= -2\langle \partial\varphi_\lambda^s(p)(x_\lambda(p, f)(s)), x_\lambda(p, f)(s) - h(p)(s) \rangle \\ &\quad - 2\langle f(s) + \dot{h}(p)(s), x_\lambda(p, f)(s) - h(p)(s) \rangle \\ &\leq 2\varphi_\lambda^s(h(p)(s)) - 2\varphi_\lambda^s(p)(x_\lambda(p, f)(s)) \\ &\quad + 2(\|f(s)\| + \|\dot{h}(p)(s)\|) \|x_\lambda(p, f)(s) - h(p)(s)\|. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Из (2.7), (3.9), (3.18) вытекает, что

$$\begin{aligned}
 \varphi_\lambda^s(p)(x_\lambda(p, f)(s)) &\geq \varphi^s(J_\lambda^s(p)(x_\lambda(p, f)(s))) \\
 &\geq -\alpha \|J_\lambda^s(p)(x_\lambda(p, f)(s))\| - \alpha \geq -\alpha(K + \|x_\lambda(p, f)(s)\|) - \alpha \\
 &\geq -\alpha \|x_\lambda(p, f)(s) - h(p)(s)\| - \alpha \|h(p)(s)\| - \alpha K - \alpha \\
 &\geq -\frac{1}{2} \|x_\lambda(p, f)(s) - h(p)(s)\|^2 - \alpha \left(\frac{\alpha}{2} + \|h(p)(s)\| + K + 1 \right). \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

Воспользовавшись (4.16), (4.17), мы получим

$$\frac{d}{ds} \|x_\lambda(p, f)(s) - h(p)(s)\|^2 \leq 2 \|x_\lambda(p, f)(s) - h(p)(s)\|^2 + g(p)(s) \quad \text{п.в. на } T, \quad (4.18)$$

где

$$\begin{aligned}
 g(p)(s) &= 2|\varphi^s(p)(h(p)(s))| + (\|f(s)\| + \|\dot{h}(p)(s)\|)^2 \\
 &\quad + 2\alpha \|h(p)(s)\| + 2\alpha K + 2\alpha + \alpha^2.
 \end{aligned}$$

Теперь, дословно повторяя доказательство леммы 1.3.1 из [9] с использованием неравенств (3.17), (4.5)–(4.7), (4.10), (4.18), мы получим, что существует $N_1 > 0$, при котором имеет место неравенство

$$\|x_\lambda(p, f)(t)\| \leq N_1, \quad t \in T, \quad \lambda \in (0, 1], \quad p \in \Lambda, \quad f \in S_L. \quad (4.19)$$

Так как $x_\mu(p, f) \in W^{1,2}(T, H)$, $0 < \mu \leq 1$, то из леммы 2.2 в [13] вытекает, что

$$\begin{aligned}
 &\varphi_\lambda^t(p)(x_\mu(p, f)(t)) + \int_0^t \langle \dot{x}_\mu(p, f)(s), \dot{x}_\mu(p, f)(s) + f(s) \rangle ds \\
 &\leq \varphi_\lambda^0(p)(y^0(p)) + \int_0^t |\dot{a}_r(p)(s)| \|\dot{x}_\mu(p, f)(s) + f(s)\| \\
 &\quad \times (1 + |\varphi_\lambda^s(p)(x_\mu(p, f)(s))|^{1/2}) ds \\
 &\quad + \int_0^t |\dot{b}_r(p)(s)| (1 + |\varphi_\lambda^s(p)(x_\mu(p, f)(s))|) ds, \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

где

$$r \geq \sup\{\|J_\lambda^s(p)(x_\mu(p, f)(s))\|; s \in T, 0 < \lambda \leq 1\}. \quad (4.21)$$

Воспользовавшись неравенством Коши, примененному к первому интегральному члену в правой части неравенства (4.20), и (3.17), (3.18), (4.19), (4.21), мы получим, что

$$\begin{aligned}
 &\varphi_\lambda^t(p)(x_\mu(p, f)(t)) + \frac{1}{2} \int_0^t \|\dot{x}_\mu(p, f)(s)\|^2 ds \\
 &\leq R + \frac{1}{2} \int_0^t \|f(s)\|^2 ds + \int_0^t (|\dot{a}_r(p)(s)|^2 + |\dot{b}_r(p)(s)|) \\
 &\quad \times (1 + |\varphi_\lambda^s(p)(x_\mu(p, f)(s))|) ds, \quad 0 < \mu \leq 1,
 \end{aligned}$$

где

$$r \geq K + N_1 \geq \sup\{\|J_\lambda^s(p)(x_\mu(p, f)(s))\|; s \in T, 0 < \lambda \leq 1\}.$$

Из неравенств (2.7), (3.9), (3.18), (4.19) следует, что

$$|\varphi_\lambda^t(p)(x_\mu(p, f)(t))| \leq \varphi_\lambda^t(p)(x_\mu(p, f)(t)) + 2\alpha(K + N_1) + 2\alpha.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & |\varphi_\lambda^t(p)(x_\mu(p, f)(t))| + \frac{1}{2} \int_0^t \|\dot{x}_\mu(p, f)(s)\|^2 ds \\ & \leq R + \frac{1}{2} \int_0^t \|f(s)\|^2 ds + \int_0^t (|\dot{a}_r(p)(s)|^2 + |b_r(p)(s)|) \\ & \quad \times (1 + |\varphi_\lambda^s(p)(x_\mu(p, f)(s))|) ds + 2\alpha(K + N_1) + 2\alpha, \quad \lambda, \mu \in (0, 1]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Из неравенств (4.10), (4.22), свойства (4) предположения $H(\varphi)$ и неравенства Беллмана–Грунвалла вытекает, что

$$\|\dot{x}_\mu(p, f)\|_{L^2(T, H)} \leq N_2, \quad \mu \in (0, 1], \quad (4.23)$$

$$\|\varphi_\lambda^t(p)(x_\mu(p, f)(t))\| \leq N_2, \quad \lambda, \mu \in (0, 1], \quad p \in \Lambda, \quad t \in T, \quad (4.24)$$

при некотором $N_2 > 0$. Теперь неравенства (4.13)–(4.15) вытекают из неравенств (4.19), (4.23), (4.24). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. *Для любого $x(p, f) \in \mathcal{R}_L$ имеют место неравенства*

$$\|x(p, f)(t)\| \leq N, \quad t \in T, \quad (4.25)$$

$$\|\dot{x}(p, f)\|_{L^2(T, H)} \leq N, \quad (4.26)$$

$$|\varphi^t(p)(x(p, f)(t))| \leq N, \quad t \in T. \quad (4.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x(p, f) \in \mathcal{R}_L$. Тогда из результатов работы [9; § 1.4] следует, что

$$x_\lambda(p, f) \rightarrow x(p, f) \quad \text{в } C(T, H) \quad \text{при } \lambda \downarrow 0, \quad (4.28)$$

$$\dot{x}_\lambda(p, f) \rightarrow \dot{x}(p, f) \quad \text{в } L^2(T, H) \quad \text{при } \lambda \downarrow 0. \quad (4.29)$$

Поэтому неравенства (4.25), (4.26) вытекают из (4.13), (4.14) и (4.28), (4.29). Воспользовавшись (2.4), (2.9) и (4.28), мы получим

$$\begin{aligned} \lim_{\mu_n \downarrow 0} \varphi_\lambda^t(p)(x_{\mu_n}(p, f)(t)) &= \varphi_\lambda^t(p)(x(p, f)(t)) \leq \varphi^t(p)(x(p, f)(t)) \\ &\leq \varliminf_{\lambda_n \downarrow 0} \varphi_{\lambda_n}^t(p)(x_{\lambda_n}(p, f)(t)), \quad t \in T, \quad \lambda \in (0, 1]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Теперь неравенство (4.27) следует из (4.15) и (4.30). Теорема доказана.

§ 5. Основные результаты

Как уже отмечалось ранее, для любой функции $x(\cdot) \in L^2(T, H)$ функции $t \rightarrow \varphi^t(p)(x(t))$, $t \rightarrow \varphi_\lambda^t(p)(x(t))$, $t \rightarrow \partial\varphi_\lambda^t(p)(x(t))$ измеримы. Используя эти свойства и неравенство (3.9), мы можем определить функцию

$$\Phi(p)(x) = \int_T \varphi^t(p)(x(t)) dt, \quad x(\cdot) \in L^2(T, H), \quad p \in \Lambda, \quad (5.1)$$

которая является собственной выпуклой и полунепрерывной снизу.

Пусть $\Phi_\lambda(p)$, $\lambda \in (0, 1]$, $p \in \Lambda$, – регуляризация Моро–Иосиды функции $\Phi(p): L^2(T, H) \rightarrow (-\infty, +\infty]$. Тогда из лемм 1.2.2, 1.2.4, 1.5.3 и утверждения 0.3.3 из [9] вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 5.1. *В рамках предположений $H(\varphi)$ справедливы следующие утверждения:*

а) выполняется

$$\Phi_\lambda(p)(x) = \int_T \varphi_\lambda^t(p)(x(t)) dt; \quad (5.2)$$

б) для любых $p \in \Lambda$, $\lambda \in (0, 1]$

$$\partial\Phi_\lambda(p)(x)(t) = \partial\varphi_\lambda^t(p)(x(t)) \quad \text{п.в.}; \quad (5.3)$$

в) если $f \in L^2(T, H)$, то $f \in \partial\Phi(p)(x)$ тогда и только тогда, когда

$$f(t) \in \partial\varphi^t(p)(x(t)) \quad \text{п.в.}, \quad p \in \Lambda.$$

ТЕОРЕМА 5.1. *Для любой последовательности $p_n \rightarrow p$ последовательность $\Phi(p_n)$, $n \geq 1$, сходится к $\Phi(p)$ в смысле Моско.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенств (2.7), (2.8) и (3.8) вытекает, что

$$-\alpha - \alpha \|J_\lambda^t(p)(x)\| \leq \varphi_\lambda^t(p)(x) \leq \varphi_\lambda^t(p)(y^t(p)) + \|\partial\varphi_\lambda^t(p)(x)\| \|x - y^t(p)\|, \quad p \in \Lambda, \quad \lambda \in (0, 1], \quad x \in H, \quad t \in T,$$

где $y^t(p)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству (3.17). Воспользовавшись этим неравенством и (3.18), (3.19), мы получим

$$-\alpha - \alpha(K + \|x\|) \leq \varphi_\lambda^t(p)(x) \leq R + \frac{1}{\lambda}(K + 2\|x\|) + \frac{1}{\lambda}(K + 2\|x\|)R, \quad p \in \Lambda, \quad \lambda \in (0, 1], \quad x \in H. \quad (5.4)$$

Пусть $x(\cdot) \in L^2(T, H)$, $\lambda \in (0, 1]$ произвольны и фиксированы. Тогда из (5.4) следует, что существует функция $g_\lambda(\cdot) \in L^1(T, \mathcal{R}^*)$ такая, что

$$|\varphi_\lambda^t(p)(x(t))| \leq g_\lambda(t) \quad \text{п.в.}, \quad p \in \Lambda. \quad (5.5)$$

Пусть $p_n \rightarrow p$. Так как $\varphi^t(p_n) \xrightarrow{M} \varphi^t(p)$, то согласно теореме 3.26 из [2]

$$\varphi_\lambda^t(p_n)(x(t)) \rightarrow \varphi_\lambda^t(p)(x(t)) \quad \text{п.в.}$$

Тогда из (5.2), (5.5) и теоремы Лебега об ограниченной сходимости вытекает, что

$$\Phi_\lambda(p_n)(x) \rightarrow \Phi_\lambda(p)(x), \quad x \in L^2(T, H), \quad \lambda \in (0, 1].$$

Поэтому согласно теореме 3.26 из [2] $\Phi(p_n) \xrightarrow{M} \Phi(p)$. Теорема доказана.

Пусть $t \in (0, 1]$. По аналогии с (5.1) на пространстве $L^2([0, t], H)$ мы можем определить собственную выпуклую полунепрерывную снизу функцию

$$\Phi^t(p)(x) = \int_0^t \varphi^\tau(p)(x(\tau)) d\tau, \quad x \in L^2([0, t], H). \quad (5.6)$$

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Для любого $0 < t \leq 1$ и любой последовательности $p_n \rightarrow p$, $n \geq 1$, последовательность $\Phi^t(p_n)$, $n \geq 1$, сходится к $\Phi^t(p)$ в смысле Моско.

Следствие непосредственно вытекает из теоремы 5.1.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $p_n \rightarrow p$ и $f_n \rightarrow f$ в ω - $L^2(T, H)$ и выполняется одно из условий:

- (I) множество $\{f_n(t)\}_{n \geq 1}$ относительно компактно в H при почти каждом $t \in T$;
- (II) для любого $r > 0$ любая последовательность $z_n \in H$, удовлетворяющая неравенствам $\|z_n\| \leq r$, $|\varphi^t(p_n)(z_n)| \leq r$, $n \geq 1$, $t \in T$, относительно компактна в H .

Тогда для последовательности $x(p_n, f_n)$, $n \geq 1$, решений включения (4.8) справедливы утверждения

$$x(p_n, f_n) \rightarrow x(p, f) \quad \text{в } C(T, H); \quad (5.7)$$

$$\dot{x}(p_n, f_n) \rightarrow \dot{x}(p, f) \quad \text{в } \omega\text{-}L^2(T, H); \quad (5.8)$$

$$\Phi^t(p_n)(x(p_n, f_n)) \rightarrow \Phi^t(p)(x(p, f)) \quad (5.9)$$

равномерно по $t \in T$, где $\Phi^t(p)(x)$ – функция, определенная равенством (5.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется условие (I). Тогда $f_n \in S_L$ при некотором $L > 0$ (см. (4.10)). Поэтому $x(p_n, f_n) \in \mathcal{R}_L$ (см. (4.11)). Воспользовавшись (4.26) и неравенством Гёльдера, мы получаем

$$\|x(p_n, f_n)(t) - x(p_n, f_n)(s)\| \leq |t - s|^{1/2} N.$$

Получаем, что последовательность $x(p_n, f_n)$, $n \geq 1$, равномерно непрерывна в $C(T, H)$.

Пусть $B_N = \{z \in H; \|z\| \leq N\}$. Тогда из (4.25) и теоремы 4 из [14] вытекает, что последовательность $x(p_n, f_n)$, $n \geq 1$, относительно компактна в пространстве ω - $C(T, H)$. Поэтому согласно (4.26) существует последовательность n_k , $k \geq 1$, такая, что

$$x(p_{n_k}, f_{n_k}) \rightarrow x(\cdot) \quad \text{в } \omega\text{-}C(T, H), \quad (5.10)$$

$$\dot{x}(p_{n_k}, f_{n_k}) \rightarrow z(\cdot) \quad \text{в } \omega\text{-}L^2(T, H). \quad (5.11)$$

В дальнейшем последовательности $x(p_{n_k}, f_{n_k})$, $\dot{x}(p_{n_k}, f_{n_k})$, p_{n_k} , f_{n_k} мы будем обозначать x_k , $\dot{x}_k$, p_k , f_k .

Поскольку для любого $h \in H$ имеет место равенство

$$\langle h, x_k(t) \rangle = \langle h, y^0(p_k) \rangle + \int_0^t \langle h, \dot{x}_k(s) \rangle ds, \quad t \in T, \quad k \geq 1,$$

то из (5.10), (5.11) и теоремы 3 из [14] следует, что

$$\langle h, x(t) \rangle = \langle h, y^0(p) \rangle + \left\langle h, \int_0^t z(s) ds \right\rangle, \quad t \in T.$$

Поэтому

$$x(t) = y^0(p) + \int_0^t z(s) ds, \quad t \in T, \quad \text{и} \quad \dot{x}(t) = z(t) \quad \text{п.в.}$$

Из этих равенств следует, что $x(\cdot) \in W^{1,2}(T, H)$, $x(0) = y^0(p)$ и

$$\dot{x}_k \rightarrow \dot{x} \quad \text{в} \quad \omega\text{-}L^2(T, H). \quad (5.12)$$

Покажем, что $x = x(p, f)$. Так как $x_k \rightarrow x$ в $\omega\text{-}C(T, H)$ и пространство $C(T, H)$ непрерывно вложено в $L^2(T, H)$, то

$$x_k \rightarrow x \quad \text{в} \quad \omega\text{-}L^2(T, H). \quad (5.13)$$

Пусть $0 < t \leq 1$, и обозначим через x_k^* , x^* сужения функций x_k и x на отрезок $[0, t]$. Из определения субдифференциала выпуклой функции, определения решения включения (4.8), (5.6) и утверждения в) леммы 5.1 вытекает

$$\int_0^t \langle -\dot{x}_k(s) - f_k(s), g(s) - x_k(s) \rangle ds \leq \Phi^t(p_k)(g) - \Phi^t(p)(x^*) \quad \forall g \in L^2([0, t], H). \quad (5.14)$$

Согласно следствию 5.1

$$\Phi^t(p_k) \xrightarrow{M} \Phi^t(p). \quad (5.15)$$

Поэтому из определения сходимости по Моско следует, что существует последовательность $g_k \in L^2([0, t], H)$, $k \geq 1$, такая, что

$$g_k \rightarrow x^* \quad \text{в} \quad L^2([0, t], H), \quad (5.16)$$

$$\Phi^t(p_k)(g_k) \rightarrow \Phi^t(p)(x^*). \quad (5.17)$$

Из (4.27), (5.6), (5.13), (5.15) следует, что $\Phi^t(p)(x^*) \leq N$. Перепишем неравенство (5.14) в виде

$$\begin{aligned} \int_0^t \langle \dot{x}_k(s), x(s) \rangle ds &\leq \Phi^t(p_k)(g_k) - \Phi^t(p_k)(x_k^*) \\ &+ \int_0^t \langle \dot{x}_k(s), g_k(s) \rangle ds + \int_0^t \langle f_k(s), g_k(s) - x_k(s) \rangle ds. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Покажем, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \langle f_k(s), g_k(s) - x_k(s) \rangle ds = 0. \quad (5.19)$$

В соответствии с (5.16), не нарушая общности, мы можем считать, что $g_k(s) \rightarrow x(s)$ почти всюду на $[0, t]$. Тогда согласно (5.10) и теореме 3 из [14] при почти каждом $s \in [0, t]$ последовательность $g_k(s) - x_k(s)$, $k \geq 1$, сходится в ω - H к нулевому элементу пространства H . Поэтому последовательность числовых функций $h \rightarrow \langle h, g_k(s) - x_k(s) \rangle$, $h \in H$, $k \geq 1$, при почти каждом $s \in [0, t]$ равномерно непрерывна. Поскольку на равномерно непрерывном множестве топология поточечной сходимости совпадает с топологией равномерной сходимости на компактах из H и множество $\{f_n(s)\}$, $n \geq 1$, относительно компактно в H , то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_k(s), g_k(s) - x_k(s) \rangle = 0 \text{ п.в. на } [0, t]. \quad (5.20)$$

Из неравенства

$$|\langle f_k(s), g_k(s) - x_k(s) \rangle| \leq \|g_k(s)\| \|x_k f_k(s)\| + N \|f_k(s)\|$$

следует, что

$$\begin{aligned} & \int_E |\langle f_k(s), g_k(s) - x_k(s) \rangle| ds \\ & \leq \left(\int_E \|g_k(s)\|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_T \|f_k(s)\|^2 ds \right)^{1/2} + N \int_E \|f_k(s)\| ds \end{aligned} \quad (5.21)$$

для любого измеримого множества $E \subset [0, t]$. Тогда из (5.21) и теоремы Данфорда–Петтиса (см. [12; теорема 4.21.2]) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\int_E |\langle f_k(s), g_k(s) - x_k(s) \rangle| ds < \varepsilon \quad (5.22)$$

для любого $k \geq 1$ и любого измеримого множества $E \subset [0, t]$ с мерой, не превышающей δ . Поэтому из (5.20), (5.22) и утверждения 2.4 из [15] вытекает, что имеет место равенство (5.19).

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в (5.18) и учитывая (5.12), (5.16), (5.17) и (5.19), мы получим

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \langle \dot{x}_k(s), x_k(s) \rangle ds & \leq \int_0^t \langle \dot{x}(s), x(s) \rangle ds \\ & + \Phi^t(p)(x^*) - \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi^t(p_k)(x_k^*). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Теперь из (5.15), (5.23) вытекает

$$\|x(t)\|^2 \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x_k(t)\|^2. \quad (5.24)$$

С другой стороны, согласно (5.10) $x_k(t) \rightarrow x(t)$ в ω - H и, следовательно,

$$\|x(t)\|^2 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k(t)\|^2.$$

Поэтому

$$\|x(t)\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k(t)\|.$$

Из этого равенства и сходимости $x_k(t) \rightarrow x(t)$ в ω - H мы получаем, что $x_k(t) \rightarrow x(t)$ в H . Поскольку t произвольно и последовательность $x_k(t)$, $k \geq 1$, равномерно непрерывна в $C(T, H)$, то $x_k(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$ в $C(T, H)$. Так как $-\dot{x}_k(t) - f_k(t) \in \partial\varphi^t(p_k)(x_k(t))$ и почти всюду $-\dot{x}_k(\cdot) - f_k(\cdot) \in L^2(T, H)$, то согласно утверждению в) в лемме 5.1

$$-\dot{x}_k(\cdot) - f_k(\cdot) \in \partial\Phi(p_k)(x_k). \quad (5.25)$$

Так как $x_k(\cdot) \rightarrow x(\cdot)$ в $L^2(T, H)$, то из сходимости $-\dot{x}_k(\cdot) - f_k(\cdot) \rightarrow -\dot{x}(\cdot) - f(\cdot)$ в ω - $L^2(T, H)$, (5.25), утверждения 3.59 и теоремы 3.66 из [2] вытекает

$$-\dot{x}(\cdot) - f(\cdot) \in \partial\Phi(p)(x).$$

Из этого включения и утверждения в) в лемме 5.1 следует, что

$$-\dot{x}(t) - f(t) \in \partial\varphi^t(p)(x(t)) \text{ п.в.}$$

Следовательно, $\partial\varphi^t(p)(x(t)) \neq \emptyset$ почти всюду на T . Поэтому $x(t) \in \text{dom } \partial\varphi^t(p)$ почти всюду на T . Из (4.27) и свойства (1) предположения $H(\varphi)$ вытекает, что $\varphi^t(p)(x(t)) \leq N$, $t \in T$. Поэтому $x(t) \in \text{dom } \varphi^t(p)$, $t \in T$.

Поскольку $x(\cdot) \in W^{1,2}(T, H)$, $x(0) = y^0(p)$, то $x(\cdot)$ является решением включения (4.8). Так как включение (4.8) имеет единственное решение, то $x(\cdot) = x(p, f)$.

При доказательстве мы считали, что последовательность $g_k(s) \rightarrow x_k(s)$, $k \geq 1$, почти всюду на T сходится в ω - H к нулевому элементу пространства H . На самом деле этим свойством обладает некоторая подпоследовательность последовательности $g_k(s) - x_k(s)$. Поэтому мы доказали, что существует подпоследовательность $x(p_{n_m}, f_{n_m})$, $m \geq 1$, последовательности $x(p_n, f_n)$, $n \geq 1$, такая, что

$$x(p_{n_m}, f_{n_m}) \rightarrow x(p, f) \text{ в } C(T, H), \quad (5.26)$$

$$\dot{x}(p_{n_m}, f_{n_m}) \rightarrow \dot{x}(p, f) \text{ в } \omega\text{-}L^2(T, H). \quad (5.27)$$

Если мы предположим, что последовательность $x(p_n, f_n)$, $n \geq 1$, не сходится к $x(p, f)$ в $C(T, H)$, то найдется подпоследовательность $x(p_{n_k}, f_{n_k})$, $k \geq 1$, последовательности $x(p_n, f_n)$, $n \geq 1$, такая, что любая подпоследовательность последовательности $x(p_{n_k}, f_{n_k})$, $k \geq 1$, не сходится к $x(p, f)$. Повторяя рассуждения, приведенные выше, к последовательности $x(p_{n_k}, f_{n_k})$, $k \geq 1$, и учитывая, что включение (4.8) имеет единственное решение, мы придем к противоречию. Тем самым, при выполнении условия (I) соотношения (5.7), (5.8) доказаны.

Пусть выполняется условие (II). Тогда, повторяя рассуждения, использованные при рассмотрении случая (I), мы получим, что последовательность $x(p_n, f_n)$, $n \geq 1$, равномерно непрерывна в $C(T, H)$. Более того, из неравенств (4.25), (4.27) вытекает, что для каждого $t \in T$ множество $\{x(p_n, f_n)(t)\}_{n \geq 1}$

относительно компактно в H . Поэтому последовательность $x(p_n, f_n)$, $n \geq 1$, относительно компактна в $C(T, H)$. Используя неравенство (4.26), мы получим, что существует подпоследовательность $x(p_{n_k}, f_{n_k})$, $k \geq 1$, последовательности $x(p_n, f_n)$, $n \geq 1$, такая, что

$$\begin{aligned} x(p_{n_k}, f_{n_k}) &\rightarrow x(\cdot) \text{ в } C(T, H), \\ \dot{x}(p_{n_k}, f_{n_k}) &\rightarrow \dot{x}(\cdot) \text{ в } \omega\text{-}L^2(T, H). \end{aligned}$$

Поскольку последовательность $g_k(\cdot) - x_k(\cdot)$, $k \geq 1$, сходится в $L^2(T, H)$ к нулевому элементу пространства $L^2(T, H)$, то неравенство (5.19) имеет место.

В остальном мы следуем рассуждениям, использованным при рассмотрении предположения (I), и тем самым доказываем справедливость соотношений (5.7), (5.8).

Заменяя в (5.18) последовательности $p_k = p_{n_k}$, $g_k = g_{n_k}$, $x_k^* = x_{n_k}^*$, $k \geq 1$, на последовательности p_n , g_n , x_n^* , $n \geq 1$, мы придем к неравенству

$$\begin{aligned} \Phi^t(p_n)(x_n^*) &\leq \Phi^t(p_n)(g_n) + \int_0^t \langle \dot{x}_n(s), g_n(s) - x(s) \rangle ds \\ &\quad + \int_0^t \langle f_n(s), g_n(s) - x_n(s) \rangle ds. \end{aligned}$$

Из этого неравенства и (5.7), (5.8) следует, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Phi^t(p_n)(x_n^*) \leq \Phi^t(p)(x^*).$$

Тогда в соответствии со следствием 5.1 и определением сходимости по Моско мы получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi^t(p_n)(x_n^*) = \Phi^t(p)(x^*), \quad t \in T. \quad (5.28)$$

Равномерная сходимость

$$\Phi^t(p_n)(x(p_n, f_n)) = \Phi^t(p_n)(x_n^*) \quad \text{к} \quad \Phi^t(p)(x(p, f)) = \Phi^t(p)(x^*)$$

вытекает из (5.28), (5.6) и (4.27). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть $p_n \rightarrow p$ и $f_n \rightarrow f$ в $L^2(T, H)$. Тогда справедливы утверждения теоремы 5.2.

Поскольку $f_n \rightarrow f$ в $L^2(T, H)$, то существует подпоследовательность f_{n_m} , $m \geq 1$, последовательности f_n , сходящаяся почти всюду к f . Поэтому для почти каждого $t \in T$ множество $\{f_{n_m}(t); m \geq 1\}$ относительно компактно в H . Тогда из теоремы 5.2 следует, что для последовательности $x(p_{n_m}, f_{n_m})$, $m \geq 1$, имеют место соотношения (5.26), (5.27). Доказательство того, что для самой последовательности $x(p_n, f_n)$, $n \geq 1$, справедливы соотношения (5.7)–(5.9), проводится с помощью аргументов, использованных при доказательстве теоремы 5.2.

§ 6. Приложение

Пусть $\mathbb{R}^N$ – конечномерное евклидово пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – ограниченная область с регулярной (см. [16]) границей $\partial\Omega$, $\Gamma = T \times \partial\Omega$, $C(\overline{\Omega})$ – пространство непрерывных функций из Ω в $\mathbb{R}$, которые допускают непрерывное продолжение на замыкание Ω .

Рассмотрим соболевское пространство $W_0^{1,p}(\Omega)$, $N+1 \leq p < \infty$, с его топологически сопряженным $W^{-1,q}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и пространство $H = L^2(\Omega)$. Хорошо известно, что вложения $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega)$ непрерывны, плотны и компактны. Обозначим через $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ каноническую билинейную форму, устанавливающую двойственность между $W_0^{1,p}(\Omega)$ и $W^{-1,q}(\Omega)$, а через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в H . Как обычно (см. [16]), мы считаем, что сужения форм $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $W_0^{1,p}(\Omega) \times H$ совпадают.

Пусть $K^t \subset \mathbb{R}$, $t \in T$, – замкнутое выпуклое множество, содержащее нуль.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ $H(K^t)$. *Существует функция $a(\cdot) \in W^{1,2}(T)$ такая, что для любых $0 \leq s \leq t \leq 1$ выполняется неравенство*

$$\sup_{u \in K^s} d(u, K^t) \leq |a(t) - a(s)|, \quad (6.1)$$

где $d(u, K^t)$ – расстояние от точки $u \in K^s$ до множества K^t .

Положим

$$\mathcal{K}^t = \{u \in L^2(\Omega); u(x) \in K^t \text{ п.в. на } \Omega\}, \quad (6.2)$$

$$\mathcal{K}_\infty = \{u \in W_0^{1,N+1}(\Omega); \|\nabla u(x)\| \leq 1 \text{ п.в. на } \Omega\}. \quad (6.3)$$

Для элемента $u \in \mathbb{R}$ ($u(\cdot) \in H$) обозначим через $\text{pr}_{K^t} u$ ($\text{pr}_{\mathcal{K}^t} u(\cdot)$) проекцию этого элемента на множество K^t ($\mathcal{K}^t$).

ЛЕММА 6.1. *Пусть $u(\cdot) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Тогда для элемента $\text{pr}_{\mathcal{K}^t} u(\cdot)$, $t \in T$, имеют место соотношения*

$$\text{pr}_{\mathcal{K}^t} u(\cdot) \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (6.4)$$

$$\|\nabla(\text{pr}_{\mathcal{K}^t} u)(x)\| \leq \|\nabla u(x)\| \text{ п.в. на } \Omega. \quad (6.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно (см. [17]), что для $u(\cdot) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ имеет место равенство

$$(\text{pr}_{\mathcal{K}^t} u)(x) = \text{pr}_{K^t} u(x) \text{ п.в. на } \Omega. \quad (6.6)$$

Поскольку функция $u(\cdot)$ на Ω имеет обобщенную производную $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, N$, то существует эквивалентная ей на Ω функция $v(\cdot)$ такая, что она имеет по x_i обычную производную почти всюду на Ω , причем $v(\cdot)$ при почти всех фиксированных $x^{(i)} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \in \Omega^{(i)}$ ($\Omega^{(i)}$ – ортогональная проекция Ω на гиперплоскость $x_i = 0$) является абсолютно непрерывной функцией на любом замкнутом отрезке $[a, b]$ изменения переменной x_i , содержащемся в Ω (см. [18; п. 6.4]).

Поэтому из неравенства

$$|\operatorname{pr}_{K^t} u(x) - \operatorname{pr}_{K^t} u(y)| \leq |u(x) - u(y)|, \quad x, y \in \Omega,$$

и равенства (6.6) следует, что функция $\nabla(\operatorname{pr}_{\mathcal{K}^t} u)$ определена почти всюду на Ω и почти всюду на Ω имеет место неравенство (6.5). Поэтому $\operatorname{pr}_{\mathcal{K}^t} u(\cdot) \in W^{1,p}(\Omega)$. Так как Ω имеет регулярную границу и $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$ (см. [16; гл. II, теорема 1.2]), то $u|_{\partial\Omega} = 0$. Следовательно, $\operatorname{pr}_{\mathcal{K}^t} u|_{\partial\Omega} = 0$. Тогда из леммы 1.33 из [16; гл. II] вытекает, что $\operatorname{pr}_{\mathcal{K}^t} u(\cdot) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Лемма доказана.

Рассмотрим функцию $\varphi_1(p): L^2(\Omega) \rightarrow (-\infty, +\infty]$, $N+1 \leq p < \infty$,

$$\varphi_1(p)(u) = \begin{cases} \frac{1}{p} \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^p dx, & u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (6.7)$$

которая является выпуклой, собственной, полунепрерывной снизу.

Пусть $I(\mathcal{K}^t): L^2(\Omega) \rightarrow (-\infty, +\infty]$ – индикаторная функция множества $\mathcal{K}^t$, $t \in T$, т.е.

$$I(\mathcal{K}^t)(u) = \begin{cases} 0, & u \in \mathcal{K}^t, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Индикаторная функция $I(\mathcal{K}_{\infty}): L^2(\Omega) \rightarrow (-\infty, +\infty]$ множества $\mathcal{K}_{\infty}$ определяется аналогично. Так как $\mathcal{K}^t$, $t \in T$, является выпуклым замкнутым подмножеством пространства $L^2(\Omega)$, а $\mathcal{K}_{\infty}$ – выпуклым замкнутым ограниченным подмножеством пространства $W_0^{1,N+1}(\Omega)$ и, следовательно, выпуклым компактным подмножеством пространства $L^2(\Omega)$, то $I(\mathcal{K}^t)$, $t \in T$, $I(\mathcal{K}_{\infty})$ являются выпуклыми собственными полунепрерывными снизу функциями из $L^2(\Omega)$ в $(-\infty, +\infty]$.

Положим

$$\varphi^t(p)(u) = \varphi_1(p)(u) + I(\mathcal{K}^t)(u), \quad u \in H, \quad N+1 \leq p < \infty, \quad (6.8)$$

$$\varphi^t(\infty)(u) = I(\mathcal{K}_{\infty})(u) + I(\mathcal{K}^t)(u), \quad u \in H, \quad t \in T. \quad (6.9)$$

Используя одноточечную компактификацию Александрова полупрямой $[N+1, +\infty)$, мы можем рассмотреть компактное метрическое пространство $\Lambda = [N+1, +\infty]$ параметра p и семейство функций $\varphi^t(p) \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, $p \in \Lambda$, определенных по формулам (6.8), (6.9).

ЛЕММА 6.2. Семейство функций $\varphi^t(p) \in \Gamma_0(H)$, $t \in T$, $p \in \Lambda$, определенных по формулам (6.8), (6.9), обладает следующими свойствами:

- (1) для любых $r > 0$, $p \in \Lambda$ множество $\{u \in H; \varphi^0(p)(u) < r\}$ не пусто;
- (2) для любых $p \in \Lambda$, $s, t \in T$, $s \leq t$, $u \in \operatorname{dom} \varphi^s(p)$ найдется $u_1 \in \operatorname{dom} \varphi^t(p)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\|u_1 - u\|_H \leq |a(t) - a(s)| |\Omega|^{1/2}, \quad (6.10)$$

$$\varphi^t(p)(u_1) \leq \varphi^s(p)(u), \quad (6.11)$$

где $|\Omega|$ – мера множества Ω ;

- (3) для любой последовательности $p_n \in \Lambda$, $p_n \rightarrow +\infty$, и любого $r > 0$ любая последовательность $u_n \in H$, $n \geq 1$, удовлетворяющая неравенствам

$$\|u_n\|_H \leq r, \quad \varphi^t(p_n)(u_n) \leq r, \quad n \geq 1, \quad (6.12)$$

относительно компактна в H .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как нулевой элемент Θ пространства H принадлежит множеству $\text{dom } \varphi^0(p)$, $p \in \Lambda$, и $\varphi^0(p)(\Theta) = 0$, то утверждение (1) очевидно.

Пусть $p \in [N+1, \infty)$, $s, t \in T$, $s \leq t$ и $u \in \text{dom } \varphi^s(p)$. Очевидно, что $\text{dom } \varphi^s(p) = W_0^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{K}^s$. Положим $u_1 = \text{pr}_{\mathcal{K}^t} u$. Воспользовавшись (6.4), (6.6) и (6.1), мы получим, что $u_1 \in \text{dom } \varphi^t(p)$ и

$$\|u_1 - u\|_H \leq \left(\int_{\Omega} |a(t) - a(s)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (6.13)$$

Теперь неравенство (6.10) вытекает из (6.13), а неравенство (6.11) следует из (6.5) и (6.7), (6.8).

Если $p = +\infty$, то $u \in \text{dom } \varphi^s(\infty) = \mathcal{K}_{\infty} \cap \mathcal{K}^s$. Тогда для элемента $u_1 = \text{pr}_{\mathcal{K}^t} u$ будут иметь место неравенства (6.13), (6.5). Из этих неравенств и (6.3) будут вытекать неравенства (6.10), (6.11).

Пусть $p_n \in \Lambda$, $p_n \rightarrow +\infty$, $r > 0$ и любая последовательность $u_n \in H$, $n \geq 1$, удовлетворяет неравенствам (6.12). Тогда из (6.7), (6.8) следует, что $u_n \in W_0^{1,p_n}(\Omega)$, $n \geq 1$, и

$$\left\{ \int_{\Omega} \|\nabla u_n(x)\|^{p_n} dx \right\}^{1/p_n} \leq \{p_n \varphi^t(p_n)(u_n)\}^{1/p_n} \leq (p_n r)^{1/p_n} \rightarrow 1 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Из этого неравенства вытекает, что существует $C > 0$, при котором имеют место неравенства

$$\left(\int_{\Omega} \|\nabla u_n(x)\|^{p_n} dx \right)^{1/p_n} \leq C, \quad n \geq 1.$$

Поскольку $p_n \geq N+1$, $u_n \in W_0^{1,p_n}(\Omega) \subset W_0^{1,N+1}(\Omega)$, $n \geq 1$, то

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} \|\nabla u_n(x)\|^{N+1} dx \right)^{1/(N+1)} \\ & \leq \left(\int_{\Omega} \|\nabla u_n(x)\|^{p_n} dx \right)^{1/p_n} |\Omega|^{1/(N+1)-1/p} \leq C(|\Omega| + 1)^{1/(N+1)}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Из (6.14) вытекает, что последовательность u_n , $n \geq 1$, ограничена в $W_0^{1,N+1}(\Omega)$. Тогда из компактности вложения $W_0^{1,N+1}(\Omega) \hookrightarrow H$ следует, что последовательность u_n , $n \geq 1$, относительно компактна в H . Лемма доказана.

ЛЕММА 6.3. Для любого $t \in T$ и любой последовательности $p_n \in \Lambda$, $p_n \rightarrow +\infty$, последовательность $\varphi^t(p_n)$, $n \geq 1$, сходится к $\varphi^t(\infty)$ в смысле Моско.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in T$ фиксировано и $p_n \rightarrow +\infty$. Вначале покажем, что для любого $u \in \text{dom } \varphi^t(\infty)$ существует последовательность $u_n \in H$, $n \geq 1$, такая, что

$$u_n \rightarrow u \text{ в } H \text{ и } \varphi^t(p_n)(u_n) \rightarrow \varphi^t(\infty)(u). \quad (6.15)$$

Если $u \in \text{dom } \varphi^t(\infty) = \mathcal{K}_\infty \cap \mathcal{K}^t$, то из (6.3) следует, что $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $p \geq N+1$. Поэтому $u \in \text{dom } \varphi^t(p_n)$, $n \geq 1$. Положим $u_n = u$, $n \geq 1$. Воспользовавшись (6.3), (6.7) и (6.8), мы получим

$$0 \leq \varphi^t(p_n)(u_n) = \frac{1}{p_n} \int_{\Omega} \|\nabla u_n(x)\|^{p_n} dx \leq \frac{1}{p_n} |\Omega| \rightarrow 0 = \varphi^t(\infty)(u) \text{ при } p_n \rightarrow +\infty.$$

Тем самым, (6.15) доказано.

Теперь нам остается показать, что для любой последовательности $u_n \in H$, $n \geq 1$, слабо сходящейся в H к u , имеет место неравенство

$$\varphi^t(\infty)(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \varphi^t(p_n)(u_n). \quad (6.16)$$

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^t(p_n)(u_n) = +\infty$, то неравенство (6.16) очевидно. Предположим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^t(p_n)(u_n) < +\infty$. Тогда существует подпоследовательность $\{n'\}$ последовательности $\{n\}$ такая, что

$$0 \leq \varphi^t(p_{n'})(u_{n'}) \leq r \quad \forall n'$$

при некотором $r > 0$. Из этого неравенства вытекает

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{\Omega} \|\nabla u_{n'}(x)\|^{p_{n'}} dx \right\}^{1/p_{n'}} &\leq \{p_{n'} \varphi^t(p_{n'})(u_{n'})\}^{1/p_{n'}} \\ &\leq (p_{n'} r)^{1/p_{n'}} \rightarrow 1 \text{ при } n' \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Для удобства обозначений мы будем писать p и u_p вместо $p_{n'}$ и $u_{n'}$. Согласно (6.17) существует $C > 0$ такое, что

$$\left(\int_{\Omega} \|\nabla u_p(x)\|^p dx \right)^{1/p} \leq C. \quad (6.18)$$

Из этого неравенства непосредственно вытекает

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \|\nabla u_p(x)\|^q dx \right)^{1/q} &\leq \left(\int_{\Omega} \|\nabla u_p(x)\|^p dx \right)^{1/p} |\Omega|^{(p-q)/(pq)} \\ &\leq C(|\Omega| + 1)^{1/q} \quad \forall q \in [N+1, p]. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Воспользовавшись (6.19), мы получим, что для любого $q \in [N+1, +\infty)$ существует подпоследовательность $\{p_q\}$ последовательности $\{p\}$ такая, что последовательность u_{p_q} слабо сходится к u в пространстве $W_0^{1,q}(\Omega)$ при $p_q \rightarrow +\infty$. Так как u_{p_q} слабо сходится к u в H при $p_q \rightarrow +\infty$, то u_{p_q} слабо сходится к u в пространстве $W_0^{1,q}(\Omega)$. Поэтому $u \in W_0^{1,N+1}(\Omega) \cap \mathcal{K}^t$ и

$$\nabla u_{p_q} \rightarrow \nabla u \text{ слабо в } L^q(\Omega, \mathbb{R}^N). \quad (6.20)$$

Для удобства в дальнейшем мы опускаем индекс q в p_q . Тогда из (6.17), (6.20) вытекает

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^q dx \right\}^{1/q} &\leq \varliminf_{p \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{\Omega} \|\nabla u_p(x)\|^q dx \right\}^{1/q} \\ &\leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{\Omega} \|\nabla u_p(x)\|^p dx \right\}^{1/p} |\Omega|^{(p-q)/(pq)} \\ &\leq \lim_{p \rightarrow +\infty} (rp)^{1/p} |\Omega|^{(p-q)/(pq)} = |\Omega|^{1/q}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $q \rightarrow +\infty$ в последнем неравенстве, мы получим

$$\|\nabla u(x)\| \leq 1 \text{ п.в. на } \Omega.$$

Поэтому $u \in \mathcal{H}_{\infty} \cap \mathcal{H}^t$. Последнее означает, что $\varphi^t(\infty)(u) = 0$. Тем самым, неравенство (6.16) имеет место.

Если $u \notin \text{dom } \varphi^t(\infty)$, то из (6.16) следует, что для любой последовательности $u_n \rightarrow u$ в H будет иметь место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^t(p_n)(u_n) = \varphi^t(\infty)(u)$. Поэтому последовательность $\varphi^t(p_n)$, $n \geq 1$, сходится в смысле Моско к $\varphi^t(\infty)$ для любого $t \in T$ и любой последовательности $p_n \in \Lambda$, $p_n \rightarrow +\infty$. Лемма доказана.

При доказательстве леммы 6.3 мы в основном следовали схеме доказательства леммы 3.6 из [6], где рассматривалось подобное утверждение.

ЛЕММА 6.4. Для любого $t \in T$

$$\partial \varphi^t(p) = \partial \varphi_1(p) + \partial I(\mathcal{H}^t), \quad p \in [N+1, +\infty), \quad (6.21)$$

$$\partial \varphi^t(\infty) = \partial I(\mathcal{H}_{\infty}) + \partial I(\mathcal{H}^t). \quad (6.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включения

$$\begin{aligned} \partial \varphi_1(p) + \partial I(\mathcal{H}^t) &\subset \partial \varphi^t(p), \quad p \in [N+1, +\infty), \\ \partial I(\mathcal{H}_{\infty}) + \partial I(\mathcal{H}^t) &\subset \partial \varphi^t(\infty) \end{aligned}$$

хорошо известны. Поэтому для доказательства равенств (6.21), (6.22) нам достаточно доказать максимальную монотонность операторов

$$\begin{aligned} \partial \varphi_1(p) + \partial I(\mathcal{H}^t), \quad p \in [N+1, +\infty), \\ \partial I(\mathcal{H}_{\infty}) + \partial I(\mathcal{H}^t). \end{aligned}$$

Пусть $\partial I_{\lambda}(\mathcal{H}^t)(u)$, $u \in H$, $\lambda > 0$, – субдифференциал регуляризации Моро–Иосиды функции $I(\mathcal{H}^t)(u)$. Известно (см. [2; § 3.4.3]), что

$$\partial I_{\lambda}(\mathcal{H}^t)(u) = \frac{1}{\lambda}(u - \text{pr}_{\mathcal{H}^t} u). \quad (6.23)$$

Пусть $u \in \text{dom } \partial \varphi_1(p)$, $v \in \partial \varphi_1(p)(u)$. Тогда $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ и согласно (6.4) $\text{pr}_{\mathcal{H}^t} u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Воспользовавшись определением субдифференциала выпуклой функции и (6.23), мы получим

$$\varphi_1(p)(u) - \varphi_1(p)(\text{pr}_{\mathcal{H}^t} u) \leq \langle v, u - \text{pr}_{\mathcal{H}^t} u \rangle = \lambda \langle v, \partial I_{\lambda}(\mathcal{H}^t)(u) \rangle. \quad (6.24)$$

Теперь из (6.5), (6.7) и (6.24) вытекает, что

$$\langle v, \partial I_\lambda(\mathcal{K}^t)(u) \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \partial \varphi_1(p)(u), \quad u \in \text{dom } \partial \varphi_1(p), \quad \lambda > 0.$$

Отсюда и из теоремы 1.10 из [19] вытекает, что оператор $\partial \varphi_1(p) + \partial I(\mathcal{K}^t)$, $p \in [N+1, +\infty)$, максимально монотонен. Поэтому равенство (6.19) доказано. Справедливость равенства (6.20) доказывается аналогично. Лемма доказана.

Пусть $r > 0$ и $y_\infty \in \text{dom } \varphi^0(\infty)$, $\varphi^0(\infty)(y_\infty) \leq r$. Тогда из лемм 6.2, 6.3 и следствия 3.1 вытекает, что для любой последовательности $p_n \rightarrow +\infty$, $n \geq 1$, существует последовательность y_n , $n \geq 1$, такая, что $y_n \rightarrow y_\infty$ в $L^2(\Omega)$ и $\varphi(p_n)(y_n) \leq r$, $n \geq 1$. Положим $z_n = z(p_n)$ и рассмотрим включения

$$\begin{aligned} -\dot{z}_n(t) &\in \partial \varphi_1(p_n)(z_n(t)) + \partial I(\mathcal{K}^t)(z_n(t)) + f_n(t) \quad \text{п.в.}, \\ z_n(0) &= y_n, \quad f_n \in L^2(T, L^2(\Omega)), \quad p_n \geq N+1; \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} -\dot{z}_\infty(t) &\in \partial I(\mathcal{K}_\infty)(z_\infty(t)) + \partial I(\mathcal{K}^t)(z_\infty(t)) + f_\infty(t) \quad \text{п.в.}, \\ z_\infty(0) &= y_\infty, \quad f_\infty \in L^2(T, L^2(\Omega)). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Под решением включений (6.25), (6.26) понимаются функции $z_n(\cdot)$, $z_\infty(\cdot) \in W^{1,2}(T, L^2(\Omega))$, $z_n(0) = y_n$, $z_\infty(0) = y_\infty$, $n \geq 1$, такие, что $z_n(t) \in \text{dom } \partial \varphi^t(p_n)$, $z_\infty(t) \in \text{dom } \partial \varphi^t(\infty)$ почти всюду и почти всюду на T выполняются включения (6.25), (6.26).

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $p_n \rightarrow +\infty$. Тогда для любого $n \geq 1$ каждое из включений (6.25), (6.26) имеет и причем единственное решение $z_n(\cdot)$, $z_\infty(\cdot)$ соответственно, причем $z_n(t) \in W_0^{1,p_n}(\Omega) \cap \mathcal{K}^t$ и $z_\infty(t) \in \mathcal{K}_\infty \cap \mathcal{K}^t$, $t \in T$.

Если последовательность f_n , $n \geq 1$, слабо сходится в $L^2(T, L^2(\Omega))$ к f_∞ , то

$$z_n(\cdot) \rightarrow z_\infty(\cdot) \quad \text{в } C(T, H), \quad \dot{z}_n(\cdot) \rightarrow \dot{z}_\infty(\cdot) \quad \text{в } \omega\text{-}L^2(T, L^2(\Omega)), \quad (6.27)$$

$$\frac{1}{p_n} \int_T \|\nabla z_n(t)\|^{p_n} dt \rightarrow 0. \quad (6.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из лемм 6.2, 6.3 следует, что для функций $\varphi^t(p_n)$, $\varphi^t(\infty)$, определенных равенствами (6.8), (6.9), выполняются все предположения, при которых имеет место теорема 5.2. Если воспользоваться равенствами (6.21), (6.22), то утверждения теоремы 6.1 вытекают из теоремы 5.2.

Пусть $I(K^t): \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, +\infty]$ – индикаторная функция множества $K^t \subset \mathbb{R}$, $t \in T$, и $\partial I(K^t)$ – ее субдифференциал.

Через $\Delta_p u$, $p \geq N+1$, обозначим p -лапласиан

$$\Delta_p u = \text{div}(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u). \quad (6.29)$$

Как обычно, мы отождествляем пространства $L^2(T, L^2(\Omega))$ и $L^2(T \times \Omega)$, ставя в соответствие элементам $z \in L^2(T, L^2(\Omega))$ элементы из $L^2(T \times \Omega)$ по правилу $z(t)(x) = z(t, x)$.

Пусть $p_n \rightarrow +\infty$. Рассмотрим включения

$$-\frac{\partial z_n(t, x)}{\partial t} \in -\Delta_{p_n} z_n(t, x) + \partial I(K^t)(z_n(t, x)) + f_n(t, x), \quad (6.30)$$

$$f_n \in L^2(T \times \Omega),$$

$$z_n(0, x) = y_n(x), \quad y_n(x) \in K^0 \text{ п.в. на } \Omega, \quad (6.31)$$

$$y_n \in W_0^{1, p_n}, \quad z_n|_{\Gamma} = 0. \quad (6.32)$$

При фиксированном $n \geq 1$ под решением включения (6.30) мы понимаем функцию $z_n \in W^{1, 2}(T, L^2(\Omega))$, $z_n(0)(x) = y_n(x)$, такую, что $\Delta_{p_n} z_n(t, x)$ при почти каждом $t \in T$ является элементом пространства $L^2(\Omega)$ и почти всюду на T при почти каждом $x \in \Omega$ будет иметь место включение (6.30).

Пусть оператор $A(p)$ из $W_0^{1, p}(\Omega)$ в $W^{-1, q}(\Omega)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $N + 1 \leq p < +\infty$, определен по формуле

$$\langle A(p)u, v \rangle = \int_{\Omega} \langle \|\nabla u(x)\|^{p-2} \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx, \quad u, v \in W_0^{1, p}(\Omega).$$

Известно (см. [20]), что оператор $A(p)$ является дифференциалом Гато функции

$$\psi(p)(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^p dx, \quad u \in W_0^{1, 2}(\Omega),$$

и

$$A(p)u = -\operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2} \nabla u) = -\Delta_p u.$$

Если рассмотреть сужение $A(p)$ на множество

$$D = \{u \in W_0^{1, p}(\Omega); Au \in L^2(\Omega)\},$$

то $A(p): D \subset L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ является максимально монотонным оператором (см. [20]) и

$$-\Delta_p u = \partial \varphi_1(p)(u), \quad (6.33)$$

где $\varphi_1(p)$ – функция, определенная по формуле (6.7).

Пусть $z \in L^2(\Omega)$, $y \in L^2(\Omega)$. Хорошо известно, что следующие условия эквивалентны:

$$y \in \partial I(\mathcal{K}^t)(z), \quad (6.34)$$

$$y(x) \in \partial I(K^t)(z(x)) \text{ п.в. на } \Omega. \quad (6.35)$$

ТЕОРЕМА 6.2. Любое решение включения (6.25) является решением включения (6.30). Справедливо и обратное утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть z_n , $n \geq 1$, является решением включения (6.25). Тогда $z_n \in W^{1, 2}(T, L^2(\Omega))$ и имеют место соотношения (6.31), (6.32). Из определения решения включения (6.25) вытекает, что $z_n(t) \in \operatorname{dom} \partial \varphi_1^t(p_n)$ при почти каждом $t \in T$. Поэтому из (6.33) вытекает, что $\Delta_{p_n} z_n(t)$ при почти каждом $t \in T$ является элементом пространства $L^2(\Omega)$. Поэтому

$$-\dot{z}(t) + \Delta_{p_n} z_n(t) - f_n(t) \in L^2(\Omega).$$

Из этого включения, (6.25), (6.34), (6.35) вытекает, что включение (6.30) выполняется почти всюду на T при почти каждом $x \in \Omega$. Тем самым, z_n , $n \geq 1$, является решением включения (6.30).

Пусть z_n , $n \geq 1$, – решение включения (6.30). Тогда $z_n \in W^{1,2}(T, L^2(\Omega))$, $z_n(0) = y_n$, и при почти каждом $t \in T$ функция $\Delta_{p_n} z_n(t, x)$ является элементом пространства $L^2(\Omega)$. Поэтому при почти каждом $t \in T$

$$-\dot{z}_n(t, x) + \Delta_{p_n} z_n(t, x) - f_n(t, x)$$

является элементом пространства $L^2(\Omega)$ и

$$-\dot{z}_n(t, x) + \Delta_{p_n} z_n(t, x) - f_n(t, x) \in \partial I(K^t)(z_n(t, x)).$$

Из этого включения и (6.34), (6.35) вытекает, что почти всюду на T

$$-\dot{z}_n(t) + \Delta_{p_n} z_n(t) - f_n(t) \in \partial I(\mathcal{K}^t)(z_n(t)). \quad (6.36)$$

Воспользовавшись (6.36), (6.33), (6.8), получаем, что почти всюду на T имеет место включение (6.25) и $z_n(t) \in \text{dom } \partial \varphi^t(p_n)$ почти всюду. Поэтому z_n , $n \geq 1$, является решением включения (6.25). Теорема доказана.

Пусть $f_n \in L^2(T \times \Omega)$, $n \geq 1$, слабо сходится в $L^2(T, \Omega)$ к f_∞ . Воспользовавшись теоремами 6.1, 6.2, мы можем сказать, что предельной последовательности решений z_n , $n \geq 1$, включения (6.30) при $p_n \rightarrow +\infty$ является решение включения (6.26). Тем самым, мы дали ответ на вопрос, поставленный в § 1.

Список литературы

- [1] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam–London; Elsevier, New York, 1973.
- [2] H. Attouch, *Variational convergence for functions and operators*, Appl. Math. Ser., Pitman, Boston–London–Melbourne, 1984.
- [3] G. Aronsson, L. C. Evans, Y. Wu, “Fast/slow diffusion and growing sandpiles”, *J. Differential Equations*, **131**:2 (1996), 304–335.
- [4] J. W. Barrett, L. Prigozhin, “Bean’s critical-state model as the $p \rightarrow \infty$ limit of an evolutionary p -Laplacian equation”, *Nonlinear Anal.*, **42**:2 (2000), 977–993.
- [5] H.-M. Yin, “On a p -Laplacian type of evolution system and applications to the Bean model in the type-II superconductivity theory”, *Quart. Appl. Math.*, **59**:1 (2001), 47–66.
- [6] G. Akagi, “Convergence of functionals and its applications to parabolic equations”, *Abstr. Appl. Anal.*, **11** (2004), 907–933.
- [7] G. Akagi, M. Otani, “Time-dependent constraint problems arising from macroscopic critical-state models for type-II superconductivity and their approximations”, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **14**:2 (2004), 683–712.
- [8] P. Krejčí, J. Sprekels, “Parabolic regularization of differential inclusions and the stop operator”, *Interfaces Free Bound.*, **4**:4 (2004), 423–435.
- [9] N. Kenmochi, “Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications”, *Bull. Fac. Educ., Chiba Univ.*, **2**, **30** (1981), 1–87.
- [10] Н. Бурбаки, *Топологические векторные пространства*, Элементы математики, ИЛ, М., 1959; пер. с фр.: N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*. XIX. Part 1: *Les structures fondamentales de l’analyse. Livre V: Espaces vectoriels topologiques*, Hermann, Paris, 1955.

- [11] E. Michael, "Continuous Selections. I", *Ann. of Math.* (2), **63**:2 (1956), 361–382.
- [12] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Мир, М., 1969; пер. с англ.: R. E. Edwards, *Functional analysis. Theory and applications*, Holt, Rinehart and Winston, New York–Toronto–London, 1965.
- [13] N. Kenmochi, "On the quasi-linear heat equation with time-dependent obstacles", *Nonlinear Anal.*, **5**:1 (1981), 71–80.
- [14] A. A. Tolstonogov, D. A. Tolstonogov, " L_p -continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: existence theorems", *Set-Valued Anal.*, **4**:2 (1996), 173–203.
- [15] M. Kisielewicz, "Weak compactness in spaces $C(S, X)$ ", *Information theory, statistical decision functions, random processes*, Trans. 11th Prague Conf. (Prague, 1990), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992, 101–106.
- [16] Х. Гаевский, К. Гререр, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978; пер. с нем.: H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operator-differentialgleichungen*, Akademie-Verlag, Berlin, 1974.
- [17] F. Hiai, H. Umegaki, "Integrals, conditional expectations, and martingales of multi-valued functions", *J. Multivariate Anal.*, **7**:1 (1977), 149–182.
- [18] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, 2-е изд., Наука, М., 1996; англ. пер. 1-го изд.: O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skiĭ, *Integral representations of functions and imbedding theorems*, vol. I, II, Winston, Washington, DC; Wiley, New York–Toronto, ON–London, 1979.
- [19] V. Barbu, *Optimal control of variational inequalities*, Res. Notes in Math., **100**, Pitman, Boston–London–Melbourne, 1984.
- [20] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff, Leyden, 1976.

А. А. Толстоногов (A. A. Tolstonogov)

Институт динамики систем

и теории управления СО РАН, г. Иркутск

E-mail: aatol@icc.ru

Поступила в редакцию

26.03.2008 и 03.12.2008