Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, О повышенной суммируемости градиента решений эллиптических уравнений с переменным показателем нелинейности, *Матем. сб.*, 2008, том 199, номер 12, 19–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm5008>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 14:36:05

УДК 517.956.4

В. В. Жиков, С. Е. Пастухова**О повышенной суммируемости градиента
решений эллиптических уравнений
с переменным показателем нелинейности**

Изучаются эллиптические уравнения типа $p(x)$ -лапласиана. Хорошо известно логарифмическое условие на модуль непрерывности показателя нелинейности $p(x)$, при котором лапласиан переменного порядка нелинейности наследует многие свойства обычного p -лапласиана постоянного порядка. Среди них – так называемое свойство повышенной суммируемости градиента решения. В настоящей работе установлено, что это свойство сохраняется при некотором более общем условии на показатель $p(x)$, но повышение суммируемости оказывается не степенного, а логарифмического характера. В основе предложенного метода лежит новое обобщение леммы Геринга, в котором исходным является обратное неравенство Гёльдера “с увеличенными носителем и показателем в правой части”. Построен контрпример, показывающий, насколько точно найденное условие на модуль непрерывности.

Библиография: 28 названий.

§ 1. Введение

1.1. Из истории вопроса. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u = \operatorname{div} h \text{ в } \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad h \in L^2(\Omega). \quad (1.1)$$

Решение понимается в слабом смысле, т.е.:

$$u \in H_0^{1,2}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} h \cdot \nabla \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (1.2)$$

Здесь и далее через $H_0^{1,q}(\Omega)$, $q > 1$, обозначаем замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\left(\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^q \, dx \right)^{1/q}.$$

По замыканию в качестве пробной функции в тождество (1.2) можно подставить само решение и получить L^2 -оценку для градиента ∇u :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int_{\Omega} h \cdot \nabla u \, dx \leq \|h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \implies \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.3)$$

Возникает следующий вопрос о возможной повышенной суммируемости градиента решения: если $h \in L^q(\Omega)$, $q > 2$, то будет ли верна аналогичная L^q -оценка для ∇u ? Положительный ответ дает теорема Кальдерона–Зигмунда [1], согласно которой

$$\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} \leq c(\Omega, q) \|h\|_{L^q(\Omega)} \quad \forall q > 2, \quad (1.4)$$

если область Ω достаточно регулярна. Будем говорить, что область Ω из класса D^q , $q \in (2, \infty)$, если для заданного q верна оценка (1.4).

Теперь возьмем вместо (1.1) равномерно эллиптическое уравнение

$$\operatorname{div}(a(x)\nabla u) = \operatorname{div} h, \quad x \in \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad h \in L^2(\Omega), \quad (1.5)$$

с измеримой симметричной матрицей $a(x)$, подчиненной условию

$$\lambda|\xi|^2 \leq a(x)\xi \cdot \xi \leq |\xi|^2, \quad 0 < \lambda < 1, \quad (1.6)$$

для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и п.в. $x \in \Omega$. Для задачи (1.5), как и выше, легко вывести L^2 -оценку

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} \|h\|_{L^2(\Omega)}$$

с константой, не зависящей от области Ω , а свойство повышенной суммируемости градиента решения также сохраняется, но в форме, ограниченной по сравнению с (1.4).

ТЕОРЕМА (Мейерс, см. [2]). Пусть область Ω класса D^q для некоторого $q > 2$ и u – решение задачи (1.5). Тогда найдется $p_0 \in (2, q)$, зависящее лишь от константы эллиптичности λ и области Ω , такое, что

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|h\|_{L^p(\Omega)}, \quad c = c(\lambda, \Omega, p) \quad \forall p \in (2, p_0). \quad (1.7)$$

Мейерс доказал неравенство (1.7), представляя уравнение (1.5) как возмущение лапласиана и опираясь на оценку Кальдерона–Зигмунда, а также на интерполяционную теорему Рисса–Торина для L^p -пространств. Идея использовать метод возмущения заимствована из работы Б. Боярского [3], где подобные вопросы изучались для эллиптических систем уравнений первого порядка с измеримыми коэффициентами, но только на плоскости и ограничение размерности $n = 2$ было существенно.

Чтобы объяснить, откуда в оценке (1.7) возникает ограничение на показатель p , напомним некоторые моменты из доказательства теоремы Мейерса. С уравнениями (1.1) и (1.5) свяжем определенные на произведении $H_0^{1,p}(\Omega) \times H_0^{1,p'}(\Omega)$, $p' = p/(p-1)$, $2 \leq p \leq q$, билинейные формы

$$\mathcal{B}(v, w) = \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, dx, \quad \mathcal{B}_a(v, w) = \int_{\Omega} a \nabla v \cdot \nabla w \, dx.$$

Положим

$$\inf_{\|\nabla w\|_{L^{p'}(\Omega)}=1} \sup_{\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}=1} |\mathcal{B}(v, w)| = \frac{1}{k_p}.$$

Из энергетического неравенства (1.3) и оценки Кальдерона–Зигмунда с помощью интерполяционных соображений можно получить следующие свойства константы k_p : $\min_p k_p = k_2 = 1$, k_p непрерывна и не убывает при $p \geq 2$.

Теперь обратимся к форме $\mathcal{B}_a$. Из условия (1.6) выводим оценку

$$\inf_{\|\nabla w\|_{L^{p'}(\Omega)}=1} \sup_{\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}=1} |\mathcal{B}_a(v, w)| \geq \frac{1}{k_p} - 1 + \lambda \equiv k(p), \quad (1.8)$$

которая оказывается весьма значимой благодаря двум обстоятельствам. Во-первых, доказано, что в случае $k(p) > 0$ уравнение (1.5) разрешимо в $H_0^{1,p}(\Omega)$ для $h \in L^p(\Omega)$ с оценкой (1.7), в которой $c = 1/k(p)$. Во-вторых, величина $k(p)$ из (1.8) в самом деле положительна при p , достаточно близких к значению 2 в силу перечисленных свойств константы k_p . Когда $k(p)$ становится отрицательной при $p > p_0$, появляется граница для показателя p в L^p -оценке, и данная ситуация действительно реализуется.

ПРИМЕР (Мейерс, см. [2]). Пусть $n = 2$, $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\}$, $a_{11}(x) = 1 + (\mu^2 - 1)x_2^2|x|^{-2}$, $a_{12}(x) = (1 - \mu^2)x_1x_2|x|^{-2}$, $a_{22}(x) = 1 + (\mu^2 - 1)x_1^2|x|^{-2}$, $u_0 = x_1|x|^{(\mu-1)/2}$, где $\mu \in (0, 1)$.

Прямыми вычислениями показывается, что $\operatorname{div}(a\nabla u_0) = 0$, а числа 1 и μ являются собственными значениями матрицы $a(x)$ в каждой точке x , что обеспечивает условие (1.6) с $\lambda = \mu^2$. Полагая $u(x) = u_0(x) - x_1$, получаем решение задачи (1.5) с $h \in L^\infty(\Omega)$, при этом $\nabla u \in L^p(\Omega)$ для $p < 2/(1 - \mu)$ и $\int_\Omega |\nabla u|^{2/(1-\mu)} dx = \infty$ из-за особенности в нуле.

Геринг предложил иной подход к вопросам повышенной суммируемости. В работе [4], посвященной свойствам квазиконформных отображений, доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ. Если $f \geq 0$, $f \in L_{\operatorname{loc}}^q(\Omega)$, где $q \in (1, \infty)$, Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ и

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q f^q dx \leq c_0 \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q f dx \right)^q, \quad c_0 > 1, \quad (1.9)$$

для любого куба $Q = Q_r(x_0) \subset \Omega$, где $Q_r(x_0) = x_0 + [-r, r]^n$, то

$$f \in L_{\operatorname{loc}}^{q+\delta}(\Omega), \quad \delta = \delta(n, q, c_0) > 0.$$

Таким образом, выполнение “обратного неравенства Гёльдера” (1.9) дает повышение суммируемости. Впоследствии Джаквинта и Модика [5] обобщили результат Геринга на случай, когда в левой части неравенства (1.9) среднее берется по половинному кубу $Q/2 = Q_{r/2}(x_0)$. В таком виде обратное неравенство Гёльдера может быть проверено для градиента решения многих вариационных задач, что делается с помощью подходящих неравенств Каччополи и Соболева–Пуанкаре. Разработанная в [5] общая схема приложения леммы Геринга оказалась применимой для широкого класса дифференциальных уравнений в частных производных, линейных и нелинейных [6]–[8], в том числе с переменным порядком нелинейности [9], [10]. Продолжая исследования, начатые

в [9], [10], мы изучаем эллиптические уравнения типа $p(x)$ -лапласиана при более общем условии на модуль непрерывности показателя $p(x)$, когда известные варианты леммы Геринга неприемлемы. Таким образом, потребовалось прежде всего получить подходящее обобщение этой леммы.

1.2. Обобщение леммы Геринга. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$ (например, $\Omega = \mathbb{R}^n$), f, g – неотрицательные функции из пространства $L^q(\Omega)$, $q > 1$. Считаем f и g продолженными нулем на все $\mathbb{R}^n$. Предположим, что найдутся такие $c_0 > 0$, $r_0 > 0$, что при $r \leq r_0$

$$\int_{Q_r(x_0)} f^q dx \leq c_0 \left(\int_{Q_{2r}(x_0)} f dx \right)^{q+b(r)} + \int_{Q_{2r}(x_0)} g^q dx \quad \forall x_0 \in \overline{\Omega}, \quad (1.10)$$

где $b(r)$ – некоторая непрерывная неубывающая функция на отрезке $[0, r_0]$, $b(0) = 0$, $b(r) \leq 1$. Здесь и далее используем обозначение

$$\int_E \cdot dx = \frac{1}{|E|} \int_E \cdot dx - \text{среднее по множеству } E,$$

где $|E|$ – n -мерная мера Лебега измеримого множества E . Функцию f считаем нормированной условием $\|f\|_{L^q} \leq 1$.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если $b(r) \equiv 0$, то верна оценка*

$$\int_{\Omega} f^{q+\delta} dx \leq c \left(1 + \int_{\Omega} g^{q+\delta} dx \right) \quad (1.11)$$

с некоторыми $c > 0$, $\delta > 0$, зависящими только от c_0, n, q, r_0 .

Этот результат хорошо известен.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть*

$$b(r) = \frac{k}{\ln(1/r)}, \quad k > 0.$$

Тогда верна оценка (1.11), в которой константы $c > 0$, $\delta > 0$ зависят, помимо прочего, еще и от множителя k .

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть*

$$b(r) = \frac{k \ln \ln(1/r)}{\ln(1/r)}, \quad k > 0.$$

Тогда при $k \leq 1/n$ верна оценка

$$\int_{\Omega} f^q \ln^{\delta}(f+2) dx \leq c \left(1 + \int_{\Omega} g^q \ln^{\delta}(g+2) dx \right) \quad (1.12)$$

с некоторыми $\delta > 0$, $c > 0$, зависящими только от c_0, n, q, r_0 .

По поводу теорем 1.1–1.3 сделаем несколько замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Обсудим имеющееся в теореме 1.3 условие $k \leq 1/n$. Могло бы показаться, что при $k > 1/n$ повышенная суммируемость сохраняется, только вместо $\ln^\delta(s+2)$ надо взять какую-то другую неограниченно растущую при $s \rightarrow \infty$ функцию. Однако это не так. Установлено, что при $k > 3/n$ отсутствует оценка вида (1.12) с какой-либо неограниченно растущей при $s \rightarrow \infty$ функцией вместо $\ln^\delta(s+2)$ (см. § 5).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Пусть Ω – ограниченная липшицева область. Тогда оценка (1.10) следует из неравенства

$$\int_{\Omega_r(x_0)} f^q dx \leq c_0 \left(\int_{\Omega_{2r}(x_0)} f dx \right)^{q+b(r)} + \int_{\Omega_{2r}(x_0)} g^q dx, \quad x_0 \in \bar{\Omega}, \quad (1.13)$$

в котором $\Omega_r(x_0) = \Omega \cap Q_r(x_0)$. Таким образом, для краевых задач в ограниченной липшицевой области можно проверять в качестве исходного вместо (1.10) неравенство (1.13), что иногда оказывается более естественным (см. § 3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Теоремы 1.1–1.3, применимые к произвольным областям Ω , как и их аналоги для $\mathbb{R}^n$ – теоремы 6.1–6.3, выводятся из одного общего варианта леммы Геринга, доказанного авторами в работе [11] – теоремы 6.4. В этом обобщении классического результата Геринга неравенство (1.10) допускает функции $b(r)$ весьма общего вида. Для удобства чтения приводим доказательство общей теоремы, а также ее следствий в § 6.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.7. В исходном неравенстве (1.10) можно было бы использовать не кубы Q_r , Q_{2r} , а шары $B_{r/2}$, B_r . Формулировка в терминах шаров иногда более удобна для приложений (см. § 3).

§ 2. Формулировка основных результатов

В ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ рассмотрим задачу Дирихле

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = \operatorname{div} h, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.1)$$

Предполагаем, что $h \in L^\infty(\Omega)$, а измеримый показатель $p(x)$ удовлетворяет условию

$$1 < \alpha \leq p(x) \leq \beta < \infty. \quad (2.2)$$

Сначала уточним, как мы понимаем решение задачи (2.1). Если показатель p постоянен, задача однозначно разрешима в соболевском пространстве $W_0^{1,p}(\Omega)$ (см. [12]). В случае переменного p решение ищем в пространстве Соболева–Орлича

$$W = W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in W_0^{1,1}(\Omega), \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx < \infty \right\},$$

которое можно наделить нормой и получить сепарабельное рефлексивное банахово пространство (см. подробнее в § 7). Будем говорить, что $u \in W$ есть

решение задачи Дирихле (2.1), если интегральное тождество

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} h \cdot \nabla \varphi \, dx \quad (2.3)$$

выполнено для любой пробной функции $\varphi \in W$. В указанном смысле задача (2.1) однозначно разрешима, что можно доказать с помощью вариационных соображений или техники монотонных операторов [9], [10], [13], действуя так, будто показатель p постоянен. Однако в случае переменного показателя p есть одно существенное отличие, связанное с тем, что гладкие функции, вообще говоря, не плотны в пространстве W : $H \neq W$, где H – замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ в W . Поэтому наряду с введенным выше W -решением можно определить H -решение как такую функцию $u \in H$, для которой интегральное тождество (2.3) выполнено для любой $\varphi \in H$. В обоих случаях в тождестве (2.3) в качестве пробной функции можно взять само решение и получить энергетическое равенство и оценку

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx = \int_{\Omega} h \cdot \nabla u \, dx \implies \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \leq 2^{\alpha'+1} \int_{\Omega} |h|^{p'} \, dx. \quad (2.4)$$

Здесь “штрих” указывает на сопряженный по Гёльдеру показатель, например $\alpha' = \alpha/(\alpha-1)$. В случае равенства $H = W$ показатель p и саму задачу Дирихле называют *регулярными*. Важно знать условия регулярности. Для непрерывного показателя $p(x)$ свойство регулярности зависит от его модуля непрерывности $\omega(t)$. Напомним, что по определению модуля непрерывности

$$|p(x) - p(y)| \leq \omega(|x - y|), \quad x, y \in \Omega, \quad |x - y| \leq \frac{1}{4}.$$

Хорошо известно следующее логарифмическое условие: если

$$\omega(t) = \frac{k}{\ln(1/t)}, \quad k > 0, \quad (2.5)$$

то показатель p регулярен [14]. Более того, это условие влечет множество других свойств: гёльдеровость решения, повышенную суммируемость градиента, ограниченность максимального оператора Харди–Литтлвуда в пространстве Орлича и др. (см. [15]–[19]).

Сравнительно недавно [15] было установлено, что для модуля непрерывности

$$\omega(t) = \frac{k_0 \ln \ln(1/t)}{\ln(1/t)}, \quad k_0 > 0, \quad (2.6)$$

также имеет место регулярность, если только $k_0 \leq \alpha/n$, а при $k_0 > \alpha/n$ уже строятся примеры, когда $H \neq W$. Однако помимо регулярности каких-либо других свойств при $k_0 \leq \alpha/n$ до сих пор доказано не было. Обобщение леммы Геринга в форме теоремы 1.3 позволяет и в этом случае получить некоторое свойство повышенной суммируемости градиента.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть показатель $p(x)$ имеет модуль непрерывности (2.6), причем $k_0 < \alpha/n$. Тогда для решения задачи (2.1) верна оценка

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p \ln^{\delta}(|\nabla u| + 2) dx \leq c \int_{\Omega} |h|^{p'} \ln^{\delta}(|h| + 2) dx + c, \quad (2.7)$$

где $\delta > 0$, $c > 0$ зависят только от α , Ω , n .

Для сравнения заметим, что в случае логарифмического модуля непрерывности (2.5) наблюдается степенное повышение суммируемости градиента, а именно

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{(1+\delta)p} dx \leq c \int_{\Omega} |h|^{(1+\delta)p'} dx + c, \quad (2.8)$$

где $\delta > 0$, $c > 0$ зависят только от Ω , α , n , k . Этот результат впервые доказан в [9], [10] (см. также [15]).

Теорема 2.1 теряет силу при $k_0 > 3\alpha/n$. Более того, в этом случае, вообще говоря, отсутствует оценка вида (2.7) с какой-либо неограниченно растущей функцией вместо $\ln^{\delta}(s + 2)$. Доказательство состоит в построении гладких показателей p_{ε} таких, что

- (i) $1 < \alpha \leq p_{\varepsilon} \leq \beta$;
- (ii) p_{ε} имеют общий модуль непрерывности (2.6) с некоторым $k_0 > 3\alpha/n$;
- (iii) в уравнении вида (2.1) с $p = p_{\varepsilon}$ вектор $h \in (L^{\infty})^n$ не зависит от ε ;
- (iv) последовательность $|\nabla u_{\varepsilon}|^{p_{\varepsilon}}$ не является слабо компактной в $L^1(\Omega)$.

Построение проделано в § 5 на основе модельного примера из § 4. Множитель k_0 можно взять сколь угодно близким к $3\alpha/n$. В случае $k_0 \in [\alpha/n, 3\alpha/n]$ положение осталось неясным.

Для $p(x)$ -лапласиана мы рассматриваем также краевые задачи Неймана и задачи смешанного типа, которые ставятся соответственно в пространстве Соболева–Орлича

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,1}(\Omega), \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx < \infty \right\}$$

или его подпространстве функций с нулевым следом на выделенной части границы $\partial\Omega$. Если показатель $p(x)$ имеет модуль непрерывности вида (2.5) или (2.6), решение этих задач также обладает свойством повышенной суммируемости градиента типа (2.8) или (2.7) (подробности см. в § 3).

§ 3. Свойство повышенной суммируемости градиента

3.1. Рассмотрим задачу Дирихле в ограниченной липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$:

$$u \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega), \quad \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) = \operatorname{div} h, \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

где $h \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)^n$. Решение этой задачи мы понимаем в смысле интегрального тождества

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u - h) \cdot \nabla \varphi dx = 0 \quad \forall \varphi \in W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega). \quad (3.2)$$

Таким образом, мы выделяем W -решение задачи Дирихле (3.1). Можно было бы взять и H -решение этой задачи (см. о краевых задачах двух типов в § 2) – дальнейшие выводы справедливы для решений обоих типов. Впрочем, когда речь пойдет непосредственно о свойстве повышенной суммируемости градиента, W - и H -решение совпадают.

1°. *Неравенство Каччополи.* Пусть показатель $p(x)$ непрерывен в $\bar{\Omega}$ и выполнено условие (2.2), а решение u и правая часть h продолжены нулем вне области Ω .

ЛЕММА 3.1. *Если u – решение задачи (3.1), то выполнено неравенство*

$$\int_{B_{r/2}(x_0)} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq c \int_{B_r(x_0)} \left(\left| \frac{u - \lambda}{r} \right|^{p(x)} + |h|^{p'(x)} \right) dx, \quad c = c(\beta), \quad (3.3)$$

для любого шара $B_r = B_r(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < r\}$ с центром в точке $x_0 \in \bar{\Omega}$. Здесь

$$\lambda = \begin{cases} \oint_{B_r} u dx, & \text{если } B_{3r/4} \subset \Omega, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае непрерывного $p(x)$ верен принцип локализации (см. § 6):

$$u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega), \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega) \implies \psi u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (3.4)$$

Тогда легко показать, что в качестве пробной функции в тождестве (3.2) можно взять

$$\varphi = \chi^\beta (u - \lambda), \quad \chi \in C_0^\infty(B_{3r/4}), \quad 0 \leq \chi \leq 1, \quad \chi|_{B_{r/2}} \equiv 1, \quad |\nabla \chi| \leq 5r^{-1}. \quad (3.5)$$

Отсюда получаем оценку

$$\int_{B_r} |\nabla u|^{p(x)} \chi^\beta dx \leq 5\beta \int_{B_r} \chi^{\beta-1} (|\nabla u|^{p(x)-1} + |h|) \left| \frac{u - \lambda}{r} \right| dx + \int_{B_r} h \chi^\beta \cdot \nabla u dx. \quad (3.6)$$

По неравенству Юнга при $\varepsilon \in (0, 1)$ имеем

$$\chi^{\beta-1} |\nabla u|^{p-1} \left| \frac{u - \lambda}{r} \right| \leq \varepsilon^{p'} \chi^{(\beta-1)p'} |\nabla u|^{p+\varepsilon-p} \left| \frac{u - \lambda}{r} \right|^p \leq \varepsilon^{\beta'} \chi^\beta |\nabla u|^{p+\varepsilon-\beta} \left| \frac{u - \lambda}{r} \right|^p, \quad (3.7)$$

так как $p' > \beta'$, $(\beta - 1)p' \geq (\beta - 1)\beta' = \beta$. Аналогично

$$|h \chi^\beta \cdot \nabla u| \leq \varepsilon \chi^\beta |\nabla u|^p + \varepsilon^{-1} \chi^\beta |h|^{p'}, \quad \left| h \frac{u - \lambda}{r} \right| \leq |h|^{p'} + \left| \frac{u - \lambda}{r} \right|^p. \quad (3.8)$$

Выбирая ε достаточно малым, из (3.6)–(3.8) получаем неравенство (3.3).

2°. *Обобщенное неравенство Соболева–Пуанкаре.* Напомним сначала стандартное неравенство Соболева–Пуанкаре в шаре B_r : если

$$u \in W^{1,1}(B_r), \quad \oint_{B_r} u dx = \lambda,$$

то

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \left| \frac{u - \lambda}{r} \right|^{st} dx &\leq c_0 \left(\int_{B_r} |\nabla u|^s dx \right)^t \quad \forall s \geq 1, \\ t &\in \left[1, \frac{n}{n-1} \right], \quad c_0 = \text{const}(n, s). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Аналогичное неравенство верно, если $\lambda = 0$ и $u|_K = 0$, $K \subset B_r$, $|K| |B_r|^{-1} \geq \nu > 0$. В последнем случае c_0 зависит также от величины ν , но не от конфигурации множества K . Это следует, например, из [20; гл. II, лемма A.13].

Неравенство (3.9) для всех s таких, что $1 \leq s \leq \beta < \infty$, допускает единую константу $c_0 = \text{const}(n, \beta) = c(n)\beta^*/l^*$, где l^* – сопряженный к l по Соболеву (показатель), а $c(n)$ – константа из неравенства (3.9) при $s = 1$ (см. доказательство леммы A.10 в [20; гл. II]).

Наша цель – получить неравенство, подобное (3.9), для переменного показателя $p(x)$ с модулем непрерывности $\omega(t)$. Удобно выбрать $\omega(t)$ так, чтобы $|p(x) - p(y)| \leq \omega(|x - y|/2)$.

ЛЕММА 3.2. *Для $u \in W^{1,1}(B_r)$ и оговоренного выше значения λ выполнено неравенство*

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x_0)} \left| \frac{u - \lambda}{r} \right|^{p(x)} dx &\leq c + c \left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^{p(x)/q} dx \right)^{q+q\omega(r)/\alpha} \quad \forall q \in \left[1, \frac{n+1}{n} \right], \\ c &= c(n, \beta), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $r \leq r_0$ и $\omega(r_0) \leq (n^2 - 1)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $p_1 = \min_{B_r} p$, $p_2 = \max_{B_r} p$, $t = qp_2/p_1$, согласно (3.9) получаем

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \left| \frac{u - \lambda}{r} \right|^{p(x)} dx &\leq 1 + \int_{B_r} \left| \frac{u - \lambda}{r} \right|^{p_2} dx \leq 1 + c_0 \left(\int_{B_r} |\nabla u|^{p_2/t} dx \right)^t \\ &= 1 + c_0 \left(\int_{B_r} |\nabla u|^{p_1/q} dx \right)^{qp_2/p_1} \leq 1 + c_0 \left(1 + \int_{B_r} |\nabla u|^{p(\cdot)/q} dx \right)^{q+q\omega(r)/\alpha}, \end{aligned}$$

где на последнем шаге мы воспользовались тем, что

$$\frac{p_2}{p_1} q = \frac{p_1 + \omega(r)}{p_1} q \leq q + \frac{\omega(r)}{\alpha} q.$$

Для законного применения неравенства (3.9) осталось проверить, что

$$t = \frac{p_2}{p_1} q \leq \frac{n}{n-1}.$$

В самом деле,

$$\frac{p_2}{p_1} q = \frac{p_1 + \omega(r)}{p_1} q \leq (1 + \omega(r_0))q \leq \frac{n^2}{n^2 - 1} q \leq \frac{n}{n-1}$$

для достаточно малого радиуса $r < r_0$, где $\omega(r_0) \leq 1/(n^2 - 1)$, $q \leq (n+1)/n$. Лемма доказана.

Из предыдущих лемм вытекает

ЛЕММА 3.3. Пусть u – решение задачи (3.1). Тогда найдутся постоянные $r_0 = r_0(n, \omega)$, $c_0 = c_0(n, \Omega, \beta) > 0$ такие, что при $r < r_0$, $x_0 \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} \int_{B_{r/2}(x_0)} |\nabla u|^{p(x)} dx &\leq c_0 \left(\int_{B_r(x_0)} |\nabla u|^{p(x)/q} dx \right)^{q+q\omega(r)/\alpha} + c_0 \int_{B_r(x_0)} (1 + |h|^{p'}) dx \\ \forall q &\in \left[1, \frac{n+1}{n} \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2. Для уравнения (3.1) в ограниченной липшицевой области Ω рассмотрим задачу Неймана, под решением которой понимаем функцию $u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ такую, что

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} h \cdot \nabla \varphi dx \quad \forall \varphi \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega). \quad (3.12)$$

Мы взяли для определенности W -решение, а можно было – H -решение (см. § 2). Вектор-функцию h и поток $|\nabla u|^{p-2} \nabla u$ продолжим нулем вне Ω , тем самым и плотность энергии $|\nabla u|^p$ продолжена нулем.

ЛЕММА 3.4. Если u – решение задачи (3.12), то найдутся константы $r_0 = r_0(n, \omega)$, $c_0 = c_0(n, \beta, \Omega)$ такие, что при $r < r_0$, $x_0 \in \bar{\Omega}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{r/2}(x_0)} |\nabla u|^{p(x)} dx &\leq c_0 \left[\left(\int_{\Omega_r(x_0)} |\nabla u|^{p(x)/q} dx \right)^{q+q\omega(r)/\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega_r(x_0)} (1 + |h|^{p'(x)}) dx \right] \quad \forall q \in \left[1, \frac{n+1}{n} \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $\Omega_r(x_0) = \Omega \cap B_r(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В тождестве (3.12) берем пробные функции вида (3.5), в которых $\lambda = \int_{\Omega_r} u dx$. Тождество преобразуется к виду

$$\int_{\Omega_r} |\nabla u|^p \chi^\beta dx = \beta \int_{\Omega_r} \chi^{\beta-1} (h - |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \cdot (u - \lambda) \nabla \chi dx + \int_{\Omega_r} h \chi^\beta \cdot \nabla u dx. \quad (3.14)$$

Отсюда так же, как при выводе леммы 3.1, получаем, что

$$\int_{\Omega_{r/2}} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq c(\beta) \left[\int_{\Omega_r} |h|^{p'(x)} dx + \int_{\Omega_r} \left| \frac{u - \lambda}{r} \right|^{p(x)} dx \right]. \quad (3.15)$$

Для оценки последнего интеграла используем следующее обобщение леммы 3.2: если

$$u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega), \quad x_0 \in \bar{\Omega}, \quad r < r_0(n, \omega), \quad \lambda = \int_{\Omega_r} u dx,$$

то

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} \left| \frac{u - \lambda}{r} \right|^{p(x)} dx &\leq c + c \left(\int_{\Omega_r} |\nabla u|^{p(x)/q} dx \right)^{q+q\omega(r)/\alpha} \quad \forall q \in \left[1, \frac{n+1}{n} \right], \\ c &= c(n, \beta, \Omega). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Вывод (3.16) основан на использовании неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} \left| \frac{u - \lambda}{r} \right|^{st} dx &\leq c_0 \left(\int_{\Omega_r} |\nabla u|^s dx \right)^t \quad \forall s \geq 1, \\ t &\in \left[1, \frac{n}{n-1} \right], \quad c_0 = c_0(n, s, \Omega), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $x_0 \in \bar{\Omega}$, $\Omega_r = B_r(x_0) \cap \Omega$, $r < r_0$. Важно, что здесь константу c_0 можно выбрать не зависящей от x_0 и $r \leq r_0$. В самом деле, подвергая Ω_r растяжению, получаем подобласти Ω_1 единичного шара B_1 , для которых условие Липшица выполнено равномерно. Неравенство вида (3.17) для областей Ω_1 можно записать с единой константой, зависящей лишь от n , s и константы Липшица [20; гл. II, приложение А]. Отсюда обратной гомотетией возвращаемся к областям Ω_r и доказываем неравенство (3.17) для произвольного $r \leq r_0$. Далее, повторяя рассуждения из доказательства леммы 3.2, выводим, опираясь на (3.17), неравенство (3.16).

Наконец, из (3.15), (3.16) вытекает искомая оценка (3.13). Лемма доказана.

3.3. Перейдем к непосредственному выводу свойства повышенной суммируемости градиента решения краевой задачи Дирихле или Неймана. Изложенного в предыдущих пунктах материала достаточно, чтобы применить для этой цели теоремы 1.2 и 1.3.

Рассмотрим сначала задачу Дирихле (2.1), в которой показатель $p(x)$ имеет модуль непрерывности вида (2.6), и воспользуемся оценкой (3.11) при подходящем q , определенном ниже более точно. Удобно считать, что правая часть в уравнении нормирована условием (см. оценку в (2.4))

$$2^{\alpha'+1} \int_{\Omega} |h|^{p'} dx = 1.$$

Тогда исходное неравенство (1.10) для теоремы 1.3 выполнено, если положить

$$f^q = |\nabla u|^p, \quad g^q = c_0(1 + |h|^{p'}), \quad b(r) = \frac{qk_0}{\alpha} \frac{\ln \ln(1/r)}{\ln(1/r)},$$

а значение $q > 1$ подчинить условию $qk_0/\alpha \leq 1/n$, что возможно в силу предположения $k_0 < \alpha/n$. Неравенство (1.12) в введенных выше обозначениях даст оценку (2.7). Теорема 2.1 доказана.

Теперь разберем случай, когда в задаче (2.1) показатель $p(x)$ имеет модуль непрерывности (2.5). Полагаем $b(r) = qk/(\alpha \ln(1/r))$, тогда в силу оценки (3.11) те же, что ранее, функции f и g удовлетворяют исходному неравенству (1.10) в условиях теоремы 1.2. В итоге получаем степенное повышение суммируемости градиента. В работах [9], [10] подобные результаты доказаны с помощью более простого варианта леммы Геринга, который приведен здесь как теорема 1.1.

Аналогично на основе оценки (3.13) и замечания 1.5 доказывается формулируемый ниже результат о повышенной суммируемости градиента решения задачи Неймана.

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть показатель $p(x)$ имеет модуль непрерывности (2.5) или (2.6) с $k_0 < \alpha/n$. Тогда для решения задачи Неймана (3.12) с $h \in L^\infty(\Omega)$ верна оценка (2.8) или (2.7) соответственно.

3.4. Рассмотрим уравнение (3.1) в ограниченной липшицевой области Ω со смешанным краевым условием Дирихле–Неймана (в обобщенной постановке). После того, как в предыдущих разделах разобраны задачи Дирихле и Неймана, остановимся подробно только на новых моментах, специфичных для смешанной задачи. В остальном ход доказательства лишь намечается, но даются ссылки на уже сделанные ранее выводы.

Пусть Γ – замкнутое подмножество границы $\partial\Omega$ ненулевой поверхностной меры,

$$W_\Gamma^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \{u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \mid u|_\Gamma = 0\}.$$

Решением смешанной краевой задачи называем функцию $u \in W_\Gamma^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega h \cdot \nabla \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in W_\Gamma^{1,p(\cdot)}. \quad (3.18)$$

При изучении смешанной задачи в общем случае неизбежны громоздкие построения и обозначения. Кроме того, не всякое взаимное расположение компонент Γ и $\partial\Omega \setminus \Gamma$ допустимо. Для простоты и наглядности продемонстрируем наш метод в элементарном случае: $n = 2$, $\partial\Omega$ – кривая на плоскости с прямолинейным куском γ , принадлежащим координатной оси, и тип граничного условия меняется в нескольких (двух или более) точках A_i , расположенных внутри отрезка γ . В этой ситуации удобней оперировать не шарами $B_r = B_r(x_0)$, а кубами (или квадратами) $Q_r = Q_r(x_0) = x_0 + (-r, r)^n$. При замене шаров на кубы основные утверждения пп. 3.1–3.3 остаются в силе – именно в такой формулировке они далее предполагаются.

Для смешанной задачи (3.18) справедлив аналог теорем 2.1 и 3.5 и при его доказательстве ключевой является

ЛЕММА 3.6. Оценка (3.13) остается в силе, если u – решение задачи (3.18), а вместо шаров $B_r(x_0)$ взяты кубы $Q_r(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый из допустимых кубов $Q_r(x_0)$ ($x_0 \in \overline{\Omega}$, $r \leq r_0$) отнесем к одному из двух типов: к первому, если

$$Q_{3r/4} \cap \partial\Omega \neq \emptyset, \quad |Q_r \cap \Gamma| \cdot |Q_r \cap \partial\Omega|^{-1} \geq \frac{1}{8}, \quad (3.19)$$

и ко второму в противном случае. Считаем r_0 столь малым, что кубы Q_r могут содержать лишь одну “пограничную точку” A_i .

В тождестве (3.18) возьмем пробную функцию φ из (3.5), полагая $\lambda = 0$, если Q_r первого типа, и $\lambda = \int_{\Omega_r} f \, dx$, где $\Omega_r = Q_r \cap \Omega$, если Q_r второго типа. Необходимое для пробной функции равенство $\varphi|_\Gamma = 0$ достигнуто за счет того,

что либо $\lambda = 0$ и $u|_{\Gamma} = 0$ для кубов первого типа, либо $\chi|_{\Gamma} = 0$ для кубов второго типа. Обрабатываем тождество (3.18) с выбранной пробной функцией φ отдельно в каждом из возможных двух случаев.

Для кубов Q_r второго типа, так же, как при выводе лемм 3.1 и 3.4, приходим сначала к оценке (3.15) и далее с помощью неравенства (3.16) к искомому соотношению (3.13).

Теперь рассмотрим кубы Q_r первого типа. Из равенства (3.14) описанным выше способом выводим (аналог неравенства (3.15))

$$\int_{\Omega_{r/2}} |\nabla u|^p dx \leq c(\beta, n) \left(\int_{\Omega_r} |h|^{p'} dx + \int_{\Omega_r} \left| \frac{u}{r} \right|^p dx \right). \quad (3.20)$$

Для оценки последнего интеграла применим неравенство Соболева–Пуанкаре в следующем варианте:

$$\int_{\Omega_r} \left| \frac{u}{r} \right|^{p(x)} dx \leq c + c \left(\int_{\Omega_r} |\nabla u|^{p(x)/q} dx \right)^{q+\omega(r)q/\alpha} \quad \forall q \in \left[1, \frac{n+1}{n} \right], \quad (3.21)$$

$$c = c(n, \beta, \Omega, \Gamma),$$

где $u \in W_{\Gamma}^{1,p(\cdot)}$, $x_0 \in \overline{\Omega}$, $r \leq r_0$, $\Omega_r = \Omega \cap Q_r$, Q_r – куб первого типа.

Соотношение (3.21) выводится стандартными рассуждениями (см. вывод (3.10) и (3.16)) из подходящего неравенства Соболева–Пуанкаре с постоянными показателями в области Ω_r (им является неравенство (3.17) с $\lambda = 0$ и такими же, как в (3.21), условиями на u и Q_r), справедливость которого, в свою очередь, устанавливаем с помощью растяжения Ω_r в подобласти Ω_1 единичного куба. Условие $u \in W_{\Gamma}^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ в случае, когда $Q_r(x)$ – куб первого типа, влечет за собой обращение в нуль на части границы Ω_1 , относительная доля которой во всей границе $\partial\Omega_1$ строго отделена от нуля. Здесь важно, что для кубов первого типа $|Q_r \cap \Gamma| |\partial\Omega_r|^{-1} \geq \nu > 0$ в силу второго условия в (3.19). Дальнейшие подробности вывода (3.21) опускаем.

Из (3.20) и (3.21) следует искомая оценка (3.13), в которой вместо шаров взяты кубы.

§ 4. Модельный пример

4.1. Пусть θ , r – полярные координаты на плоскости и $B = B_{r_0} = \{x \mid |x| < r_0\}$ – круг достаточно малого радиуса $r_0 \in (0, 1/30)$. Изучим пространство Соболева–Орлича $W = W_0^{1,p(\cdot)}(B)$ для показателя

$$p(x) = 2 + k\chi(r)\Phi(\theta), \quad k = \text{const} > 1, \quad \chi(r) = \frac{\ln \ln(1/r)}{\ln(1/r)}. \quad (4.1)$$

Здесь $\Phi(\theta)$ – непрерывная кусочно линейная функция со следующими свойствами:

- 1) $\Phi(\theta) = \Phi(\theta + \pi)$ (π -периодичность);
- 2) $\Phi(\theta) = \Phi(-\theta)$ (четность);

3) $\Phi(\theta) = -\Phi(\theta + \pi/2)$ ($\pi/2$ -антипериодичность);

4) $|\Phi(\theta)| \leq 1$;

5) $\Phi(\theta) \equiv 1$ при $|\theta| < \delta \leq \pi/8$.

Будем считать, что $\Phi(\theta)$ – это функция, изображенная на рис. 1, (а). Предполагаем, что параметры k и r_0 подчинены условию $k\chi(r_0) < 1$. Тогда $p(x) \geq \alpha > 1$ (см. рис. 1, (b)).

Рис. 1. Графики функций $\Phi(\cdot)$ и $p(\cdot, r)$

Показатель $p(x)$ нерегулярен, т.е. $W \neq H$, и можно утверждать большее.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пространство H имеет коразмерность 1 в W .*

Перед тем как приступить к доказательству этой теоремы, установим некоторые свойства функции $u \in W$. Прежде всего, в секторах $\{(\theta, r) \in B \mid |\theta + j\pi| < \delta\}$, $j = 0, 1$, где показатель p принимает значение $2 + k\chi(r)$ (см. рис. 2), по теореме вложения функция $u(x)$ непрерывна и определено угловое среднее

$$\bar{u}_j(r) = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} u(\theta + j\pi, r) d\theta, \quad j = 0, 1. \quad (4.2)$$

Рис. 2. Значения функции $p(x)$ в секторах круга B

ЛЕММА 4.2. *Пределы*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}_j(r) = c_j = c_j(u), \quad j = 0, 1,$$

существуют и являются непрерывными функционалами в W . Кроме того,

$$\bar{u}_j(r) \in W. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для определенности изучим среднее $\bar{u}(r) = \bar{u}_0(r)$. Вводя секторы

$$S_{a,b} = \{(\theta, r) \mid |\theta| < \delta, a < r < b\}, \quad S_b = S_{0,b},$$

можем записать

$$\begin{aligned} \bar{u}(r_1) &= -\frac{1}{2\delta} \int_{r_1}^{r_0} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial u}{\partial r} dr d\theta, \quad r_1 \in (0, r_0), \\ |\bar{u}(r_1)| &\leq \frac{1}{2\delta} \int_{S_{r_1, r_0}} |\nabla u| r^{-1} dx \leq \frac{1}{2\delta} \left(\int_{S_{r_1, r_0}} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{S_{r_1, r_0}} r^{-p'(x)} dx \right), \end{aligned}$$

где на последнем шаге использовано неравенство Юнга. Аналогично получаем

$$\begin{aligned} |\bar{u}(r_1) - \bar{u}(r_2)| &\leq c \left(\int_{S_{r_2, r_1}} |\nabla u|^{p(x)} dx + \int_{S_{r_2, r_1}} r^{-p'(x)} dx \right), \\ 0 &< r_2 < r_1 < r_0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из равенства

$$p'(x) = \frac{p(x)}{p(x) - 1} = \frac{2 + k\chi(r)}{1 + k\chi(r)} = 2 - \frac{k\chi(r)}{1 + k\chi(r)}$$

следует, что $p'(x) \leq 2 - k_1\chi(r)$ в S_t для некоторых $k_1 > 1$, $t \in (0, 1)$. Поэтому

$$\frac{1}{2\delta} \int_{S_{r_0}} r^{-p'(x)} dx \leq \int_0^t \frac{dr}{r^{1-k_1\chi(r)}} + \int_{S_{t, r_0}} r^{-p'(x)} dx < \infty.$$

Тогда из (4.4) заключаем, что предел $\lim_{r \rightarrow 0} \bar{u}(r) = \bar{u}(0)$ существует и является непрерывным функционалом в W .

Для вывода свойства (4.3) существенно постоянство функции $p(\cdot, r)$ на $(-\delta, \delta)$ (см. (4.1) и свойство 5) функции Φ). По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right|^{p(\theta, r)} &= \left| \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial u}{\partial r}(\theta', r) d\theta' \right|^{p(\theta, r)} \leq \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(\theta', r) \right|^{p(\theta, r)} d\theta', \\ \theta &\in (-\delta, \delta), \end{aligned}$$

и после интегрирования по S_{r_0} получаем

$$\begin{aligned} \int_{S_{r_0}} |\nabla \bar{u}(|x|)|^{p(x)} dx &\leq \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \int_0^{r_0} \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(\theta', r) \right|^{p(\theta, r)} r d\theta' dr d\theta \\ &= \int_0^{r_0} \int_{-\delta}^{\delta} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(\theta', r) \right|^{p(\cdot, r)} r d\theta' dr \leq \int_{S_{r_0}} |\nabla u|^{p(x)} dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует свойство $\bar{u} \in W$. В самом деле, поскольку абсолютный максимум $p(\cdot, r)$ достигается на $(-\delta, \delta)$, где эта функция постоянна, то для любой радиальной функции $f(r) \geq 0$ выполнено неравенство

$$\int_{B_{r_0}} f(|x|)^{p(x)} dx \leq \frac{\pi}{\delta} \int_{S_{r_0}} f(|x|)^{p(x)} dx.$$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если $u \in H$, то $c_0(u) = c_1(u)$.

Действительно, для $u \in C_0^\infty(B)$ равенство $c_0(u) = c_1(u)$ выполнено, а по замыканию оно сохраняется и для $u \in H$.

Функционалы c_0 и c_1 выявляют различие между пространствами H и W .

ЛЕММА 4.3. Для любого элемента $u \in W$ верно следующее:

$$u \in H \iff c_0(u) = c_1(u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО критерия требуется провести лишь в сторону достаточности, поскольку необходимость была уже рассмотрена. Упростим ситуацию, считая $u \in L^\infty(B)$ (что возможно по лемме 7.5) и $c_0 = c_1 = 0$ (что достигается вычитанием финитной гладкой функции, равной константе $c_0 = c_1$ в окрестности точки $x = 0$). Разбиение единицы $\varphi_1(\theta) + \dots + \varphi_4(\theta) \equiv 1$ на окружности позволяет ограничиться ситуацией, когда $\text{supp } u$ локализован либо в одной из четвертей $\{(\theta, r) \in B \mid |\theta \pm \pi/2| \leq \pi/4\}$, где $p \leq 2$ (см. (4.1) и свойства Φ), либо в одном из секторов $\{(\theta, r) \in B \mid |\theta - j\pi| < \pi/3\}$, $j = 0, 1$, в которых определены формулой (4.2) средние $\bar{u}_j(r)$.

Ниже мы используем следующее утверждение:

$$\text{если } u \in W \text{ и } u \equiv 0 \text{ в окрестности точки } x = 0, \text{ то } u \in H. \quad (4.5)$$

Действительно, так как $u \in W_0^{1,p(\cdot)}(Q)$, где $Q = \{x \in B, |x| > \varepsilon\}$ – кольцо, в котором показатель $p(x)$ регулярен, то множество $C_0^\infty(Q)$ плотно в $W_0^{1,p(\cdot)}(Q)$, откуда следует (4.5).

Случай 1. Пусть $\text{supp } u \subset \{x \mid p \leq 2\}$. Возьмем срезающую функцию $\eta_\varepsilon(x) = \eta(\varepsilon^{-1}x)$, где $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\eta \equiv 0$ при $|x| < 1/2$, $\eta \equiv 1$ при $|x| > 1$, $|\nabla \eta| \leq 3$, и положим $u_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon(x)u(x)$. В силу (4.5) $u_\varepsilon \in H$ и достаточно доказать слабую сходимость

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ в } W, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

Поскольку $u_\varepsilon \rightarrow u$ в $L^{p(\cdot)}(B)$, то требует проверки лишь сходимость

$$\nabla u_\varepsilon = \eta_\varepsilon \nabla u + u \nabla \eta_\varepsilon \rightharpoonup \nabla u \text{ в } L^{p(\cdot)}(B), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.7)$$

Очевидно, что $\nabla u_\varepsilon \rightarrow \nabla u$ п.в. и по лемме 7.1 достаточно убедиться в ограниченности семейства ∇u_ε в $L^{p(\cdot)}$. В самом деле, $\eta_\varepsilon \nabla u$ ограничена в $L^{p(\cdot)}$ и по свойствам срезающей функции η_ε

$$\int_B |u \nabla \eta_\varepsilon|^{p(x)} dx \leq C \int_{B_\varepsilon} \varepsilon^{-p(x)} dx \leq C \varepsilon^{-2} |B_\varepsilon| = C\pi,$$

так как $p \leq 2$ на $\text{supp } u$ и $u \in L^\infty(B)$. Таким образом, сходимости (4.7) и (4.6) получены.

Случай 2. Пусть для определенности $\text{supp } u \subset \{|\theta| < \pi/3\}$. Рассмотрим разложение

$$u(x) = \bar{u}(r) + v(x),$$

где $\bar{u}(r) = \bar{u}_0(r)$ – угловое среднее из (4.2). Считая $\bar{u}(r)$ продолженной нулем при $r < 0$, введем гладкую монотонную функцию $h_\varepsilon(r)$ такую, что $h_\varepsilon(r) = \varepsilon$ при $r \leq \varepsilon$, $h_\varepsilon(r) = 0$ при $r \geq 3\varepsilon$, $|h'_\varepsilon(r)| < 1$, и положим

$$u_\varepsilon(x) = \bar{u}(r - h_\varepsilon(r)) + \eta_\varepsilon(x)v(x) \equiv u_\varepsilon^{(1)}(x) + u_\varepsilon^{(2)}(x), \quad (4.8)$$

где срезающая функция $\eta_\varepsilon(x)$ та же, что выше. Аппроксимация функции $u(x)$ устроена различным образом для составляющих $\bar{u}(r)$ и $v(x)$: сдвигом в аргументе для $\bar{u}(r)$ и срезкой в окрестности точки $x = 0$ для $v(x)$. В обоих случаях достигаем равенства $u_\varepsilon^{(i)} \equiv 0$ в круге B_ε .

Из условия $\bar{u}(r) \in W$ (см. лемму 4.2) выводим $u_\varepsilon^{(1)} \in W$ и далее $u_\varepsilon^{(1)} \in H$ (см. (4.5)). Остается доказать, что в W

$$u_\varepsilon^{(1)}(x) \rightharpoonup \bar{u}(r), \quad u_\varepsilon^{(2)}(x) \rightharpoonup v(x),$$

что дает искомое соотношение $u \in H$. Остановимся подробно лишь на ограниченности $\nabla u_\varepsilon^{(2)}$ в $L^{p(\cdot)}(B)$, вытекающей, как и ранее, из ограниченности $v \nabla \eta_\varepsilon$ в $L^{p(\cdot)}(B)$ (см. (4.8)).

При фиксированном r к функции $v(\cdot, r)/r$ на промежутке $(-\pi/3, \pi/3)$ применим неравенство Пуанкаре с переменным показателем $p(\cdot, r)$ (см. (7.12)), в результате чего получим, что

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left| \frac{v(\theta, r)}{r} \right|^{p(\theta, r)} d\theta \leq c \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right|^{p(\theta, r)} d\theta + c.$$

Отсюда, поскольку $v = u - \bar{u}(r)$, $\left| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right| \leq |\nabla u|$ и $\varepsilon^{-1} \leq r^{-1}$ в B_ε , то

$$\begin{aligned} \int_B |v \nabla \eta_\varepsilon|^{p(x)} dx &\leq c \int_{B_\varepsilon} \left| \frac{v}{\varepsilon} \right|^{p(x)} dx \leq c \int_{B_\varepsilon} \left| \frac{v}{r} \right|^{p(x)} dx \\ &\leq C \int_0^\varepsilon r \left(\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right|^{p(\theta, r)} d\theta + 1 \right) dr \leq C \left(\int_{B_\varepsilon} |\nabla u|^{p(x)} dx + 1 \right) \\ &\leq C \left(\int_B |\nabla u|^{p(x)} dx + 1 \right). \end{aligned}$$

Получено искомое неравенство и вместе с тем соотношение $u \in H$. Лемма доказана.

4.2. После подготовительных лемм мы приведем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1. Сначала предъявим функцию $u_0 \in W \setminus H$. Пусть $\psi(\theta)$ – гладкая 2π -периодическая функция, $\psi(0) = 0$, $\psi(\pi) = 1$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi'(\theta) \equiv 0$ вне $I_\delta = \{\theta \mid |\theta \pm \pi/2| < \delta\}$, δ – из определения функции $\Phi(\theta)$ (см. (4.1)).

Тогда $u_0(x) = \psi(\theta)(1 - (r/r_0)^2) \in W$. В самом деле, ввиду ограниченности $u_0(x)$ требует изучения лишь градиент ∇u_0 , а точнее, его составляющая $\nabla \psi$. Поскольку $p(\cdot, r) = 2 - k\chi(r)$ на I_δ по свойству функции $\Phi(\theta)$ и $|\nabla \psi| < cr^{-1}$, то

$$\int_B |\nabla \psi|^{p(x)} dx \leq c \int_0^{r_0} \int_{I_\delta} \frac{r dr d\theta}{r^{p(\theta, r)}} \leq 2\delta c \int_0^{r_0} \frac{dr}{r^{1-k\chi(r)}} < \infty,$$

что обеспечивает принадлежность u_0 пространству W . С другой стороны, по лемме 4.3 $u_0 \notin H$, так как $c_0(u_0) = 0$ и $c_1(u_0) = 1$.

Теперь возьмем произвольную функцию из $u \in W$ с предельными значениями в нуле $c_0 \neq c_1$ и $\lambda = c_1 - c_0$. Если u_0 – построенная выше функция, то $u - \lambda u_0 \in H$ по лемме 4.3. Таким образом, получено представление $W = \{\lambda u_0\} + H$, что и требовалось.

4.3. Укажем нетривиальный функционал на W , равный нулю на H . Возьмем функции $\psi(x)$ и $u_0(x) = \psi(\theta)(1 - (r/r_0)^2)$ из доказательства теоремы 4.1 и положим

$$w(x) = w(x_1, x_2) = \psi(-x_2, x_1), \quad b(x) = \left\{ -\frac{\partial w}{\partial x_2}, \frac{\partial w}{\partial x_1} \right\}.$$

По построению вектор b соленоидален в B и принадлежит пространству Орлича $L^{p'(\cdot)}(B)$. Отсюда следует, что функционал

$$l(\varphi) = \int_B b \cdot \nabla \varphi dx$$

непрерывен на W и аннулируется на H . Кроме того, по построению

$$l(u_0) = 1.$$

В самом деле, $b(x) \cdot \nabla \psi(x) \equiv 0$ п.в. на B и поэтому $b \cdot \nabla u_0 = -b \cdot \nabla \varphi$, где $\varphi = (r/r_0)^2 \psi \in W^{1,\infty}(B)$. Таким образом, достаточно воспользоваться следующим предложением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Если $\varphi \in W^{1,\infty}(B)$, $\varphi|_{\partial B} = \psi$, то $\int_B b \cdot \nabla \varphi dx = -1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\nu = (\cos \theta, \sin \theta)$ – единичная внешняя нормаль к $\partial B = \{|x| = r_0\}$. Отсюда, учитывая свойства функций b , ψ и w , имеем $b \cdot \nu|_{\partial B} = -\frac{1}{r_0} \frac{\partial w}{\partial \theta}$ и

$$\int_B \nabla \varphi \cdot b dx = \int_{\partial B} \psi b \cdot \nu ds = - \int_{|\theta - \pi| < \delta} \frac{\partial w}{\partial \theta} d\theta = -1,$$

что и требуется.

Располагая вектором $b(x)$, построим пример задачи Дирихле, для которой W - и H -решения не совпадают. Взяв $h = b$ в (3.1), запишем следующие тождества для W - и H -решений:

$$u_1 \in W, \quad [u_1, \varphi] = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in W; \quad u_2 \in H, \quad [u_2, \varphi] = l(\varphi) \quad \forall \varphi \in H,$$

где

$$[u, \varphi] = \int_B |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx.$$

Полагая в тождествах $\varphi = u_0$ или $\varphi = u_2$, выводим $u_1 \not\equiv 0 \equiv u_2$ в силу отмеченных выше свойств функционала l : $l|_H = 0$, $l(u_0) = 1$.

По построению вектор $h = b$ принадлежит $L^{p'(\cdot)}(B)$ и неограничен в окрестности $x = 0$. Теперь при малых ε возьмем срезку $h_\varepsilon(x) = \eta_\varepsilon(x)b(x) \in L^\infty(B)$, где $\eta_\varepsilon(x) = \eta(x/\varepsilon)$, $\eta(x) = 0$ в $B_{1/2}(0)$, $1 - \eta(x) \in C_0^\infty(B_1(0))$. Можно показать, что $\|h - h_\varepsilon\|_{L^{p'(\cdot)}(B)} \rightarrow 0$ (о норме и сходимости в $L^{p'(\cdot)}$ см. § 7). Тогда $l_\varepsilon(\varphi) = \int_B h_\varepsilon \cdot \nabla \varphi \, dx \rightarrow l(\varphi) \, \forall \varphi \in W$ и, более того, $\|l_\varepsilon - l\|_{W^*} \rightarrow 0$.

Покажем, что для задачи (3.1) с правой частью h_ε W - и H -решения по-прежнему не совпадают. Запишем соответствующие тождества:

$$u_1^\varepsilon \in W, \quad [u_1^\varepsilon, \varphi] = l_\varepsilon(\varphi) \quad \forall \varphi \in W; \quad u_2^\varepsilon \in H, \quad [u_2^\varepsilon, \varphi] = l_\varepsilon(\varphi) \quad \forall \varphi \in H.$$

В силу первого из них имеем $[u_1^\varepsilon, u_0] = l_\varepsilon(u_0) \rightarrow l(u_0) = 1$. С другой стороны, по неравенству Гёльдера (7.9)

$$|[u_1^\varepsilon, u_0]| \leq 2 \left\| |\nabla u_1^\varepsilon|^{p(x)-1} \right\|_{L^{p'(\cdot)}(B)} \|\nabla u_0\|_{L^{p(\cdot)}(B)},$$

поэтому (см. также (7.4)) $[u_1^\varepsilon, u_1^\varepsilon] > d_0$ для некоторого $d_0 > 0$.

Переходя к пределу в тождестве для u_2^ε , легко показать, что $u_2^\varepsilon \rightarrow 0$ слабо в W , при этом $[u_2^\varepsilon, u_2^\varepsilon] = l_\varepsilon(u_2^\varepsilon) \rightarrow 0$, так как $\|l_\varepsilon - l\|_{W^*} \rightarrow 0$. Отсюда $[u_2^\varepsilon, u_2^\varepsilon] < d_0$ при малых ε и поэтому $u_1^\varepsilon \neq u_2^\varepsilon$, что и требовалось.

В частности, доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *Найдется функция $h \in L^\infty(B)$, для которой H - и W -решения задачи (3.1) не совпадают.*

4.4. Изучим свойство непрерывности самой функции $p(x)$ из (4.1). Для вычисления ее модуля непрерывности полезна следующая

ЛЕММА 4.6. *Пусть $p(x) = p(\theta, r) = \varphi(\theta)f(r)$, где $\varphi(\theta)$ – липшицева функция на единичной окружности с константой Липшица L , $|\varphi(\theta)| \leq 1$, а $f(r)$ – непрерывная возрастающая вогнутая на $[0, r_0]$ функция, $f(0) = 0$. Тогда*

$$|p(x) - p(x')| \leq \left(1 + \frac{L\pi}{2}\right) f(|x - x'|) \quad \forall x, x' \in B_{r_0}. \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, отметим простые следствия вогнутости:

- (C₁) $f(\lambda t) \geq \lambda f(t)$, $\lambda \in [0, 1]$,
- (C₂) $f(t/\lambda) \leq (1/\lambda)f(t)$, $\lambda \in (0, 1]$,
- (C₃) $f(t + t') \leq f(t) + f(t')$ (субаддитивность),
- (C₄) $f(t) - f(t') \leq f(t - t')$, $0 \leq t' \leq t$.

Свойство (C_1) следует из определения вогнутости, так как $f(0) = 0$. Свойство (C_2) получается из (C_1) заменой переменной. Для доказательства (C_3) положим $a = t + t'$, $\lambda = t/a$, $\lambda' = t'/a$. Тогда по вогнутости $f(t) + f(t') = f(\lambda a) + f(\lambda' a) \geq \lambda f(a) + \lambda' f(a) = f(a) = f(t + t')$, что и требуется. Свойство (C_4) есть простое следствие из (C_3) .

Переходим к выводу формулы (4.9). Достаточно установить модули непрерывности $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ для функции $p(\theta, r)$ по каждой из переменных θ и r . Тогда общий модуль непрерывности найдем по неравенству треугольника:

$$\begin{aligned} |p(x) - p(x')| &\leq |p(x) - p(x'')| + |p(x'') - p(x')| \\ &\leq \omega_1(|x - x''|) + \omega_2(|x'' - x'|) \leq \omega_1(|x - x'|) + \omega_2(|x' - x|), \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $|x'| = |x''| < |x|$, а угловые координаты x'' и x совпадают, так что $|x - x''| < |x - x'|$, $|x'' - x'| < |x - x'|$.

Случай 1. Пусть $r = |x| > |x'| = r'$, θ – общая угловая координата для x и x' . Тогда $|x - x'| = r - r'$ и поскольку $|\varphi| \leq 1$, $f(r) \geq f(r')$, то в силу свойства (C_4)

$$|p(x) - p(x')| = |\varphi(\theta)|(f(r) - f(r')) \leq f(r - r') = f(|x - x'|).$$

Таким образом, радиальный модуль непрерывности равен $\omega_1(t) = f(t)$.

Случай 2. Пусть $|x| = |x'| = r$, $|x - x'| = \rho$, θ и θ' – угловые координаты точек x и x' . Тогда $\rho/r = 2 \sin(|\theta' - \theta|/2) \equiv \lambda$ и $\lambda \in [0, 1]$. По липшицевости $\varphi(\theta)$ имеем

$$|p(x) - p(x')| \leq L f(r) |\theta - \theta'| = L \frac{|\theta - \theta'|}{\lambda} \lambda f\left(\frac{\rho}{\lambda}\right),$$

при этом

$$\max_{\theta, \theta'} \frac{|\theta - \theta'|}{\lambda} = \max_{|\alpha| \leq \pi/2} \frac{\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda f\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \leq f(\rho)$$

в силу свойства (C_2) . Отсюда $|p(x) - p(x')| \leq L \frac{\pi}{2} f(|x - x'|)$, т.е. угловой модуль непрерывности равен $\omega_2(t) = L \frac{\pi}{2} f(t)$. Суммируя результаты, согласно формуле (4.10) приходим к (4.9). Лемма доказана.

По лемме 4.6 модуль непрерывности показателя $p(x)$ из (4.1) равен

$$\omega(t) = \frac{k_0 \ln \ln(1/t)}{\ln(1/t)}, \quad k_0 = k \left[1 + 2 \left(1 - \frac{4\delta}{\pi} \right)^{-1} \right]. \quad (4.11)$$

Поясним соотношение (4.11). Непосредственно вычислив вторую производную, убеждаемся в том, что функция $(\ln \ln(1/t))/\ln(1/t)$ вогнута при $t \in (0, 1/30)$. Легко найти константу Липшица для функции $\Phi(\theta)$, $L = (\pi/4 - \delta)^{-1}$, и в соответствии с (3.9) получаем для $p(x)$ модуль непрерывности (4.11). Заметим, что $k_0 = k_0(\delta) \downarrow 3k$ при $\delta \rightarrow 0$.

В заключение этого параграфа укажем, что другие примеры соболевских пространств, в которых неплотны гладкие функции, даны в [14], [15], [21], [22]. В приведенном здесь примере детализирована конструкция из [15], что позволило установить некоторые конкретные свойства пространства $W \neq H$.

§ 5. Пример отсутствия повышенной суммируемости

5.1. Слабые и вариационные решения. В § 2 для задачи (2.1) введены W - и H -решения, а также соответствующие им пространства W и H – самое широкое и самое узкое пространства Соболева–Орлича, связанные с этой задачей. Введем промежуточное пространство V : $H \subseteq V \subseteq W$. Тогда V -решение – это функция из V , для которой тождество (2.3) выполнено на пробных функциях из V . Всякое V -решение, в том числе H - и W - решение, будем называть *вариационным*. Отметим важную особенность вариационных решений: в определяющее их интегральное тождество можно в качестве пробной функции подставлять само решение и получать энергетическое равенство из (2.4).

Помимо вариационных имеются *слабые* решения – это функции из W , удовлетворяющие уравнению (2.1) в смысле распределений. Ясно, что вариационное решение является и слабым решением, обратное неверно. Однако слабое решение u будет вариационным, если для u выполнено энергетическое равенство из (2.4). В качестве соответствующего промежуточного пространства надо взять $V = H + \{\lambda u\}$.

Существование слабых решений, отличных от вариационных, представляет собой сложный вопрос, не решенный до конца в общем случае. Положительный ответ на него установлен далее при дополнительных условиях, и этим обстоятельством мы воспользуемся при построении основного примера, приведенного ниже.

Часто представляют интерес такие решения, которые получаются с помощью “регуляризации” исходного уравнения. Сопоставим (2.1) регуляризованную задачу

$$\operatorname{div}(|\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon(x)-2} \nabla u_\varepsilon - h) = 0, \quad x \in \Omega, \quad u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.1)$$

где $p_\varepsilon(x)$ – семейство гладких показателей, удовлетворяющих условию (2.2), таких, что $p_\varepsilon(x) \rightarrow p(x)$ п.в. Ввиду регулярности показателя $p_\varepsilon(x)$ задаче (5.1) соответствует одно слабое решение. Семейство решений $u_\varepsilon(x)$ ограничено в $W^{1,\alpha}(\Omega)$, $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$ (по крайней мере, по подпоследовательности) и по свойству полунепрерывности снизу функционала энергии при слабой сходимости [13]

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon(x)} dx \geq \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} dx. \quad (5.2)$$

Естественно ожидать, что предельная функция u будет слабым решением предельной задачи. Это действительно так при дополнительных предположениях. Приведем некоторые общие факты, доказанные в [23].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *В случае аппроксимации сверху, т.е. если $p_\varepsilon(x) \geq p(x)$ п.в. (или снизу, т.е. если $p_\varepsilon(x) \leq p(x)$ п.в.), решение задачи (5.1) сходится к H -решению (или W -решению) задачи (2.1).*

Будем говорить, что показатель $p(x)$ регулярен вне одной точки $x_0 \in \Omega$, если из условий $v \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$, $v \equiv 0$ в окрестности точки x_0 следует, что $v \in H^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть $p(x)$ регулярен вне одной точки x_0 , $u_\varepsilon(x)$ – решение задачи (5.1), $u_\varepsilon(x) \rightharpoonup u(x)$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$. Тогда $u(x)$ – слабое решение задачи (2.1). Кроме того, имеет место сходимость плотностей энергии $|\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon(x)} \rightharpoonup |\nabla u|^{p(x)}$ в $L^1(\Omega \setminus B_\delta(x_0))$ для любого $\delta \in (0, \delta_0)$.

5.2. Построение примера. Рассмотрим задачу (2.1), предполагая, что $n = 2$, $\Omega = B_{r_0} = \{|x| < r_0\}$ – круг достаточно малого радиуса, $p(x)$ – определенный в (4.1) показатель с модулем непрерывности $\omega(t)$, указанным в (4.11). По теореме 4.1 показатель $p(x)$ нерегулярен и согласно предложению 4.5 в уравнении (2.1) можно выбрать правую часть $h \in L^\infty(\Omega)$ так, чтобы $u_1 \neq u_2$, где u_1, u_2 – W - и H -решения соответственно. Пусть $p_\varepsilon^+(x)$ и $p_\varepsilon^-(x)$ – гладкие аппроксимации сверху и снизу для показателя $p(x)$ (см. предложение 5.1) с общим модулем непрерывности $\omega(t)$. Полагая $p_\varepsilon(x, t) = tp_\varepsilon^+(x) + (1-t)p_\varepsilon^-(x)$, $0 \leq t \leq 1$, обозначим соответствующее решение задачи (5.1) через $u_\varepsilon(x, t)$.

Найдем линейный функционал $l \in (L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$ такой, что $l(u_1) \neq l(u_2)$, и положим $p_\varepsilon(x) = p_\varepsilon(x, t_\varepsilon)$, где t_ε определено из условия $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l(u_\varepsilon(\cdot, t_\varepsilon)) = (l(u_1) + l(u_2))/2$. Если $u_\varepsilon(x)$ – соответствующее $p_\varepsilon(x)$ решение задачи (5.1), то можно считать, что $u_\varepsilon(x) \rightharpoonup u(x)$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$ (в противном случае перейдем к подпоследовательности). Тогда $u \neq u_1$, $u \neq u_2$ и u – слабое решение задачи (2.1) (см. предложение 5.2), не являющееся вариационным, так как согласно теореме 4.1 это уравнение не имеет других вариационных решений, кроме u_1 и u_2 . Поэтому в соотношении (5.2) выполняется строгое неравенство. В противном случае энергетическое равенство для u_ε переходит в пределе в энергетическое равенство для u , т.е.

$$\int_{\Omega} h \cdot \nabla u_\varepsilon dx = \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon} dx \implies \int_{\Omega} h \cdot \nabla u dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx.$$

Отсюда следует вариационность решения u , что противоречит выбору u . Итак, в наших построениях

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p_\varepsilon} dx > \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \quad (5.3)$$

и, как следствие, семейство $|\nabla u|^{p_\varepsilon}$ не может быть слабо компактным в $L^1(\Omega)$.

Действительно, в силу предложения 5.2 $|\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon} \rightharpoonup |\nabla u|^p$ в $L^1(\Omega \setminus B_\delta(0))$, но при этом сходимость $|\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon} \rightharpoonup |\nabla u|^p$ в $L^1(\Omega)$ исключена неравенством (5.3).

Теперь предположим, что имеет место оценка типа (2.7) с какой-то неограниченно растущей функцией вместо $\ln^\delta(s+2)$ для выбранных показателей $p_\varepsilon(x)$. Тогда $\int_{\Omega} \Psi(|\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon}) dx < \infty$ для некоторой функции $\Psi(t) \geq 0$ такой, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(t)/t = \infty$. По критерию Валле Пуссена [24; гл. VIII, § 1] семейство $|\nabla u_\varepsilon|^{p_\varepsilon}$ слабо компактно в $L^1(\Omega)$, что невозможно, как установлено ранее.

В заключение отметим, что в данном примере модуль непрерывности $\omega(t)$ относится к типу (2.6), причем несложные вычисления показывают, что $k_0 > 3\alpha/n$ при подходящих значениях параметров k, δ, r_0 , характеризующих показатель $p(x)$ из (4.1).

§ 6. Обобщенная лемма Геринга

6.1. Напомним, что $Q_r = Q_r(x_0) = [-r/2, r/2]^n + x_0$ – куб со стороной $r > 0$ и центром в точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Предположим, что f, g – неотрицательные функции, $f, g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $q > 1$, и найдутся такие $c_0 > 0$, $r_0 > 0$, что при $r \leq r_0$

$$\int_{Q_r(x_0)} f^q dx \leq c_0 \left(\int_{Q_{2r}(x_0)} f dx \right)^{q+b(r)} + \int_{Q_{2r}(x_0)} g^q dx \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (6.1)$$

Здесь $b(r)$ – некоторая непрерывная неубывающая функция на отрезке $[0, r_0]$, $b(0) = 0$, $b(r) \leq 1$. Функцию f считаем нормированной условием $\|f\|_{L^q} \leq 1$.

ТЕОРЕМА 6.1. Если $b(r) \equiv 0$, то справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^{q+\delta} dx \leq c \left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} g^{q+\delta} dx \right) \quad (6.2)$$

с некоторыми $c > 0$, $\delta > 0$, зависящими только от c_0, n, q, r_0 .

Это – классический результат, называемый леммой Геринга и имеющий много приложений.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть

$$b(r) = \frac{k}{\ln(1/r)}, \quad k > 0.$$

Тогда справедлива оценка (6.2), при этом константы $c > 0$, $\delta > 0$ зависят, помимо прочего, еще и от множителя k .

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть

$$b(r) = \frac{k \ln \ln(1/r)}{\ln(1/r)}, \quad k > 0.$$

Тогда при $k \leq 1/n$ справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^q \ln^\delta(f+2) dx \leq c \left(1 + \int_{\mathbb{R}^n} g^q \ln^\delta(g+2) dx \right) \quad (6.3)$$

с некоторыми $\delta > 0$, $c > 0$, зависящими только от c_0, n, q, r_0 .

Приведенные выше теоремы будут получены как следствие одного общего утверждения, в котором на функцию $b(r)$ накладываются условия технического характера. Положим

$$a(\lambda) = 4^{n+1} c_0 \lambda^{b(\lambda^{-q/n})}. \quad (6.4)$$

ТЕОРЕМА 6.4. Пусть найдется такое λ_0 , что

- (i) $\lambda_0^q \geq \max\{1/r_0^n, 1\}$;
- (ii) функция $s = \lambda/a(\lambda)$ строго возрастает при $\lambda \geq \lambda_0$;

- (iii) $\int_s^{\lambda(s)} \frac{dt}{t(a(t))^q} \leq C$ при $s \geq s_0 = \lambda_0/a(\lambda_0)$;
 (iv) $\lambda a'(\lambda) \leq a(\lambda)/2$ при $\lambda \geq \lambda_0$.

Тогда справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^q \varphi(f) dx \leq 4 \left[\varphi(\lambda_0) + 4^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} g^q \varphi(4g) dx \right], \quad (6.5)$$

в которой

$$\varphi(s) = \begin{cases} \exp\left(\theta \int_{s_0}^s \frac{dt}{t(a(t))^q}\right), & s \geq s_0, \\ 1, & s \in [0, s_0], \end{cases} \quad (6.6)$$

а $\theta > 0$ удовлетворяет условию

$$\theta \exp(\theta C) \leq \frac{q-1}{4^{n+1}}. \quad (6.7)$$

Рассмотрим примеры функции $b(r)$, указанные в теоремах 6.1–6.3. Если $b(r) \equiv 0$, то $a(s) \equiv 4^{n+1}c_0 \equiv a_0$, $\varphi(s) = (s/s_0)^\delta$, $\delta = \theta/a_0^q$, что дает классическую оценку (6.2). Аналогично, в условиях теоремы 6.2 функция $a(s)$ также постоянна, $a(s) \equiv 4^{n+1}c_0 \exp(kn/q)$, и из (6.5) следует оценка (6.2).

Теперь обсудим теорему 6.3. Здесь при $k = 1/n$ имеем $(a(s))^q = \alpha^{-1} \ln s$, где $\alpha^{-1} = (4^{q(n+1)}c_0^q q)/n$,

$$\int_{s_0}^s \frac{dt}{t(a(t))^q} = \alpha \ln \frac{\ln s}{\ln s_0}.$$

Условия (ii), (iii), (iv) легко проверяются, поэтому выполнена оценка (6.5) с $\varphi(s) = (\ln s / \ln s_0)^\alpha$, которую нетрудно переписать в форме оценки (6.4).

6.2. Докажем теорему 6.4. Доказательство разобьем на несколько шагов.

1°. Положим

$$E(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) > \lambda\}.$$

ЛЕММА 6.5. Для почти всех $x_0 \in E(\lambda)$, $\lambda \geq \lambda_0$, найдется такое $r = r(x_0, \lambda)$, $0 < r < r_0$, что

$$\oint_{Q_{8r}(x_0)} f^q dx \leq \oint_{Q_r(x_0)} f^q dx = \lambda^q. \quad (6.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $r \in [r_0, 8r_0]$ выполнено

$$\oint_{Q_r} f^q dx \leq \frac{1}{r_0^n} \int_{\mathbb{R}^n} f^q dx \leq \lambda_0^q.$$

С другой стороны, по теореме Лебега

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{Q_r} f^q dx > \lambda^q \geq \lambda_0^q.$$

Существование куба Q_r со свойством (6.8) следует из непрерывности интеграла $\oint_{Q_r} f^q dx$ по r . Лемма доказана.

Из (6.8) получаем, что

$$\lambda^q \leq \frac{1}{r^n} \int_{\mathbb{R}^n} f^q dx = \frac{1}{r^n}, \quad r \leq \lambda^{-q/n}, \quad b(r) \leq b(\lambda^{-q/n}),$$

$$\lambda^{b(r)} \leq \lambda^{b(\lambda^{-q/n})} = \frac{a(\lambda)}{c_0 4^{n+1}} \quad (6.9)$$

в силу (6.4) и неравенства $\lambda \geq \lambda_0 \geq 1$.

2°. Оценим интегралы, стоящие в правой части (6.1). Имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_{Q_{2r}} f dx \right)^{q+b} &= \left(\int_{Q_{2r}} f dx \right)^{q-1+b} \cdot \int_{Q_{2r}} f dx \leq \left(\int_{Q_{2r}} f^q dx \right)^{(q-1+b)/q} \cdot \int_{Q_{2r}} f dx \\ &\leq \left(4^n \int_{Q_{8r}} f^q dx \right)^{(q-1+b)/q} \cdot \int_{Q_{2r}} f dx \leq 4^n \lambda^{q-1+b} \int_{Q_{2r}} f dx \\ &\leq \frac{a(\lambda) \lambda^{q-1}}{4c_0} \int_{Q_{2r}} f dx, \end{aligned} \quad (6.10)$$

где использованы неравенства (6.8), (6.9) и $0 \leq b \leq 1$. Далее,

$$\int_{Q_{2r}} f dx \leq \lambda \eta + \frac{1}{|Q_{2r}|} \int_{Q_{2r} \cap E(\eta \lambda)} f dx, \quad \eta \in (0, 1),$$

и положив $\eta = 1/(a(\lambda))$, выводим из (6.10)

$$c_0 \left(\int_{Q_{2r}} f dx \right)^{q+b} \leq \frac{\lambda^q}{4} + \frac{a(\lambda) \lambda^{q-1}}{4|Q_{2r}|} \int_{Q_{2r} \cap E(s)} f dx, \quad s = \frac{\lambda}{a(\lambda)}. \quad (6.11)$$

Кроме того, если $D(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n, g(x) > \lambda\}$, то

$$\int_{Q_{2r}} g^q dx \leq \frac{1}{4} \lambda^q + \frac{1}{|Q_{2r}|} \int_{Q_{2r} \cap D(\lambda/4)} g^q dx. \quad (6.12)$$

Теперь из (6.8), (6.1), (6.11), (6.12) получаем, что

$$\begin{aligned} \lambda^q &= \int_{Q_r} f^q dx \leq \frac{\lambda^q}{2} + \frac{a(\lambda) \lambda^{q-1}}{4|Q_{2r}|} \int_{Q_{2r} \cap E(s)} f dx + \frac{1}{|Q_{2r}|} \int_{Q_{2r} \cap D(\lambda/4)} g^q dx, \\ \int_{Q_{8r}} f^q dx &\leq \int_{Q_r} f^q dx \leq \frac{a(\lambda)}{2} \frac{\lambda^{q-1}}{|Q_{2r}|} \int_{Q_{2r} \cap E(s)} f dx + \frac{2}{|Q_{2r}|} \int_{Q_{2r} \cap D(\lambda/4)} g^q dx, \\ \int_{Q_{8r}} f^q dx &\leq 4^n a(\lambda) \lambda^{q-1} \int_{Q_{2r} \cap E(s)} f dx + 4^{n+1} \int_{Q_{2r} \cap D(\lambda/4)} g^q dx. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Итак, для почти всех $x_0 \in E(\lambda)$, $\lambda \geq \lambda_0$, существует куб со стороной $r = r(x_0, \lambda)$, для которого выполнено неравенство (6.13). По теореме Витали о покрытиях найдется счетное семейство непересекающихся кубов Q_{2r_j} такое, что

$$E(\lambda) \subset \bigcup Q_{2r_j}.$$

В этом случае из (6.13) следует, что

$$\int_{E(\lambda)} f^q dx \leq 4^n \lambda^{q-1} a(\lambda) \int_{E(s)} f dx + 4^{n+1} \int_{D(\lambda/4)} g^q dx, \quad s = \frac{\lambda}{a(\lambda)}. \quad (6.14)$$

3°. Ниже используем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} J &\equiv \int_{E(\lambda_0)} f^q \varphi(f) dx = - \int_{\lambda_0}^{\infty} \varphi(\lambda) d\lambda \left(\int_{E(\lambda)} f^q dx \right) \\ &= \int_{\lambda_0}^{\infty} \varphi'(\lambda) \int_{E(\lambda)} f^q dx d\lambda + \varphi(\lambda_0) \int_{E(\lambda_0)} f^q dx, \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\int_{E(\lambda_0)} f \psi(f) dx = \int_{\lambda_0}^{\infty} \psi'(\lambda) \int_{E(\lambda)} f dx d\lambda + \psi(\lambda_0) \int_{E(\lambda_0)} f dx. \quad (6.16)$$

Теперь из (6.15), (6.14) получим, что

$$\begin{aligned} J &\leq 4^n \int_{\lambda_0}^{\infty} \varphi'(\lambda) a(\lambda) \lambda^{q-1} \int_{E(s)} f dx d\lambda + 4^{n+1} \int_{\lambda_0}^{\infty} \varphi'(\lambda) \int_{D(\lambda/4)} g^q dx d\lambda \\ &\quad + \varphi(\lambda_0) \int_{\mathbb{R}^n} f^q dx \leq J_1 + J_2 + \varphi(\lambda_0), \end{aligned} \quad (6.17)$$

поскольку $\|f\|_{L^q} \leq 1$. Изучим слагаемое

$$J_1 = 4^n \int_{s_0}^{\infty} \lambda' \varphi'(\lambda) a(\lambda) \lambda^{q-1} \int_{E(s)} f dx ds, \quad \lambda = \lambda(s).$$

Положим

$$\psi'(s) = \lambda' \varphi'(\lambda) a(\lambda) \lambda^{q-1}, \quad \lambda = \lambda(s).$$

Убедимся, что выполнено неравенство

$$\psi(t) = \int_{s_0}^t \psi'(s) ds \leq \frac{\varphi(t) t^{q-1}}{2 \cdot 4^n}, \quad t \geq s_0. \quad (6.18)$$

Действительно, используя соотношение $\lambda = sa(\lambda(s))$ и определение (6.6) функции φ , запишем

$$\psi'(s) = \lambda' \varphi'(\lambda) a^q(\lambda) \lambda \frac{s^{q-2}}{a(\lambda)} = \theta \lambda' \frac{\varphi(\lambda)}{a(\lambda)} s^{q-2}.$$

Из условия (iv) теоремы 6.4 имеем

$$s'(\lambda) = \frac{1}{a(\lambda)} - \frac{\lambda a'(\lambda)}{(a(\lambda))^2} \geq \frac{1}{2a(\lambda)}, \quad \lambda'(s) = \frac{1}{s'(\lambda(s))} \leq 2a(\lambda(s)), \quad s \geq s_0.$$

Кроме того, по условию (iii)

$$\varphi(\lambda(s)) \leq e^{\theta C} \varphi(s), \quad s \geq s_0,$$

поэтому

$$\psi'(s) \leq 2\theta e^{\theta C} \varphi(s) s^{q-2}, \quad \psi(t) \leq 2\theta e^{\theta C} \varphi(t) \int_{s_0}^t s^{q-2} ds \leq 2\theta e^{\theta C} \frac{\varphi(t) t^{q-1}}{q-1}$$

и неравенство (6.18) выполнено, если только θ удовлетворяет условию (6.7).

В результате по формуле (6.16) получаем, что

$$\begin{aligned} J_1 &= 4^n \int_{s_0}^{\infty} \psi'(s) \int_{E(s)} f \, dx \, ds \leq 4^n \int_{E(s_0)} f \psi(f) \, dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{E(s_0)} f^q \varphi(f) \, dx \leq \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus E(\lambda_0)} f^q \varphi(f) \, dx \leq \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} \varphi(\lambda_0). \end{aligned}$$

Рассмотрим слагаемое J_2 (см. (6.17)). По формуле (6.15) (для g вместо f) имеем

$$\begin{aligned} J_2 &= 4^{n+1} \int_{\lambda_0/4} 4\varphi'(4\lambda) \int_{D(\lambda)} g^q \, dx \, d\lambda \leq 4^{n+1} \int_{D(\lambda_0/4)} g^q \varphi(4g) \, dx \\ &\leq 4^{n+1} \int_{\mathbb{R}^n} g^q \varphi(4g) \, dx. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Собирая все оценки, получим

$$\begin{aligned} J &\leq \frac{1}{2} J + J_2 + \frac{3}{2} \varphi(\lambda_0), \quad J \leq 3\varphi(\lambda_0) + 2J_2, \\ \int_{\mathbb{R}^n} f^q \varphi(f) \, dx &= J + \int_{\mathbb{R}^n \setminus E(\lambda_0)} f^q \varphi(f) \, dx \leq J + \varphi(\lambda_0) \leq 2J_2 + 4\varphi(\lambda_0), \end{aligned}$$

что дает оценку (6.5), если учесть неравенство (6.19). Теорема 6.4 доказана.

Вывод теорем 1.1–1.3. Из доказательства теоремы 6.4 видно, что выполнение неравенства (6.1) достаточно требовать лишь для точек x_0 таких, что $f(x_0) \geq \lambda_0$ при некотором $\lambda_0 \geq 1$. Если $f \equiv 0$ вне области Ω , то такие точки находятся заведомо в Ω . Тогда в предположениях теорем 1.1–1.3 (см. (1.10)) можно получить оценку (6.5), которая в каждом из трех случаев, как показано выше, имеет вид (1.11) или (1.12).

§ 7. Приложение: о пространствах Соболева–Орлича

В последние годы много внимания уделялось вариационным задачам для интегральных функционалов вида

$$\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p(x)} \, dx,$$

где измеримый в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ показатель $p(x)$ удовлетворяет условию (2.2). С такими функционалами естественно связаны пространства Соболева–Орлича, и многие вопросы общей теории получают более адекватный ответ в терминах этих пространств.

Приведем некоторые сведения из теории пространств Соболева–Орлича [25], [26].

7.1. Через $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ обозначим множество всех измеримых на Ω функций $f(x)$ таких, что

$$A_p(f) = \int_{\Omega} |f(x)|^{p(x)} \, dx < \infty.$$

Класс $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ будет банаховым (рефлексивным (см. лемму 7.4) и сепарабельным) пространством, если норму $\|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \|\cdot\|_{L^{p(\cdot)}}$ определить равенством

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \inf\{\lambda > 0, A_p(\lambda^{-1}f) \leq 1\}. \quad (7.1)$$

Заметим, что инфимум в (7.1) достигается, если $A_p(f) > 0$; кроме того,

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = \lambda > 0 \iff A_p(\lambda^{-1}f) = 1. \quad (7.2)$$

Отсюда легко получить соотношения

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} \leq 1 \iff A_p(f) \leq 1, \quad (7.3)$$

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} \geq 1 \iff \|f\|_{L^{p(\cdot)}}^\alpha \leq A_p(f) \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}}^\beta, \quad (7.4)$$

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} \leq 1 \iff \|f\|_{L^{p(\cdot)}}^\beta \leq A_p(f) \leq \|f\|_{L^{p(\cdot)}}^\alpha,$$

$$f_n \rightarrow f \text{ в } L^{p(\cdot)} \iff A_p(f_n - f) \rightarrow 0.$$

Отметим следующие полезные факты.

ЛЕММА 7.1. Пусть ограниченная в $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ последовательность f_ε такова, что $f_\varepsilon(x) \rightarrow f(x)$ почти всюду на Ω . Тогда $f \in L^{p(\cdot)}(\Omega)$ и $f_\varepsilon \rightarrow f$ в $L^{p(\cdot)}(\Omega)$.

ЛЕММА 7.2. Если Ω – ограниченная область, то имеют место непрерывные вложения $L^\beta(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega) \subset L^\alpha(\Omega)$ с оценками норм

$$\|f\|_{L^\alpha(\Omega)} \leq (1 + |\Omega|)^{1/\alpha} \|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}, \quad (7.5)$$

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq (1 + |\Omega|)^{1/\beta'} \|f\|_{L^\beta(\Omega)}, \quad \beta' = \frac{\beta}{\beta - 1}. \quad (7.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (7.2) имеем

$$\int_\Omega |\lambda^{-1}f|^\alpha dx \leq \int_\Omega (|\lambda^{-1}f|^p + 1) dx = 1 + |\Omega|, \quad \int_\Omega |f|^\alpha dx \leq \lambda^\alpha (1 + |\Omega|),$$

что дает оценку (7.5). Оценка (7.6) будет получена далее по двойственности.

Класс $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ введен в основополагающей работе Орлича [27]. В этой работе доказано, что $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ есть банахово пространство относительно “нормы Орлича”

$$\mu_{p(\cdot)}(f) \equiv \sup \left\{ \int_\Omega fg dx \mid \int_\Omega |g|^{p'} dx \leq 1 \right\}, \quad (7.7)$$

где $p'(x) = p(x)/(p(x) - 1)$ – сопряженный показатель. Как показывает следующая лемма, норма Орлича эквивалентна введенной ранее норме (7.1), называемой нормой Люксембурга.

ЛЕММА 7.3. Имеют место неравенства

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}} \leq \mu_{p(\cdot)}(f) \leq \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta'} \right) \|f\|_{L^{p(\cdot)}} \leq 2 \|f\|_{L^{p(\cdot)}}. \quad (7.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda = \|f\|_{L^{p(\cdot)}}$, $g = |\lambda^{-1}f|^{p-2}\lambda^{-1}f$. Тогда $|g|^{p'} = |\lambda^{-1}f|^p$ и поэтому $\int_{\Omega} |g|^{p'} dx = 1$. Отсюда

$$\mu_{p(\cdot)}(f) \geq \int_{\Omega} fg dx = \lambda \int_{\Omega} |\lambda^{-1}f|^p dx = \lambda = \|f\|_{L^{p(\cdot)}}$$

в силу свойства (7.2). Этим доказано левое неравенство (7.8). Правое неравенство есть следствие неравенства Юнга

$$fg \leq \frac{|f|^p}{p} + \frac{|g|^{p'}}{p'} \leq \frac{|f|^p}{\alpha} + \frac{|g|^{p'}}{\beta'}.$$

Действительно, можно считать, что $\|f\|_{L^{p(\cdot)}} = 1$ и, таким образом, (см. (7.2)) $\int_{\Omega} |f|^p dx = 1$. Если к тому же $\int_{\Omega} |g|^{p'} dx \leq 1$, то

$$\int_{\Omega} fg dx \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta'} \implies \mu_{p(\cdot)}(f) \leq \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta'}.$$

Лемма доказана.

В качестве следствия получим аналог неравенства Гёльдера

$$\int_{\Omega} fg dx \leq 2\|f\|_{L^{p(\cdot)}}\|g\|_{L^{p'(\cdot)}}. \quad (7.9)$$

Действительно, пусть $\lambda = \|g\|_{L^{p'(\cdot)}}$. Тогда $\int_{\Omega} |\lambda^{-1}g|^{p'} dx = 1$ и из (7.7) имеем

$$\int_{\Omega} f\lambda^{-1}g dx \leq \mu_{p(\cdot)}(f) \leq 2\|f\|_{L^{p(\cdot)}}, \quad \int_{\Omega} fg dx \leq 2\|f\|_{L^{p(\cdot)}}\|g\|_{L^{p'(\cdot)}},$$

и неравенство (7.9) доказано.

В качестве другого следствия выведем оценку (7.6). Имеем (см. (7.7), (7.3))

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{p(\cdot)}} &\leq \mu_{p(\cdot)}(f) = \sup \left\{ \int_{\Omega} fg dx \mid \|g\|_{L^{p'(\cdot)}} \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \int_{\Omega} fg dx \mid \|g\|_{L^{\beta'}} \leq (1 + |\Omega|)^{1/\beta'} \right\}, \end{aligned}$$

где использован аналог оценки (7.5) для пространств $L^{p'(\cdot)}(\Omega) \subset L^{\beta'}(\Omega)$. Отсюда по неравенству Гёльдера с показателями β и β' следует искомая оценка (7.6).

ЛЕММА 7.4. *Пространство $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ рефлексивно, а сопряженным к нему служит пространство $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$. Другими словами, всякий непрерывный на $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ функционал $l = l(f)$ имеет вид*

$$l(f) = \int_{\Omega} fg dx, \quad g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $L^{\beta}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$, то функционал l непрерывен на $L^{\beta}(\Omega)$ и допускает представление

$$l(f) = \int_{\Omega} fg dx, \quad f \in L^{\beta}(\Omega),$$

где g – некоторый элемент из $L^{\beta'}(\Omega)$. Убедимся в том, что $g \in L^{p'(\cdot)}(\Omega)$. Положив

$$g_N(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } |g(x)| \leq N \\ 0, & \text{если } |g(x)| > N, \end{cases} \quad f_N(x) = |g_N|^{p'-2} g_N,$$

в силу непрерывности функционала l на $L^{p(\cdot)}$ получим, что

$$l(f_N) = \int_{\Omega} f_N g \, dx = \int_{\Omega} |g_N|^{p'} \, dx \leq c \|f_N\|_{L^{p(\cdot)}}.$$

Тогда из (7.4) имеем

$$\int_{\Omega} |g_N|^{p'} \, dx \leq c \left(\int_{\Omega} |f_N|^p \, dx \right)^{1/\gamma} = c \left(\int_{\Omega} |g_N|^{p'} \, dx \right)^{1/\gamma},$$

где $\gamma = \alpha$, если $\|f_N\|_{L^{p(\cdot)}} \geq 1$, и $\gamma = \beta$ в противном случае. Отсюда по лемме Фату

$$\int_{\Omega} |g_N|^{p'} \, dx \leq c^{\gamma'}, \quad \int_{\Omega} |g|^{p'} \, dx \leq c^{\gamma'}.$$

Лемма доказана.

Отметим, что если на $L^{p(\cdot)}(\Omega)$ задать норму Люксембурга (7.1) (соответственно норму Орлича (7.7)), то на пространстве $L^{p'(\cdot)}(\Omega)$ как сопряженном к $L^{p(\cdot)}(\Omega)$, возникает норма Орлича (соответственно Люксембурга). Это ясно из свойства (7.3), дающего описание единичного шара в норме (7.1) и определения норм.

7.2. Предположим, что область Ω ограничена и имеет липшицеву границу. Определим пространство Соболева–Орлича

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in W^{1,1}(\Omega), \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)} \, dx < \infty \right\},$$

$$\|u\|_{W^{p(\cdot)}(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)},$$

где $\|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}$ означает норму функции $|\nabla u|$ в $L^{p(\cdot)}(\Omega)$. Определим также связанное с задачей Дирихле пространство

$$W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{ u \in W_0^{1,1}(\Omega), \int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx < \infty \right\},$$

$$\|u\|_{W_0^{p(\cdot)}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}.$$

ЛЕММА 7.5. Множество $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ плотно в $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для срезки

$$u^{(k)} = \begin{cases} u(x), & \text{если } |u(x)| \leq k, \\ \pm k, & \text{если } |u(x)| > k, \end{cases}$$

имеем $|\nabla u^{(k)}| \leq |\nabla u|$ и по теореме Лебега $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla u^{(k)}|^p \, dx \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Отметим, что вложение $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$, вообще говоря, не имеет места без дополнительных условий на показатель.

ЛЕММА 7.6. *Если показатель p непрерывен в $\bar{\Omega}$, то имеет место компактное вложение $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить указанное вложение в каждой подобласти $\Omega \cap B$, где B – шар малого радиуса. Считаем, что

$$p_2 = \max_{\Omega \cap B} p(x) \leq \frac{n+1}{n} p_1, \quad p_1 = \min_{\Omega \cap B} p(x).$$

В этом случае $W^{1,p(\cdot)}(\Omega \cap B) \subset W^{1,p_1}(\Omega \cap B) \subset L^{p_2}(\Omega \cap B) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega \cap B)$; при этом все вложения непрерывны, а второе из них компактно по теореме вложения Соболева. Отсюда следует утверждение леммы.

ЛЕММА 7.7. *Пусть показатель p непрерывен в $\bar{\Omega}$, l – непрерывный функционал в $L^1(\Omega)$, $l(1) > 0$. Тогда справедлива оценка*

$$\|u - l(u)\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} \leq c_0 \|\nabla u\|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)}, \quad (7.10)$$

причем постоянная c_0 зависит от Ω , модуля непрерывности показателя p и выбора функционала l .

Оценка (7.10) получается из компактности вложения $W^{1,p(\cdot)}(\Omega) \subset L^{p(\cdot)}(\Omega)$ стандартными рассуждениями от противного. Полезно эту оценку записать в более явной форме, используя соотношения (7.4), а именно,

$$\int_{\Omega} |u - l(u)|^p dx \leq (c_0 + 1) \left[\left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{\beta/\alpha} + 1 \right]. \quad (7.11)$$

Обратим внимание на то, что оценка (7.11) отличается от классического неравенства Пуанкаре, которое имеет место при постоянном p . Примеры показывают [28], что в общем случае в правой части (7.11) нельзя избавиться ни от показателя β/α , ни от постоянного слагаемого. Однако указанные упрощения возможны при определенных дополнительных предположениях на показатель p . Например, справедлива использованная при выводе леммы 4.3 следующая

ЛЕММА 7.8. *Пусть $n = 1$, $I = (a, b)$, $I_0 = (a_0, b_0)$, $-\infty < a \leq a_0 < b_0 \leq b < \infty$, и пусть на I определена измеримая функция $p(t)$ такая, что:*

- 1) $p|_{I_0} \equiv p_0 = \text{const}$;
- 2) $1 \leq p(t) \leq p_0$, $t \in I$;
- 3) $p(t)$ монотонна на (a, a_0) и (b_0, b) .

Тогда

$$\int_I \left| u(t) - \int_{I_0} u dt \right|^{p(t)} dt \leq c_0 + c_0 \int_I |u'(t)|^{p(t)} dt \quad \forall u \in C^1(I), \quad (7.12)$$

где константа c_0 зависит лишь от величин $b - a$ и p_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать неравенство (7.12) для отрезка $I = (0, 1)$ и функции u со средним $\int_{I_0} u dt = 0$. В этом случае найдется точка $t_0 \in I_0 \subset (0, 1)$ такая, что $u(t_0) = 0$, а $p(t)$ не убывает на $(0, t_0)$ и не возрастает на $(t_0, 1)$. Отсюда для $t \in (t_0, 1)$ имеем

$$|u(t)|^{p(t)} \leq \int_{t_0}^t |u'(s)|^{p(s)} ds \leq \int_{t_0}^t (|u'(s)|^{p(s)} + 1) ds \leq 1 + \int_{t_0}^1 |u'(s)|^{p(s)} ds$$

и после интегрирования по $t \in (t_0, 1)$

$$\int_{t_0}^1 |u(t)|^{p(t)} dt \leq 1 - t_0 + \int_{t_0}^1 |u'(t)|^{p(t)} dt.$$

Аналогично показываем, что

$$\int_0^{t_0} |u(t)|^{p(t)} dt \leq t_0 + \int_0^{t_0} |u'(t)|^{p(t)} dt.$$

Суммируя оценки, получаем

$$\int_0^1 |u(t)|^{p(t)} dt \leq 1 + \int_0^1 |u'(t)|^{p(t)} dt. \quad (7.13)$$

В случае отрезка $I = (a, b)$ общего вида с помощью замены $t = a + (b - a)\tau$, где $\tau \in (0, 1)$, из (7.13) выводим

$$\int_a^b |u(t)|^{p(t)} dt \leq b - a + \max(1, (b - a)^{p_0}) \int_a^b |u'(t)|^{p(t)} dt,$$

откуда следует (7.12). Лемма доказана.

Список литературы

- [1] A. P. Calderon, A. Zygmund, “On the existence of certain singular integrals”, *Acta Math.*, **88**:1 (1952), 85–139.
- [2] N. G. Meyers, “An L^p -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **17** (1963), 189–206.
- [3] Б. В. Боярский, “Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами”, *Матем. сб.*, **43(85)**:4 (1957), 451–503.
- [4] F. W. Gehring, “The L^p -integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping”, *Acta Math.*, **130**:1 (1973), 265–277.
- [5] M. Giaquinta, G. Modica, “Regularity results for some classes of higher order non linear elliptic systems”, *J. Reine Angew. Math.*, **311–312** (1979), 145–169.
- [6] M. Giaquinta, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, Ann. of Math. Stud., **105**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1983.
- [7] M. Giaquinta, *Introduction to regularity theory for nonlinear elliptic systems*, Lectures Math. ETH Zürich, Birkhäuser, Basel, 1993.

- [8] И. В. Скрыпник, *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач*, Наука, М., 1990; англ. пер.: I. V. Skrypnik, *Methods for analysis of nonlinear elliptic boundary value problems*, Transl. Math. Monogr., **139**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [9] V. V. Zhikov, "On some variational problems", *Russian J. Math. Phys.*, **5**:1 (1997), 105–116.
- [10] В. В. Жиков, "Об оценках типа Мейерса для решений нелинейного уравнения Стокса", *Дифференц. уравнения*, **33**:1 (1997), 107–114; англ. пер.: V. V. Zhikov, "Meyers type estimates for the solution of a nonlinear Stokes system", *Differential Equations*, **33**:1 (1997), 108–115.
- [11] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, "О лемме Геринга", *Докл. РАН*, **419**:4 (2008), 443–448; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, "On Gehring's lemma", *Dokl. Math.*, **77**:2 (2008), 243–248.
- [12] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр. J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.
- [13] В. В. Жиков, "Разрешимость трехмерной задачи о термисторе", *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **261**, Наука, М., 2008, 101–114; англ. пер.: V. V. Zhikov, "Solvability of the three-dimensional thermistor problem", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **261**:1 (2008), 98–111.
- [14] В. В. Жиков, "Об эффекте Лаврентьева", *Докл. РАН*, **345**:1 (1995), 10–14; англ. пер.: V. V. Zhikov, "On Lavrent'ev's effect", *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **52**:3 (1995), 325–329.
- [15] В. В. Жиков, "О плотности гладких функций в пространстве Соболева–Орлича", *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 35, Зап. научн. сем. ПОМИ, **310**, ПОМИ, СПб., 2004, 67–81; англ. пер.: V. V. Zhikov, "Density of smooth functions in Sobolev–Orlicz spaces", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **132**:3 (2006), 285–294.
- [16] E. Acerbi, G. Mingione, "Regularity results for a class of functionals with non-standard growth", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **156**:2 (2001), 121–140.
- [17] Ю. А. Алхутов, "Неравенство Харнака и гёльдеровость решений нелинейных уравнения с нестандартным условием роста", *Дифференц. уравнения*, **33**:12 (1997), 1651–1660; англ. пер.: Yu. A. Alkhutov, "The Harnack inequality and the Holder property of solutions of nonlinear elliptic equations with a nonstandard growth condition", *Differential Equations*, **33**:12 (1997), 1653–1663.
- [18] L. Diening, "Maximal function on Musielak–Orlicz spaces and generalized Lebesgue spaces", *Bull. Sci. Math.*, **129**:8 (2005), 657–700.
- [19] E. Acerbi, G. Mingione, "Regularity results for stationary electro-rheological fluids", *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **164**:3 (2002), 213–259.
- [20] Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья, *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Pure Appl. Math., **88**, Academic Press, New York–London, 1980.
- [21] В. В. Жиков, "Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:5 (1983), 961–998; англ. пер.: V. V. Zhikov, "Questions of convergence, duality, and averaging for functionals of the calculus of variations", *Math. USSR-Izv.*, **23**:2 (1984), 243–276.
- [22] В. В. Жиков, "О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах", *Матем. сб.*, **183**:8 (1992), 47–84; англ. пер.: V. V. Zhikov, "On passage to the limit in nonlinear variational problems", *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **76**:2 (1993), 427–459.
- [23] В. В. Жиков, "К технике предельного перехода в нелинейных эллиптических уравнениях", *Функц. анализ и его приложения*, **43**:2 (2009) (в печати).

- [24] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979; пер. с англ.: I. Ekeland, R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, Studies in Mathematics and its Applications, **1**, North-Holland, Amsterdam–Oxford; Elsevier, New York, 1976.
- [25] D. E. Edmunds, J. Rákosnik, “Sobolev embeddings with variable exponent”, *Studia Math.*, **143**:3 (2000), 267–293.
- [26] X. Fan, J. Shen, D. Zhao, “Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$ ”, *J. Math. Anal. Appl.*, **262**:2 (2001), 749–760.
- [27] W. Orlicz, “Über konjugierte Exponentenfolgen”, *Stud. Math.*, **3** (1931), 200–211.
- [28] F.-Y. Maeda, “Poincare type inequality and an integrability result for variable exponent”, *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, **9**:3 (2008), article 68.

В. В. Жиков (V. V. Zhikov)

Владимирский государственный педагогический
университет

E-mail: zhikov@vgpu.vladimir.ru

Поступила в редакцию

26.03.2008 и 17.06.2008

С. Е. Пастухова (S. E. Pastukhova)

Московский государственный институт радиотехники,
электроники и автоматики (технический университет)

E-mail: leonowmw@cs.msu.su