Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский, Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 8, 131–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm502>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 09:06:04

УДК 517.518.8

Ю. Н. Субботин, С. А. Теляковский

Асимптотика констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами

Каждой непрерывной функции f периода 1 ставится в соответствие периодический сплайн $s_{r,n}(f)$ степени r дефекта 1 с узлами в точках $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, интерполирующий f в узлах x_i , если r нечетно, и в серединах отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, если r четно.

Для констант Лебега $L_{r,n}$ этого процесса, т.е. для норм оператора $f(x) \rightarrow s_{r,n}(f)$ как оператора из C в C , установлена асимптотическая формула

$$L_{r,n} = \frac{2}{\pi} \log \min(r, n) + O(1),$$

равномерная относительно значений r и n .

Библиография: 6 названий.

§ 1. Введение

На протяжении всей работы r и n будут обозначать натуральные числа, $r \geq 1$, $n \geq 3$, а $\nu := \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Мы не будем в дальнейшем напоминать об этих соглашениях. Заметим, что из определения числа ν следует, что

$$1 \leq n - 2\nu \leq 2. \quad (1.1)$$

Будем рассматривать на отрезке $[0, 1]$ периодические с периодом 1 сплайны степени r дефекта 1 с узлами в n равноотстоящих точках $x_i = i/n$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Для каждой 1-периодической непрерывной функции f построим сплайн указанного вида $s_{r,n}(f, x)$, интерполирующий f в точках

$$t_i := x_i + \frac{1 + (-1)^r}{4n}.$$

Существование и единственность интерполяционных сплайнов $s_{r,n}(f, x)$ известны (см. [1]).

Константы Лебега интерполяционных сплайнов, т.е. нормы $s_{r,n}(f, x)$ как операторов из C в C , будем обозначать $L_{r,n}$.

Настоящая работа посвящена выяснению асимптотического поведения констант Лебега $L_{r,n}$ как функции растущих параметров r и n .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований – Государственного фонда естественных наук Китая (грант № 99-01-39006).

ТЕОРЕМА. Для констант Лебега периодических интерполяционных сплайнов с равноотстоящими узлами справедлива оценка

$$L_{r,n} = \frac{2}{\pi} \log \min(r, n) + O(1) \quad (1.2)$$

с абсолютной постоянной в остаточном члене.

При доказательстве теоремы мы будем пользоваться следующим представлением констант Лебега $L_{r,n}$, установленным А. А. Женсыкбаевым [2; теорема 2]:

$$L_{r,n} = \frac{2 + (-1)^\nu + (-1)^{\nu+n}}{2n} + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{2 + (-1)^{j+\nu} + (-1)^{j+\nu+n}}{\cos \frac{j\pi}{n}} \frac{B_{r,j,n}}{A_{r,j,n}}, \quad (1.3)$$

где

$$A_{r,j,n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(mn+j)^{r+1}}, \quad B_{r,j,n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{mr}}{(mn+j)^{r+1}}.$$

Наши обозначения величин $A_{r,j,n}$ и $B_{r,j,n}$ отличаются от принятых в [2] на множитель $(-1)^{r+1}$.

Ф. Ричардс [3] получил другое представление для величин $L_{r,n}$ и показал, что существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_{r,n} = L_r. \quad (1.4)$$

При этом, если рассматривать непериодические сплайны степени r дефекта 1, заданные на всей оси, с узлами в целых точках, интерполирующие непрерывные ограниченные функции в целых точках, если r нечетно, и в точках $i + \frac{1}{2}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, если r четно, то величины L_r представляют собой константы Лебега этого интерполяционного оператора как оператора из C в C .

Уточнив свою оценку $L_r = O(\log(r+1))$ из работы [2; следствие], Женсыкбаев [4] показал, что при $r \rightarrow \infty$

$$L_r = \frac{2}{\pi} \log r + O(1). \quad (1.5)$$

Пользуясь существованием предела (1.4), этот результат можно получить из оценки (1.2).

Сопоставление оценок (1.5) и (1.2) показывает, как изменяются константы Лебега, если рассматривать нормы интерполяционных сплайнов с узлами в целых точках не на всем классе непрерывных ограниченных на оси функций, а только для функций периода n .

Отметим, что, опираясь на результаты из работы [3], Ричардс [5; теорема 1] установил, что при $r \rightarrow \infty$

$$L_r = \frac{2}{\pi} \log r + \frac{2}{\pi} \left(2 \log \frac{4}{\pi} + \gamma \right) + o(1), \quad (1.6)$$

где γ – постоянная Эйлера. Подобный результат получил также Г. Майнاردус [6; теорема 2]; правда, он рассматривал только нечетные r . Но вместе с тем, в [6] остаточный член в формуле (1.6) записан в виде $O(r^{-1})$.

В настоящей работе все оценки с O -символами являются равномерными относительно всех параметров, но отмечать это будем только в формулировках утверждений.

§ 2. Вспомогательные предложения

ЛЕММА 1. Для $j = 1, \dots, n-1$ справедливы оценки

$$\frac{1}{j^{r+1}} < A_{r,j,n} < \frac{1}{j^{r+1}} + \frac{4}{(n-j)^{r+1}}. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} A_{r,j,n} &= \frac{1}{j^{r+1}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(mn+j)^{r+1}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{-m(r+1)}}{(-mn+j)^{r+1}} \\ &= \frac{1}{j^{r+1}} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{(m+1)(r+1)} \left[\frac{1}{(mn-j)^{r+1}} + (-1)^{r+1} \frac{1}{(mn+j)^{r+1}} \right]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Так как значения выражений в квадратных скобках с ростом m убывают, то сумма по m в правой части (2.2) положительна, что доказывает левую оценку (2.1).

Далее, в силу (2.2) имеем

$$\begin{aligned} A_{r,j,n} &< \frac{1}{j^{r+1}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(mn-j)^{r+1}} < \frac{1}{j^{r+1}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{(mn-mj)^{r+1}} \\ &\leq \frac{1}{j^{r+1}} + \frac{2}{(n-j)^{r+1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}, \end{aligned}$$

откуда вытекает правая оценка (2.1).

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Для величин $B_{r,j,n}$ при $j = 1, \dots, \nu$ справедливы оценки

$$0 < B_{r,j,n} = \frac{1}{j^{r+1}} - \frac{1}{(n-j)^{r+1}} + O\left(\frac{n-2j}{nj^{r+1}}\right) \quad (2.3)$$

с абсолютной постоянной в остаточном члене.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} B_{r,j,n} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^{mr} \left(\frac{2m+1}{2}n - \frac{n-2j}{2} \right)^{-(r+1)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{mr} \left(\frac{2m+1}{2}n - \frac{n-2j}{2} \right)^{-(r+1)} \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{-(m+1)r} \left(\frac{-2(m+1)+1}{2}n - \frac{n-2j}{2} \right)^{-(r+1)} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{mr} \left[\left(\frac{2m+1}{2}n - \frac{n-2j}{2} \right)^{-(r+1)} - \left(\frac{2m+1}{2}n + \frac{n-2j}{2} \right)^{-(r+1)} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда следует положительность величин $B_{r,j,n}$. Далее, слагаемое, соответствующее в этой сумме $m = 0$, дает

$$\frac{1}{j^{r+1}} - \frac{1}{(n-j)^{r+1}}.$$

Поэтому остается показать, что сумма ряда по m от 1 до ∞ оценивается остаточным членом формулы (2.3).

Согласно формуле конечных приращений Лагранжа при некотором θ , $|\theta| < 1$, имеем

$$\begin{aligned} [\dots] &= (n-2j)(r+1) \left(\frac{2m+1}{2}n - \theta \frac{n-2j}{2} \right)^{-(r+2)} \\ &< (n-2j)(r+1) \left(\frac{2m+1}{2}n - \frac{n-2j}{2} \right)^{-(r+2)} \\ &< \frac{(n-2j)(r+1)}{(mn)^{r+2}} < \frac{(n-2j)(r+1)}{m^{r+2} n (2\nu)^{r+1}} < \frac{n-2j}{m^{r+2} n j^{r+1}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{m=1}^{\infty} |[\dots]| < \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n-2j}{m^{r+2} n j^{r+1}} = O\left(\frac{n-2j}{n j^{r+1}}\right).$$

Лемма доказана.

Заметим, что из (2.3) следует, что для $j = 1, \dots, \nu$ справедлива оценка

$$B_{r,j,n} = O\left(\frac{1}{j^{r+1}}\right). \quad (2.4)$$

ЛЕММА 3. При $p \geq 0$ справедливы равномерные относительно параметров p и ν оценки

$$\sum_{j=1}^{\nu} j^p = \frac{1}{p+1}(\nu+1)^{p+1} + O((\nu+1)^p), \quad (2.5)$$

$$\sum_{j=1}^{\nu} (1 + (-1)^j) j^p = \frac{1}{p+1}(\nu+1)^{p+1} + O((\nu+1)^p). \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем оценку (2.5). Имеем

$$\sum_{j=1}^{\nu} j^p < \int_0^{\nu+1} u^p du = \frac{1}{p+1}(\nu+1)^{p+1}.$$

С другой стороны,

$$\sum_{j=1}^{\nu} j^p = \sum_{j=1}^{\nu+1} j^p - (\nu+1)^p > \int_0^{\nu+1} u^p du - (\nu+1)^p = \frac{1}{p+1}(\nu+1)^{p+1} - (\nu+1)^p.$$

Эти две оценки приводят к (2.5).

При доказательстве (2.6) будем отдельно рассматривать случаи нечетных и четных ν .

Если ν нечетно, $\nu = 2k + 1$, то

$$\sum_{j=1}^{\nu} (1 + (-1)^j) j^p = \sum_{j=1}^{2k} (1 + (-1)^j) j^p = \sum_{i=1}^k 2 \cdot (2i)^p = 2^{p+1} \sum_{i=1}^k i^p.$$

Отсюда, пользуясь оценкой (2.5), находим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\nu} (1 + (-1)^j) j^p &= 2^{p+1} \left(\frac{1}{p+1} (k+1)^{p+1} + O((k+1)^p) \right) \\ &= \frac{1}{p+1} (\nu+1)^{p+1} + O((\nu+1)^p) \end{aligned}$$

и мы получили (2.6).

Пусть теперь ν четно, $\nu = 2k$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\nu} (1 + (-1)^j) j^p = \sum_{j=1}^{2(k-1)} (1 + (-1)^j) j^p + 2\nu^p = 2^{p+1} \sum_{i=1}^{k-1} i^p + 2\nu^p$$

и, вновь пользуясь (2.5), видим, что

$$\sum_{j=1}^{\nu} (1 + (-1)^j) j^p = 2^{p+1} \left(\frac{1}{p+1} k^{p+1} + O(k^p) \right) + 2\nu^p = \frac{1}{p+1} \nu^{p+1} + O(\nu^p).$$

Чтобы прийти к (2.6), воспользуемся тем, что в силу формулы конечных приращений Лагранжа

$$(\nu+1)^{p+1} - \nu^{p+1} = (p+1)(\nu+\theta)^p < (p+1)(\nu+1)^p.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Справедливы равномерные относительно всех параметров оценки*

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu-j+1} \left[1 - \left(\frac{j}{n-j} \right)^r \right] = \log \min(r, n) + O(1), \quad (2.7)$$

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{1 + (-1)^j}{\nu-j+1} \left[1 - \left(\frac{j}{n-j} \right)^r \right] = \log \min(r, n) + O(1), \quad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu-j+1} \left[1 - \left(\frac{j}{n-j} \right)^r \right] \left(\frac{j}{\nu+1} \right)^r = O(1). \quad (2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала оценим ошибку от замены $n - j$ в знаменателе дроби в (2.7) на $\nu + 1$. Пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа, находим, что при некотором θ , $0 < \theta < 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\nu+1)^r} - \frac{1}{(n-j)^r} &= \frac{(n-j)^r - (\nu+1)^r}{(\nu+1)^r (n-j)^r} \\ &= \frac{r(n-j-(\nu+1))(n-j-\theta(n-j-(\nu+1)))^{r-1}}{(\nu+1)^r (n-j)^r} \\ &< \frac{r(n-j-(\nu+1))}{(\nu+1)^{r+1}}. \end{aligned}$$

Но согласно (1.1) $n-j-(\nu+1) \leq \nu-j+1$. Поэтому ошибка от рассматриваемой замены в сумме из левой части формулы (2.7) не превосходит величины

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu-j+1} j^r \frac{r(n-j-(\nu+1))}{(\nu+1)^{r+1}} \leq \sum_{j=1}^{\nu} \frac{r j^r}{(\nu+1)^{r+1}} = O(1).$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu-j+1} \left[1 - \left(\frac{j}{n-j} \right)^r \right] = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu-j+1} \left[1 - \left(\frac{j}{\nu+1} \right)^r \right] + O(1). \quad (2.10)$$

Проведенные рассуждения доказывают также, что

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{1+(-1)^j}{\nu-j+1} \left[1 - \left(\frac{j}{n-j} \right)^r \right] = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1+(-1)^j}{\nu-j+1} \left[1 - \left(\frac{j}{\nu+1} \right)^r \right] + O(1) \quad (2.11)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu-j+1} \left[1 - \left(\frac{j}{n-j} \right)^r \right] \left(\frac{j}{\nu+1} \right)^r \\ = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu-j+1} \left[1 - \left(\frac{j}{\nu+1} \right)^r \right] \left(\frac{j}{\nu+1} \right)^r + O(1). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Преобразуем сумму из правой части оценки (2.10). Имеем

$$1 - \left(\frac{j}{\nu+1} \right)^r = \left(1 - \frac{j}{\nu+1} \right) \sum_{p=0}^{r-1} \left(\frac{j}{\nu+1} \right)^p = (\nu-j+1) \sum_{p=0}^{r-1} \frac{j^p}{(\nu+1)^{p+1}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu-j+1} \left[1 - \left(\frac{j}{\nu+1} \right)^r \right] &= \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{p=0}^{r-1} \frac{j^p}{(\nu+1)^{p+1}} \\ &= \sum_{p=0}^{r-1} \frac{1}{(\nu+1)^{p+1}} \sum_{j=1}^{\nu} j^p. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Но в силу (2.5)

$$\sum_{p=0}^{r-1} \frac{1}{(\nu+1)^{p+1}} \sum_{j=1}^{\nu} j^p = \sum_{p=0}^{r-1} \frac{1}{p+1} + O\left(\sum_{p=0}^{r-1} \frac{1}{\nu+1}\right) = \log r + O(1) + O\left(\frac{r}{\nu}\right). \quad (2.14)$$

Для $r \leq \nu$ оценка (2.7) следует из (2.10), (2.13) и (2.14).

Для $r > \nu$, пользуясь этими же соотношениями, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu-j+1} \left[1 - \left(\frac{j}{\nu-j} \right)^r \right] \\ &= \sum_{p=0}^{\nu-1} \frac{1}{(\nu+1)^{p+1}} \sum_{j=1}^{\nu} j^p + O(1) + O\left(\sum_{p=\nu}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^{p+1}} \sum_{j=1}^{\nu} j^p\right) \\ &= \log \nu + O(1) + O\left(\sum_{p=\nu}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^{p+1}} \sum_{j=1}^{\nu} j^p\right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Покажем, что

$$\sum_{p=\nu}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^{p+1}} \sum_{j=1}^{\nu} j^p = O(1). \quad (2.16)$$

Тогда оценка (2.7) для $r > \nu$ будет вытекать из (2.15).

Имеем

$$\sum_{j=1}^{\nu} j^p < \nu^p + \int_0^{\nu} u^p du = \nu^p + \frac{\nu^{p+1}}{p+1}.$$

Значит, для $p \geq \nu$

$$\sum_{j=1}^{\nu} j^p < 2\nu^p.$$

Поэтому

$$\sum_{p=\nu}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^{p+1}} \sum_{j=1}^{\nu} j^p < \frac{2}{\nu+1} \sum_{p=\nu}^{\infty} \left(\frac{\nu}{\nu+1} \right)^p < \frac{2}{\nu+1} \left(1 - \frac{\nu}{\nu+1} \right)^{-1} = 2$$

и мы получили (2.16).

Таким образом, оценка (2.7) доказана.

Для суммы из правой части оценки (2.11) аналог тождества (2.13) имеет вид

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{1 + (-1)^j}{\nu-j+1} \left[1 - \left(\frac{j}{\nu+1} \right)^r \right] = \sum_{p=0}^{r-1} \frac{1}{(\nu+1)^{p+1}} \sum_{j=1}^{\nu} (1 + (-1)^j) j^p,$$

и пользуясь вместо (2.5) оценкой (2.6), с помощью тех же рассуждений приходим к (2.8).

Наконец, для получения оценки (2.9) записываем аналог представления (2.13):

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu-j+1} \left[1 - \left(\frac{j}{\nu+1} \right)^r \right] \left(\frac{j}{\nu+1} \right)^r = \sum_{p=0}^{r-1} \frac{1}{(\nu+1)^{p+r+1}} \sum_{j=1}^{\nu} j^{p+r},$$

откуда согласно (2.5) вытекает, что

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu-j+1} \left[1 - \left(\frac{j}{\nu+1} \right)^r \right] \left(\frac{j}{\nu+1} \right)^r \\ = \sum_{p=0}^{r-1} \frac{1}{p+r+1} + O\left(\sum_{p=0}^{r-1} \frac{1}{\nu+1} \right) = O\left(1 + \frac{r}{\nu} \right). \end{aligned}$$

В силу (2.12) это доказывает оценку (2.9) для $r \leq \nu$. А для $r > \nu$ с помощью (2.5) и (2.16) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{r-1} \frac{1}{(\nu+1)^{p+r+1}} \sum_{j=1}^{\nu} j^{p+r} \\ < \sum_{p=0}^{\nu-1} \frac{1}{(\nu+1)^{p+r+1}} \sum_{j=1}^{\nu} j^{p+r} + \sum_{p=\nu}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^{p+r+1}} \sum_{j=1}^{\nu} j^{p+r} \\ = \sum_{p=0}^{\nu-1} \frac{1}{p+r+1} + O(1) = O(1), \end{aligned}$$

что приводит к оценке (2.9).

Лемма доказана.

Заметим, что из (2.7) и (2.8) следует оценка

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{1 - (-1)^j}{\nu-j+1} \left[1 - \left(\frac{j}{n-j} \right)^r \right] = \log \min(r, n) + O(1). \quad (2.17)$$

§3. Доказательство теоремы

В качестве первого шага доказательства воспользуемся оценкой

$$\frac{1}{\cos \frac{j\pi}{n}} = \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2n}(n-2j))} = \frac{2n}{\pi(n-2j)} + O(1).$$

Подставив эту оценку в (1.3), получим

$$L_{r,n} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{2 + (-1)^{j+\nu} + (-1)^{j+\nu+n}}{n-2j} \frac{B_{r,j,n}}{A_{r,j,n}} + O\left(1 + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{B_{r,j,n}}{A_{r,j,n}} \right).$$

В силу левой оценки (2.1) и оценки (2.4)

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{B_{r,j,n}}{A_{r,j,n}} = O(1).$$

Таким образом,

$$L_{r,n} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{2 + (-1)^{j+\nu} + (-1)^{j+\nu+n}}{n-2j} \frac{B_{r,j,n}}{A_{r,j,n}} + O(1). \quad (3.1)$$

Заменяем в (3.1) $B_{r,j,n}$ на

$$\frac{1}{j^{r+1}} - \frac{1}{(n-j)^{r+1}}.$$

В силу (2.3) и левой оценки (2.1) ошибка от такой замены не превосходит (с точностью до абсолютной постоянной в качестве множителя) суммы

$$\sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{(n-2j)A_{r,j,n}} \cdot \frac{n-2j}{n j^{r+1}} = \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{A_{r,j,n} n j^{r+1}} < 1.$$

Поэтому

$$L_{r,n} = \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{2 + (-1)^{j+\nu} + (-1)^{j+\nu+n}}{(n-2j) A_{r,j,n}} \left[\frac{1}{j^{r+1}} - \frac{1}{(n-j)^{r+1}} \right] + O(1). \quad (3.2)$$

Так как в силу левой оценки (2.1)

$$\frac{1}{A_{r,j,n}} \left[\frac{1}{j^{r+1}} - \frac{1}{(n-j)^{r+1}} \right] < 1,$$

то, заменив в знаменателе дроби из (3.2) $n-2j$ на $2(\nu-j+1)$, получим

$$L_{r,n} = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{2 + (-1)^{j+\nu} + (-1)^{j+\nu+n}}{(\nu-j+1) A_{r,j,n}} \left[\frac{1}{j^{r+1}} - \frac{1}{(n-j)^{r+1}} \right] + O(1). \quad (3.3)$$

Из неравенств (2.1) следует, что при некотором θ , $0 < \theta < 1$,

$$A_{r,j,n} = \frac{1}{j^{r+1}} + \frac{4\theta}{(n-j)^{r+1}}.$$

Отсюда находим

$$\frac{1}{A_{r,j,n}} = j^{r+1} + O\left(\frac{j^{2(r+1)}}{(n-j)^{r+1}}\right).$$

Подставим эту оценку в (3.3). Тогда получим

$$L_{r,n} = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{2 + (-1)^{j+\nu} + (-1)^{j+\nu+n}}{\nu - j + 1} \left[1 - \left(\frac{j}{n-j} \right)^{r+1} \right] + O \left(\sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu - j + 1} \left[\left(\frac{j}{n-j} \right)^{r+1} - \left(\frac{j}{n-j} \right)^{2(r+1)} \right] \right). \quad (3.4)$$

Чтобы оценить остаточный член формулы (3.4), заметим, что $n - j \geq \nu + 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{\nu - j + 1} \left[\left(\frac{j}{n-j} \right)^{r+1} - \left(\frac{j}{n-j} \right)^{2(r+1)} \right] \\ \leq \sum_{i=1}^{\nu} \frac{1}{\nu - j + 1} \left[1 - \left(\frac{j}{n-j} \right)^{r+1} \right] \left(\frac{j}{\nu+1} \right)^{r+1}, \end{aligned}$$

а последняя сумма согласно (2.9) ограничена абсолютной постоянной.

Таким образом,

$$L_{r,n} = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{2 + (-1)^{j+\nu} + (-1)^{j+\nu+n}}{\nu - j + 1} \left[1 - \left(\frac{j}{n-j} \right)^{r+1} \right] + O(1). \quad (3.5)$$

Если число n нечетно, то $2 + (-1)^{j+\nu} + (-1)^{j+\nu+n} = 2$ и оценка (1.3) следует из (3.5) и (2.7).

Если же n четно, то $2 + (-1)^{j+\nu} + (-1)^{j+\nu+n} = 2 + 2(-1)^{j+\nu}$. Таким образом, в этом случае оценка (1.3) вытекает из (3.5), (2.8) и (2.17).

Теорема доказана.

Список литературы

1. Субботин Ю. Н. О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Труды МИАН. 1965. Т. 78. С. 24–42.
2. Женсыкбаев А. А. Точные оценки равномерного приближения непрерывных периодических функций сплайнами r -го порядка // Матем. заметки. 1973. Т. 13. № 2. С. 217–228.
3. Richards F. B. Best bounds for the uniform periodic spline interpolation operator // J. Approx. Theory. 1973. V. 7. P. 302–317.
4. Женсыкбаев А. А. Замечание о константах Лебега оператора сплайн-интерполяции // Исследования по современным проблемам суммирования и приближения функций и их приложениям. Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т, 1974. Вып. 5. С. 50–52.
5. Richards F. The Lebesgue constants for cardinal spline interpolation // J. Approx. Theory. 1975. V. 14. P. 83–92.
6. Meinardus G. Über die Norm des Operators der Kardinalen Spline-Interpolation // J. Approx. Theory. 1976. V. 16. P. 289–298.

Институт математики и механики УрО РАН;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Поступила в редакцию
07.10.1999