Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Э. Шноль, Правильные многогранники и бифуркации симметричных положений равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 8, 141–157

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:58:38

УДК 517.9

Э. Э. Шноль

Правильные многогранники и бифуркации симметричных положений равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассматриваются все локальные однопараметрические бифуркации симметричных положений равновесия, отвечающие трехкратным нулевым собственным значениям. В каждом случае соответствующая “бифуркационная группа” – ограничение полной группы симметрии дифференциальных уравнений на центральное многообразие – связана с симметрией правильного (трехмерного) многогранника. Показано, что во всех случаях, кроме одного, бифуркационные события исчерпываются ветвлением положений равновесия. Доказательства основаны на существовании функций (типа функций Ляпунова), производная которых в силу уравнений сохраняет знак. Эти функции не зависят от бифуркационного параметра и имеют вид однородных функций нулевой степени.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Постановка задачи и результаты

1.1. Рассмотрим однопараметрическое семейство дифференциальных уравнений, инвариантное относительно действия конечной (или компактной) группы Γ линейных преобразований:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \alpha), \quad \mathbf{r}, \mathbf{f} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f}(\mathbf{0}, \alpha) \equiv \mathbf{0}; \quad (1.1)$$

$$\mathbf{f}(g\mathbf{r}, \alpha) = g\mathbf{f}(\mathbf{r}, \alpha) \quad \text{при } g \in \Gamma. \quad (1.2)$$

Для простоты мы предположили в (1.1), что $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ есть положение равновесия при всех значениях параметра α . Общий случай, когда положение равновесия $\mathbf{c}(\alpha)$ зависит от α и, возможно, инвариантно лишь относительно некоторой подгруппы Γ , легко сводится к этому, если группа Γ конечна.

Если группа Γ некоммутативна, то собственные значения λ , отвечающие равновесию $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, могут быть кратными при всех значениях параметра α . Чем выше кратность ν , тем сложнее могут быть бифуркации этого положения равновесия. Причина очевидна: размерность модельных систем, отвечающих за бифуркационные события, равна ν для вещественных λ и равна 2ν для мнимых λ . Для двукратных нулевых λ все просто: никаких бифуркационных событий, кроме ветвления положений равновесия, здесь не происходит. Для двукратных мнимых λ изучены не все возможные бифуркации. Здесь при изменении одного параметра из равновесия может рождаться двумерный тор (с фиксированным числом циклов на нем) или инвариантная для уравнений трехмерная сфера [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS (грант № 93-893).

В настоящей статье обсуждаются все локальные (в смысле [2]) бифуркации симметричных положений равновесия, отвечающие коразмерности 1 и трехкратному нулевому λ . Общий итог прост: как и при кратности два, здесь не происходит никаких бифуркационных событий, кроме ветвления равновесий. Более точно, во всех случаях, кроме одного, справедливо следующее утверждение. Существует окрестность точки $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ такая, что любая траектория системы для значений параметра α , близких к бифуркационному, стремится к одному из положений равновесия или покидает эту окрестность (не зависящую от α). В особом случае в роли аттрактора может выступать еще цикл из сепаратрис седловых равновесий. Таким образом, здесь симметрия “запрещает” сколько-нибудь сложное поведение решений, возникающих при бифуркации (а priori возможное в трехмерных системах).

Подчеркнем лишний раз (см. [3; раздел 32A]), что в упомянутых простейших случаях, так же как в общей, “несимметричной” теории бифуркаций, желательно дать достаточно полное описание локально фазового портрета в области, не зависящей от параметра.

Несколько слов о месте рассматриваемой задачи в теории бифуркаций симметричных дифференциальных уравнений. При общем рассмотрении, пока не фиксирована группа симметрии Γ (или класс изучаемых уравнений), кажется правильным рассмотреть все бифуркационные задачи до некоторого уровня сложности. Кратность $\nu = 3$ для нулевых λ и кратность $\nu = 2$ для чисто мнимых λ суть естественные границы для такого рода исследований однопараметрических бифуркаций по двум причинам.

Во-первых, набор различных задач при большей кратности плохо обозрим. Так, для трехкратных мнимых λ роль “бифуркационной группы” G (см. п. 1.2) может играть любая подгруппа группы унитарных матриц $U(3)$. Во-вторых, сколько-нибудь полное описание фазового портрета, видимо, возможно здесь лишь в редких случаях. Имеются, в частности, замечательные примеры, показывающие, что из равновесия могут рождаться (в качестве бифуркаций коразмерности 1) малые “хаотические” колебания. Для этого достаточно появления трехкратной пары чисто мнимых λ [4] или нулевого λ кратности 4 [5].

1.2. Пусть $L_\alpha = \mathbf{f}'_\mathbf{r}(\mathbf{0}, \alpha)$ – оператор линеаризации в положении равновесия $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Операторы L_α коммутируют с преобразованиями g из Γ . Без ограничения общности можно считать, что элементы группы Γ – ортогональные преобразования в смысле некоего скалярного произведения. Возможная кратность собственных значений L_α при заданной группе Γ определяется разложением фазового пространства на минимальные инвариантные для Γ подпространства. В частности, трехкратное нулевое λ появляется в типичном семействе операторов L_α , если в таком разложении есть (хотя бы одно) трехмерное подпространство E [6; гл. 13]. Вблизи бифуркационного значения параметра α , которое мы будем полагать равным нулю, подпространство E состоит из собственных векторов L_α , отвечающих собственному значению $\lambda(\alpha)$ ($\lambda(0) = 0$) – жордановы клетки здесь не появляются. Ограничение действия Γ на подпространство E дает неприводимое представление $\Gamma \mapsto G$. В нашем случае G есть подгруппа группы ортогональных преобразований $O(3)$ трехмерного пространства, действующая в нем неприводимо (не имеющая инвариантных двумерных подпространств). Возможности таковы [7; раздел 13], [8; раздел 93]: G совпадает с $O(3)$ (или $SO(3)$) либо изоморфна одной из семи конечных групп, связанных с правильными многогранниками.

Трехмерное центральное многообразие $\mathbf{M}_\alpha$ системы (1.1) (определенное при малых α) касается подпространства E . Его можно считать инвариантным относительно действия группы Γ (см., например, [9]) и использовать декартовы координаты на E в качестве координат на $\mathbf{M}_\alpha$.

Бифуркационные события определяются тем, что происходит на $\mathbf{M}_\alpha$, и мы приходим к следующей задаче: *изучить бифуркации коразмерности 1 в системе трех уравнений $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \alpha)$, инвариантной относительно группы $G \subset O(3)$, которая действует в $\mathbb{R}^3$ неприводимо.* Здесь векторное поле $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \alpha) = \lambda(\alpha)\mathbf{r} + \dots$ G -эквивариантно, т.е. удовлетворяет условию (1.2) для всех $g \in G$.

Случай, когда система обладает полной сферической симметрией, тривиален. Остаются следующие случаи, которые и будут предметом рассмотрения.

1. G изоморфна группе T вращений правильного тетраэдра (из 12 элементов) или полной группе его симметрий, включающей отражения в плоскостях симметрии.
2. G изоморфна группе O вращений куба или полной группе его симметрий (включающей отражения).
3. G изоморфна группе Y вращений додекаэдра (или икосаэдра) либо полной группе его симметрий.
4. G порождается T и центральной симметрией (содержит 24 элемента).

В случаях 1, 2 и 3 инвариантность относительно отражений (увеличение группы симметрии) не приносит существенных изменений. Все рождающиеся при бифуркации положения равновесия находятся на осях симметрии соответствующего правильного многогранника.

Отметим, что в случаях 1–3 нелинейные слагаемые наименьшей степени образуют градиентное векторное поле. Это и есть в конечном счете причина простоты бифуркационной картины. Однако в случае 1 нужно учесть кроме квадратичных еще и кубические члены, которые (при группе T) не градиентны. Соответственно здесь возникают две серии положений равновесия: отстоящие от $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ на расстояния порядка $|\alpha|$ и порядка $|\alpha|^{1/2}$. Случай 2 самый простой. Здесь квадратичных членов нет, а кубические образуют (вместе с линейными) градиентную систему, которая все и определяет. В случае 3 линейные и кубические члены дают систему, обладающую полной сферической симметрией. Дискретность группы симметрии проявляется лишь в членах пятой степени, которые, следовательно, необходимо учитывать.

Доказательства для всех случаев основаны на существовании “функции Ляпунова” (в виде однородной функции нулевой степени, не зависящей от параметра). В §§ 2 и 4 подробно рассмотрен случай тетраэдральной симметрии, в § 5 – случай кубической симметрии и в § 6 – случай симметрии додекаэдра (где несколько сложнее алгебра). Случай 4 кратко рассмотрен в § 7. Алгебраические рассуждения, играющие в нашей теме вспомогательную роль, вынесены в дополнение.

Автор благодарен Э.Б. Винбергу за разъяснения, касающиеся инвариантов групп симметрии правильных многогранников, и соответствующие литературные указания.

§ 2. Тетраэдральная симметрия (начало)

2.1. Выбор декартовых координат. Пусть $T \subset \text{SO}(3)$ – группа вращений правильного тетраэдра. Выберем оси координат так, чтобы они были осями симметрии второго порядка (т.е. чтобы в группу T входили повороты на 180° вокруг этих осей). При этом четыре биссектрисы координатных октантов ($x = y = z$ и т.д.) будут осями симметрии третьего порядка.

Будем обозначать через $\mathbf{f}_n = (u_n, v_n, w_n)$ векторные поля, компоненты которых – однородные многочлены степени n .

ЛЕММА 2.1. а) T -эквивариантное векторное поле $\mathbf{f}_2$ имеет вид

$$u_2 = qyz, \quad v_2 = qzx, \quad w_2 = qxy; \quad (2.1)$$

б) T -эквивариантное векторное поле $\mathbf{f}_3$ имеет вид

$$u_3 = x(ax^2 + by^2 + cz^2), \quad v_3 = y(ay^2 + bz^2 + cx^2), \quad w_3 = z(az^2 + bx^2 + cy^2). \quad (2.2)$$

Здесь q, a, b, c – произвольные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напишем

$$u_3 = ax^3 + x^2P_1(y, z) + xP_2(y, z) + P_3(y, z).$$

При повороте вокруг оси x на 180° $x \rightarrow x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$ и должно быть $u \rightarrow u$. Отсюда $P_1 = P_3 \equiv 0$. При повороте вокруг оси y на 180° должно быть $u \rightarrow -u$. Отсюда $P_2 = by^2 + cz^2$. При повороте вокруг оси $x = y = z$ на 120° $u \rightarrow v$ и $v \rightarrow w$. Поэтому соответствующие коэффициенты в формулах (2.2) равны.

Утверждение а) доказывается аналогично.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) В полную группу T_d симметрий тетраэдра входят отражения в плоскостях $x = \pm y, y = \pm z$ и $z = \pm x$ (порождающие эту группу). Векторное поле (2.1) эквивариантно относительно T_d . Поле (2.2) T_d -эквивариантно только при $b = c$.

2) Векторное поле (2.1) градиентно – порождается инвариантом $I_3 = qxyz$. Кубическое векторное поле (2.2) градиентно при $b = c$.

Оба эти факта можно предвидеть без вычислений (см. дополнение).

2.2. Укороченная система. Пусть система дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ в $\mathbb{R}^3$ ($\dot{\cdot} = d/dt$) инвариантна относительно группы T , действующей как описано выше. Прямые, являющиеся вращательными осями группы симметрии (как и для случаев других подгрупп $\text{SO}(3)$), инвариантны для рассматриваемой системы. Ограничившись линейными и квадратичными членами, получим следующие уравнения

$$\dot{x} = \gamma x + qyz, \quad \dot{y} = \gamma y + qzx, \quad \dot{z} = \gamma z + qxy. \quad (2.3)$$

Лучи, составляющие 7 осей симметрии группы T , инвариантны для системы (2.3). При q , отличном от нуля, других инвариантных лучей у нее нет. Система (2.3) градиентная, ее траектории при $t \rightarrow \pm\infty$ стремятся к положениям равновесия или уходят на бесконечность.

Введем сферические координаты. Более точно, для каждого $\mathbf{r}$ положим $R = |\mathbf{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ и $\Omega = \mathbf{r}/R$. Далее, положим $d\tau = R dt$. Не фиксируя координаты на единичной сфере S^2 , которую пробегает Ω , перепишем систему (2.3) (штрих заменяет $d/d\tau$):

$$R' = \gamma + qRh(\Omega); \quad (2.4a)$$

$$\Omega' = \Phi(\Omega) \equiv qH(\Omega) \quad (2.4b)$$

(h и H не содержат q и γ). Двумерная “угловая” подсистема (2.4b) имеет на сфере S^2 (при $q \neq 0$) 14 положений равновесия Ω_k , отвечающих инвариантным лучам системы (2.3). Вводя локальные координаты, легко показать, что восемь из них узловые, а шесть, отвечающих координатным осям, седловые. Соответствующие собственные значения отличны от нуля (пропорциональны q).

2.3. Градиентность “угловой” системы. Любая траектория системы (2.4b), отличная от положения равновесия, при $\tau \rightarrow +\infty$ и при $\tau \rightarrow -\infty$ стремится к одному из равновесий. В этом можно убедиться, заметив, что система (2.4b) не зависит от γ , а при $\gamma = 0$ поведение траекторий однородной системы (2.3) нетрудно исследовать. Вместо этого мы используем то, что система (2.4b) на двумерной сфере градиентна¹, основываясь на следующей лемме (полезной и в других случаях).

2.4. ЛЕММА 2.2. Пусть задана однородная система $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{q}(\mathbf{r})$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (любой размерности). Предположим, что она градиентна – порождается функцией $I(R, \Omega) = R^{s+1}J(\Omega)$ ($R = |\mathbf{r}|$, $\Omega = \mathbf{r}/R$). Тогда соответствующая угловая система $\Omega' = \Phi(\Omega)$ также градиентна – порождается функцией $J(\Omega)$ (штрих $= d/d\tau$, $d\tau = R^{s-1}dt$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве $\mathbb{R}^n$ запишем $ds^2 = dR^2 + R^2 d\Omega^2$. Пусть ξ^i – локальные координаты на единичной сфере и $d\Omega^2 = \tilde{g}_{ik} d\xi^i d\xi^k$ ($i, k = 1, \dots, n-1$). В переменных R, ξ из системы $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{q}(\mathbf{r})$ следует

$$\frac{d\xi^i}{dt} = \frac{1}{R^2} \tilde{g}^{ik} \frac{\partial I}{\partial \xi^k} = R^{s-1} \tilde{g}^{ik} \frac{\partial J}{\partial \xi^k}. \quad (2.5)$$

Положив $d\tau = R^{s-1}dt$, получим из (2.5) утверждение леммы.

В нашем случае $s = 2$, $J(\Omega) = qxyz/R^3$. В стандартных сферических координатах: $4J(\theta, \varphi) = q \cos \theta \cdot \sin 2\theta \cdot \sin 2\varphi$. На каждой траектории системы (2.4b), отличной от положения равновесия, функция J монотонно возрастает.

2.5. Используем теперь переменные R, Ω, τ для “полной” системы $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$. Вместо (2.4) мы получим

$$R' = \gamma + qRh(\Omega) + h_1(R, \Omega), \quad h_1 = O(R^2); \quad (2.6a)$$

$$\Omega' = \Phi(\Omega) + \Psi(R, \Omega), \quad \Psi = O(R). \quad (2.6b)$$

¹Векторное поле A на римановом многообразии градиентно, если в локальных координатах $\{\xi^i\}$ его компоненты (в стандартных обозначениях) имеют вид $A^i = g^{ik} \partial F / \partial \xi^k$. Здесь F – некая скалярная функция.

Лучи $\Omega = \Omega_k$ ($\Phi(\Omega_k) = 0$) инвариантны для полной системы и, следовательно, $\Psi(R, \Omega_k) \equiv 0$. Рассмотрим решение системы (2.6), для которого $R(\tau) \leq R_*$ при всех $\tau \geq 0$. Если R_* достаточно мало, то второе слагаемое в (2.6b) можно рассматривать как малое возмущение. Считая $R(\tau)$ заданным, будем рассматривать (2.6b) как неавтономное уравнение, мало отличающееся от градиентной автономной системы $\Omega' = \Phi(\Omega)$. При этом возмущение специфично: оно сохраняет все положения равновесия невозмущенной системы.

§ 3. Неавтономное возмущение градиентной системы

Рассмотрим на компактном многообразии с заданной римановой метрикой две системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\xi}{dt} = \Phi(\xi), \quad (3.1)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \Phi(\xi) + \Psi(\xi, t). \quad (3.2)$$

Предположим, что “невозмущенная” система (3.1) градиентна – порождается функцией $J(\xi)$. Предположим, далее, что эта система имеет конечное число положений равновесия s_k и что все они гиперболичны (не имеют нулевых собственных значений).

3.1. ЛЕММА 3.1. *Пусть система (3.1) обладает описанными свойствами, а функция $\Psi(\xi, t)$ такова, что $\Psi(s_k, t) \equiv 0$: s_k являются положениями равновесия и для системы (3.2). Пусть при всех ξ и $t \geq t_0$*

$$\|\Psi\| \leq m, \quad (3.3a)$$

$$\left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right\| \leq m.^2 \quad (3.3b)$$

Если $m \leq m_$, то каждое решение $\xi(t)$ системы (3.2) при $t \rightarrow \infty$ стремится к одному из положений равновесия s_k (либо $\xi(t) \equiv s_k$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производная функции J в силу системы (3.1)³ равна $\|\text{grad } J\|^2$. Она неотрицательна и равна нулю лишь в точках s_k . Покажем, что при малых m это свойство сохраняется для системы (3.2).

1) По условию критические точки s_k функции J невырождены. Отсюда следует, что у каждой точки s_k есть окрестность U_k такая, что для $\xi \in U_k$ $c\rho(\xi, s_k) \leq$

²Нормы векторов и ковекторов определены стандартно – с помощью метрического тензора g_{ik} . Норма тензора $\partial\Psi/\partial\xi$ определена как норма линейного оператора, действующего в касательном пространстве.

³Пусть на многообразии заданы скалярная функция $F(\xi)$ и дифференциальное уравнение $\dot{\xi} = v(\xi, t)$. Производная F в силу уравнения есть по определению функция F_d , задаваемая в (локальных) координатах формулой $F_d(\xi, t) = \sum v_k(\xi, t) \partial F / \partial \xi^k$. Если $\xi = \varphi(t)$ – произвольное решение дифференциального уравнения, то $\dot{F}(\varphi(t)) = F_d(\varphi(t), t)$.

$\|\operatorname{grad} J\| \leq C\rho(\xi, s_k)$. Здесь ρ – (кратчайшее) расстояние между точками. Поскольку $\Psi(s_k, t) = 0$, то в силу (3.3b) имеем в U_k : $\|\Psi(\xi, t)\| \leq m\rho(\xi, s_k)$. Производная J в силу системы (3.2) есть $J_d(\xi, t) = \|\operatorname{grad} J\|^2 + (\operatorname{grad} J, \Psi)$. Имеем

$$J_d \geq \|\operatorname{grad} J\|^2 - \|\operatorname{grad} J\| \cdot \|\Psi\|. \quad (3.4)$$

В окрестности U_k получим

$$J_d(\xi, t) \geq (c^2 - Cm)\rho^2(\xi, s_k). \quad (3.5)$$

2) Вне всех окрестностей U_j выполнены неравенства $C_1 \leq \|\operatorname{grad} J\| \leq C$ ($C_1 > 0$). Из (3.4) и (3.3a) следует, что здесь $J_d \geq C_1^2 - Cm$. Отсюда и из (3.5) вытекает, что функция $J_d(\xi, t)$ неотрицательна при $m \leq m_*$, если m_* меньше, чем c^2/C и C_1^2/C ; $J_d(\xi, t)$ обращается в нуль только при $\xi = s_k$.

3) Пусть $\xi(t)$ – некоторое решение системы (3.2), отличное от всех равновесий s_k . Функция $V(t) = J(\xi(t))$ с ростом t возрастает: производная $\dot{V}(t) = J_d(\xi(t), t)$ положительна. Легко проверить, что вторая производная $\ddot{V}(t)$ ограничена. Отсюда $\dot{V}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. $\xi(t)$ стремится к одному из положений равновесия s_k .

Добавление. Предположим, что системы (3.1), (3.2) гладко зависят от параметра α и при каждом α из некоторого отрезка выполняются предположения леммы 3.1. Тогда можно выбрать m_* не зависящим от α .

§4. Тетраэдральная симметрия (окончание)

4.1. ТЕОРЕМА 4.1. Пусть семейство дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \alpha)$ в $\mathbb{R}^3$ инвариантно относительно группы вращений тетраэдра T или полной группы его симметрий. Тогда

{1} в подходящих декартовых координатах уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda(\alpha)x + qyz + x(ax^2 + by^2 + cz^2) + O(R^4), \\ \dot{y} &= \lambda(\alpha)y + qzx + y(ay^2 + bz^2 + cx^2) + O(R^4), \\ \dot{z} &= \lambda(\alpha)z + qxy + z(az^2 + bx^2 + cy^2) + O(R^4). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и q, a, b, c есть функции от α .

Предположим, что $\lambda(0) = 0$ и выполнены следующие условия невырожденности:

$$\lambda_1 = \lambda'(0) \neq 0, \quad q_0 = q(0) \neq 0, \quad a_0 = a(0) \neq 0. \quad (4.2)$$

Тогда при достаточно малых α ($|\alpha| < \varepsilon_*$) существует шар B ($R \leq R_*$) со следующими свойствами:

- {2} если $\alpha \neq 0$, то на каждой из 4 прямых $x = \pm y = \pm z$ в B имеется ровно одно положение равновесия системы, отличное от $\mathbf{r} = \mathbf{0}$;
- {3} если $\alpha \neq 0$ и $\operatorname{sign} \alpha = -\operatorname{sign}(\lambda_1/a_0)$, то на каждой из координатных осей в B имеется ровно два положения равновесия системы, отличных от $\mathbf{r} = \mathbf{0}$;
- {4} каждая полутраектория системы, начинающаяся в B , с ростом t либо стремится к $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ или одному из указанных положений равновесия, либо покидает шар B за конечное время.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Справедливость утверждения {1} следует из п. 2.1.

2) Утверждения {2} и {3} вытекают из инвариантности осей симметрии для системы (4.1): на каждой из этих прямых система сводится к одному уравнению. На оси $x = y = z$ и других осях третьего порядка получим уравнение $\dot{x} = \lambda_1 \alpha x + q_0 x^2 + O(\alpha^2 |x| + |\alpha| x^2 + |x|^3)$. Его правая часть обращается в нуль при $x = 0$ и при $x = -\lambda_1 \alpha / q_0 + O(\alpha^2)$. При $|\alpha| \leq \varepsilon_1$ и $R \leq R_1$ других положений равновесия уравнение не имеет. На оси x система сводится к уравнению вида $\dot{x} = \lambda_1 \alpha x + a_0 x^3 + O(\alpha^2 |x| + |\alpha| x^3 + x^4)$. Его правая часть обращается в нуль при $x = 0$ и при $x = \pm(-\lambda_1 \alpha / a_0)^{1/2} + O(|\alpha|)$. При $|\alpha| \leq \varepsilon_2$ и $R \leq R_2$ других положений равновесия это уравнение не имеет. К аналогичному уравнению сводится система на координатных осях y и z .

3) Перейдем к доказательству основного утверждения {4}. Записав систему (4.1) в переменных R, Ω, τ (см. п. 2.2), получим для Ω уравнение вида (2.6b):

$$\Omega' = q(\alpha)H(\Omega) + \Psi(R, \Omega, \alpha), \quad (4.3)$$

$$\|\Psi\| \leq CR, \quad \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial \Omega} \right\| \leq CR. \quad (4.4)$$

Здесь векторное поле $H(\Omega)$ градиентно – порождается функцией $J_1(\Omega) = xyz/R^3$. Пусть $q(\alpha) \neq 0$ на отрезке $|\alpha| \leq \varepsilon_0$ (см. (4.2)). Фиксируем произвольное α из этого отрезка и рассмотрим некоторое решение $\mathbf{r}(t)$ системы (4.1) (отличное от $\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{0}$). Подставив в (4.3) функцию $R(\tau)$, получим неавтономную систему, решением которой является $\Omega(\tau)$. Эта система принадлежит к тому типу, к которому применима лемма 3.1. Пусть m_* задает верхнюю границу возмущения, при котором справедливо утверждение леммы (величина m_* определяется первым слагаемым в правой части (4.3)). Предположим, что $R(\tau) \leq R_0$ при всех $\tau \geq 0$. Выберем $R_0 = m_*/C$ (см. (4.4)). Тогда в силу указанной леммы $\Omega(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к одному из положений равновесия системы $\Omega' = H(\Omega)$.

4) Предположим, что $\mathbf{r}(t)$ не стремится к точке $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда интервалу $t_0 < t < \infty$ отвечает для этого решения интервал $0 < \tau < \infty$, поскольку интеграл от $R(t)$ расходится (напомним, что $R(t)dt = d\tau$ и что $\dot{R}(t)$ ограничено). Итак, решение $\mathbf{r}(t)$, оставаясь в шаре $\|\mathbf{r}\| \leq R_0$, при $t \rightarrow \infty$ неограниченно приближается к одному из инвариантных лучей системы (4.1). Следовательно, $\mathbf{r}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к положению равновесия (отличному от $\mathbf{r} = \mathbf{0}$), находящемуся на этом луче.

Утверждение {4} будет справедливо, если выбрать $R_* = \min(R_0, R_1, R_2)$ и $\varepsilon_* \leq \min(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ (ε_* должно быть достаточно мало, чтобы указанные выше равновесия попадали в шар $R \leq R_*$).

§ 5. Кубическая симметрия

5.1. Выбор декартовых координат. Пусть $O \subset \text{SO}(3)$ – группа вращений куба. Выберем оси координат параллельными ребрам куба, а начало координат – в его центре. Оси координат будут осями симметрии четвертого порядка, а биссектрисы координатных октантов ($x = y = z$ и т.д.) будут осями третьего порядка.

Кроме того, есть 6 поворотных осей второго порядка – биссектрисы квадрантов в каждой из координатных плоскостей (линии $z = 0$, $x = y$ и т. д.).

Поскольку $O \supset T$, справедлива лемма 2.1. Дополнительные элементы симметрии позволяют усилить утверждения этой леммы. Именно:

а) O -эквивариантное векторное поле $\mathbf{f}_2$ тождественно равно нулю;

б) O -эквивариантное векторное поле $\mathbf{f}_3$ имеет вид (2.2) с $c = b$.

Действительно, при повороте вокруг оси x на 90° $y \rightarrow z$, $z \rightarrow -y$. При этом $u_2 = qyz$ и $u_3 = x(ax^2 + by^2 + cz^2)$ не должны меняться. Отсюда $q = 0$ и $b = c$.

5.2. Инвариантные системы. Пусть система дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ в $\mathbb{R}^3$ ($\cdot = d/dt$) инвариантна относительно группы O , действующей как описано выше. В силу п. 5.1 она имеет вид $\dot{\mathbf{r}} = \gamma\mathbf{r} + \mathbf{f}_3(\mathbf{r}) + O(R^4)$. Тринадцать вращательных осей группы O инвариантны для системы; на каждой из них система сводится к уравнению вида $\dot{s} = \gamma s + As^3 + O(s^4)$ (s – одна из координат). Здесь $A = a$ для осей четвертого порядка, $A = a + 2b$ для осей третьего порядка и $A = a + b$ для осей второго порядка.

Введем, как в п. 2.2, переменные R и Ω (Ω пробегает единичную сферу) и положим $d\tau = R^2 dt$. Отбросив в системе слагаемые $O(R^4)$, получим градиентную “угловую” систему $\Omega' = \Phi(\Omega)$ (см. п. 2.4). Лучам, инвариантным для системы $\dot{\mathbf{r}} = \gamma\mathbf{r} + \mathbf{f}_3(\mathbf{r})$, отвечают положения равновесия Ω_k угловой системы и наоборот. Легко проверить, что при $a \neq b$ инвариантны только лучи, составляющие оси симметрии куба. Им отвечают 26 гиперболических положений равновесия Ω_k .

5.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть семейство дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \alpha)$ в $\mathbb{R}^3$ инвариантно относительно группы вращений куба O или полной группы его симметрий. Тогда

{1} в подходящих декартовых координатах уравнения имеют вид

$$\dot{x} = \lambda(\alpha)x + x[a(\alpha)x^2 + b(\alpha)(y^2 + z^2)] + O(R^4)$$

(еще два уравнения получаются циклической перестановкой x, y, z).

Предположим, что $\lambda(0) = 0$ и выполнены следующие условия невырожденности при $\alpha = 0$ ($a_0 = a(0)$, $b_0 = b(0)$):

$$\lambda_1 = \lambda'(0) \neq 0, \quad a_0 \neq 0, \quad |a_0| \neq |b_0|, \quad a_0 + 2b_0 \neq 0. \quad (5.1)$$

Тогда при достаточно малых α ($|\alpha| < \varepsilon_*$) существует шар B ($R \leq R_*$) со следующими свойствами:

- {2} для фиксированного α на каждой из осей s_k симметрии куба в B имеется не более двух положений равновесия системы, отличных от $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ (на данной оси таких равновесий два или ни одного);
- {3} каждая полутраектория системы, начинающаяся в B , с ростом t стремится к одному из указанных положений равновесия или покидает шар B за конечное время.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Справедливость утверждения {1} следует из п. 5.1.

2) На каждой из осей симметрии система сводится к уравнению вида $\dot{s} = \lambda_1 \alpha s + As^3 + O(\alpha^2|s| + |\alpha s^3| + s^4)$. В силу условий (5.1) коэффициенты A для всех осей отличны от нуля. Правая часть уравнения обращается в нуль при $s = 0$ и при $s = \pm(-\lambda_1 \alpha / A)^{1/2} + O(\alpha)$ (для $\alpha > 0$ или для $\alpha < 0$). Все эти уравнения не имеют других положений равновесий при $|\alpha| < \varepsilon_1$ и $R < R_1$.

3) Основное утверждение {3} выводится из леммы 3.1 точно так же, как в теореме 4.1.

§ 6. Симметрия додекаэдра

В этом параграфе используются сведения (и терминология) из дополнения.

6.1. Об инвариантах и эквивариантах. Пусть $Y \subset \text{SO}(3)$ – группа вращений додекаэдра. Из общей теоремы об инвариантах этой группы вытекают следующие утверждения об однородных инвариантах I_n невысокой степени n : а) $I_2 = cR^2$; б) $I_4 = cR^4$; в) существует нетривиальный (т.е. зависящий не только от R) инвариант шестой степени P_6 , и произвольный инвариант I_6 равен $aP_6 + cR^6$. Добавим к этому, что не существует ненулевых инвариантов степеней 3 и 5. (Элементарные доказательства этих утверждений приведены в дополнении.)

Y -эквивариантное векторное поле, компоненты которого – многочлены степени не выше 6, обязательно градиентно. Таким образом, если ограничиться тейлоровскими слагаемыми не выше пятой степени, то система дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^3$, инвариантная относительно группы Y , имеет вид

$$\dot{\mathbf{r}} = \lambda \mathbf{r} + \mathbf{r}(a_2 R^2 + a_4 R^4) + a \text{grad } P_6(\mathbf{r}). \quad (6.1)$$

6.2. Нетривиальный инвариант шестой степени. Напомним, что додекаэдр имеет центр симметрии и следующие оси вращательной симметрии:

- 1) 6 осей пятого порядка. Каждая такая прямая ортогональна двум противоположным граням в их центрах.
- 2) 10 осей третьего порядка, соединяющих пары противоположных вершин.
- 3) 15 осей второго порядка, соединяющих середины противоположащих ребер.

Группа Y содержит 60 элементов и действует транзитивно на множестве осей каждого типа.

Пусть уравнения $l_k(\mathbf{r}) = 0$ ($k = 1, \dots, 6$) задают плоскости, ортогональные осям пятого порядка и проходящие через точку $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Пусть линейные формы l_k нормированы: сумма квадратов коэффициентов равна 1. Положим $P_6(\mathbf{r}) = \prod l_k(\mathbf{r})$. Полученный многочлен (определенный с точностью до знака) инвариантен относительно действия элементов g группы Y . Действительно, $l_k(g\mathbf{r}) = \pm l_j(\mathbf{r})$ (разным k отвечают разные j) и поэтому $P_6(g\mathbf{r}) = \pm P_6(\mathbf{r})$, но для элементов g пятого порядка знак “минус” невозможен, а наименьшая подгруппа, содержащая все такие элементы, совпадает со всей группой.

6.3. Угловая система. Пусть снова Ω пробегает единичную сферу ($\Omega = \mathbf{r}/R$) и $d\tau = R^4 dt$. Следствием системы (6.1) является градиентная система на сфере $\Omega' = \Phi(\Omega)$, порождаемая функцией $J(\Omega) = aP_6/R^6$ (штрих заменяет d/dt). Положениям равновесия Ω_k этой системы отвечают лучи, инвариантные для (6.1).

Можно показать, что при $a \neq 0$ имеется лишь конечное число точек Ω_k (см. дополнение).

ЛЕММА 6.1. *При $a \neq 0$ 1) система $\Omega' = \Phi(\Omega)$ имеет в качестве положений равновесия только точки, отвечающие осям вращения s_j группы Y ; 2) все положения равновесия этой системы гиперболические.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Введем в $\mathbb{R}^3$ координаты (x, y, z) так, чтобы в плоскости $x = 0$ не было инвариантных лучей системы (6.1) (определяемых последним слагаемым правой части). На инвариантных лучах должны выполняться уравнения (индекс 6 опущен):

$$yP'_x - xP'_y = 0, \quad zP'_y - yP'_z = 0, \quad xP'_z - zP'_x = 0. \quad (6.2)$$

Рассмотрим в полупространстве $x > 0$ первые два уравнения (6.2). Положив $\eta = y/x$ и $\zeta = z/x$ (и поделив на x^6), получим систему Π двух уравнений шестой степени: $\Pi_1(\eta, \zeta) = 0$, $\Pi_2(\eta, \zeta) = 0$. Система Π имеет (вещественные) решения, отвечающие осям s_j ; таких решений 31. Предположим, что есть инвариантная прямая s системы (6.1), отличная от всех осей s_j . Под действием преобразований группы Y из s получится 59 (или 29) других прямых, также инвариантных для (6.1). Но система Π не может иметь более 36 решений и, следовательно, имеет их ровно 31. Тем самым, система $\Omega' = \Phi(\Omega)$ имеет ровно 62 положения равновесия (для $x > 0$ и для $x < 0$).

2) Предположим, что одна из точек Ω_k – вырожденное положение равновесия системы $\Omega' = \Phi(\Omega)$. Тогда будут вырожденными не менее 12 равновесий (12 – минимальное число точек в орбите группы Y). Итак, при сделанном предположении система Π имеет $m \geq 6$ вырожденных решений и $31 - m$ невырожденных. Алгебраическая кратность вырожденных решений не менее 2, а полное число решений с учетом кратности не может быть более 36 в силу теоремы Безу [10; гл. 4: раздел 1.1, пример 3 и раздел 2.1, пример 1]. Это при $m \geq 6$ невозможно.

6.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Пусть семейство дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \alpha)$ в $\mathbb{R}^3$ инвариантно относительно группы вращений додекаэдра Y или полной группы его симметрий. Тогда*

{1} уравнения имеют вид

$$\dot{\mathbf{r}} = \lambda(\alpha)\mathbf{r} + \mathbf{r}A(R, \alpha) + a(\alpha)\text{grad } P_6(\mathbf{r}) + O(R^6);$$

здесь $R = |\mathbf{r}|$, P_6 – описанный выше инвариант группы Y и

$$A(R, \alpha) = a_2(\alpha)R^2 + a_4(\alpha)R^4.$$

Предположим, что $\lambda(0) = 0$ и выполнены следующие условия невырожденности при $\alpha = 0$:

$$\lambda_1 = \lambda'(0) \neq 0, \quad a_2 = a_2(0) \neq 0, \quad a = a(0) \neq 0.$$

Тогда при достаточно малых α ($|\alpha| < \varepsilon_*$) существует шар B ($R \leq R_*$) со следующими свойствами:

- {2} для фиксированного α на каждой из 31 вращательных осей s_k группы Y в B имеется не более двух положений равновесия системы, отличных от $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Других равновесий в B система не имеет;
- {3} каждая полутраектория системы, начинающаяся в B , с ростом t стремится к одному из положений равновесия либо покидает шар B за конечное время.

Уточнения и комментарии. а) Если $\text{sign}(\alpha) = \text{sign}(\lambda_1 a_2)$, то в B нет никаких равновесий, кроме $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Доказательство очевидно: в этом случае $\dot{R}$ сохраняет знак при $R < R_*$.

б) Если $\text{sign}(\alpha) = -\text{sign}(\lambda_1 a_2)$, то на каждой из прямых s_k имеется ровно два положения равновесия, удаленных от $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ на равное расстояние (порядка $|\alpha|^{1/2}$). Всего, таким образом, при этой бифуркации рождается 62 нетривиальных равновесия, разделенных на три семейства – по 12, 20 и 30 точек. Равновесия каждого семейства переводятся друг в друга преобразованиями группы и “устроены одинаково”.

в) Условия $a_2(0) \neq 0$ и $a(0) \neq 0$ можно заменить словесной формулировкой: при $\alpha = 0$ в системе должны иметься ненулевые кубичные слагаемые, а члены пятой степени не должны обладать сферической симметрией.

Доказательство предложения 6.2 аналогично доказательству теоремы 4.1. Оно основано на лемме 3.1 и сведениях об угловой системе, приведенных в п. 6.3.

§ 7. Симметрия T_h

В этом параграфе кратко рассмотрен случай, в котором модельная система не градиентна, а в роли аттрактора может выступать цикл, образованный тремя гетероклиническими траекториями.

7.1. Вид уравнений. Пусть система уравнений $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ в $\mathbb{R}^3$ ($\cdot = d/dt$) инвариантна относительно группы T_h , порожденной группой вращений тетраэдра T и центральной симметрией. Выберем декартовы координаты так, как в § 2. Отражения в координатных плоскостях входят в группу T_h ; в частности, эти плоскости инвариантны для системы. В силу этого $\dot{x} = x\tilde{u}(x, y, z)$, где $\tilde{u}$ есть гладкая функция от x^2, y^2 и z^2 ; аналогично для $\dot{y}$ и $\dot{z}$. Лемма 2.1 остается в силе. Выписав явно линейные и кубичные члены, получим уравнения

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x[\lambda + ax^2 + by^2 + cz^2 + O(R^4)], \\ \dot{y} &= y[\lambda + ay^2 + bz^2 + cx^2 + O(R^4)], \\ \dot{z} &= z[\lambda + az^2 + bx^2 + cy^2 + O(R^4)].\end{aligned}\tag{7.1}$$

Чтобы изучить поведение решений (7.1), достаточно рассмотреть “положительный” октант ($x, y, z \geq 0$). Двумерные системы на его гранях устроены одинаково, поскольку прямая $x = y = z$ – ось симметрии третьего порядка.

7.2. Функция Ляпунова. Отбросив в (7.1) остаточные члены, получим

$$\dot{x} = x(\lambda + ax^2 + by^2 + cz^2) \quad \text{и т. д. (по циклу)}. \quad (7.2)$$

При $b \neq c$ система (7.2) не градиентна. Введем, как в п. 2.2, “угловую” систему $\Omega' = \Phi(\Omega)$ (производная по τ , $d\tau = R^2 dt$). Она тоже не градиентна, но допускает “функцию Ляпунова” $J(\Omega) = xyz/R^3$. Производная J в силу угловой системы J_d дается формулами:

$$J_d(\Omega) = KJ(\Omega)F(\Omega), \quad K = b + c - 2a, \\ F(\Omega) = (x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2)/R^4.$$

Функция F неотрицательна и в сферическом треугольнике Δ , отвечающем выбранному октанту, обращается в нуль (имея невырожденный минимум) лишь в точке Ω_0 , где $x = y = z$. Пусть $K \neq 0$. Тогда $\text{sign } J_d = \text{sign } K$ в треугольнике Δ везде, кроме его центра Ω_0 и границы (где $J \equiv 0$). Рассмотрим теперь $J(\Omega)$ ($\Omega = \mathbf{r}/R$) как (однородную) функцию $\mathbf{r}$.

ЛЕММА 7.1. *Функция $\Lambda(x, y, z) = xyz/R^3$ при $K \neq 0$ является в положительном октанте функцией Ляпунова системы (7.1) в следующем смысле. Пусть $\mathbf{r}(t)$ — решение этой системы. Существует R_1 такое, что при $|\mathbf{r}(t)| < R_1$ функция $V(t) = \Lambda(\mathbf{r}(t))$ меняется монотонно. При этом производная $\dot{V}(t)$ обращается в нуль, только если траектория $\mathbf{r}(t)$ лежит на луче l ($x = y = z$) или на одной из координатных плоскостей.*

Доказательство похоже на приведенное в §3.

СЛЕДСТВИЕ 7.2. *Полутраектория системы (7.1) в положительном октанте, для которой $R(t) < R_1$, с ростом t стремится к лучу l или к поверхности октанта. Более точно: если $K < 0$, то любая полутраектория, не лежащая на l , стремится к объединению граней октанта. При $K > 0$ любая полутраектория, не лежащая на одной из граней, с ростом t стремится к лучу l .*

7.3. Двумерные системы. На грани $z = 0$ получим, отбросив $O(R^4)$:

$$\dot{x} = x(\lambda + ax^2 + by^2), \quad \dot{y} = y(\lambda + ay^2 + cx^2). \quad (7.3)$$

Эта система имеет (в квадранте $x \geq 0, y \geq 0$) нетривиальные положения равновесия на координатных осях при $\lambda a < 0$. Равновесия гиперболичны, если выполнены неравенства: $A = a - b \neq 0$ и $C = c - a \neq 0$. Если $AC > 0$, то других равновесий нет и имеется единственная траектория, соединяющая эти два. При $AC < 0$ система (7.3) имеет инвариантный луч внутри квадранта, и на нем может быть еще одно положение равновесия (не подсказываемое симметрией). Уравнения (7.3) не имеют замкнутых траекторий: введя переменные $\xi = \ln x$ и $\eta = \ln y$, получим систему, у которой дивергенция правой части сохраняет знак. Легко проверить также, что система (7.3) не имеет сепаратрисных циклов.

В нашей бифуркационной задаче $\lambda(\alpha) = \lambda_1 \alpha + O(\alpha^2)$. Если $\lambda_1 \neq 0$, то сделанные утверждения о системах на гранях справедливы для (7.1) в области $R \leq R_2$ при $0 < |\alpha| < \varepsilon_*$.

7.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. Пусть семейство дифференциальных уравнений $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}, \alpha)$ в $\mathbb{R}^3$ инвариантно относительно группы T_h . Тогда в подходящих декартовых координатах уравнения имеют вид (7.1), где коэффициенты зависят от α .

Пусть $\lambda(0) = 0$ и при $\alpha = 0$ выполнены следующие неравенства:

$$\lambda_1 = \lambda'(0) \neq 0, \quad a \neq 0, \quad a \neq b, \quad a \neq c, \quad b + c \neq 2a.$$

Тогда при достаточно малых α ($|\alpha| < \varepsilon_*$) существует шар B ($R \leq R_*$), обладающий следующим свойством. Каждая траектория $\mathbf{r}(t)$ системы, остающаяся в B при всех $t \geq 0$, с ростом t стремится к одному из положений равновесия или к гетероклиническому циклу, образованному из трех равновесий и соединяющих их траекторий.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Речь идет, кроме $\mathbf{r} = \mathbf{0}$, о равновесиях, рождающихся в результате бифуркации – лежащих на осях или плоскостях симметрии (и расположенных на расстояниях порядка $|\alpha|^{1/2}$ от $\mathbf{r} = \mathbf{0}$).

2) Пусть снова $A = a - b$, $C = c - a$, $K = b + c - 2a$. Гетероклинические циклы содержат седловые равновесия, лежащие на трех координатных осях. Они существуют при $AC > 0$ (и подходящем знаке α). При $K < 0$ и отталкивающем равновесии $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ ($\lambda_1 \alpha > 0$, $a < 0$) такой цикл притягивает к себе все траектории в шаре B из положительного координатного октанта, кроме особых – тех, для которых $x = y = z$ или одна из координат тождественно равна нулю.

3) Основная идея доказательства предложения 7.3 – использование “функции Ляпунова” Λ (п. 7.2). Затем нужно рассмотреть, каким может быть ω -предельное множество M “внутренней” траектории, если оно расположено на гранях положительного октанта. В силу сказанного выше M может состоять только из равновесий и соединяющих их траекторий. Доказывается, что из всех мыслимых комбинаций реализуются только две: M есть равновесие или указанный гетероклинический цикл.

4) Система (7.1) рассмотрена также в работе [11]. Основная цель авторов этой статьи – показать, что в симметричных системах гетероклинический цикл может быть “структурно устойчив”. Предельное поведение траекторий описано там для случая, когда гетероклинический цикл является “главным аттрактором” (см. замечание 2) выше).

Дополнение: инварианты и эквиварианты

Д.1. Пусть G – подгруппа $SO(3)$. Выберем декартову систему координат и рассмотрим инварианты группы G – многочлены $P(x, y, z)$, для которых $P(g\mathbf{r}) = P(\mathbf{r})$ при всех $g \in G$. Всегда есть тривиальные инварианты вида $Q(R^2)$, пригодные для всех подгрупп $O(3)$ ($R^2 = x^2 + y^2 + z^2$); остальные инварианты G будем называть нетривиальными.

Если P – инвариант G , то $\mathbf{f} = \text{grad } P$ – векторное поле, эквивариантное относительно действия G . Назовем эквивариантные поля вида $\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}a(R) = \text{grad } Q(R^2)$ тривиальными. Будем обозначать через $\mathbf{f}_n$ векторные поля, компоненты которых – однородные многочлены степени n .

Д.2 ЛЕММА Д.2. Пусть $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$ – нетривиальный эквивариант группы G , имеющий наименьшую степень n . Тогда векторное поле $\mathbf{f}_n$ градиентно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\mathbf{F}_{n-1}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{f}_n(\mathbf{r})$. Поле $\mathbf{F}_{n-1}$ эквивариантно относительно G и, значит, по выбору n $\mathbf{F}_{n-1} = \mathbf{r}a(R)$. Поскольку $\text{div } \mathbf{F}_{n-1} \equiv 0$, то $a(R) \equiv 0$. Итак, $\mathbf{f}_n = \text{grad } P_{n+1}$. Очевидно, $P_{n+1}(\mathbf{r})$ – нетривиальный инвариант группы G .

Д.3. Пусть Γ – конечная группа ортогональных преобразований $\mathbb{R}^n$, порожденная отражениями. Тогда всякое полиномиальное векторное поле $\mathbf{f}$, эквивариантно относительно Γ , или градиентно, или есть линейная комбинация градиентных полей: $\mathbf{f} = \sum_{k=1}^{k=n} a^{(k)} \text{grad } I^{(k)}$. Здесь $a^{(k)}$ и $I^{(k)}$ – инвариантные многочлены ($I^{(k)}$ образуют базис в алгебре инвариантных многочленов). Это утверждение – частный случай теоремы, доказанной в [12] (см. также [13; с. 169]).

В нашем случае $I^{(1)} = R^2$, а нетривиальные инварианты $I^{(2)}$ имеют следующие степени: 3 – для полной группы T_d симметрий тетраэдра, 4 – для группы O_h симметрий куба и 6 – для группы Y_h всех симметрий додекаэдра. Степени нетривиальных инвариантных многочленов $a^{(k)}$ не менее 3, 4 и 6 соответственно. Поэтому полиномиальные векторные поля, эквивариантные относительно этих групп, обязательно градиентны, если их степень не превосходит: 3 для группы T_d , 4 для группы O_h и 6 для Y_h .

Д.4. Инварианты невысокой степени для группы вращений додекаэдра Y . Выберем декартову систему координат так, чтобы одна из граней додекаэдра была параллельна плоскости xOy . Ось z будет тогда осью симметрии пятого порядка. Середины 10 ребер и, соответственно, 5 осей симметрии второго порядка будут лежать в плоскости xOy . Выберем одну из них в качестве оси x . Пусть $I_n(x, y, z)$ – однородный многочлен, инвариантный относительно группы Y . Запишем его в виде

$$I_n = c_0 z^n + p_1(x, y) z^{n-1} + \dots + p_{n-1}(x, y) z + p_n(x, y).$$

Многочлены $p_k(x, y)$ должны быть инвариантны относительно поворота на угол $2\pi/5$. Отсюда

$$p_1 = p_3 \equiv 0, \quad p_2 = c_2 r^2, \quad p_4 = c_4 r^4, \quad p_6 = c_6 r^6 \quad (r^2 = x^2 + y^2).$$

Далее, $p_5(x, y) = \text{Re}[C(x + iy)^5]$. Из этих равенств вытекает, что инварианты второй и четвертой степени не изменяются при повороте вокруг оси z на любой угол. Они будут, следовательно, инвариантны относительно поворотов вокруг любой другой оси пятого порядка. Две такие однопараметрические подгруппы порождают всю группу $\text{SO}(3)$ и, значит, $I_2 = a_2 R^2$, $I_4 = a_4 R^4$. Инварианты третьей и пятой степени должны иметь вид:

$$I_3 = c_0 z^3 + c_2 r^2 z \quad \text{и} \quad I_5 = c_0 z^5 + c_2 r^2 z^3 + c_4 r^4 z + p_5(x, y).$$

При повороте на π вокруг оси x эти многочлены не должны изменяться. Отсюда $I_3 \equiv 0$, а в I_5 первые три слагаемых отсутствуют. Поскольку есть наклонные оси

симметрии, I_5 не может быть функцией только от x и y и, значит, $I_5 \equiv 0$. Займемся инвариантами шестой степени.

Если I_6 – инвариант группы Y , то ΔI_6 также инвариант (Δ – оператор Лапласа). Вычитая CR^6 , можно сделать I_6 гармонической функцией. Запишем такой инвариант в виде

$$I_6^{(0)} = z^6 + c_2 r^2 z^4 + c_4 r^4 z^2 + c_6 r^6 + c q_5(x, y)z. \quad (Д.1)$$

Здесь с учетом выбора оси x : $q_5(x, y) = 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5$. Потребовав $\Delta I_6^{(0)} = 0$, находим: $c_2 = -5$, $c_4 = 3$, $c_6 = -\frac{1}{7}$. Для определения c нужно использовать какую-нибудь из наклонных осей симметрии. (В том, что c определится однозначно, можно убедиться без вычислений. Разность двух гармонических инвариантов (Д.1) состоит из одного (последнего) слагаемого. Оно, однако, при $c \neq 0$ не инвариантно относительно группы Y , поскольку не инвариантна сумма первых 4 слагаемых.) Произвольный инвариант шестой степени получается из $I_6^{(0)}$ умножением на константу и добавлением CR^6 . Указанный в § 6 инвариант P_6 обращается в нуль на плоскости $z = 0$. Такой многочлен получится (с точностью до множителя), если из (Д.1) вычесть $c_6 R^6$.

Д.5. Конечность числа решений системы (6.2). Первое из уравнений с учетом (Д.1) приобретет вид $z(x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4) = 0$. Решения системы (6.2) могут, следовательно, лежать в плоскости $z = 0$ или в одной из вертикальных плоскостей (угол между соседними равен $\pi/5$). Эти 5 плоскостей переводятся друг в друга преобразованиями группы, и достаточно рассмотреть решения (6.2) в плоскостях $z = 0$ и $x = 0$. При $z = 0$ второе уравнение сводится к равенству $yq_5(x, y) = 0$, которое выполняется на 5 прямых (осях второго порядка группы Y). В плоскости $x = 0$ левая часть второго из уравнений (6.2) не обращается тождественно в нуль (отличен от нуля, например, коэффициент при yz^5). Следовательно, в этой плоскости есть не более 6 прямых, на которых выполняются уравнения (6.2); одна из этих прямых – ось z . То же верно для 4 других вертикальных плоскостей. Тем самым конечность числа прямых, на которых выполняются уравнения (6.2), установлена. Попутно подсчитано, что этих прямых не более 31: 5 в горизонтальной плоскости и 26 – в вертикальных (поскольку ось z входит в каждую из них).

Список литературы

1. Шноль Э.Э., Николаев Е.В. О бифуркациях симметричных положений равновесия, отвечающих двукратным собственным значениям // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 9. С. 127–150.
2. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Динамические системы. Т. 5. М.: ВИНТИ, 1986. С. 5–218.
3. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
4. Swift J., Barany E. Chaos in the Hopf bifurcation with tetrahedral symmetry: convection in a rotating fluid low Prandtl number // European J. Mech. B Fluids. 1991. V. 10. № 2, suppl. P. 99–104.
5. Guckenheimer J., Worfolk P. Instant chaos // Nonlinearity. 1992. V. 5. P. 1211–1222.
6. Golubitsky M., Stewart I., Schaeffer D. Singularities and groups in bifurcation theory. V. II. New York: Springer-Verlag, 1988.

7. *Шафаревич И. Р.* Основные понятия алгебры // Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1986.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
9. *Ruelle D.* Bifurcations in the presence of a symmetry group // Arch. Rational Mech. Anal. 1973. V. 51. P. 136–152.
10. *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1988.
11. *Guckenheimer J., Holmes Ph.* Structurally stable heteroclinic cycles // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1988. V. 103. P. 189–192.
12. *Solomon L.* Invariants of finite reflection groups // Nagoya Math. J. 1963. V. 22. P. 57–64.
13. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. IV–VI. М.: Мир, 1972.

Институт математических проблем биологии РАН, Пущино

Поступила в редакцию
10.08.1999