Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Воловиков, Об индексе G -пространств, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 9, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm504>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 17:55:51

УДК 515.142.226

А. Ю. Воловиков

Об индексе G -пространств

С каждым G -пространством, где G – компактная группа Ли, связан идеал кольца когомологий универсального классифицирующего пространства группы G , называемый идеалозначным индексом G -пространства.

Рассматривается фильтрация на идеалозначном индексе, естественным образом возникающая из спектральной последовательности Лере. Исследуются свойства индекса с фильтрацией, вводятся числовые индексы, удобные для получения оценок G -категории и изучения множества критических точек G -инвариантного функционала на многообразии.

Доказывается обобщение теоремы Буржена–Янга для индекса с фильтрацией. Этот результат используется при нахождении оценки индекса множества частичных склеек для отображений пространства с действием p -тора в евклидово пространство.

Библиография: 29 названий.

Введение

По-видимому, впервые (ко)гомологический индекс в явном виде появился в работе Янга [1] для пространств со свободным действием группы $\mathbb{Z}_2$. Этот индекс, тесно связанный с такими понятиями, как род, категория и когомологическая длина, нашел многочисленные применения в различных областях математики.

Для свободных действий произвольных конечных групп гомотопические и геометрические индексы были введены Шварцем [2], [3], Коннером и Флойдом [4].

В дальнейшем, особенно в вопросах, связанных с нелинейными дифференциальными уравнениями, бифуркациями, критическими точками G -инвариантных функционалов на многообразиях и др., понадобилось рассматривать пространства с (не обязательно свободным) действием компактной группы Ли. Определению индексов таких G -пространств и их применениям были посвящены многочисленные исследования, см., например, работу [5] и ссылки в ней.

До появления статьи Фаделла и Хуссейни [6] рассматриваются только числовые индексы: каждому G -пространству сопоставляется натуральное число (или ∞) – его индекс, причем так, что индекс прообраза не превосходит индекс образа при G -отображении. Это свойство индекса удобно использовать для доказательства того, что между конкретными G -пространствами не существует G -отображения.

Результаты о несуществовании G -отображений часто приводят к важным следствиям.

Например, классическая теорема Борсука–Улама, утверждающая, что любое непрерывное отображение n -мерной сферы в n -мерное евклидово пространство

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00174) и фонда INTAS (грант № 96-0712).

склеивает некоторую пару антиподальных точек на сфере, эквивалентно утверждению, что не существует $\mathbb{Z}_2$ -отображения $S^n \rightarrow S^{n-1}$, где группа $\mathbb{Z}_2$ действует на сферах антиподальной инволюцией.

Таким образом, в данном случае факт несуществования эквивариантного отображения наоборот приводит к классической теореме существования.

С другой стороны, результаты подобного типа могут быть интересными сами по себе. Например, для того чтобы установить, что одно пространство не может быть вложено в другое, достаточно показать, что не существует эквивариантного отображения между их взрезанными квадратами, на которых действует естественная свободная инволюция, или более общим образом рассмотреть другие конфигурационные пространства, связанные с заданными пространствами, на которых действуют подходящие группы. Результатом такого типа является, например, известная теорема ван Кампена–Флореса, утверждающая, что k -мерный остов $(2k + 2)$ -мерного симплекса нельзя вложить в $\mathbb{R}^{2k}$.

Числовым индексом удобно пользоваться в случае действия групп, имеющих достаточно простое кольцо когомологий (типа алгебры многочленов от одной образующей). К таким группам, например, можно отнести циклическую группу простого порядка, окружность и группу кватернионов, по модулю равных единице. Для более сложных групп, например таких, как торы или p -торы, числовых инвариантов явно недостаточно. В связи с этим в работе [6] Фаделл и Хуссейни ввели так называемый “идеалозначный” индекс – с каждым G -пространством X связывается идеал $\text{Ind}^G X$ кольца когомологий $\Lambda^* = H^*(B_G)$, где когомологии рассматриваются с коэффициентами в некотором поле $\mathbb{k}$ и B_G – классифицирующее пространство группы G .

Идеал $\text{Ind}^G X$ определяется как ядро гомоморфизма эквивариантных когомологий, индуцированного отображением пространства X в точку. Легко показать, см. [6], что если имеется G -отображение из X в Y , то $\text{Ind}^G Y \subset \text{Ind}^G X$. Это позволяет во многих интересных случаях ответить на вопрос, существует G -отображение из X в Y или нет. С другой стороны, на идеалозначный индекс, по-видимому, нужно смотреть лишь как на первое препятствие к существованию эквивариантного отображения (возможным подтверждением сказанного служит то, что идеалозначный индекс когомологической сферы есть главный идеал, порожденный ее эквивариантным эйлеровым классом).

В настоящей работе мы рассматриваем возрастающую фильтрацию на индексе $\text{Ind}^G X$, естественным образом возникающую из спектральной последовательности Лере, и приводим применения, которые не могут быть получены только лишь с использованием индекса Ind^G . В частности, в § 4 мы приводим уточнение обобщения теоремы Буржена–Янга, полученного в [6].

Числовые индексы, возникающие при нашем подходе, можно использовать практически так же, как индекс Янга [1] для группы $\mathbb{Z}_2$. В частности, имеют место результаты о частичных склейках орбит для пространств с действием p -тора, которые вполне аналогичны результатам для действия группы простого порядка, полученным в [7]. Эти утверждения приводятся в § 5. Там же они применяются для получения вариантов теоремы ван Кампена–Флореса и цветной теоремы Тверберга.

В последнем параграфе изучается индекс множества критических точек G -инвариантного функционала и даются оценки G -категории.

§ 1. Фильтрация индекса

Мы будем предполагать, что все пространства хаусдорфовы и наследственно паракомпактны, а отображения непрерывны.

Когомологии, используемые далее, – это когомологии Чеха с коэффициентами в поле $\mathbb{k}$, которое исключается из обозначений. Кроме того, для p -тора, т.е. элементарной абелевой p -группы $G = \mathbb{Z}_p^n = \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$, где p – простое число, мы всегда будем считать, что $\mathbb{k} = \mathbb{Z}_p$ – поле из p элементов, а для связной группы Ли – что $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$.

Для G -пространства X положим $H_G^*(X) = H^*(E_G \times_G X)$ (конструкция Бореля эквивариантных когомологий, см. [8; гл. 3]), где $E_G \rightarrow B_G$ – универсальное главное G -расслоение. Будем обозначать $H_G^*(\text{pt}) = H^*(B_G)$ через Λ^* , где pt – одноточечное пространство.

Отображение $X \rightarrow \text{pt}$ индуцирует гомоморфизм $\Lambda^* \rightarrow H_G^*(X)$, ядро которого Фаделл и Хуссейни обозначают через $\text{Ind}^G X$ и называют “идеалозначным” индексом G -пространства X , см. [6].

Из рассмотрения спектральной последовательности Лере расслоения $X_G \rightarrow B_G$ со слоем X вытекает, что гомоморфизм $\Lambda^* \rightarrow H_G^*(X)$ разлагается в композицию

$$\Lambda^* \rightarrow E_2^{*,0} \rightarrow \cdots \rightarrow E_r^{*,0} \rightarrow \cdots \rightarrow E_\infty^{*,0} \subset H_G^*(X)$$

и, следовательно, $\text{Ind}^G X$ совпадает с ядром гомоморфизма $\Lambda^* \rightarrow E_\infty^{*,0}$. Будем обозначать $\text{Ind}^G X$ также через $_\infty \text{Ind}^G X$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Определим идеал ${}_r \text{Ind}^G X$ в Λ^* как ядро гомоморфизма $H^*(B_G) \rightarrow E_{r+1}^{*,0}$.

Из определения 1.1 следует, что

$${}_1 \text{Ind}^G X \subset {}_2 \text{Ind}^G X \subset \cdots \subset {}_k \text{Ind}^G X \subset {}_{k+1} \text{Ind}^G X \subset \cdots$$

и объединение этих идеалов совпадает с $\text{Ind}^G X = {}_\infty \text{Ind}^G X$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В случае, когда X связно, $E_{r+1}^{*,0} = H^*(B_G)/{}_r \text{Ind}^G X$.

Определим теперь соответствующие числовые индексы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $0 \neq \alpha \in \text{Ind}^G X$. Определим $i_X(\alpha)$ как наименьшее r , для которого $\alpha \in {}_r \text{Ind}^G X$.

Минимум чисел $i_X(\alpha)$ по всем $0 \neq \alpha \in \text{Ind}^G X$ обозначим через $i(X)$, а минимум по всем тем $\alpha \in \text{Ind}^G X$, которые не являются делителями нуля в $\Lambda^* = H^*(B_G)$, обозначим через $i'(X)$. В случае, когда необходимо явно указать действующую группу, будем обозначать индексы $i(X)$ и $i'(X)$ через $i_G(X)$ и $i'_G(X)$ соответственно.

Очевидно, что $i(X) \leq i'(X)$.

Если $\text{Ind}^G X = 0$, то положим $i(X) = \infty$. Так, для пространств, имеющих непустое множество неподвижных точек, индекс $i(X)$ бесконечен. Аналогично, полагаем $i_X(\alpha) = \infty$, если класс $\alpha \in \Lambda^*$ не принадлежит $\text{Ind}^G X$.

Отметим, что если $0 \neq \alpha \in \text{Ind}^G X$, то в спектральной последовательности Лере расслоения $X_G \rightarrow B_G$ образ элемента $\alpha \in H^*(B_G) = \Lambda^* \subset E_2^{*,0}$ убивается некоторым дифференциалом. Номер этого дифференциала и есть $i_X(\alpha)$, а индекс $i(X)$ равен номеру первого ненулевого дифференциала, бьющего в нулевую строку.

Можно определить фильтрацию для индекса и в категории “расслоений” (объекты – G -отображения G -пространств, морфизмы – соответствующие коммутативные квадраты G -отображений).

Пусть $X \rightarrow Y$ – G -отображение G -пространств. Тогда оно индуцирует гомоморфизм $H_G^*(Y) \rightarrow H_G^*(X)$ эквивариантных когомологий, ядро которого обозначается через $\text{Ind}_Y^G X$, см. [6]. Это ядро можно снабдить возрастающей фильтрацией, которая возникает из спектральной последовательности Лере отображения $X_G \rightarrow Y_G$. В случае $Y = \text{pt}$ имеем $\text{Ind}_{\text{pt}}^G X = \text{Ind}^G X$.

Таким образом, как и выше, имеем

$$\begin{aligned} {}_1 \text{Ind}_Y^G X &\subset {}_2 \text{Ind}_Y^G X \subset \dots \subset {}_k \text{Ind}_Y^G X \\ &\subset {}_{k+1} \text{Ind}_Y^G X \subset \dots \subset {}_\infty \text{Ind}_Y^G X = \text{Ind}_Y^G X. \end{aligned}$$

§ 2. Свойства индекса

Следующее предложение вытекает непосредственно из определений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $X \rightarrow Y$ – эквивариантное отображение G -пространств, тогда

- 1) ${}_k \text{Ind}^G Y \subset {}_k \text{Ind}^G X$, в частности $\text{Ind}^G Y \subset \text{Ind}^G X$;
- 2) $\text{in } X \leq \text{in } Y$, $i(X) \leq i(Y)$ и $i'(X) \leq i'(Y)$;
- 3) $i_X(\alpha) \leq i_Y(\alpha)$ для любого $0 \neq \alpha \in \text{Ind}^G X$.

Числовой индекс $\text{in } X$ определен в [9], он равен наибольшему натуральному d такому, что $\Lambda^j \rightarrow H_G^j(X)$ – мономорфизм для любого $j \leq d$ и $\Lambda^d \neq 0$.

В случае, когда X – свободное $\mathbb{Z}_2$ -пространство, индекс $\text{in } X$ совпадает с гомологическим индексом Янга [1].

Числовые индексы связаны между собой неравенствами

$$\text{in } X \geq i(X) - 1, \quad i'(X) \geq i(X).$$

Кроме того, можно показать, используя лемму 1 из [10], что в случае действия группы $G = \mathbb{Z}_2$ справедливо соотношение $\text{in } X = i(X) - 1$, а для окружности ($G = S^1$) имеет место равенство $\text{in } X = i(X) - 2$. Аналогичное утверждение справедливо и для группы $G = S^3$, а именно: в спектральной последовательности расслоения $X_G \rightarrow B_G$ при любом $r \geq 2$ модуль $E_r^{*,*}$ порождается над Λ^* множеством $E_r^{0,*}$. Поскольку $\Lambda^* = H^*(B_G) = \mathbb{Q}[t]$, где t имеет степень 4, получаем, что $\text{in } X = i(X) - 4$. Наконец, во всех трех указанных случаях $i(X) = i'(X)$.

В случае действия группы $G = \mathbb{Z}_p$ простого порядка $p > 2$ модуль $E_r^{*,*}$ порождается над Λ^* объединением подмножеств $E_r^{0,*}$ и $E_r^{1,*}$ (см. [10; лемма 1]), поэтому $i(X) - 1 \leq \text{in } X \leq i(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Предположим, что X представляется в виде объединения двух замкнутых (или двух открытых) инвариантных подпространств $X = A \cup B$. Тогда

- 1) $({}_k \text{Ind}^G A) \cdot ({}_m \text{Ind}^G B) \subset {}_{k+m} \text{Ind}^G X$,
- 2) $i'(X) \leq i'(A) + i'(B)$,
- 3) $i(X) \leq i(A) + i'(B)$,
- 4) $i(X) \leq i'(A) + i(B)$,

5) $i_X(\alpha\beta) \leq i_A(\alpha) + i_B(\beta)$, где $\alpha \in \text{Ind}^G A$, $\beta \in \text{Ind}^G B$ и $\alpha\beta \neq 0$.

Первые четыре утверждения вытекают из последнего утверждения, следующего непосредственно из леммы 2.7, доказываемой в конце § 2.

Приведем теперь несколько следствий, касающихся действия на джойнах.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть X и Y — G -пространства, тогда

- 1) $({}_k \text{Ind}^G X) \cdot ({}_m \text{Ind}^G Y) \subset {}_{k+m} \text{Ind}^G (X * Y)$,
- 2) $i'(X * Y) \leq i'(X) + i'(Y)$,
- 3) $i(X * Y) \leq i(X) + i'(Y)$,
- 4) $i(X * Y) \leq i'(X) + i(Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. X и Y естественным образом вложены в $X * Y$. Применяя предложение 2.2 к $A = X * Y \setminus X$ и $B = X * Y \setminus Y$ и учитывая, что эти подпространства эквивариантно стягиваются на Y и X соответственно, получаем требуемое.

Рассмотрим теперь частный случай, когда в качестве Y выступает k -мерная когомологическая сфера S с сохраняющим ориентацию G -действием без неподвижных точек, т.е. такое пространство, что $H^*(S) = H^*(S^k)$, где S^k — стандартная k -мерная сфера, и G тривиально действует на $H^k(S)$. В этом случае $\text{Ind}^G S = (e)$, где e — эквивариантный класс Эйлера сферы S , т.е. эйлеров класс расслоения $S_G \rightarrow B_G$.

Обозначим через m_X наименьшее натуральное $d > \text{in } X$ такое, что $\Lambda^d \neq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть S является k -мерной когомологической сферой такой, что ее эквивариантный эйлеров класс не является делителем нуля в Λ^* . Тогда

$$\begin{aligned} \text{in}(X * S) &< m_X + k + 1, \\ i(X * S) &\leq i(X) + k + 1, \\ i'(X * S) &\leq i'(X) + k + 1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сделанных предположений следует, что $i'(S) = k + 1$, поэтому второе и третье неравенства вытекают из следствия 2.3.

Докажем первое неравенство. Из определения числа m_X следует, что найдется класс $0 \neq \alpha \in \text{Ind}^G X$ с $\deg \alpha = m_X$. Пусть e — эквивариантный эйлеров класс когомологической сферы S . Тогда $\alpha e \neq 0$ и $\alpha e \in \text{Ind}^G X * S$, следовательно, $\text{in}(X * S) < \deg \alpha e = m_X + k + 1$ (более того, $\text{in}(X * S)$ не превосходит наибольшего из натуральных чисел d таких, что $d < m_X + k + 1$ и $\Lambda^d \neq 0$), что и требовалось доказать.

Следствие 2.4 применимо в случае действия без неподвижных точек p -тора на компактной или паракомпактной и конечномерной когомологической сфере, поскольку в силу теоремы локализации Бореля, см. [8], эквивариантный эйлеров класс такой сферы не является делителем нуля в Λ^* . Отметим также, что в этом случае $m_X = \text{in } X + 1$.

Таким образом, в случае действия $G = \mathbb{Z}_p^n$ мы получаем следующие утверждения.

А) Пусть S либо компактно, либо паракомпактно и имеет конечную когомологическую размерность над полем $\mathbb{Z}_p$. Предположим, что S является k -мерной когомологической сферой над $\mathbb{Z}_p$, т.е. $H^*(S) \cong H^*(S^k)$, и что $G = \mathbb{Z}_p^n$ действует на S без неподвижных точек. Тогда $\text{in } S = k$ и $i(S) = i'(S) = k + 1$.

В) Пусть S – когомологическая сфера из свойства А). Тогда $\text{in}(X * S) \leq \text{in } X + \text{in } S + 1$, т.е. $\text{in } X \geq \text{in}(X * S) - k - 1$, где $X * S$ – джойн пространств X и S с диагональным действием группы G . Аналогичные неравенства справедливы и для индексов i и i' , а именно $i(X * S) \leq i(X) + k + 1$ и $i'(X * S) \leq i'(X) + k + 1$. Отметим также, что k нечетно, если p нечетно (поскольку действие не имеет неподвижных точек). Этот факт хорошо известен в теории групп преобразований.

Аналогичные утверждения имеют место и в случае действия без неподвижных точек тора (k -мерная когомологическая сфера S либо компактна, либо является конечномерным паракомпактным пространством с конечным числом орбитных типов). Для действия тора имеем $m_X = \text{in } X + 2$. Неравенства для индексов i и i' такие же, как в случае действия p -тора, а для индекса in неравенство имеет вид $\text{in}(X * S) \leq \text{in } X + k + 2$. Кроме того, поскольку действие предполагается не имеющим неподвижных точек, k – нечетное число.

Непосредственно из определений вытекает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть X и Y – G -пространства.

Если $\tilde{H}^i(X) = 0$ при $i < N$, то $i(X) \geq N + 1$.

Если $H^i(Y) = 0$ при $i > N - 1$ и $i(Y) < \infty$, то $i(Y) \leq N$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Из утверждения 2) предложения 2.1 следует, что для пространств X и Y , удовлетворяющих условиям предложения 2.5, не существует G -отображения из X в Y .

Предложение 2.2 вытекает из следующей леммы.

ЛЕММА 2.7. Пусть $E = E_1 \cup E_2$, где E_1, E_2 либо оба замкнуты, либо оба открыты, и $\pi: E \rightarrow B$ – произвольное непрерывное отображение. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in H^*(B)$ таковы, что α_i убывает дифференциалом dr_i в спектральной последовательности Лере отображения $\pi|_{E_i}: E_i \rightarrow B$, $i = 1, 2$. Тогда $\alpha_1 \alpha_2$ убывает дифференциалом dr с $r \leq r_1 + r_2$ в спектральной последовательности Лере отображения $E \rightarrow B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда оба подпространства E_1, E_2 открыты. Это следует из непрерывности когомологий и того факта, что в спектральных последовательностях можно переходить к прямому пределу.

Из построения (которое мы напомним ниже) спектральной последовательности Лере (см. [11], [12]) следует, что когомологии $H^*(E)$ являются когомологиями комплекса C^* с убывающей фильтрацией $F_p C^* \supset F_{p+1} C^*$. Аналогично $H^*(E_i) = H^*({}_i C^*)$, $i = 1, 2$, где ${}_i C^*$ имеет фильтрацию $F_p({}_i C^*)$. Гомоморфизм $H^*(E) \rightarrow H^*(E_i)$ индуцирован гомоморфизмом $C^* \rightarrow {}_i C^*$, согласованным с фильтрациями, т.е. образ $F_p C^*$ при этом гомоморфизме содержится в $F_p({}_i C^*)$. Более того, $C^* \rightarrow {}_i C^*$, а также $F_p C^* \rightarrow F_p({}_i C^*)$ являются эпиморфизмами.

Класс когомологий $\pi^* \alpha_i$ в $H^*(E)$ как класс, пришедший с базы, можно представить коциклом $c_i \in C^{p_i}$, $i = 1, 2$, где $c_i \in F_{p_i} C^{p_i}$ и $p_i = \deg c_i$. Обозначим образ c_i в ${}_i C^{p_i}$ через c'_i . Тогда существует коцепь $a_i \in F_{p_i - r_i}({}_i C^{p_i - 1})$ такая, что

$c'_i = {}_i da_i$, где ${}_i d$ – дифференциал в комплексе ${}_i C^*$. Для a_i можно найти коцепь $b_i \in F_{p_i-r_i} C^{p_i-1}$, образом которой a_i является. Рассмотрим коцикл $c_i - db_i$. Из того, что образ этой коцепи в ${}_i C^*$ равен нулю, следует, что носитель коцепи $c_i - db_i$ содержится в $E \setminus E_i$. Поэтому произведение $(c_1 - db_1)(c_2 - db_2)$ имеет пустой носитель и, следовательно, равно нулю. Таким образом,

$$c_1 c_2 = c_1 db_2 + db_1 \cdot c_2 - db_1 \cdot db_2 = d(\pm c_1 b_2 + b_1 c_2 - b_1 db_2).$$

Коцепь $\pm c_1 b_2 + b_1 c_2 - b_1 db_2$ лежит по крайней мере в $F_{p_1+p_2-r_1-r_2} C^*$, откуда и следует требуемое утверждение.

Напомним теперь, как строится спектральная последовательность Лере (см. [11], [12]) отображения $\pi: E \rightarrow B$. Эта спектральная последовательность является спектральной последовательностью двойного комплекса

$$K^{**} = C^*(B; \pi \mathcal{C}^*(E; \mathbb{k})) := \Gamma_B \mathcal{C}^*(B; \pi \mathcal{C}^*(E; \mathbb{k})) = \mathcal{C}^*(B; \pi \mathcal{C}^*(E; \mathbb{k}))(B),$$

здесь $\mathbb{k}$ – постоянный пучок на E , $\pi \mathcal{C}^*(E; \mathbb{k})$ – прямой образ пучка $\mathcal{C}^*(E; \mathbb{k})$, $\mathcal{C}^*$ – каноническая резольвента, Γ_B – функтор сечения над B . Комплекс C^* , рассмотренный выше, определяется как $C^n = \sum_{p+q=n} K^{pq}$.

Аналогично, для отображения $\pi_i = \pi|_{E_i}$ имеем ${}_i C^n = \sum_{p+q=n} {}_i K^{pq}$, где ${}_i K^{**} = C^*(B; \pi_i \mathcal{C}^*(E_i; \mathbb{k}))$, $i = 1, 2$.

Для открытого $U \subset B$ имеем

$$\begin{aligned} \pi \mathcal{C}^*(E; \mathbb{k})(U) &= \mathcal{C}^*(E; \mathbb{k})(\pi^{-1}U) = C^*(\pi^{-1}U; \mathbb{k}), \\ \pi_i \mathcal{C}^*(E_i; \mathbb{k})(U) &= \mathcal{C}^*(E_i; \mathbb{k})(\pi_i^{-1}U) = C^*(E_i \cap \pi_i^{-1}U; \mathbb{k}) = C^*(E_i \cap \pi^{-1}U; \mathbb{k}). \end{aligned}$$

Из вялости канонической резольвенты следует, что

$$C^*(\pi^{-1}U; \mathbb{k}) \rightarrow C^*(E_i \cap \pi^{-1}U; \mathbb{k})$$

– эпиморфизм, поэтому эпиморфизмом является гомоморфизм пучков $\pi \mathcal{C}^*(E; \mathbb{k}) \rightarrow \pi_i \mathcal{C}^*(E_i; \mathbb{k})$. Из точности функтора $C^*(B; \cdot)$ следует, что $K^{**} \rightarrow {}_i K^{**}$ – эпиморфизм, $i = 1, 2$.

В заключение этого параграфа отметим свойство непрерывности индексов.

Пусть X – G -пространство и $A \subset X$ замкнуто и инвариантно. Тогда если $\alpha \in \text{Ind}^G A$, то найдется инвариантная окрестность $N \supset A$ такая, что $i_A(\alpha) = i_N(\alpha)$.

Это следует из непрерывности когомологий и того, что в спектральных последовательностях можно переходить к прямому пределу (в силу точности последнего).

Поскольку в качестве пространства коэффициентов мы берем поле и G – компактная группа Ли, Λ^j при каждом j является конечномерным векторным пространством. Поэтому существует окрестность $N \supset A$ такая, что

$${}_k \text{Ind}^{G,j} A = {}_k \text{Ind}^{G,j} N \quad \text{и} \quad i(A) = i(N), \quad i'(A) = i'(N), \quad \text{in } A = \text{in } N,$$

где ${}_k \text{Ind}^{G,j} A = \Lambda^j \cap {}_k \text{Ind}^G A$ и аналогичным образом определяется ${}_k \text{Ind}^{G,j} N$.

§ 3. Некоторые применения

В силу теоремы локализации Бореля, см. [8], если Y компактно или паракомпактно и конечномерно и $G = \mathbb{Z}_p^n$ действует на Y без неподвижных точек, то $i(Y) < \infty$. Аналогичное верно для компактного пространства с действием тора без неподвижных точек, а также для паракомпактного и конечномерного пространства с таким действием тора (без неподвижных точек), для которого число орбитных типов конечно.

Таким образом, из замечания 2.6 вытекает следующий результат, доказанный в [13].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Пусть G – p -тор (т.е. $G = \mathbb{Z}_p^n$) или тор. Пусть X и Y – G -пространства с действием без неподвижных точек, причем в случае действия тора Y имеет конечное число орбитных типов. Предположим, что $\tilde{H}^i(X) = 0$ при $i < N$ и что Y компактно или паракомпактно и конечномерно и $H^i(Y) = 0$ при $i > N - 1$, где когомологии берутся с коэффициентами из поля $\mathbb{Z}_p$ в случае p -тора и из поля $\mathbb{Q}$ в случае тора. Тогда не существует G -отображения из X в Y .*

Часто в качестве Y выступает n -мерная когомологическая сфера S с сохраняющим ориентацию G -действием без неподвижных точек. В этом случае, как отмечалось выше, $\text{Ind}^G S = (e)$, где e – эквивариантный класс Эйлера сферы S , т.е. эйлеров класс расслоения $S_G \rightarrow B_G$ со слоем S .

Пусть $h: X \rightarrow S$ эквивариантно, тогда $e \in \text{Ind}^G X$.

В этих предположениях нетрудно доказать справедливость следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Предположим, что $e \neq 0$ и e убивается трансгрессией в спектральной последовательности расслоения $X_G \rightarrow B_G$ (таким образом, $i_X(e) = i_S(e) = \deg e$). Тогда $h^* \neq 0$ в размерности $n = \deg e - 1$.*

Например, предложение 3.2 применимо в ситуации, когда $i(X) = \deg e$, поскольку из существования G -отображения $h: X \rightarrow S$ вытекает, что $i(X) \leq i_X(e) \leq i_S(e) = \deg e$ и, следовательно, $i_X(e) = \deg e$. Таким образом, выполнены все условия предложения 3.2, поэтому $0 \neq h^*: H^n(S) \rightarrow H^n(X)$, где $n = \deg e - 1$. В частности, предложение 3.2 применимо для такого X , что $\tilde{H}^j(X) = 0$ при $j < n = \deg e - 1$ (действительно, из предложения 2.5 следует, что $i(X) \geq n + 1 = \deg e$). Последний факт является обобщением теоремы 1.6 из [14]. Отметим также, что в частном случае действия группы $G = \mathbb{Z}_p^n$ предложение 3.2 применялось в доказательстве гипотезы Кнастера для $\mathbb{Z}_p^n$ -симметричного множества точек на сфере и отображений в двумерную плоскость, см. доказательство теоремы 8 в [9] (а также доказательство теоремы 2 в [15]).

Следующее утверждение может рассматриваться как обратное к предложению 3.2. Его частным случаем является теорема 3 работы [16].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Пусть $h: X \rightarrow S$ – эквивариантное отображение компактного G -пространства X в n -мерную когомологическую сферу S , на которой G действует без неподвижных точек. Предположим, как и выше, что эквивариантный эйлеров класс сферы S отличен от нуля и что*

- 1) $H^n(X) \cong \mathbb{k}$ и G тривиально действует на $H^n(X)$,

2) $H^i(X) = 0$ при $i > n$,

3) $h^* \neq 0$ в размерности n .

Тогда $i_X(e) = i_S(e) = \deg e = n + 1$ и $\text{Ind}^G X = \text{Ind}^G S = (e)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из сделанных предположений следует, что $i_X(e) \leq n + 1$. Пусть $e = d_{n+1}t$ в спектральной последовательности для S , где $t \in H^n(S) = \mathbb{k}$ — образующий. Положим $s = h^*t \in H^n(X) = \mathbb{k} = E_2^{0,n}$. Тогда s — цикл всех дифференциалов, кроме, может быть, дифференциала d_{n+1} .

Обозначим $i(X)$ через r_0 и предположим, что $i(X) < n + 1$. Без ограничения общности можно считать, что X связно, тогда в спектральной последовательности расслоения $X_G \rightarrow B_G$ со слоем X имеем $E_r^{*,0} = \Lambda^*$ при $2 \leq r \leq r_0$ и $E_2^{*,n} = E_r^{*,n}$ является модулем над Λ^* , изоморфным Λ^* при $r \leq r_0$. Кроме того, найдется элемент $0 \neq \alpha \in \text{Ind}^G X$ такой, что $i_X(\alpha) = r_0$ и, следовательно, $\alpha = d_{r_0}c$ для некоторого c .

Из соображений размерности следует, что $cs = 0$, поэтому $0 = d_{r_0}(cs) = \alpha s$. С другой стороны, s является образующим модуля $E_{r_0}^{*,n}$ над Λ^* , изоморфного Λ^* , поэтому $\alpha s \neq 0$. Полученное противоречие показывает, что первый ненулевой дифференциал, бьющий в нулевую строку (в спектральной последовательности для пространства X), есть дифференциал d_{n+1} , причем так как $s = h^*t$, имеем $d_{n+1}s = e$. Теперь из свойства мультипликативности спектральной последовательности легко вытекает, что $\text{Ind}^G X = \text{Ind}^G S = (e)$.

Отметим, что требование тривиальности действия G на $H^n(X)$ из условия 1) автоматически выполнено для связной группы, а также для p -тора, поскольку в этом случае мы берем в качестве пространства коэффициентов поле из p элементов.

Следующее утверждение непосредственно вытекает из предыдущего предложения и является обобщением основного результата работы [17].

СЛЕДСТВИЕ 3.4. Пусть $G = \mathbb{Z}_p^n$. Предположим, что существует G -отображение $f: M \rightarrow S$ связного замкнутого когомологического N -многообразия M (ориентируемого в случае $p > 2$) в N -мерную когомологическую сферу S над $\mathbb{Z}_p$, на которой G действует без неподвижных точек, такое, что $0 \neq f^*: H^N(S; \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^N(M; \mathbb{Z}_p)$. Тогда если существует G -отображение M в G -пространство K конечной когомологической размерности над полем $\mathbb{Z}_p$, то $0 \neq H^j(K; \mathbb{Z}_p)$ для некоторого $j \geq N$. В частности, $\dim_{\mathbb{Z}_p} K \geq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\text{Ind}_G S = (e)$, $\deg e = N + 1$ и $i_S(e) = N + 1$. Поскольку f эквивариантно, из предложения 3.3 следует, что $i_M(e) = N + 1$. Если бы $0 = H^j(K; \mathbb{Z}_p)$ для любого $j \geq N$, то $i(K) \leq N$ и мы получили бы противоречие с предположением о существовании G -отображения из M в K .

Пусть $q = p^n$, где p — простое нечетное число. Имеется свободное действие группы $G = \mathbb{Z}_p^n$ на $\text{SO}(q)$, см. [9].

Пусть заданы две непрерывные функции $f_1, f_2: \text{SO}(q) \rightarrow \mathbb{R}$. Положим

$$D(f_1, f_2) = \{x \in \text{SO}(q) : f_1(x) = f_1(gx) \quad \forall g \in G \text{ и } f_2(x) = f_2(gx) \\ \text{для всех } g \in G, \text{ кроме, возможно, одного элемента}\}.$$

Мы покажем, что это множество непусто. Случай $p = 3, n = 1$ изучен в [18], а случай $p \geq 3, n = 1$ — в [9].

ТЕОРЕМА 3.5. *Множество $D(f_1, f_2)$ непусто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $|G| = q$, на Y^q , где Y – произвольное пространство, имеется естественное действие группы G – действие на пространстве непрерывных отображений дискретной группы G в Y .

Пусть X – G -пространство. По заданному отображению $f: X \rightarrow Y$ можно определить G -отображение $\hat{f}: X \rightarrow Y^q$. Если точки пространства Y^q формально записывать в виде $\sum y_g g$, то $\hat{f}$ определяется формулой

$$\hat{f}(x) = \sum f(g^{-1}x)g.$$

(Приведенное построение G -отображения $\hat{f}$ по f годится для любой конечной группы G .)

Мы возьмем в качестве X и Y пространства $SO(q)$ и $\mathbb{R}^2$ соответственно, а в качестве f – отображение $f = (f_1, f_2): SO(q) \rightarrow \mathbb{R}^2$, заданное формулой $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, $x \in SO(q)$. Таким образом, получаем G -отображение $\hat{f}: SO(q) \rightarrow (\mathbb{R}^2)^q$.

Рассмотрим в $(\mathbb{R}^2)^q$ объединение $P = \Pi_1 \cup \dots \cup \Pi_q$ трехмерных плоскостей Π_i вида

$$\begin{cases} x_1 = \dots = x_q, \\ y_1 = \dots = y_{i-1} = \hat{y}_i = y_{i+1} = \dots = y_q \quad (\text{координата } y_i \text{ пропущена}), \end{cases}$$

где (x, y) – координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Заметим, что P инвариантно относительно G -действия, и поскольку диагональ $\Delta \subset (\mathbb{R}^2)^q$, состоящая из наборов вида $(v, \dots, v)$, $v \in \mathbb{R}^2$, содержится в P , группа G действует на $(\mathbb{R}^2)^q \setminus P$ без неподвижных точек.

Кроме того, $D(f_1, f_2) = \hat{f}^{-1}(P)$.

Нетрудно показать, что пространство $(\mathbb{R}^2)^q \setminus P$ эквивариантно гомотопически эквивалентно $(2q-3)$ -мерной сфере без конечного числа точек, т.е. букету $(2q-4)$ -мерных сфер; приведенные когомологии такого пространства равны нулю во всех размерностях, кроме $2q-4$, следовательно, $i((\mathbb{R}^2)^q \setminus P) = 2q-3$.

С другой стороны, из [9] следует, что $i(SO(q)) = 2q-2$. Поэтому из предложения 3.1 получаем, что не существует эквивариантного отображения из $SO(q)$ в $(\mathbb{R}^2)^q \setminus P$. Отсюда вытекает, что прообраз P при отображении $\hat{f}$ непуст, т.е. $D(f_1, f_2) \neq \emptyset$.

Из этой теоремы можно вывести следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.6. *Пусть R – $\mathbb{Z}_p^n$ -симметричное множество из q точек на сфере S^{q-1} и $f_1, f_2: S^{q-1} \rightarrow \mathbb{R}$ – две непрерывные функции. Тогда R вращением можно положить на поверхность уровня функции f_1 , причем так, что функция f_2 будет принимать одно и то же значение на всех точках полученного множества, кроме, быть может, одной.*

Определение $\mathbb{Z}_p^n$ -симметричного множества точек см. в [9].

§ 4. Обобщения теорем типа Буржена–Янга

Следующая теорема может рассматриваться как уточнение обобщения теоремы Буржена–Янга, полученного в [6].

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть X и E – G -пространства, $f: X \rightarrow E$ – эквивариантное отображение и $P \subset E$ – замкнутое инвариантное подпространство. Положим $A = f^{-1}P$. Тогда

$$({}_k \text{Ind}^G(E \setminus P)) \cdot ({}_m \text{Ind}^G A) \subset {}_{k+m} \text{Ind}^G X.$$

В частности, $i'(A) \geq i'(X) - i'(E \setminus P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $E \setminus P$ через B . Пусть $i_A(\alpha) = m$ и $i_B(\beta) = k$, где $\alpha \in {}_m \text{Ind}^G A$, $\beta \in {}_k \text{Ind}^G B$ и $\alpha\beta \neq 0$. Из непрерывности когомологий следует, что найдется открытая инвариантная окрестность U замкнутого множества A такая, что $i_U(\alpha) = m$. Поскольку $U \cup B = X$, из утверждения 5) предложения 2.2 вытекает, что $i_X(\alpha\beta) \leq m + k$. Это доказывает первое утверждение теоремы. Второе утверждение является прямым следствием первого.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть X и E – G -пространства, $f: X \rightarrow E$ – эквивариантное отображение, $P \subset E$ – замкнутое инвариантное подпространство. Предположим, что для некоторого $0 \neq \alpha \in \text{Ind}^G(E \setminus P)$ имеет место неравенство $i_X(\alpha) > i_{E \setminus P}(\alpha)$.

Тогда $f^{-1}P$ непусто.

В частности, $f^{-1}P \neq \emptyset$, если выполнено одно из неравенств:

- a) $i(X) > i(E \setminus P)$,
- b) $i'(X) > i'(E \setminus P)$,
- c) $\text{in } X > \text{in}(E \setminus P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда имеется G -отображение $X \rightarrow E \setminus P$. Воспользовавшись свойством 2) индексов из предложения 2.1, приходим к противоречию.

Теорема 3.5 и результаты § 5 являются конкретными приложениями следствия 4.2.

В связи с доказанным следствием упомянем еще один факт (см. [9; предложение 6]): если имеется класс $0 \neq \beta \in H_G^j(E)$ такой, что образ β в $H_G^j(E \setminus P)$ тривиален, но образ β в $H_G^j(E)$ при гомоморфизме $f_G^*: H_G^j(E) \rightarrow H_G^j(X)$, индуцированном отображением f , отличен от нуля, то $f^{-1}P$ непусто. Если при этом X является l -мерным когомологическим многообразием над $\mathbb{k}$, то $\dim_{\mathbb{k}} f^{-1}P \geq \max(\dim X^G, l - j)$, где X^G – множество неподвижных точек действия G на X и через $\dim_{\mathbb{k}}$ обозначается когомологическая размерность над полем $\mathbb{k}$. В частности, если X является l -мерным когомологическим многообразием над $\mathbb{k}$ и имеется такой класс $0 \neq \alpha \in \text{Ind}^G(E \setminus P)$, что $\alpha \notin \text{Ind}^G X$ (т.е. $i_X(\alpha) = \infty > i_{E \setminus P}(\alpha)$), то $\dim_{\mathbb{k}} f^{-1}P \geq l - \deg \alpha$.

Теорема 4.1 переносится также и в категорию расслоений, а именно рассмотрим следующую коммутативную диаграмму, в которой $P \subset E$ замкнуто:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & E \supset E \setminus P \\ \nu \downarrow & & \downarrow \mu \\ B' & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array} \quad .$$

Коммутативность диаграммы означает, что $\mu f x = \varphi \nu x$ для любого $x \in f^{-1}(E \setminus P)$.

Предположим далее, что все пространства являются G -пространствами, P инвариантно относительно G -действия и все отображения в диаграмме эквивариантны.

ТЕОРЕМА 4.3. *Положим $A = f^{-1}P$. Тогда*

$$(\varphi_G^*({}_k \text{Ind}_B^G(E \setminus P))) \cdot ({}_m \text{Ind}_{B'}^G A) \subset {}_{k+m} \text{Ind}_{B'}^G X.$$

В ситуации, когда $k, m = \infty$, этот результат использовался в [19] при обобщении теоремы Дольда–Накаока [20], [21].

§ 5. Частичные склейки

Пусть X — G -пространство, где G — конечная группа, и $f: X \rightarrow Y$ — отображение в пространство Y .

Определим подмножество $A(f)$ как множество точек, на орбитах которых f постоянно (можно сказать, что f склеивает орбиты точек из $A(f)$). Таким образом,

$$A(f) = \{x \in X : f(x) = f(gx) \forall g \in G\}.$$

Множество $A(f)$ замкнуто и инвариантно. Как было показано в начале доказательства теоремы 3.5, имеется G -отображение $\hat{f}: X \rightarrow Y^{|G|}$. При этом $A(f) = f^{-1}(\Delta)$, где Δ — диагональ в $Y^{|G|}$, совпадающая с множеством неподвижных точек действия G на $Y^{|G|}$.

В случае, когда X — свободное $\mathbb{Z}_2$ -пространство и Y — m -мерное евклидово пространство, оценка индекса множества полных склеек $A(f)$ отображения $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ дается теоремой Буржена–Янга [1], утверждающей, что $\text{in } A(f) \geq \text{in } X - m$.

Это неравенство прямо вытекает из теоремы 4.1, поскольку для свободного действия группы $\mathbb{Z}_2$ имеем $i'(X) = \text{in } X + 1$, $i'(A(f)) = \text{in } A(f) + 1$ и $i'((\mathbb{R}^m)^2 \setminus \Delta) = m$.

Классическая теорема Борсука–Улама является непосредственным следствием теоремы Буржена–Янга, поскольку для n -мерной сферы S^n со свободным $\mathbb{Z}_2$ -действием имеем $\text{in } S^n = n$.

Пусть подмножество $P \subset Y^{|G|}$ замкнуто и инвариантно и $P \subset \Delta$. При условии, что последнее включение является строгим, множество $\hat{f}^{-1}(P)$ естественно назвать множеством частичных склеек, поскольку f для некоторых точек из $\hat{f}^{-1}(P)$ склеивает только часть орбиты. С помощью теоремы 4.1 или следствия 4.2 можно попытаться установить, что множество $\hat{f}^{-1}(P)$ непусто. Однако для этого нужно знать не только индекс пространства X , но и индекс пространства $Y^{|G|} \setminus P$, найти который даже в простейших случаях достаточно сложно (если $Y = \mathbb{R}^m$ и P — объединение плоскостей, то $Y^{|G|} \setminus P$ — конфигурационное пространство). С другой стороны, нужна лишь хорошая оценка сверху этого индекса. Согласно предложению 2.5 оценку сверху можно найти, зная размерность, начиная с которой все группы когомологий пространства $Y^{|G|} \setminus P$ равны нулю.

Основываясь на этих соображениях, мы рассмотрим один конкретный случай.

Далее в этом параграфе G — p -тор, т.е. $G = \mathbb{Z}_p^n$, p — простое число, и $q = p^n = |G|$.

Пусть X — G -пространство. Для $f: X \rightarrow Y$ и $2 \leq k \leq q$ положим

$$A(f, k) = \{x \in X : \text{существуют } k \text{ различных элементов } g_1, \dots, g_k \in G \text{ таких,} \\ \text{что } f(g_1 x) = \dots = f(g_k x)\}.$$

Заметим, что $A(f, q) \subset A(f, q-1) \subset \dots \subset A(f, 2)$ и $A(f, q)$ совпадает с $A(f)$.

Пусть k фиксировано, $2 \leq k \leq q$. Определим замкнутое подмножество $P_k \subset Y^q$ как множество точек $(y_1, \dots, y_q) \in Y^q$ таких, что $y_{i_1} = \dots = y_{i_k}$ для некоторых $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq q$.

Заметим, что P_k инвариантно относительно G -действия на Y^q и $A(f, k) = \hat{f}^{-1}(P_k)$, где G -отображение $\hat{f}: X \rightarrow Y^q$ определено в начале доказательства теоремы 3.5.

Как уже отмечалось выше, нахождение точного значения индекса $i(Y^q \setminus P_k)$, по-видимому, является достаточно сложной задачей. Поэтому далее мы оценим сверху этот индекс в случае $Y = \mathbb{R}^m$ с помощью результата Коэна–Ласка [7].

Итак, пусть $Y = \mathbb{R}^m$.

Точку в $(\mathbb{R}^m)^q$ будем задавать q -набором $(v_1, \dots, v_q)$, где $v_j \in \mathbb{R}^m$. Тогда P_k — объединение всех плоскостей в $(\mathbb{R}^m)^q$ вида $v_{i_1} = \dots = v_{i_k}$, $i_1 < \dots < i_k$. Как и выше, отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ определяет эквивариантное отображение $\hat{f}: X \rightarrow (\mathbb{R}^m)^q$ и $A(f, k) = \hat{f}^{-1}(P_k)$.

В [7] показано, что если $k \geq (q+1)/2$ или $k = 2$, то

$$H^j((\mathbb{R}^m)^q \setminus P_k) = 0 \quad \text{при } j > (m-1)(q-1) + k - 2.$$

Поскольку G действует на $(\mathbb{R}^m)^q \setminus P_k$ без неподвижных точек, из предложения 2.5 следует, что

$$i'((\mathbb{R}^m)^q \setminus P_k) < (m-1)(q-1) + k.$$

Отсюда и из следствия 4.2 вытекает

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение G -пространства X в $\mathbb{R}^m$. Предположим, что $i(X) \geq (m-1)(q-1) + k$ и $k \geq (q+1)/2$ или $k = 2$. Тогда $A(f, k) \neq \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Эта теорема остается справедливой, если заменить индекс $i(X)$ на $i'(X)$. Более того, в этом случае из теоремы 4.1 получаем, что $i'(A(f, k)) \geq i'(X) - (m-1)(q-1) - k + 1$.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$. Если $\tilde{H}^i(X) = 0$ при $i < (m-1) \times (q-1) + k - 1$ и $k \geq (q+1)/2$ или $k = 2$, то $A(f, k) \neq \emptyset$.

Это следствие можно получить прямым объединением результатов Клэпп–Пуппе [13] (см. следствие 3.1 выше) и Коэна–Ласка [7]. Однако требование ацикличности слишком ограничительно, и в некоторых случаях приходится пользоваться именно теоремой 5.1. В качестве примера мы рассмотрим случай отображения в евклидово пространство симплициального взрезанного произведения джойна остовов симплексов, представляющий интерес в связи с теоремами типа ван Кампена–Флореса и Тверберга.

Обозначим через Δ^N симплекс размерности N и через Δ_s^N его s -мерный остов.

Следуя [22], [23], назовем набор из q подмножеств некоторого множества j -дизъюнктным, где $2 \leq j \leq q$, если пересечение любых j подмножеств из этого q -набора пусто.

Пусть K – симплициальный комплекс и $2 \leq j \leq q$. Определим $P_j^q(K) \subset K^q$ как объединение таких произведений $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_q$ симплексов из K , что q -набор симплексов $\sigma_1, \dots, \sigma_q \subset K$ является j -дизъюнктным.

Симметрическая группа Σ_q действует на K^q и на его подпространстве $P_j^q(K)$ перестановками координат. Поскольку $|G| = q$, можно вложить G в Σ_q (для этого упорядочим элементы G и рассмотрим G как G -множество, тогда каждый элемент определит подстановку).

Обозначим через $J^q(X)$ джойн q экземпляров пространства X . Его можно реализовать как факторпространство $X^q \times \Delta^{q-1} / \sim$ по отношению эквивалентности:

$$(x_1, \dots, x_q, t_1, \dots, t_q) \sim (x'_1, \dots, x'_q, t'_1, \dots, t'_q),$$

если $t_i = t'_i$ при всех i и $x_i = x'_i$ для тех i , для которых $0 \neq t_i = t'_i$ (здесь $x_i, x'_i \in X$ и точки симплекса Δ^{q-1} представляются векторами $(t_1, \dots, t_q) \in \mathbb{R}^q$ с $t_i \geq 0$ и $\sum t_i = 1$). Образ точки (z, θ) , где $z = (x_1, \dots, x_q) \in X^q$ и $\theta = (t_1, \dots, t_q) \in \Delta^{q-1}$, в $J^q(X)$ обозначим через $[z, \theta]$.

Группа Σ_q действует на X^q , Δ^{q-1} и на $J^q(X)$ перестановками координат.

Для симплициального комплекса K при $2 \leq j \leq q$ можно определить два подпространства $\tilde{J}_j^q(K) \subset J_j^q(K)$ в $J^q(K)$, инвариантных относительно действия Σ_q . Подпространство $\tilde{J}_j^q(K) \subset J_j^q(K)$ определяется как объединение симплексов вида $\sigma_1 * \cdots * \sigma_q$, где $\sigma_1, \dots, \sigma_q \subset K$ – j -дизъюнктивный q -набор симплексов. Если считать, что джойн пространства с пустым множеством совпадает с самим пространством, и рассмотреть объединение симплексов указанного выше вида, но допуская наличие пустых симплексов в q -наборе, то получится пространство $J_j^q(K)$, содержащее $\tilde{J}_j^q(K)$. Таким образом, $J_j^q(K)$ получается из $\tilde{J}_j^q(K)$ добавлением некоторых “граничных” точек пространства $J^q(K)$ (граничная точка имеет вид $[z, \theta]$, где $\theta \in \partial\Delta^{q-1} = \Delta_{q-2}^{q-1}$).

Легко видеть, что G действует на $P_j^q(K)$ и на $J_j^q(K)$ без неподвижных точек. Если K – конечномерный комплекс, то оба пространства $P_j^q(K)$ и $J_j^q(K)$ являются конечномерными клеточными комплексами и, следовательно, их индексы $i(\cdot)$, $i'(\cdot)$ и $\text{in}(\cdot)$ конечны.

Чтобы можно было воспользоваться теоремой 5.1, нужно иметь нижние оценки индексов $i(\cdot)$ или $i'(\cdot)$.

В [24] была найдена нижняя оценка индекса $\text{in}(\cdot)$ этих пространств в случае, когда K – джойн комплексов вида Δ_{s-1}^N ; там показано, что если для некоторых натуральных k_i при $i = 1, \dots, l$ выполнены неравенства $(k_i + 1)(q - 1) + qs_i \geq (N_i + 1)(j - 1)$ и $K = \Delta_{s_1-1}^{N_1} * \cdots * \Delta_{s_l-1}^{N_l}$, то

$$\text{in } J_j^q(K) \geq (N_1 + \cdots + N_l + l)(j - 1) - (k_1 + \cdots + k_l + l)(q - 1) - 1,$$

$$\text{in } P_j^q(K) \geq (N_1 + \cdots + N_l + l)(j - 1) - (k_1 + \cdots + k_l + l + 1)(q - 1) - 1.$$

Для индексов $i(\cdot)$ и $i'(\cdot)$ аналогичная оценка получается тем же методом с использованием предложения 2.1 и свойств индексов A , B из §2. Оказывается, что правые части неравенств больше на единицу. Таким образом, имеет место следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть для некоторых натуральных k_i при $i = 1, \dots, l$ выполнены неравенства $(k_i + 1)(q - 1) + qs_i \geq (N_i + 1)(j - 1)$. Положим $K = \Delta_{s_1-1}^{N_1} * \dots * \Delta_{s_l-1}^{N_l}$. Тогда

$$i(J_j^q(K)) \geq (N_1 + \dots + N_l + l)(j - 1) - (k_1 + \dots + k_l + l)(q - 1),$$

$$i(P_j^q(K)) \geq (N_1 + \dots + N_l + l)(j - 1) - (k_1 + \dots + k_l + l + 1)(q - 1).$$

Это предложение дает и нижнюю оценку для индекса $i'(\cdot)$, поскольку $i'(\cdot) \geq i(\cdot)$.

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть для некоторых натуральных k_i при $i = 1, \dots, l$ выполнены неравенства $(k_i + 1)(q - 1) + qs_i \geq (N_i + 1)(j - 1)$. Предположим, что задано непрерывное отображение $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $K = \Delta_{s_1-1}^{N_1} * \dots * \Delta_{s_l-1}^{N_l}$, и пусть $k \geq (q + 1)/2$.

Тогда если $(N_1 + \dots + N_l + l)(j - 1) \geq (k_1 + \dots + k_l + l + m)(q - 1) + k$, то найдется j -дизъюнктный k -набор симплексов $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ из K такой, что $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_k) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проекция произведения K^q на первый сомножитель определяет отображение $h: P_j^q(K) \rightarrow \mathbb{R}^m$. Утверждение теоремы эквивалентно тому, что множество $A(h, k)$ непусто. Последнее вытекает из предположенного в теореме неравенства, теоремы 5.1 и оценки индекса $i(P_j^q(K))$ из предложения 5.4.

В случае $k = q$ более общее утверждение (для отображений в многообразии) доказано в [24] с помощью оценки индекса $\text{in } P_j^q(K)$, приведенной перед предложением 5.4. Переформулировка этого утверждения при $j = 2$ (см. [25; теорема 1]), получающаяся, если взять $k_1 = \dots = k_l = 0$, может быть, в частности, интерпретирована как вариант цветной теоремы Тверберга, см. [25]. Случай $k < q$ рассмотрен в [26] для $l = 1$ и в [25] для произвольного l в ситуации, когда q — простое число, и тоже в качестве следствия приводит к варианту цветной теоремы Тверберга, см. [25].

Положим $k_1 = \dots = k_l = 0$ и заменим неравенства $(k_i + 1)(q - 1) + qs_i \geq (N_i + 1)(j - 1)$, $i = 1, \dots, l$, равенствами:

$$(N_i + 1)(j - 1) = q(s_i + 1) - \alpha_i - 1, \quad \text{где } \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

Поскольку $N_i \geq s_i - 1$, имеем

$$0 \leq \alpha_i \leq (q - j + 1)s_i + q - 1.$$

Кроме того, число $q(s_i + 1) - \alpha_i - 1$ должно делиться на $j - 1$.

Прямое вычисление показывает, что неравенство из теоремы 5.5 можно переписать в виде

$$q(s_1 + \dots + s_l) \geq \alpha_1 + \dots + \alpha_l + m(q - 1) + k.$$

Таким образом, из теоремы 5.5 получаем следующий результат, в котором $k \geq 2$ и через $\nu(k)$ обозначается наименьшее из всех натуральных чисел, не меньших чем k и являющихся степенью простого числа (легко показать, не используя постулат Бертрана, что $\nu(k) \leq 2k - 2$, см. ниже).

СЛЕДСТВИЕ 5.6. Пусть $(N_i + 1)(j - 1) = \nu(k)(s_i + 1) - \alpha_i - 1$, где $0 \leq \alpha_i \leq (\nu(k) - j + 1)s_i + \nu(k) - 1$, и число $\nu(k)(s_i + 1) - \alpha_i - 1$ делится на $j - 1$, $i = 1, \dots, l$. Предположим, что задано непрерывное отображение $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $K = \Delta_{s_1-1}^{N_1} * \dots * \Delta_{s_l-1}^{N_l}$.

Тогда если $\nu(k)(s_1 + \dots + s_l) \geq \alpha_1 + \dots + \alpha_l + m(\nu(k) - 1) + k$, то найдется j -дизъюнктный k -набор симплексов $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ из K такой, что $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_k) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $k > (\nu(k) + 1)/2$. Действительно, это очевидно, если k — степень простого числа, поскольку тогда $k = \nu(k)$. В противном случае для некоторого d имеем $2^d < k < 2^{d+1}$ и из определения числа $\nu(k)$ следует, что $\nu(k) \leq 2^{d+1}$. Поэтому $(\nu(k) + 1)/2 \leq (2^{d+1} + 1)/2 = 2^d + \frac{1}{2} < k$. Теперь результат вытекает из теоремы 5.5.

Таковыми же как в [25] рассуждениями, используя следствие 5.6 при $j = 2$, получаем еще один вариант цветной теоремы Тверберга, в которой для подмножества $X \subset \mathbb{R}^m$ через $\text{conv } X$ обозначается его выпуклая оболочка и в случае, когда точки X покрашены в l цветов, через $\chi_i(X)$ обозначается число точек в X , покрашенных в i -й цвет.

СЛЕДСТВИЕ 5.7. Положим $N_i = \nu(k)(s_i + 1) - \alpha_i - 2$, где $0 \leq \alpha_i \leq (s_i + 1) \times (\nu(k) + 1)$, $i = 1, \dots, l$. Предположим, что в $\mathbb{R}^m$ задано конечное подмножество X , состоящее из $l + \sum_{i=1}^l N_i$ точек, покрашенных в l цветов, причем так, что ровно $N_i + 1$ точек покрашены в i -й цвет, $i = 1, \dots, l$.

Тогда если $\nu(k)(s_1 + \dots + s_l) \geq \alpha_1 + \dots + \alpha_l + m(\nu(k) - 1) + k$, то в X найдутся k подмножеств $M_1, \dots, M_k$ таких, что

- 1) $M_j \cap M_{j'} = \emptyset$ при $j \neq j'$,
- 2) $\chi_i(M_j) \leq s_i$ при всех $i = 1, \dots, l$ и $j = 1, \dots, k$,
- 3) $\text{conv } M_1 \cap \dots \cap \text{conv } M_k \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим по линейности непрерывное отображение $\Delta^{N_1} * \dots * \Delta^{N_l} \rightarrow \mathbb{R}^m$, при котором вершины симплекса Δ^{N_i} переходят в $N_i + 1$ точек i -го цвета, и обозначим через f его ограничение на $K = \Delta_{s_1-1}^{N_1} * \dots * \Delta_{s_l-1}^{N_l}$. Тогда из следствия 5.6 (при $j = 2$) получаем, что найдутся попарно непересекающиеся симплексы $\sigma_1, \dots, \sigma_k \subset K$ такие, что $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_k) \neq \emptyset$. Это означает, что $\text{conv } M_1 \cap \dots \cap \text{conv } M_k \neq \emptyset$, где M_j состоит из образов вершин симплекса σ_j , $j = 1, \dots, k$. Ясно также, что $M_j \cap M_{j'} = \emptyset$ при $j \neq j'$. Наконец, поскольку $\sigma_j \subset K$, в образе вершин симплекса σ_j при отображении f не более s_i вершин i -го цвета при каждом $i = 1, \dots, l$.

§ 6. Индекс множества критических точек G -инвариантного функционала

Свойства индексов из предложений 2.1 и 2.2 могут быть использованы при построении теории Люстерника–Шнирельмана для инвариантного функционала на многообразии с действием компактной группы Ли G .

Для краткости рассмотрим случай гладкого действия группы Ли G на гладком компактном конечномерном многообразии M . Пусть $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая G -инвариантная функция на M . Орбита критической точки целиком состоит из критических точек. Поэтому множество критических точек является G -пространством.

Классический минимаксный метод Люстерника–Шнирельмана оценки числа критических точек через категорию многообразия (см., например, [27]) можно перенести почти дословно в эквивариантную ситуацию, заменяя категорию на подходящий индекс [5], [13], [26], [28]. Сформулируем соответствующий результат для индекса i' , обладающего всеми необходимыми свойствами.

Обозначим через M_j семейство всех компактных G -инвариантных подмножеств $X \subset M$ таких, что $i'(X) \geq j$. Положим

$$\lambda_j = \inf_{X \in M_j} \sup_{x \in X} f(x).$$

ТЕОРЕМА 6.1. *Предположим, что $i'(M) < \infty$. Тогда на любой поверхности уровня $f^{-1}(\lambda_j)$ имеется хотя бы одна критическая орбита.*

Если $\lambda_j = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{j+k}$, то $i'(S \cap f^{-1}(\lambda_j)) \geq k+1$, где S – множество критических точек функции f .

При доказательстве используются свойство 2) из предложения 2.2 и непрерывность индекса: у всякого компактного G -инвариантного подмножества $X \subset M$ имеется компактная G -инвариантная окрестность N такая, что $i'(X) = i'(N)$ (см. конец §3).

В [6] идеалозначный индекс использовался для развития метода Люстерника–Шнирельмана: с каждым идеалом кольца Λ^* , содержащим $\text{Ind}^G M$, связывалось критическое значение функционала. Эти результаты допускают введение индекса фильтрации. Для краткости определим лишь соответствующие критические значения, снова ограничившись случаем компактного конечномерного многообразия.

Обозначим через $I_k(M)$ множество идеалов $\sigma \subset \Lambda^*$ таких, что ${}_k \text{Ind}^G M \subset \sigma$. Для $\sigma \in I_k(M)$ через $M_{\sigma,k}$ обозначим семейство всех компактных G -инвариантных подмножеств $X \subset M$ таких, что ${}_k \text{Ind}^G X \subset \sigma$.

Положим

$$\lambda_{\sigma,k} = \inf_{X \in M_{\sigma,k}} \sup_{x \in X} f(x).$$

Тогда поверхность уровня $\{f = \lambda_{\sigma,k}\}$ содержит хотя бы одну критическую орбиту.

Число критических орбит оценивается снизу через G -категорию многообразия, см., например, [13], [29]. В свою очередь, G -категорию можно оценить снизу через индекс. Пусть $X \subset M$ – замкнутое G -инвариантное подмножество в M (M не обязательно многообразие). Тогда $G\text{-cat}_M X$ – это наименьшее k такое, что X представляется в виде объединения k замкнутых инвариантных подмножеств $X_1, \dots, X_k$ и вложение $X_i \subset M$ при любом i эквивариантно гомотопно G -отображению пространства X_i в некоторую орбиту G/G_x , где $x \in M$ и G_x – стационарная подгруппа точки x . При $X = M$ будем обозначать $G\text{-cat}_X X$ просто через $G\text{-cat } X$. Отметим также, что каждое G -отображение X_i в соответствующую орбиту можно продолжить до G -отображения в эту же орбиту некоторой открытой инвариантной окрестности множества X_i в X (см., например, [13]).

Предположим, что $i'(M) < \infty$. Тогда $i'(G/G_x) < \infty$ для орбиты любой точки $x \in M$. Пусть $G\text{-cat}_M X = k$. Тогда согласно предложению 2.4 из [13] имеется G -отображение X в джойн k (не обязательно различных) орбит $X \rightarrow G/G_{x_1} * \dots * G/G_{x_k}$, где $x_1, \dots, x_k \in M$. Поэтому

$$i'(X) \leq i'(G/G_{x_1} * \dots * G/G_{x_k}) \leq i'(G/G_{x_1}) + \dots + i'(G/G_{x_k}) \leq k \cdot \max_{1 \leq i \leq k} i'(G/G_{x_i}).$$

Положим $d_M = \max_{x \in M} i'(G/G_x)$ и $d_X = \max_{x \in X} i'(G/G_x)$. Тогда $G\text{-cat}_M X \geq i'(X)/d_M$ и $G\text{-cat} X \geq i'(X)/d_X$. (Например, если G – тор, то условие $i'(M) < \infty$ эквивалентно отсутствию неподвижных точек действия и $i'(G/G_x) = 2$. Поэтому $G\text{-cat}_M X \geq i'(X)/2$.)

В частности, $i'(G/G_x) \leq \dim G/G_x + 1 \leq \dim G + 1$ для любой точки $x \in M$. Поэтому

$$G\text{-cat}_M X \geq \frac{i'(X)}{d(M)} \geq \frac{i'(X)}{\dim G + 1},$$

где $d(M) = \max_{x \in M} \dim G/G_x = \dim G - \min_{x \in M} \dim G_x$, а также $G\text{-cat} X \geq i'(X)/d(X)$, где $d(X) = \max_{x \in X} \dim G/G_x = \dim G - \min_{x \in X} \dim G_x$.

Наконец, отметим, что если при сделанных выше предположениях группа G конечна, то $\dim(G/G_{x_1} * \dots * G/G_{x_k}) = k - 1$. Поэтому $i'(G/G_{x_1} * \dots * G/G_{x_k}) \leq k$ и, следовательно, $G\text{-cat}_M X \geq i'(X)$.

Пусть H – замкнутая подгруппа в G . Поскольку каждое G -пространство X является также и H -пространством, определен индекс $i'_H(X)$ (отвечающий группе H и подходящим коэффициентам в когомологиях); G -отображение $X \rightarrow G/G_{x_1} * \dots * G/G_{x_k}$, где $x_1, \dots, x_k \in M$ и $k = G\text{-cat}_M X$, является также H -отображением, поэтому из свойств индекса вытекает неравенство

$$i'_H(X) \leq G\text{-cat}_M X \cdot \max_{1 \leq j \leq k} i'_H(G/G_{x_j}).$$

Если $i'_H(M) < \infty$, то $\max_{1 \leq j \leq k} i'_H(G/G_{x_j})$ – конечное число, не превосходящее $d_{M,H} = \max_{x \in M} i'_H(G/G_x)$. Поэтому $G\text{-cat}_M X \geq i'_H(X)/d_{M,H}$. Кроме того, $d_{M,H} \leq d(M) + 1$ (разумеется, это неравенство имеет место лишь при условии, что индексы всех орбит конечны). Таким образом, мы получили следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.2. *Предположим, что $i'_H(M) < \infty$. Тогда*

$$G\text{-cat}_M X \geq \frac{i'_H(X)}{d_{M,H}} \geq \frac{i'_H(X)}{d(M) + 1} \geq \frac{i'_H(X)}{\dim G + 1}.$$

Если в этой теореме взять $M = X$, то получаем, что при $i'_H(X) < \infty$ имеют место неравенства

$$G\text{-cat} X \geq \frac{i'_H(X)}{d_{X,H}} \geq \frac{i'_H(X)}{d(X) + 1} \geq \frac{i'_H(X)}{\dim G + 1},$$

где $d_{X,H} = \max_{x \in X} i'_H(G/G_x)$.

СЛЕДСТВИЕ 6.3. *Пусть $\tilde{H}^j(X; \mathbb{Z}_p) = 0$ при $j < N$, где p – некоторое простое число. Предположим, что в G имеется подгруппа H , являющаяся p -тором и действующая без неподвижных точек на M . Тогда*

$$G\text{-cat}_M X \geq \frac{N + 1}{d_{M,H}} \geq \frac{N + 1}{d(M) + 1} \geq \frac{N + 1}{\dim G + 1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2.5 следует, что $i'_H(X) \geq N + 1$, и результат вытекает из теоремы 6.2, поскольку из того, что p -тор H действует на любой орбите G -действия G/G_x без неподвижных точек, следует, что $i'_H(G/G_x) < \infty$ и $d_{M,H} < \infty$.

СЛЕДСТВИЕ 6.4. Пусть X – такое G -пространство, что $\tilde{H}^j(X; \mathbb{Z}_p) = 0$ при $j < N$, где p – некоторое простое число. Предположим, что в G имеется конечная подгруппа H , действующая свободно на X , порядок которой делится на простое число p . Тогда

$$G\text{-cat}_M X \geq \frac{N+1}{d(M)+1} \quad \text{и} \quad G\text{-cat } X \geq \frac{N+1}{d(X)+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В H имеется циклическая подгруппа простого порядка p (т.е. p -тор ранга 1), действующая свободно на M , поэтому применимо следствие 6.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.5. Оценки G -категории для ациклических (до некоторой размерности N) пространств получены в [13], [14], [29].

Автор благодарен Е. Г. Скляренко за многочисленные полезные обсуждения.

Работа над настоящей статьей была начата в сентябре 1997 года во время пребывания автора в Университете Glasgow Caledonian в группе нелинейных систем и хаоса отделения математики, сотрудникам которого автор приносит искреннюю благодарность за гостеприимство.

Список литературы

1. Yang C. T. On theorems of Borsuk–Ulam, Kakutani–Yamabe–Yujobo and Dyson. I // Ann. of Math. 1954. V. 60. № 2. P. 262–282.
2. Шварц А. С. Некоторые оценки рода топологического пространства в смысле Красносельского // УМН. 1957. Т. 12. № 4. С. 209–214.
3. Шварц А. С. Род расслоенного пространства // Труды ММО. 1962. Т. 11. С. 99–126.
4. Conner P. E., Floyd E. E. Fixed point free involutions and equivariant maps // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). 1960. V. 66. P. 416–441.
5. Fadell E., Husseini S. Relative cohomological index theories // Adv. Math. 1987. V. 64. P. 1–31.
6. Fadell E., Husseini S. An ideal-valued cohomological index theory with applications to Borsuk–Ulam and Bourgin–Yang theorems // Ergodic theory and dynamic systems. 1988. V. 8. Spec. Issue. P. 259–268.
7. Cohen F., Lusk E. L. Configuration-like spaces and the Borsuk–Ulam theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 56. P. 313–317.
8. Hsiang W. Y. Cohomology theory of topological transformation groups. Berlin: Springer-Verlag, 1975.
9. Воловиков А. Ю. Теорема типа Буржана–Янга для $\mathbb{Z}_p^n$ -действия // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 7. С. 115–144.
10. Chang T., Skjelbred T. Group actions on Poincaré duality spaces // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). 1972. V. 78. P. 1024–1026.
11. Bredon G. Sheaf theory. New York: McGraw-Hill, 1988.
12. Godement R. Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Paris: Hermann, 1958.
13. Clapp M., Puppe D. Critical point theory with symmetries // J. Reine Angew. Math. 1991. V. 418. P. 1–29.
14. Marzantowicz W. Borsuk–Ulam theorem for any compact Lie group // J. London Math. Soc. (2). 1994. V. 49. № 2. P. 195–208.

15. Воловиков А. Ю. Об отображениях многообразий Штифеля со свободным $\mathbb{Z}_p^n$ -действием в многообразия // УМН. 1992. Т. 47. №6. С. 27–56.
16. Звягин В. Г. Вычисление коиндекса эквивариантного фредгольмова отображения // Труды НИИ математики ВГУ. Воронеж. 1974. Т. 15. С. 36–43.
17. Dassach J. A. Nonexistence of equivariant degree one maps // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 101. №3. P. 530–532.
18. Макеев В. В. Задача Кнастера и почти сферические сечения // Матем. сб. 1989. Т. 180. №3. С. 424–431.
19. Воловиков А. Ю. О послойных G -отображениях // УМН. 1996. Т. 51. №3. С. 189–190.
20. Dold A. Parametrized Borsuk–Ulam theorems // Comment. Math. Helv. 1988. V. 63. P. 275–285.
21. Nakaoka M. Parametrized Borsuk–Ulam theorems and characteristic polynomials // Lecture Notes in Math. 1989. V. 1411. P. 155–170.
22. Sarkaria K. S. A generalized van Kampen–Flores theorem // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 111. №2. P. 559–565.
23. Sarkaria K. S. A generalized Kneser conjecture // J. Combin. Theory. Ser. B. 1990. V. 49. P. 236–240.
24. Воловиков А. Ю. К теореме ван Кампена–Флореса // Матем. заметки. 1996. Т. 59. №5. С. 663–670.
25. Богатый С. А. Цветная теорема Тверберга // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1999. №3. С. 14–19.
26. Богатый С. А. Геометрия отображений в евклидово пространство // УМН. 1998. Т. 53. №5. С. 27–56.
27. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы теории гомологий. М.: Наука, 1984.
28. Fadell E. The equivariant Ljusternik–Schnirelmann method for invariant functionals and relative cohomological index theories // Méthodes topologiques en analyse non linéaire. Sémin. Math. Super., Semin. Sci. OTAN (NATO Adv. Study Inst.), Montreal. 1985. V. 95. P. 41–70.
29. Marzantowicz W. A G -Lusternik–Schnirelman category of space with an action of a compact Lie group // Topology. 1989. V. 28. №4. P. 403–412.

Москва

Поступила в редакцию
21.10.1999