Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Р. Достанич, Спектральные свойства оператора типа потенциала Рисса и его произведения на проекцию Бергмана в ограниченной области, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 9, 23–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm505>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:11:54

УДК 517.98

М. Р. Достанич

Спектральные свойства оператора типа потенциала Рисса и его произведения на проекцию Бергмана в ограниченной области

В статье получена точная асимптотическая формула для сингулярных чисел произведения оператора типа потенциала Рисса и проекции Бергмана в ограниченной области. Показано, что сингулярные числа этого произведения определяют длину границы области. Ранее было известно, что спектр оператора типа потенциала Рисса определяет площадь области.

Библиография: 12 названий.

§ 1. Введение

Пусть Ω — связная область в $\mathbb{C}$. Обозначим через $L^2(\Omega)$ пространство комплекснозначных функций на Ω таких, что норма

$$\|f\| = \left(\int_{\Omega} |f(\xi)|^2 dA(\xi) \right)^{1/2}$$

конечна. Здесь dA определяет меру Лебега на Ω .

Оператор типа потенциала Рисса

$$A: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

определен как

$$Af(z) = c(\alpha) \int_{\Omega} \frac{f(\xi)}{|\xi - z|^{2-\alpha}} dA(\xi), \quad 0 < \alpha < 2,$$

где

$$c(\alpha) = \pi^{\alpha-1} \frac{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}$$

(Γ является гамма-функцией Эйлера). Известно, что оператор A вполне непрерывен на $L^2(\Omega)$, положителен и имеет тривиальное ядро [1]. Пусть $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \dots$ являются собственными числами оператора A , упорядоченными, с учетом их кратности, в виде невозрастающей последовательности. Г. Уидом показал в [2], что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{\alpha}{2}} \lambda_n(A) = \pi^{\frac{\alpha}{2}} |\Omega|^{\frac{\alpha}{2}},$$

где $|\Omega|$ есть площадь Ω . Таким образом, спектр оператора A определяет площадь Ω .

Для произвольного вполне непрерывного оператора K в гильбертовом пространстве обозначим через $s_n(K)$ последовательность собственных чисел оператора $(K^*K)^{1/2}$, упорядоченных по убыванию (включая их кратность). Числа $s_n(K)$ называются *сингулярными числами* оператора K . (Сингулярные числа оператора, действующего из одного гильбертова пространства в другое, могут быть определены аналогично.)

Пусть $L_a^2(\Omega)$ – пространство аналитических функций на Ω таких, что

$$\int_{\Omega} |f(\xi)|^2 dA(\xi) < \infty;$$

L_a^2 является гильбертовым подпространством в $L^2(\Omega)$, называемым *пространством Бергмана*. Пусть P определяет ортогональную проекцию из $L^2(\Omega)$ в $L_a^2(\Omega)$ (проекция Бергмана).

Операторы $C, L: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, определенные как

$$Cf(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Omega} \frac{f(\xi)}{\xi - z} dA(\xi),$$

$$Lf(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \ln |z - \xi| f(\xi) dA(\xi),$$

исследованы в [3]. Они также вполне непрерывны и удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} s_n(C) &= \sqrt{\frac{|\Omega|}{\pi}}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n s_n(PC) &= \frac{|\partial\Omega|}{2\pi}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n s_n(L) &= \frac{|\Omega|}{4\pi}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 s_n(PL) &= \frac{|\partial\Omega|^2}{16\pi^2}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $|\partial\Omega|$ есть длина границы Ω .

В специальном случае при $\Omega = D$ (единичный круг) асимптотические свойства сингулярных чисел операторов L и C определены в [4]. Там отмечено, что умножение L и C на проекцию Бергмана приводит к “двойной” скорости возрастания их сингулярных чисел. Формулы (1) показывают, что это верно не только для единичного круга D , но и для всех связных ограниченных областей с достаточно регулярной границей, а также что спектральные свойства операторов C, L, PC и PL определяют геометрические свойства области – площадь и длину границы.

В [5] исследованы спектральные свойства некоторых интегральных операторов, появляющихся в теории потенциала. Дана их детальная структура в том случае, когда $\Omega = \{x : \|x\| < 1\}$. Выдвинута гипотеза, что для областей, не являющихся кругом (или шаром), спектр соответствующих операторов может дать некоторую информацию о геометрии области Ω (в частности, “можем ли мы услышать форму барабана?”).

В настоящей статье показывается, что оператор типа потенциала Рисса также обладает свойством “удвоения” скорости сходимости собственных чисел к нулю

при его умножении на проекцию Бергмана, причем они определяют длину границы Ω .

Основное утверждение будет сформулировано для ограниченной связной области в $\mathbb{C}$ с аналитической границей. Отметим, что оно может быть доказано и для областей, границей которых является кривая Ляпунова (для этого понадобятся более сложные методы).

Далее через $\int_S R(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi)$ будем обозначать интегральный оператор в пространстве $L^2(S)$ ($S \subset \mathbb{C}$), ядром которого является функция $R(\cdot, \cdot)$.

§ 2. Основной результат

ТЕОРЕМА 1. Если Ω – связная область в $\mathbb{C}$ с аналитической границей, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha s_n(AP) = \left(\frac{|\partial\Omega|}{2\pi} \right)^\alpha c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \sqrt{\Gamma(1+2\alpha)d(\alpha)},$$

где

$$d(\alpha) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x^{\frac{\alpha}{2}-1} y^{\frac{\alpha}{2}-1} (1+x)^{\frac{\alpha}{2}} (1+y)^{\frac{\alpha}{2}}}{(1+x+y)^{1+2\alpha}} dx dy.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Учитывая результат Уидома

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{\alpha}{2}} s_n(A) = (\pi|\Omega|)^{\frac{\alpha}{2}},$$

закключаем, что сингулярные числа операторов A и AP определяют площадь области Ω и длину ее границы. Также из вышеприведенных формул следует, что умножение A на проекцию Бергмана приводит к “удвоению” скорости возрастания сингулярных чисел для каждого $\alpha \in (0, 2)$.

Главная трудность в доказательстве нашего основного результата состоит в том, что ядро $|z - \xi|^{\alpha-2}$ ($0 < \alpha < 2$) не является ни аналитической, ни гармонической функцией (в отличие от ядер $(z - \xi)^{-1}$ и $\ln|z - \xi|$), что делает анализ ядра оператора AP значительно труднее даже для $\Omega = D$ (единичный круг).

В § 2 мы докажем несколько вспомогательных лемм.

Для вполне непрерывного оператора K обозначим через $\mathcal{N}_t(K)$ распределение его сингулярных чисел, т.е.

$$\mathcal{N}_t(K) = \sum_{s_n(K) \geq t} 1 \quad (t > 0).$$

ЛЕММА 1 [6]. Пусть оператор H является вполне непрерывным, и пусть для каждого $\varepsilon > 0$ существует разложение $H = H'_\varepsilon + H''_\varepsilon$ ($H'_\varepsilon, H''_\varepsilon$ вполне непрерывны) такое, что:

1. существует предел

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{1}{\alpha}} \mathcal{N}_t(H'_\varepsilon) = c_0(H'_\varepsilon), \quad \alpha > 0$$

($c_0(H'_\varepsilon)$ – ограниченная функция в окрестности $\varepsilon = 0$);

2.

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^\alpha s_n(H''_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Тогда существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} c_0(H'_\varepsilon) = c_0(H)$ и

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{1}{\alpha}} \mathcal{N}_t(H) = c_0(H).$$

ЛЕММА 2. Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ являются ортонормированными системами в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, и пусть $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность положительных чисел такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^\beta a_k = \alpha \quad (\alpha, \beta > 0).$$

Тогда для линейного оператора

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\cdot, f_k) g_k$$

справедливо соотношение

$$s_n(T) \sim \frac{\alpha}{n^\beta}.$$

(Эквивалентность $a_n \sim b_n$, $n \rightarrow \infty$, здесь и ниже означает $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $k^\beta a_k \rightarrow \alpha$, то

$$a_n = \frac{\alpha}{n^\beta} (1 + \varepsilon_n), \quad |\varepsilon_n| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Поэтому $T = T_1 + \alpha T_2$, где

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha}{n^\beta} (\cdot, f_n) g_n, \\ T_2 &= \sum_{n \geq 1} \frac{\varepsilon_n}{n^\beta} (\cdot, f_n) g_n. \end{aligned}$$

Очевидно, $s_n(T_1) = \alpha \cdot n^{-\beta}$. Если мы покажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\beta s_n(T_2) = 0, \tag{2}$$

то из теоремы Кай-Фана [7] получим утверждение леммы 2.

Докажем соотношение (2).

Поскольку

$$s_{n+1}(T_2) = \min_{R \in \mathcal{P}_n} \|T_2 - R\|,$$

где $\mathcal{P}_n$ является множеством всех операторов ранга $\leq n$, то получаем

$$\begin{aligned} s_{n+1}(T_2) &\leq \left\| T_2 - \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon_k}{k^\beta} (\cdot, f_k) g_k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k^\beta} (\cdot, f_k) g_k \right\| \\ &= \sup_{k \geq n+1} \frac{|\varepsilon_k|}{k^\beta} \leq (n+1)^{-\beta} \sup_{k \geq n+1} |\varepsilon_k|. \end{aligned}$$

Значит,

$$(n+1)^\beta s_{n+1}(T_2) \leq \sup_{k \geq n+1} |\varepsilon_k|.$$

Поскольку последовательность $\{\sup_{k \geq n+1} |\varepsilon_k|\}_{n=1}^\infty$ невозрастающая, то последнее соотношение приводит к неравенству

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (n+1)^\beta s_{n+1}(T_2) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n+1} |\varepsilon_k| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n+1} |\varepsilon_k| \right) \\ &= \inf_n \sup_{k \geq n+1} |\varepsilon_k| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\varepsilon_n| = 0. \end{aligned}$$

Обозначим через F конформное отображение области Ω на единичный круг $D = \{z : |z| < 1\}$, а через φ — обратное к нему, т.е. $\varphi = F^{-1}$.

Можно показать, что F (в силу аналитичности кривой $\partial\Omega$) может быть аналитически продолжено на некоторую окрестность замыкания $\bar{\Omega}$, причем $F'(z) \neq 0$.

То же самое имеет место для φ .

Порождающее ядро Бергмана для области Ω определяется выражением (см. [8; с. 184])

$$K_0(t, \xi) = \frac{1}{\pi} \frac{F'(t) \overline{F'(\xi)}}{(1 - F(t) \overline{F(\xi)})^2}, \quad t, \xi \in \Omega,$$

т.е.

$$f(t) = \int_{\Omega} K_0(t, \xi) f(\xi) dA(\xi) \quad \text{для всех } f \in L_a^2(\Omega)$$

и

$$Pf(t) = \int_{\Omega} K_0(t, \xi) f(\xi) dA(\xi) \quad \text{для всех } f \in L^2(\Omega).$$

ЛЕММА 3. Пусть $A_1 : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ является линейным оператором, определенным как

$$A_1 f(z) = \int_D G_1(z, \xi) f(\xi) dA(\xi),$$

где

$$G_1(z, \xi) = \frac{c(\alpha)}{\pi} \int_D \frac{\varphi'(z) \overline{\varphi'(t)}}{(1 - t \bar{\xi})^2 |\varphi(z) - \varphi(t)|^{2-\alpha}} dA(t).$$

Тогда $s_n(AP) = s_n(A_1)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ядро оператора AP равно

$$K(z, \xi) = \int_{\Omega} c(\alpha) \frac{K_0(t, \xi)}{|z - t|^{2-\alpha}} dA(t). \quad (3)$$

Пусть $V : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(D)$ является оператором, определенным следующим образом:

$$Vf(z) = f(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z).$$

Тогда V изометричен и поскольку

$$F(\varphi(z)) = z, \quad F'(\varphi(z)) \cdot \varphi'(z) = 1,$$

то получаем

$$VAPV^{-1} = A_1,$$

что означает справедливость леммы 3.

Пусть

$$\begin{aligned} M(z, t) &= |z - t|^{\alpha-2} \left(\left| \frac{\varphi(z) - \varphi(t)}{z - t} \right|^{\alpha-2} - |\varphi'(z)|^{\alpha-2} \right), \\ R(z, \xi) &= \frac{c(\alpha)}{\pi} \int_D \frac{\varphi'(z) \overline{\varphi'(t)}}{(1 - t\bar{\xi})^2} M(z, t) dA(t), \\ R_1(z, \xi) &= \frac{c(\alpha)}{\pi} \varphi'(z) \cdot |\varphi'(z)|^{\alpha-2} \int_D \frac{\overline{\varphi'(t)} - \overline{\varphi'(z)}}{(1 - t\bar{\xi})^2 |z - t|^{2-\alpha}} dA(t), \\ I(z, \xi) &= \frac{c(\alpha)}{\pi} \int_D \frac{dA(t)}{(1 - t\bar{\xi})^2 |z - t|^{2-\alpha}}. \end{aligned}$$

Тогда имеем

$$G_1(z, \xi) = R(z, \xi) + R_1(z, \xi) + |\varphi'(z)|^\alpha I(z, \xi). \quad (4)$$

Из (4) следует, что в случае $\Omega = D$ (т.е. $\varphi(z) = z$) ядро оператора AP равно $I(z, \xi)$.

ЛЕММА 4. Пусть

$$h_m(r) = \int_0^1 t^{m-\frac{\alpha}{2}} (1-t)^{\frac{\alpha}{2}-1} (1-tr^2)^{\frac{\alpha}{2}} dt.$$

Тогда

$$I(z, \xi) = \frac{c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (m+1) h_m(|z|) (z\bar{\xi})^m. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\begin{aligned} I_1(z, \xi) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{c(\alpha)}{\pi} \int_{|t| < |z|} (1 - t\bar{\xi})^{-2} |z - t|^{\alpha-2} dA(t), \\ I_2(z, \xi) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{c(\alpha)}{\pi} \int_{|z| < |t| < 1} (1 - t\bar{\xi})^{-2} |z - t|^{\alpha-2} dA(t). \end{aligned}$$

Поскольку

$$I_1(z, \xi) = \frac{c(\alpha)}{\pi} \int_{|t| < |z|} |z|^{2s} (1 - t\bar{\xi})^{-2} \left(1 - \frac{t}{z}\right)^s \left(1 - \frac{\bar{t}}{\bar{z}}\right)^s dA(t)$$

и

$$I_2(z, \xi) = \frac{c(\alpha)}{\pi} \int_{|z| < |t| < 1} |t|^{2s} (1 - t\bar{\xi})^{-2} \left(1 - \frac{z}{t}\right)^s \left(1 - \frac{\bar{z}}{\bar{t}}\right)^s dA(t),$$

где $s = \alpha/2 - 1$, то, разлагая подынтегральные функции в биномиальные ряды, после очевидных преобразований получаем

$$\begin{aligned} I_1(z, \xi) &= c(\alpha) \cdot \frac{|z|^\alpha}{s+1} \sum_{m, n \geq 0} (m+1)(-1)^m \binom{s}{n} \binom{s+1}{m+n+1} (z\bar{\xi})^m, \\ I_2(z, \xi) &= \frac{c(\alpha)}{s+1} \sum_{m, n \geq 0} (m+1)(-1)^m \binom{s+1}{n} \binom{s}{m+n} (z\bar{\xi})^m |z|^{2n} \\ &\quad - \frac{c(\alpha)}{s+1} |z|^\alpha \sum_{m, n \geq 0} (m+1)(-1)^m \binom{s+1}{n} \binom{s}{m+n} (z\bar{\xi})^m. \end{aligned} \quad (6)$$

Пусть

$$a_m = \frac{(-1)^m}{s+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\binom{s}{n} \binom{s+1}{m+n+1} - \binom{s+1}{n} \binom{s}{m+n} \right]$$

и

$$\varphi_m(r) = \frac{(-1)^m}{s+1} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+1}{n} \binom{s}{m+n} r^{2n}.$$

Поскольку $I(z, \xi) = I_1(z, \xi) + I_2(z, \xi)$, то из (6) следует, что

$$I(z, \xi) = c(\alpha) \sum_{m=0}^{\infty} a_m |z|^\alpha (m+1)(z\bar{\xi})^m + c(\alpha) \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(|z|) (m+1)(z\bar{\xi})^m.$$

Применяя тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\beta}{k} \binom{\alpha-\beta}{n-k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n+1+\beta)\Gamma(\alpha-\beta-n+1)}$$

(см. [9; с. 217]), получаем $a_m = 0$ для всех $m = 0, 1, 2, \dots$ и, таким образом,

$$I(z, \xi) = c(\alpha) \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(|z|) (m+1)(z\bar{\xi})^m. \quad (7)$$

Запишем функцию φ_m в интегральной форме. Поскольку

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k \cdot (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b+1} (1-zt)^{-a} dt$$

(гипергеометрическая функция; здесь $(a)_k \stackrel{\text{def}}{=} a(a+1) \cdots (a+k-1)$, $(a)_0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$), то получаем

$$\varphi_m(r) = (-1)^m \binom{s}{m} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-s)\Gamma(1+s)} \int_0^1 t^{m-s-1} (1-t)^s (1-r^2 t)^{s+1} dt. \quad (8)$$

Поскольку $\binom{s}{m} = \frac{1}{\pi} \sin((m-s)\pi) \frac{\Gamma(s+1)\Gamma(m-s)}{\Gamma(m+1)}$ (см. [9]) и $s = \alpha/2 - 1$, то из (8) получаем

$$\varphi_m(r) = \frac{1}{\pi} \sin \frac{\alpha\pi}{2} h_m(r).$$

Последнее соотношение и (7) дают (5).

ЛЕММА 5. Если $A_m = \int_0^1 r^{2m+1} h_m^2(r) dr$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m^{2\alpha+1} A_m = \frac{1}{2} \Gamma(1+2\alpha) d(\alpha).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_m(r) = \int_0^1 t^{m-\frac{\alpha}{2}} (1-t)^{\frac{\alpha}{2}-1} (1-rt)^{\frac{\alpha}{2}} dt$. Тогда $h_m(r) = f_m(r^2)$ и

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{2} \int_0^1 r^m f_m^2(r) dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (ruv)^m u^{-\frac{\alpha}{2}} v^{-\frac{\alpha}{2}} (1-u)^{\frac{\alpha}{2}-1} (1-v)^{\frac{\alpha}{2}-1} (1-ur)^{\frac{\alpha}{2}} (1-vr)^{\frac{\alpha}{2}} du dv dr. \end{aligned}$$

Подставляя $r = e^{-x}$, $u = e^{-y}$, $v = e^{-z}$ и

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= \left[\exp \left(-x - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) y - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) z \right) \right] \\ &\quad \times \left(\frac{1-e^{-z}}{z} \right)^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot \left(\frac{1-e^{-y}}{y} \right)^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot \left(\frac{1-e^{-x-y}}{x+y} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\frac{1-e^{-x-z}}{x+z} \right)^{\frac{\alpha}{2}}, \end{aligned}$$

получаем

$$A_m = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-m(x+y+z)} G(x, y, z) z^{\frac{\alpha}{2}-1} y^{\frac{\alpha}{2}-1} (x+y)^{\frac{\alpha}{2}} (x+z)^{\frac{\alpha}{2}} dx dy dz. \quad (9)$$

Поскольку $0 < \alpha < 2$, то существует $M < \infty$ такое, что

$$0 \leq G(x, y, z) \leq M \text{ для всех } x, y, z \geq 0.$$

Более того,

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} G(x, y, z) = 1.$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Тогда для некоторого $\delta > 0$ имеем

$$1 - \varepsilon < G(x, y, z) < 1 + \varepsilon,$$

если $x, y, z > 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 < \delta^2$, и из (9) получаем:

$$\begin{aligned} m^{2\alpha+1} A_m &\leq m^{2\alpha+1} \frac{1+\varepsilon}{2} \iiint_{\substack{x,y,z>0 \\ x^2+y^2+z^2<\delta^2}} e^{-m(x+y+z)} z^{\frac{\alpha}{2}-1} y^{\frac{\alpha}{2}-1} (x+y)^{\frac{\alpha}{2}} (x+z)^{\frac{\alpha}{2}} dx dy dz \\ &\quad + \frac{M m^{2\alpha+1}}{2} \iiint_{\substack{x,y,z>0 \\ x^2+y^2+z^2\geq\delta^2}} e^{-m(x+y+z)} z^{\frac{\alpha}{2}-1} y^{\frac{\alpha}{2}-1} (x+y)^{\frac{\alpha}{2}} (x+z)^{\frac{\alpha}{2}} dx dy dz. \end{aligned}$$

Подстановка $x_1 = mx$, $y_1 = my$, $z_1 = mz$ преобразует это неравенство в

$$\begin{aligned} m^{2\alpha+1}A_m &\leq \frac{1+\varepsilon}{2} \iiint_{\substack{x,y,z>0 \\ x^2+y^2+z^2<\delta^2\cdot m^2}} e^{-(x+y+z)} z^{\frac{\alpha}{2}-1} y^{\frac{\alpha}{2}-1} (x+y)^{\frac{\alpha}{2}} (x+z)^{\frac{\alpha}{2}} dx dy dz \\ &\quad + \frac{M}{2} \iiint_{\substack{x,y,z>0 \\ x^2+y^2+z^2\geq\delta^2\cdot m^2}} e^{-(x+y+z)} z^{\frac{\alpha}{2}-1} y^{\frac{\alpha}{2}-1} (x+y)^{\frac{\alpha}{2}} (x+z)^{\frac{\alpha}{2}} dx dy dz \end{aligned}$$

и, таким образом,

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{m\rightarrow\infty} m^{2\alpha+1}A_m \\ \leq \frac{1+\varepsilon}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y+z)} z^{\frac{\alpha}{2}-1} y^{\frac{\alpha}{2}-1} (x+y)^{\frac{\alpha}{2}} (x+z)^{\frac{\alpha}{2}} dx dy dz. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично можно показать, что

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{m\rightarrow\infty} m^{2\alpha+1}A_m \\ \geq \frac{1-\varepsilon}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y+z)} z^{\frac{\alpha}{2}-1} y^{\frac{\alpha}{2}-1} (x+y)^{\frac{\alpha}{2}} (x+z)^{\frac{\alpha}{2}} dx dy dz. \end{aligned} \quad (11)$$

Поскольку (10) и (11) имеют место для всех $\varepsilon > 0$ и

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y+z)} z^{\frac{\alpha}{2}-1} y^{\frac{\alpha}{2}-1} (x+y)^{\frac{\alpha}{2}} (x+z)^{\frac{\alpha}{2}} dx dy dz = d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha),$$

то получаем

$$\lim_{m\rightarrow\infty} m^{2\alpha+1}A_m = \frac{1}{2} \Gamma(1+2\alpha)d(\alpha).$$

Пусть

$$\mathcal{A}(z, \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)h_m(|z|)(z\bar{\xi})^m.$$

Тогда

$$I(z, \xi) = \frac{c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\pi} \mathcal{A}(z, \xi).$$

ЛЕММА 6. *Справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$s_m \left(\int_D \mathcal{A}(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) \sim \pi \cdot m^{-\alpha} \sqrt{d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha)}, \quad (12)$$

т.е.

$$s_m \left(\int_D I(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) \sim c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cdot m^{-\alpha} \sqrt{d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha)}, \quad m \rightarrow \infty. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать первую формулу. Пусть

$$g_m(z) = \sqrt{\frac{m+1}{\pi}} \cdot z^m, \quad \theta_m(z) = \frac{h_m(|z|)}{\delta_m} z^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\delta_m = \|h_m(|z|)\|_{L^2(D)} = \sqrt{\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{2m+1} h_m^2(r) dr} = \sqrt{2\pi A_m}.$$

Системы $\{g_m\}_{m=0}^\infty$ и $\{\theta_m\}_{m=0}^\infty$ ортонормированы в $L^2(D)$. Поскольку

$$\int_D \mathcal{A}(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) = \sum_{m=0}^\infty \sqrt{\pi(m+1)} \delta_m(\cdot, g_m)_{L^2(D)} \cdot \theta_m,$$

то леммы 2 и 5 приводят к (12).

ЛЕММА 7.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m \left(\int_D R(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) = 0, \\ \text{b)} \quad & \lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m \left(\int_D R_1(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) = 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем а). Соотношение б) доказывается аналогично.

Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \int_D R(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi), \\ \mathcal{M} &= \int_D M(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi). \end{aligned}$$

Пусть M_g – оператор умножения на ограниченную функцию g на $\overline{D}$, и обозначим

$$P_D = \frac{1}{\pi} \int_D (1 - t\bar{\xi})^{-2} \langle \cdot \rangle dA(\xi)$$

(проекция Бергмана для единичного круга). Тогда имеем

$$\mathcal{W} = c(\alpha) M_{\varphi'} P_D \mathcal{M} M_{\overline{\varphi'}}.$$

Поскольку $M_{\varphi'}$ и $M_{\overline{\varphi'}}$ являются ограниченными операторами (φ' – ограниченная функция на $\overline{D}$), то достаточно показать, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(P_D \mathcal{M}) = 0. \quad (14)$$

Поскольку $z \mapsto \varphi(z)$ – аналитическая функция в окрестности $\overline{D}$, то из разложения

$$\varphi(t) - \varphi(z) = \varphi'(z)(t - z) + \frac{\varphi''(z)}{2!}(t - z)^2 + G_0(t, z)(t - z)^3$$

(G_0 – непрерывная функция в окрестности $\overline{D}$) получаем

$$\left| \frac{\varphi(t) - \varphi(z)}{t - z} \right|^{\alpha-2} = |\varphi'(z)|^{\alpha-2} (1 + \omega(z)(t - z) + \overline{\omega(z)}(\overline{t} - \overline{z}) + \mathcal{J}(z, t)|t - z|^2), \quad (15)$$

где $\omega(z) = \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right) \frac{\varphi''(z)}{2\varphi'(z)}$ и $\mathcal{J}$ является ограниченной функцией в окрестности $\overline{D} \times \overline{D}$. Из (15) следует, что

$$\begin{aligned} M(z, t) &= |z - t|^2 \left(\left| \frac{\varphi(z) - \varphi(t)}{z - t} \right|^{\alpha-2} - |\varphi'(z)|^{\alpha-2} \right) \\ &= |z - t|^{\alpha-2} (\omega(z)|\varphi'(z)|^{\alpha-2}(t - z) \\ &\quad + \overline{\omega(z)}|\varphi'(z)|^{\alpha-2}(\overline{t} - \overline{z}) + |\varphi'(z)|^{\alpha-2} \mathcal{J}(z, t)|t - z|^2). \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ – линейные операторы на $L^2(D)$, определенные как

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \int_D (t - z)|t - z|^{\alpha-2} \langle \cdot \rangle dA(t), \\ \mathcal{M}_2 &= \int_D (\overline{t} - \overline{z})|t - z|^{\alpha-2} \langle \cdot \rangle dA(t), \\ \mathcal{M}_3 &= \int_D |t - z|^\alpha |\varphi'(z)|^{\alpha-2} \mathcal{J}(z, t) \langle \cdot \rangle dA(t). \end{aligned}$$

Пусть

$$k(z) = \omega(z)|\varphi'(z)|^{\alpha-2}.$$

Тогда $\mathcal{M} = M_k \mathcal{M}_1 + M_{\overline{k}} \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3$.

Для доказательства (14) достаточно установить, что

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(P_D M_k \mathcal{M}_1) &= 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(P_D M_{\overline{k}} \mathcal{M}_2) &= 0, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(\mathcal{M}_3) &= 0 \end{aligned}$$

(в частности, $\lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(P_D \mathcal{M}_3) = 0$). Рассмотрим, например, первое уравнение. Остальное может быть доказано аналогично.

Отметим сначала, что функция $(z, t) \mapsto \frac{k(z) - k(t)}{z - t}$ ограничена на $\overline{D} \times \overline{D}$.

Поскольку

$$M_k \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_1 M_k = \int_D |z - t|^\alpha U(z, t) \langle \cdot \rangle dA(t),$$

где

$$U(z, t) = \frac{(z - t)^2}{|z - t|^2} \frac{k(z) - k(t)}{z - t}$$

является ограниченной функцией на $\overline{D} \times \overline{D}$, то согласно результату Уидома [2]

$$s_m \left(\int_D |z - t|^\alpha \langle \cdot \rangle dA(t) \right) \sim \text{const} \cdot m^{-1-\frac{\alpha}{2}} \quad (0 < \alpha < 2)$$

и результату Парфенова [10] получаем

$$s_m \left(\int_D |z - t|^\alpha U(z, t) \langle \cdot \rangle dA(t) \right) = O(m^{-1 - \frac{\alpha}{2}}).$$

Поэтому

$$m^\alpha s_m(M_k \mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_1 M_k) = O(m^{\frac{\alpha}{2} - 1}). \quad (16)$$

Методом лемм 4 и 5 можно показать

$$s_m(P_D \mathcal{M}_1) = o(m^{-\alpha - 1}), \quad m \rightarrow \infty,$$

так что

$$m^\alpha s_m(P_D \mathcal{M}_1 M_k) \leq m^\alpha \|M_k\| \cdot o(m^{-\alpha - 1}) = o(m^{-1}), \quad m \rightarrow \infty.$$

Поскольку $0 < \alpha < 2$, то вышеприведенное соотношение, равенство (16) и теорема Кай-Фана дают

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(P_D M_k \mathcal{M}_1) = 0.$$

Пусть

$$D_0^N = \{z : |z| < r_N\}, \quad r_N = \exp\left(-\frac{2\pi}{N}\right),$$

$$D_i^N = \left\{z : r_N \leq |z| < 1, (i-1)\frac{2\pi}{N} \leq \arg z < i\frac{2\pi}{N}\right\}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

и пусть $Q_i : L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ ($i = 0, 1, \dots, N$) являются линейными операторами, определенными как $Q_i f(z) = \mathcal{X}_{D_i^N}(z) f(z)$ ($\mathcal{X}_A(\cdot)$ — характеристическая функция множества A).

Очевидно, $I = \sum_{i=0}^N Q_i$ и $Q_i Q_j = 0$ для $i \neq j$. Пусть S обозначает линейный оператор на $L^2(D)$, определенный как

$$Sf(z) = \int_D |\varphi'(z)|^\alpha I(z, \xi) f(\xi) dA(\xi).$$

ЛЕММА 8. Для всех $i \neq j$, $i, j \in \{0, 1, \dots, N\}$, имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(Q_i S Q_j) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для операторов $Q_0 S Q_j$ ($j \geq 0$), $Q_i S Q_0$ ($i \geq 0$) и $Q_i S Q_j$ ($|i - j| \geq 2$) утверждение следует из теоремы Бирмана–Соломыка [11] об асимптотике сингулярных чисел оператора с действительными аналитическими ядрами. Докажем, что утверждение выполнено также для $Q_i S Q_{i+1}$ и $Q_{i+1} S Q_i$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$).

Поскольку отображение $z \mapsto \varphi'(z)$ ограничено и $I(z, \xi) = \frac{c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\pi} \mathcal{A}(z, \xi)$, то достаточно взять $i = 1$ и рассмотреть оператор

$$S_1 = \int_D \mathcal{A}(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi).$$

Проверим равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(Q_1 S_1 Q_2) = 0. \quad (17)$$

Пусть

$$K_1 = \left\{ z : -\frac{2\pi}{N} < \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \frac{2\pi}{N} \right\},$$

$$K_2 = \left\{ z : -\frac{2\pi}{N} < \operatorname{Re} z < 0, \frac{2\pi}{N} < \operatorname{Im} z < \frac{4\pi}{N} \right\}.$$

Для того чтобы доказать (17), достаточно установить, что оператор с ядром $\mathcal{A}(e^z, e^\xi)$, который отображает $L^2(K_2)$ в $L^2(K_1)$, имеет асимптотику сингулярных чисел порядка $o(m^{-\alpha})$.

Поскольку

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(e^z, e^\xi) &= \int_0^\infty e^{-t(1-\frac{\alpha}{2})} \cdot (t-z-\bar{z})^{\frac{\alpha}{2}} \cdot (t-z-\bar{\xi})^{-2} \cdot t^{\frac{\alpha}{2}-1} \\ &\quad \times \left(\frac{1-e^{-t}}{t} \right)^{\frac{\alpha}{2}-1} \left(\frac{1-e^{z+\bar{z}-t}}{t-z-\bar{z}} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{1-e^{z+\bar{\xi}-t}}{t-z-\bar{\xi}} \right)^{-2} dt \end{aligned}$$

и поскольку функции

$$s \mapsto \left(\frac{1-e^{-s}}{s} \right)^{\frac{\alpha}{2}},$$

$$s \mapsto \left(\frac{1-e^{-s}}{s} \right)^{-2}$$

аналитичны при $|s| < 2\pi$ (и равны единице при $s = 0$), то для доказательства (17) достаточно (согласно теореме Кай-Фана) убедиться, что оператор $H: L^2(K_2) \rightarrow L^2(K_1)$,

$$Hf(z) = \int_{K_2} \mathcal{H}_0(z, \xi) f(\xi) dA(\xi),$$

$$\mathcal{H}_0(z, \xi) = \int_0^\infty e^{-t(1-\frac{\alpha}{2})} (t-z-\bar{z})^{\frac{\alpha}{2}} (t-z-\bar{\xi})^{-2} t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt,$$

обладает свойством

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(H) = 0. \quad (18)$$

Так как $V_1: L^2(K_2) \rightarrow L^2(K_1)$, $V_1 f(z) = f\left(z + \frac{2\pi}{N}i\right)$, является изометрией, (18) следует из

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m \left(\int_{K_1} \mathcal{H}_0 \left(z + \frac{2\pi}{N}i, \xi \right) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) = 0. \quad (19)$$

Пусть $\mathcal{H}(z, \xi) = \int_0^1 t^{\frac{\alpha}{2}-1} (t-z-\bar{z})^{\frac{\alpha}{2}} \left(t-z-\bar{\xi} - \frac{2\pi}{N}i \right)^{-2} dt.$

Если мы покажем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m \left(\int_{K_1} \mathcal{H}(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) = 0, \quad (20)$$

то это будет означать, в частности,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m \left(\int_{K_1} L(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) = 0,$$

где

$$L(z, \xi) = \int_0^1 e^{-t(1-\frac{\alpha}{2})} t^{\frac{\alpha}{2}-1} (t-z-\bar{z})^{\frac{\alpha}{2}} \left(t-z-\bar{\xi}-\frac{2\pi}{N}i \right)^{-2} dt.$$

Поскольку у оператора с ядром

$$L(z, \xi) = \int_1^\infty e^{-t(1-\frac{\alpha}{2})} t^{\frac{\alpha}{2}-1} (t-z-\bar{z})^{\frac{\alpha}{2}} \left(t-z-\bar{\xi}-\frac{2\pi}{N}i \right)^{-2} dt$$

(действующего в $L^2(K_1)$) сингулярные числа экспоненциально убывают согласно теореме Бирмана–Соломыка [11], то теорема Кай-Фана приводит к соотношению (18). Следовательно, все, что нам нужно сделать, это доказать (20).

Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{K_1} \mathcal{H}(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi), \\ O_1 &= \left\{ z : -\frac{2\pi}{Nr} < \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \frac{2\pi}{Nr} \right\}, \\ O_2 &= \left\{ z : -\frac{2\pi}{Nr} < \operatorname{Re} z < 0, \frac{2\pi}{N} - \frac{2\pi}{Nr} < \operatorname{Im} z < \frac{2\pi}{N} \right\} \quad (r - \text{целое} \geq 4), \\ O_3 &= K_1 \setminus (O_1 \cup O_2), \end{aligned}$$

и пусть $P_i : L^2(K_1) \rightarrow L^2(K_1)$ ($i = 1, 2, 3$) являются ортогональными проекциями, определенными как

$$P_i f(z) = \mathcal{X}_{O_i}(z) f(z).$$

Тогда

$$\mathcal{D} = \left(\sum_{i=1}^3 P_i \right) \mathcal{D} \left(\sum_{i=1}^3 P_i \right).$$

Согласно теореме Параски [12] повышенная гладкость ядер (по отношению к ξ) означает

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(P_i \mathcal{D} P_j) = 0 \quad (21)$$

для всех $i, j \in \{1, 2, 3\}$, кроме $i = 1, j = 2$ и $i = 2, j = 1$. Пусть $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D} - P_2 \mathcal{D} P_1 - P_1 \mathcal{D} P_2$. Из (21) следует

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(\mathcal{D}_1) = 0. \quad (22)$$

Поскольку $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + P_2 \mathcal{D} P_1 + P_1 \mathcal{D} P_2$, то получаем

$$s_{3m}(\mathcal{D}) \leq s_m(\mathcal{D}_1) + s_m(P_2 \mathcal{D} P_1) + s_m(P_1 \mathcal{D} P_2),$$

т. е.

$$(3m)^\alpha s_{3m}(\mathcal{D}) \leq 3^\alpha m^\alpha s_m(\mathcal{D}_1) + 3^\alpha m^\alpha s_m(P_2 \mathcal{D} P_1) + 3^\alpha m^\alpha s_m(P_1 \mathcal{D} P_2).$$

Пусть $\overline{\lim} m^\alpha s_m(\mathcal{D}) = a$. Тогда (22) и последнее неравенство приводят к выражению:

$$a \leq 3^\alpha \left(\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(P_2 \mathcal{D} P_1) + \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(P_1 \mathcal{D} P_2) \right). \quad (23)$$

Оценим $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(P_2 \mathcal{D} P_1)$ и $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(P_1 \mathcal{D} P_2)$. Пусть

$$\mathcal{D}_2 = \int_{O_1} \mathcal{H} \left(z - \frac{2\pi}{N} i + \frac{2\pi}{Nr} i, \xi \right) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \quad (\mathcal{D}_2: L^2(O_1) \rightarrow L^2(O_1)).$$

Тогда $s_m(P_2 \mathcal{D} P_1) = s_m(\mathcal{D}_2)$ и ядро оператора $\mathcal{D}_2$ имеет вид

$$\mathcal{H} \left(z - \frac{2\pi}{N} i + \frac{2\pi}{Nr} i, \xi \right) = \int_0^1 t^{\frac{\alpha}{2}-1} (t - z - \bar{z})^{\frac{\alpha}{2}} \left(t - z - \bar{\xi} - \frac{2\pi}{Nr} i \right)^{-2} dt.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_2: L^2(K_1) &\rightarrow L^2(K_1), \\ \mathcal{D}'_2 f(z) &= r^{-2} \int_0^1 t^{\frac{\alpha}{2}-1} \left(t - \frac{z}{r} - \frac{\bar{z}}{r} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(t - \frac{z}{r} - \frac{\bar{\xi}}{r} - \frac{2\pi}{Nr} i \right)^{-2} dt, \\ V_2: L^2(O_1) &\rightarrow L^2(K_1), \quad V_2 f(z) = f(z \cdot r^{-1}). \end{aligned}$$

Отображение V_2 является изометрией и

$$V_2 \mathcal{D}_2^{-1} = \mathcal{D}'_2.$$

Значит,

$$s_m(\mathcal{D}_2) = s_m(\mathcal{D}'_2). \quad (24)$$

Ядро оператора $\mathcal{D}_2$ равно

$$\frac{1}{r^\alpha} \int_0^r t^{\frac{\alpha}{2}-1} (t - z - \bar{z})^{\frac{\alpha}{2}} \left(t - z - \bar{\xi} - \frac{2\pi}{N} i \right)^{-2} dt$$

и, следовательно, согласно теореме Бирмана–Соломыка [11] (о вещественно-аналитических ядрах)

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(\mathcal{D}'_2) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} r^{-\alpha} m^\alpha s_m(\mathcal{D}) = a \cdot r^{-\alpha}.$$

Из (24) и последнего соотношения имеем

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(P_2 \mathcal{D} P_1) = a \cdot r^{-\alpha}.$$

Подобным же образом получаем

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m(P_1 \mathcal{D} P_2) = a \cdot r^{-\alpha},$$

и, значит, (23) дает

$$a \leq 3^\alpha r^{-\alpha} \cdot 2a \quad \text{для всех } r \geq 4.$$

Поскольку a – конечное число, то из последнего неравенства следует $a = 0$. Это доказывает (20) и, следовательно, лемму.

ЛЕММА 9. Для всех $i = 1, 2, \dots, N$

$$s_m \left(\int_{D_i^N} I(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) \sim \frac{c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \sqrt{d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha)}}{(Nm)^\alpha}, \quad m \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$I(z, \xi) = \frac{c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\pi} \mathcal{A}(z, \xi),$$

то достаточно показать, что

$$s_m \left(\int_{D_i^N} \mathcal{A}(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) \sim \frac{\pi}{(Nm)^\alpha} \sqrt{d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha)}, \quad m \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Пусть

$$D_1^1 = \{z : e^{-2\pi} < |z| < 1\}$$

и

$$K_a = \{z : -a < \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < a\}.$$

Из (12), применяя теорему Бирмана–Соломыка (об асимптотике сингулярных чисел операторов с вещественно-аналитическими ядрами) и теорему Кай-Фана, получаем

$$s_m \left(\int_{D_1^1} \mathcal{A}(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) \sim \pi m^{-\alpha} \sqrt{d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha)}, \quad m \rightarrow \infty. \quad (26)$$

Отображение $V_3 : L^2(D_1^1) \rightarrow L^2(K_{2\pi})$, определенное как $V_3 f(z) = e^z f(e^z)$, является изометрией, и, значит, операторы

$$\begin{aligned} & \int_{K_{2\pi}} e^{z+\bar{\xi}} \mathcal{A}(e^z, e^\xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) : L^2(K_{2\pi}) \rightarrow L^2(K_{2\pi}), \\ & \int_{D_1^1} \mathcal{A}(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) : L^2(D_1^1) \rightarrow L^2(D_1^1) \end{aligned}$$

имеют равные сингулярные числа. Поэтому из (26) получаем

$$s_m \left(\int_{K_{2\pi}} e^{z+\bar{\xi}} \mathcal{A}(e^z, e^\xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) \sim \pi m^{-\alpha} \sqrt{d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha)}, \quad m \rightarrow \infty.$$

Из этого соотношения, рассуждая как в лемме 8, получаем

$$s_m \left(\int_{K_{2\pi}} L_1(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) \sim \pi m^{-\alpha} \sqrt{d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha)}, \quad m \rightarrow \infty,$$

где

$$L_1(z, \xi) = \int_0^\infty e^{-t(1-\frac{\alpha}{2})} (t-z-\bar{z})^{\frac{\alpha}{2}} (t-z-\bar{\xi})^{-2} t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt.$$

Поскольку

$$(z, \xi) \mapsto \int_s^\infty e^{-t(1-\frac{\alpha}{2})} (t-z-\bar{z})^{\frac{\alpha}{2}} (t-z-\bar{\xi})^{-2} t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt$$

является при всех $s > 0$ вещественно-аналитической функцией на $K_{2\pi} \times K_{2\pi}$, теоремы Бирмана–Соломяка и Кай-Фана дают

$$s_m \left(\int_{K_{2\pi}} L_2(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) \sim \pi m^{-\alpha} \sqrt{d(\alpha) \Gamma(1 + 2\alpha)}, \quad m \rightarrow \infty, \quad (27)$$

где

$$L_2(z, \xi) = \int_0^s e^{-t(1-\frac{\alpha}{2})} (t - z - \bar{z})^{\frac{\alpha}{2}} (t - z - \bar{\xi})^{-2} t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt.$$

Поскольку главная сингулярная часть ядра $L_2(\cdot, \cdot)$ имеет вид:

$$L_s(z, \xi) = \int_0^s (t - z - \bar{z})^{\frac{\alpha}{2}} (t - z - \bar{\xi})^{-2} t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt,$$

то из (27) получаем

$$s_m \left(\int_{K_{2\pi}} L_s(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) \sim \pi m^{-\alpha} \sqrt{d(\alpha) \Gamma(1 + 2\alpha)}, \quad m \rightarrow \infty,$$

для всех $s > 0$. Это соотношение после подстановки $\xi = N\xi_1$, $z = Nz_1$ ($z_1, \xi_1 \in K_{2\pi/N}$) и после очевидных преобразований при всех $s > 0$ дает

$$s_m \left(\int_{K_{2\pi/N}} L_s(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) \sim \pi (Nm)^{-\alpha} \sqrt{d(\alpha) \Gamma(1 + 2\alpha)}, \quad m \rightarrow \infty. \quad (28)$$

Применяя эти же рассуждения к оператору $\int_{D_i^N} \mathcal{A}(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi)$, получаем

$$\begin{aligned} s_m \left(\int_{D_i^N} \mathcal{A}(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) &= s_m \left(\int_{K_{2\pi/N}} e^{z+\bar{\xi}} \mathcal{A}(e^z, e^\xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) \\ &\sim s_m \left(\int_{K_{2\pi/N}} L_s(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) \\ &\sim \pi (Nm)^{-\alpha} \sqrt{d(\alpha) \Gamma(1 + 2\alpha)} \end{aligned}$$

(см. (28)). Это приводит к соотношению (25) и, следовательно, доказывает лемму 9.

§ 3. Доказательство основного результата

Из лемм 3 и 7, соотношения (4) и теоремы Кай-Фана следует, что для того чтобы доказать нашу теорему, достаточно установить, что

$$s_m(S) \sim \left(\frac{|\partial\Omega|}{2m\pi} \right)^\alpha c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \sqrt{d(\alpha) \Gamma(1 + 2\alpha)}. \quad (29)$$

Так как $\sum_{i=0}^N Q_i = I$, то получаем

$$S = \sum_{i=1}^N Q_i S Q_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N Q_i S Q_j + Q_0 S Q_0. \quad (30)$$

Из леммы 8 следует, что для всех N

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m^\alpha s_m \left(Q_0 S Q_0 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N Q_i S Q_j \right) = 0. \quad (31)$$

Пусть $\xi_\nu = e^{i\theta_\nu}$, $\frac{2\pi}{N}(\nu - 1) \leq \theta_\nu \leq \frac{2\pi}{N}\nu$, $\nu = 1, 2, \dots, N$, и

$$\begin{aligned} E_N &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathcal{X}_{D_i^N}(z) (|\varphi'(z)|^\alpha - |\varphi'(\xi_i)|^\alpha) \int_D I(z, \xi) \mathcal{X}_{D_i^N}(\xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi), \\ F_N &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \mathcal{X}_{D_i^N}(z) |\varphi'(\xi_i)|^\alpha \int_D I(z, \xi) \mathcal{X}_{D_i^N}(\xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi). \end{aligned}$$

В этом случае

$$\sum_{i=1}^N Q_i S Q_i = E_N + F_N. \quad (32)$$

Пусть $T_i: L^2(D) \mapsto L^2(D)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) – линейные операторы, определенные следующим образом:

$$T_i f(z) = \mathcal{X}_{D_i^N}(z) (|\varphi'(z)|^\alpha - |\varphi'(\xi_i)|^\alpha) \int_D I(z, \xi) \mathcal{X}_{D_i^N}(\xi) f(\xi) dA(\xi).$$

Поскольку $\varphi' \in C(\overline{D})$, то для всех $\varepsilon > 0$ найдется достаточно большое N такое, что

$$|(|\varphi'(z)|^\alpha - |\varphi'(\xi_i)|^\alpha)| < \varepsilon$$

при $z \in D_i^N$ и всех $i = 1, 2, \dots, N$. Так как $T_i T_j = 0$ ($i \neq j$) и $E_N = \sum_{i=1}^N T_i$, получаем

$$\mathcal{N}_t(E_N) = \sum_{i=1}^N \mathcal{N}_t(T_i). \quad (33)$$

Из леммы 9 следует, что

$$s_m(T_i) \leq \varepsilon \frac{c_1}{(mN)^\alpha}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где константа c_1 не зависит от m, ε, N , и, значит,

$$\mathcal{N}_t(T_i) = \sum_{s_m(T_i) \geq t} 1 \leq \frac{1}{N} \left(\frac{c_1 \varepsilon}{t} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

т.е.

$$t^{\frac{1}{\alpha}} \mathcal{N}_t(T_i) \leq \frac{(c_1 \varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}}{N}.$$

Из (33) и последнего неравенства получаем

$$t^{\frac{1}{\alpha}} \mathcal{N}_t(E_N) \leq N \frac{(c_1 \varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}}{N} = (c_1 \varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}}$$

и, таким образом, подставляя $t = s_m(E_N)$, приходим к неравенству

$$s_m^{\frac{1}{\alpha}}(E_N) \cdot m \leq (c_1 \varepsilon)^{\frac{1}{\alpha}},$$

т. е.

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{\alpha} s_m(E_N) \leq c_1 \varepsilon.$$

Это неравенство вкупе с (31) дает

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{\alpha} s_m \left(E_N + Q_0 S Q_0 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N Q_i S Q_j \right) \leq c_0 \varepsilon, \quad (34)$$

где константа c_0 не зависит от m, ε, N . В силу леммы 9

$$\begin{aligned} s_m & \left(\int_D \mathcal{X}_{D_i^N}(z) |\varphi'(\xi_i)|^{\alpha} \mathcal{X}_{D_i^N}(\xi) I(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) \\ &= s_m \left(\int_{D_i^N} I(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) \cdot |\varphi'(\xi_i)|^{\alpha} \\ &\sim \frac{|\varphi'(\xi_i)|^{\alpha} c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \sqrt{d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha)}}{(Nm)^{\alpha}}, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_t & \left(\int_D \mathcal{X}_{D_i^N}(z) |\varphi'(\xi_i)|^{\alpha} \mathcal{X}_{D_i^N}(\xi) I(z, \xi) \langle \cdot \rangle dA(\xi) \right) \\ &\underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{|\varphi'(\xi_i)|^{\alpha}}{N t^{\frac{1}{\alpha}}} \left(c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \sqrt{d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Поскольку F_n равно сумме операторов с попарным произведением равным нулю, то вышеприведенная формула дает

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{1}{\alpha}} \mathcal{N}_t(F_N) = \sum_{i=1}^N \frac{|\varphi'(\xi_i)|}{N} \left(c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \sqrt{d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (35)$$

Из (30), (32), (34), (35) и леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{1}{\alpha}} \mathcal{N}_t(S) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{2\pi}{N} |\varphi'(\xi_i)| \cdot \left(c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \sqrt{d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \left(c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \sqrt{d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi'(e^{i\theta})| d\theta \\ &= \frac{|\partial\Omega|}{2\pi} \left(c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \sqrt{d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{1}{\alpha}} \mathcal{N}_t(S) = \frac{|\partial\Omega|}{2\pi} \left(c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \sqrt{d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Подставляя $t = s_m(S)$ в последнюю формулу, получаем

$$(s_m(S))^{\frac{1}{\alpha}} \cdot m \sim \frac{|\partial\Omega|}{2\pi} \left(c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \sqrt{d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha)} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad m \rightarrow \infty,$$

что дает (29).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Подобным образом можно найти асимптотику сингулярных чисел оператора AP , где $A: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ – оператор, определенный равенством

$$Af(z) = \int_{\Omega} \frac{K(z, \xi)}{|z - \xi|^{2-\alpha}} f(\xi) dA(\xi),$$

а $K(\cdot, \cdot)$ – достаточно гладкая функция (операторы со слабо полярным ядром). В этом случае асимптотические формулы зависят от значений ядра K на диагонали.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ – две невозрастающие последовательности положительных чисел такие, что $a_n \sim a \cdot n^{-\frac{\alpha}{2}}$, $b_n \sim b \cdot n^{-\alpha}$ ($n \rightarrow \infty$), $a, b > 0$.

Необходимым условием существования ограниченной области Ω с аналитической границей такой, что для соответствующего оператора типа потенциала Рисса A имеют место равенства $s_n(A) = a_n$, $s_n(AP) = b_n$, является условие

$$\frac{b}{a} \geq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{\alpha}{2}} c(\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2} \sqrt{d(\alpha)\Gamma(1+2\alpha)}.$$

(Это следствие доказанной теоремы и изопериметрического неравенства $|\partial\Omega|^2 \geq 4\pi|\Omega|$.)

Список литературы

1. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциала. М.: Наука, 1966.
2. Widom H. Asymptotic behavior of the eigenvalues of certain integral equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 109. P. 278–295.
3. Dostanić M. Spectral properties of the Cauchy operator and its product with the Bergman projection on a bounded domain // Proc. London Math. Soc. (to appear).
4. Arazy J., Khavinson D. Spectral estimates of Cauchy's transform in $L^2(\Omega)$ // Integral Equations Operator Theory. 1992. V. 15. P. 901–919.
5. Anderson J. M., Khavinson D., Lomonosov V. Spectral properties of some integral operators arising in potential theory // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1992. V. 43. P. 387–407.
6. Dostanić M. The properties of the Cauchy transform on a bounded domain // J. Operator Theory. 1996. V. 36. P. 233–247.
7. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.
8. Range R. M. Holomorphic functions and integral representations in several complex variables. New York: Springer-Verlag, 1986.
9. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Дробные интегралы и производные и некоторые их применения. Минск, 1987.
10. Парфенов О. Г. Оценки сингулярных чисел интегральных операторов с аналитическими ядрами // Проблемы математического анализа. Краевые задачи. Спектральная теория. 1979. № 7. С. 178–188.
11. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Оценки сингулярных чисел интегральных операторов // УМН. 1977. Т. 32. № 1. С. 17–84.
12. Параска В. В. Об асимптотике собственных и сингулярных чисел линейных операторов, повышающих гладкость // Матем. сб. 1965. Т. 68. № 4. С. 623–631.

Белград, Югославия
E-mail: domi@matf.bg.ac.yu

Поступила в редакцию
27.04.1999