Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Лаптев, Эволюционные уравнения с монотонным оператором и функциональной нелинейностью при производной по времени, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 9, 43–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm506>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:44:24

УДК 517.9

Г. И. Лаптев

Эволюционные уравнения с монотонным оператором и функциональной нелинейностью при производной по времени

Изучаются условия разрешимости так называемых дважды нелинейных уравнений

$$Au + \frac{\partial}{\partial t}Bu = f, \quad u(0) = u_0,$$

где A – монотонный оператор, порождаемый дифференциальным выражением с частными производными высокого порядка, B – оператор, порождаемый монотонной функцией. Доказана теорема существования решения. Используется метод монотонных операторов, дополненный методом компактности. Даны примеры приложений к параболическим дифференциальным уравнениям.

Библиография: 15 названий.

§ 1. Постановка задачи и формулировка результата

Работа посвящена исследованию разрешимости уравнений

$$Au + \frac{\partial}{\partial t}Bu = f, \quad u(0) = u_0, \quad (1.1)$$

где A и B – монотонные операторы. Метод монотонных операторов был создан в шестидесятые годы трудами многих математиков и дал возможность изучить широкие классы уравнений с частными производными высокого порядка эллиптического типа. Определенные итоги метода подведены в монографиях Лионса [1] и Скрышника [2], а также в обзорной работе Дубинского [3]. Тогда же метод был применен к параболическим уравнениям, которые можно представить в форме $Au + \frac{\partial u}{\partial t} = f$, где A – монотонный оператор. Соответствующие результаты описаны в [1], [4], [5]. При этом в монографии Лионса [1] неоднократно отмечалось, что на очереди для изучения стоят уравнения вида (1.1), которые называются *дважды нелинейными*. В качестве приложений можно рассматривать параболические уравнения вида

$$\sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(t, x, u, \dots, D^m u) + \frac{\partial}{\partial t}B(u) = f. \quad (1.2)$$

Здесь применены стандартные обозначения частных производных, но они будут еще разъяснены подробнее в заключительном параграфе работы.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00045).

Наиболее изучены к настоящему времени дважды нелинейные уравнения второго порядка по пространственным переменным. Обзор соответствующих работ можно найти в статьях [6]–[9]. По уравнениям высокого порядка результатов несравненно меньше. Выделим работы [10]–[12], в которых строится определенная теория дважды нелинейных уравнений с монотонными операторами, и отметим их отличительные особенности: предполагается, что операторы A , B являются потенциальными и что оператор B компактен относительно оператора A . В приложениях к модельным уравнениям вида

$$\sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D^\alpha (|D^\alpha u|^{p-2} D^\alpha u) + \frac{\partial}{\partial t} (|u|^{r-2} u) = f \quad (1.3)$$

это означает, что степени p , r не могут быть независимыми и связаны соотношением $1/r > 1/p - m/n$. Ниже предлагается метод, применимый к уравнениям вида (1.3) без ограничений на связь степеней p , r и, разумеется, к более сложным уравнениям. Соответствующие примеры приведены в конце статьи. Предполагается, что оператор A является монотонным достаточно общего вида, а оператор B порождается некоторой функцией $B(u)$. Сформулируем условия на эти операторы более точно.

Пусть Ω – ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, обеспечивающей применимость теорем вложения Соболева. Далее, используются пространства $L^p(\Omega)$ измеримых на Ω функций, суммируемых со степенью p , $1 < p < \infty$, а также пространства Соболева $W_p^m(\Omega)$ и $\dot{W}_p^m(\Omega)$, где натуральное $m \geq 1$. Пусть X – замкнутое подпространство $\dot{W}_p^m(\Omega)$ такое, что $\dot{W}_p^m(\Omega) \subset X \subset W_p^m(\Omega)$. Напомним, что при указанных условиях X есть сепарабельное рефлексивное банахово пространство. Предполагается, что оно содержит некоторое плотное множество X_0 , удовлетворяющее включению $C_0^\infty(\Omega) \subset X_0 \subset C(\overline{\Omega})$. Сопряженное к X пространство обозначим X' . Двойственность задаем символом (f, u) , где $f \in X'$, $u \in X$. Если f , u – гладкие функции, например непрерывные, то двойственность определяется формулой

$$(f, u) = \int_{\Omega} f(x) u(x) dx. \quad (1.4)$$

Пусть задано число $r \geq 2$. Одним из основных считается пространство $Y = L^r(\Omega)$. Сопряженным к Y является пространство $Y' = L^{r'}(\Omega)$, где $r + r' = rr'$. Так как $r \geq 2$, то

$$Y \subset L^2(\Omega) \subset Y', \quad (1.5)$$

причем вложения плотны и непрерывны. Двойственность между Y' и Y обозначается также символом (f, u) , где $f \in Y'$, $u \in Y$. Заметим, что для этой двойственности можно использовать формулу (1.4). В частности, если $u \in Y$, то в силу (1.5) определен символ $(u, u) = \int_{\Omega} u^2(x) dx$. Пространство Y является сепарабельным и рефлексивным. Введем пересечение $Z = X \cap Y$. Оно содержит множество X_0 , которое является плотным как в X , так и в Y , и становится банаховым пространством, если ввести норму $\|u\|_Z = \|u\|_X + \|u\|_Y$. Это пространство сепарабельно и рефлексивно. Его сопряженное подробно описано в [5; гл. I, теорема 5.13] и имеет вид $Z' = X' + Y'$.

Далее активно используются пространства абстрактных функций $u(t)$, заданных на отрезке $[0, T]$ и принимающих значения в некотором банаховом пространстве S . Свойства таких пространств изложены, например, в [1] и [5]. Двойственность между элементами $f(t) \in L^{p'}(0, T; S')$ и $u(t) \in L^p(0, T; S)$ обозначается символом

$$\langle f, u \rangle = \int_0^T (f(t), u(t)) dt.$$

Отметим пространства, играющие далее определяющую роль:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= L^p(0, T; X); & \mathcal{X}' &= L^{p'}(0, T; X'); \\ \mathcal{Y} &= L^r(0, T; Y); & \mathcal{Y}' &= L^{r'}(0, T; Y'); \\ \mathcal{Z} &= \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}; & \mathcal{Z}' &= \mathcal{X}' + \mathcal{Y}'. \end{aligned}$$

Записанные здесь равенства для $\mathcal{X}'$ и $\mathcal{Y}'$ вытекают из [5; гл. IV, теорема 1.14]. Заметим еще, что все эти пространства рефлексивны и сепарабельны.

Сформулируем условия на оператор A .

1А. Оператор A определен на пространстве $\mathcal{Z}$, принимает значения в $\mathcal{Z}'$ и является непрерывным, ограниченным и монотонным, т.е.

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0, \quad u, v \in \mathcal{Z}.$$

2А. Оператор A коэрцитивен в следующем смысле: если $u \in \mathcal{Z}$, то

$$\langle Au, u \rangle \geq c_1 \|u\|_{\mathcal{X}}^p - C_1 \|u\|_{\mathcal{Y}}^r - C_2, \quad c_1 > 0.$$

Здесь $p > 1, r \geq 2$.

Выпишем еще условия на функцию $B(u)$.

1В. Функция $B(u)$ определена на вещественной оси и равномерно монотонна в следующем смысле:

$$(u - v)[B(u) - B(v)] \geq c_2 |u - v|^r, \quad c_2 > 0.$$

Степень $r \geq 2$ определена в условии 2А.

2В. Функция $B(u)$ подчинена следующему условию роста:

$$|B(u)| \leq C_3 (1 + |u|^{r-1}).$$

3В. Функция $B(u)$ непрерывно дифференцируема. Ее производную обозначим $\beta(u) = B'(u)$.

Пусть на Ω задана измеримая функция $u = u(x)$. Введем оператор $Bu = B[u(x)]$. Его областью определения считаем множество $Y = L^r(\Omega)$. Далее будут установлены свойства этого оператора. Пока отметим, что он действует непрерывно из Y в Y' . Именно о нем идет речь в следующем утверждении, которое является главным результатом работы.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнены условия 1А–2А и 1В–3В. Если $u_0 \in Y$ и $f \in \mathcal{Z}'$, то задача (1.1) имеет решение $u(t)$ со следующими свойствами:

- (а) $u \in \mathcal{Z}$; $Au \in \mathcal{Z}'$;

- (b) производная $\frac{\partial}{\partial t}Bu(t)$ определена как элемент из $\mathcal{D}'(0, T; L^{r'}(\Omega))$ и при этом $\frac{\partial}{\partial t}Bu(t) \in \mathcal{X}'$;
- (c) функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению $Au + \frac{\partial}{\partial t}Bu = f$, которое понимается как равенство в пространстве $\mathcal{X}'$;
- (d) функция $U(t) = Bu(t) \in C([0, T]; w-L^{r'}(\Omega))$, т.е. она непрерывна на отрезке $[0, T]$ как абстрактная функция, принимающая значения в пространстве $L^{r'}(\Omega)$, наделенном слабой топологией, и $U(0) = Bu_0$. В этом смысле понимается начальное условие задачи (1.1).

§ 2. Теорема о компактности

Здесь собраны вспомогательные утверждения, используемые в основном доказательстве. Через c и C обозначаются, вообще говоря, различные положительные постоянные, которые зависят только от исходных данных рассматриваемой задачи.

Сначала опишем дополнительные свойства функции $B(u)$, введенной ранее. Так как функция $B(u)$ стоит в изучаемом уравнении под знаком производной $\partial/\partial t$, то ее достаточно знать с точностью до постоянной. Поэтому без ограничения общности считаем, что $B(0) = 0$. Полагая теперь в условии 1B число $v = 0$, приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 2.1. *Функция $B(u)$ удовлетворяет соотношению*

$$uB(u) \geq c_2|u|^r, \quad c_2 > 0, \quad r \geq 2.$$

Если на множестве $\Omega \in \mathbb{R}^n$ задана измеримая функция $u = u(x)$, то можно определить оператор B по формуле $Bu = B[u(x)]$. Его областью определения будем считать пространство $Y = L^r(\Omega)$. Пусть задана абстрактная функция $u(t)$, принимающая значения в Y . Применив при каждом $t \in [0, T]$ оператор B , получим новую функцию $Bu(t)$. Тем самым определен оператор, который будем обозначать той же буквой B и считать определенным на пространстве $\mathcal{Y} = L^r(0, T; Y)$. Для так определенного оператора B справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 2.2. *Оператор B действует из пространства Y в Y' и является непрерывным, ограниченным и равномерно монотонным:*

$$(Bu - Bv, u - v) \geq c_2\|u - v\|_Y^r, \quad u, v \in Y.$$

Теми же свойствами он обладает как оператор из $\mathcal{Y}$ в $\mathcal{Y}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойство монотонности является непосредственным следствием свойства 1B функции $B(u)$. Аналогично, ограниченность оператора B вытекает из условия 2B. Его непрерывность есть следствие ограниченности как оператора суперпозиции, что завершает доказательство леммы.

Введем функцию $\Gamma(u) = \int_0^u s\beta(s) ds$, где $\beta(u) = B'(u)$. Приведем ее свойства.

ЛЕММА 2.3. *Функция $\Gamma(u)$ удовлетворяет следующим условиям роста:*

$$c_3|u|^r \leq \Gamma(u) \leq C(1 + |u|^r), \quad c_3 > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя по частям, получаем формулу $\Gamma(u) = uB(u) - \int_0^u B(s) ds$. Применив условие $2B$ на рост функции $B(u)$, приходим к правому неравенству леммы.

Чтобы вывести левое неравенство, рассмотрим приращение

$$\Gamma(u) - \Gamma(v) = \int_v^u sB'(s) ds = uB(u) - vB(v) - \int_v^u B(s) ds.$$

Последний интеграл оценим сверху, считая для определенности $0 < v < u$. Так как функция $B(s)$ монотонно возрастает, то $\int_v^u B(s) ds \leq (u - v)B(u)$. Отсюда для значений $u \leq 2v$ получаем в соответствии с условием $1B$

$$\Gamma(u) - \Gamma(v) \geq v[B(u) - B(v)] \geq (u - v)[B(u) - B(v)] \geq c_2|u - v|^r.$$

Полагая здесь $v = u/2$, что допустимо, приходим к оценке $\Gamma(u) \geq c_3|u|^r$. Аналогичная выкладка справедлива для отрицательных значений аргумента, что завершает доказательство леммы.

При использовании метода монотонности важную роль играют выпуклые функции, так как они порождают выпуклые функционалы. Введенные выше функции $B(u)$ и $\Gamma(u)$ выпуклыми быть не обязаны. Однако некоторая их композиция дает выпуклую функцию. Из леммы 2.1, в частности, следует, что функция $B(u)$ отображает вещественную ось на себя.

По условию $1B$ эта функция строго монотонна и поэтому имеет обратную функцию $B^{(-1)}$, которая определена на всей числовой оси. Составим композицию $\gamma(U) = \Gamma[B^{(-1)}(U)]$. Если считать $U = B(u)$, то получаем тождество $\gamma[B(u)] = \Gamma(u)$, которое удобно использовать в таком виде:

$$\gamma(U) = \Gamma(u), \quad U = B(u). \quad (2.1)$$

ЛЕММА 2.4. *Функция $\gamma(U)$ является выпуклой и удовлетворяет условию роста*

$$|\gamma(U)| \leq C(1 + |U|^{r'}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию функция $B(u)$ непрерывно дифференцируема и строго монотонно возрастает. Отсюда следует, что ее производная $B'(u)$ положительна почти всюду на оси $\mathbb{R}^1$. В частности, почти всюду определена функция $[\beta(u)]^{-1}$, и потому верна формула

$$\gamma'(U) = \frac{d\Gamma}{du} \left(\frac{dB}{du} \right)^{-1} = u\beta(u)[\beta(u)]^{-1} = u = B^{(-1)}(U).$$

Функция $B^{(-1)}(U)$, являясь обратной к непрерывной строго монотонно возрастающей функции, сама непрерывна и монотонно возрастает, что является достаточным для выпуклости функции $\gamma(U)$. Так как функция γ определяется через функцию Γ , то можно использовать лемму 2.3, что дает

$$|\gamma(U)| = |\Gamma[B^{(-1)}(U)]| \leq C(1 + |B^{(-1)}(U)|^r). \quad (2.2)$$

Из леммы 2.1 следует неравенство $|B(u)| \geq c_2|u|^{r-1}$, которое можно представить в виде $|U| \geq c_2|B^{(-1)}(U)|^{r-1}$, откуда $|B^{(-1)}(U)|^r \leq C|U|^{r'}$. Подставляя это неравенство в (2.2), получаем последнее утверждение леммы.

При изучении уравнений с частными производными, как правило, одного метода монотонности недостаточно, и приходится дополнять его методом компактности. К рассматриваемым здесь дважды нелинейным уравнениям применить известные теоремы о компактности не удастся. Это является побудительным мотивом для формулировки и доказательства следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2.1 (теорема о компактности). *Пусть выполнены сформулированные ранее условия на пространства $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, и пусть задана последовательность функций u_N , $N = 1, 2, \dots$, со свойствами:*

- (a) $\sup_N \|u_N\|_{\mathcal{X}} = M_0 < \infty$;
- (b) $\sup_{0 < \sigma < h} \sup_N \|u_N(t + \sigma) - u_N(t)\|_{\mathcal{Y}} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$.

Здесь функция $u_N(t + \sigma)$ считается продолженной нулем, если $t + \sigma > T$. Тогда последовательность u_N компактна в пространстве $L^s(Q)$, где $s = \min(p, r)$ и $Q = \Omega \times (0, T)$. Это значит, что существует подпоследовательность, снова обозначаемая u_N , и функция $u \in L^s(Q)$ такие, что $u_N \rightarrow u$ при $N \rightarrow \infty$ в норме пространства $L^s(Q)$. В частности, $u_N \rightarrow u$ почти всюду в Q .

Доказательство основано на следующем утверждении о компактности множества абстрактных функций на отрезке.

ТЕОРЕМА 2.2. *Пусть E – сепарабельное банахово пространство, и пусть задана последовательность $u_N \in L^q(0, T; E)$, $1 \leq q < \infty$, $N = 1, 2, \dots$, удовлетворяющая условиям:*

- 1) $\sup_N \|u_N\|_{L^q(0, T; E)} = M < \infty$;
- 2) $\sup_{0 < \sigma < h} \sup_N \|u_N(t + \sigma) - u_N(t)\|_{L^q(0, T; E)} \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$;
- 3) *значения интегралов $\int_{\tau}^t u_N(\sigma) d\sigma$ принадлежат компактному множеству K пространства E для всех $0 \leq t, \tau \leq T$.*

Тогда последовательность u_N компактна в пространстве $L^q(0, T; E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого достаточно малого $h > 0$ построим вспомогательную последовательность $u_{Nh}(t) = \frac{1}{h} \int_0^h u_N(t + \tau) d\tau$. Убедимся, что новая последовательность компактна в пространстве $C(0, T; E)$. Оценим приращения

$$\|u_{Nh}(t + \sigma) - u_{Nh}(t)\|_E \leq \frac{1}{h} \int_0^h \|u_N(t + \tau + \sigma) - u_N(t + \tau)\|_E d\tau.$$

После замены $t + \tau = \rho$ и применения неравенства Гёльдера с показателями q , $q' = q/(q - 1)$ получаем

$$\|\Delta_{\sigma} u_{Nh}\|_E \leq h^{-1/q} \left(\int_t^{t+h} \|\Delta_{\sigma} u_N(\rho)\|_E^q d\rho \right)^{1/q} \leq h^{-1/q} \|\Delta_{\sigma} u_N\|_{L^q(0, T; E)}.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_N \|\Delta_{\sigma} u_{Nh}\|_E \leq h^{-1/q} \sup_N \|\Delta_{\sigma} u_N\|_{L^q(0, T; E)} \rightarrow 0 \quad (\sigma \rightarrow 0).$$

Это соотношение показывает, что семейство функций $u_{Nh}(t)$ равностепенно непрерывно по t в норме пространства E в соответствии с условием 2) теоремы. Аналогично проверяется, что семейство $u_{Nh}(t)$ равномерно по N ограничено в $C(0, T; E)$. Убедимся еще, что функции $u_{Nh}(t)$ принимают значения в компактном множестве пространства E . Представим их в виде

$$u_{Nh}(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u_N(\sigma) d\sigma.$$

Из условия 3) теоремы следует, что функции $u_{Nh}(t)$ принимают значения в множестве $\frac{1}{h}K$, которое является компактным в E для каждого фиксированного $h > 0$ вместе с множеством K . Подведем итог. При каждом фиксированном $h > 0$ последовательность $u_{Nh}(t)$ равномерно ограничена в пространстве $C(0, T; E)$, равностепенно непрерывна по t , определена на компакте $[0, T]$ и принимает значения в компактном множестве пространства E . Этого достаточно, чтобы применить обобщенную теорему Арцела, согласно которой множество функций $u_{Nh}(t)$ компактно в пространстве $C(0, T; E)$. Тем более это множество компактно в объемлющем пространстве $L^q(0, T; E)$.

Остается показать, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $h > 0$ такое, что множество $\{u_{Nh}\}$ является компактной ε -сетью для исходного множества $\{u_N\}$ в пространстве $L^q(0, T; E)$. Для этого оценим разность

$$\begin{aligned} \|u_{Nh} - u_N\|_{L^q(0, T; E)}^q &= \frac{1}{h^q} \int_0^T \left\| \int_0^h (u_N(t + \sigma) - u_N(t)) d\sigma \right\|_E^q dt \\ &\leq \frac{1}{h^q} \int_0^T \left(\int_0^h \|u_N(t + \sigma) - u_N(t)\|_E d\sigma \right)^q dt. \end{aligned}$$

Применяя к внутреннему интегралу неравенство Гёльдера с показателями q, q' и меняя порядок интегралов, получаем

$$\begin{aligned} \|u_{Nh} - u_N\|_{L^q(0, T; E)}^q &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^T \|u_N(t + \sigma) - u_N(t)\|_E^q dt d\sigma \\ &\leq \sup_{0 < \sigma < h} \|u_N(t + \sigma) - u_N(t)\|_{L^q(0, T; E)}^q. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sup_N \|u_{Nh} - u_N\|_{L^q(0, T; E)} \leq \sup_{0 < \sigma < h} \sup_N \|u_N(t + \sigma) - u_N(t)\|_{L^q(0, T; E)}.$$

Согласно условию 2) последнее выражение стремится к нулю вместе с $h \rightarrow 0$. Это значит, что множество $\{u_N\}$ равномерно по N приближается с точностью ε множеством $\{u_{Nh}\}$, которое компактно в $L^q(0, T; E)$. Следовательно, множество $\{u_N\}$ также компактно в $L^q(0, T; E)$, что доказывает теорему 2.2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Учитывая взаимное расположение чисел p и r , рассмотрим два варианта. Пусть сначала $p \leq r$. Тогда пространство $L^r(Q)$ непрерывно вложено в $L^p(Q)$, т.е.

$$\|u\|_{L^p(Q)} \leq C_1 \|u\|_{L^r(Q)}, \quad u \in L^r(Q), \quad (2.3)$$

где постоянная C_1 не зависит от функции $u \in L^r(Q)$. Полагаем в теореме 2.2 $q = p$ и $E = L^p(\Omega)$. Проверим, что условия этой теоремы тогда выполнены. Заметим, что $L^q(0, T; E) = L^p(Q)$, и оценим норму

$$\|u_N\|_{L^q(0, T; E)} = \left(\int_0^T \|u_N(t)\|_{L^p(\Omega)}^p dt \right)^{1/p}.$$

По условию пространство X непрерывно вложено в $L^p(\Omega)$ и потому

$$\|u_N\|_{L^q(0, T; E)} \leq C \left(\int_0^T \|u_N(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} = C \|u_N\|_{L^p(0, T; X)} \leq CM_0.$$

Это доказывает первое условие теоремы 2.2. Чтобы проверить второе, напомним, что $L^q(0, T; E) = L^p(Q)$. Применив неравенство (2.3), получим

$$\|u_N(t + \sigma) - u_N(t)\|_{L^q(0, T; E)} \leq C_1 \|u_N(t + \sigma) - u_N(t)\|_{\mathcal{Y}},$$

так как $\mathcal{Y} = L^r(Q)$. Остается воспользоваться условием (b) теоремы 2.1, чтобы получить второе условие теоремы 2.2. Проверим третье условие. Для этого оценим

$$\left\| \int_{\tau}^t u_N(\sigma) d\sigma \right\|_X \leq \int_{\tau}^t \|u_N(\sigma)\|_X d\sigma \leq C \|u_N\|_{L^p(0, T; X)} \leq CM_0.$$

Это показывает, что значения оцениваемых интегралов лежат в ограниченном множестве K пространства X , которое по условию компактно вложено в $L^p(\Omega) = E$.

Следовательно, значения интегралов $\int_{\tau}^t u_N(\sigma) d\sigma$ лежат в компактном множестве K пространства E , что и требуется. Итак, выполнены все три условия теоремы 2.2, следовательно, последовательность u_N компактна в пространстве $L^p(0, T; E) = L^p(Q)$, что и утверждалось.

Пусть теперь $p > r$. Тогда справедливо неравенство

$$\|u\|_{L^r(Q)} \leq C_2 \|u\|_{L^p(Q)}, \quad (2.4)$$

где постоянная не зависит от элемента $u \in L^p(Q)$. На этот раз полагаем $q = r$ и $E = L^r(\Omega)$ в теореме 2.2. Тогда первое условие вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\|u_N\|_{L^q(0, T; E)} = \|u_N\|_{L^r(Q)} \leq C_2 \|u_N\|_{L^p(Q)} \leq C \|u_N\|_{L^p(0, T; X)} \leq CM_0.$$

Второе условие теоремы 2.2 в точности совпадает с условием (b) теоремы 2.1. Перейдем к третьему. При рассмотрении случая $p \leq r$ было установлено, что интегралы $\int_{\tau}^t u_N(\sigma) d\sigma$ лежат в компактном множестве K пространства $L^p(\Omega)$. Так как считаем $p > r$, то $L^p(\Omega)$ вложено непрерывно в $L^r(\Omega)$, и потому множество K остается компактным в пространстве $L^r(\Omega) = E$, что и требуется в третьем условии теоремы 2.2. Тем самым проверены все условия указанной теоремы. Из нее вытекает, что последовательность u_N компактна в пространстве $L^r(0, T; E) = L^r(Q)$, что завершает доказательство теоремы 2.1 о компактности.

§3. Конечномерные приближения

Сначала теорема 1.1 будет доказана при дополнительном условии на функцию $B(u)$.

4B. Производная функции $B(u)$ равномерно положительна:

$$B'(u) = \beta(u) \geq c_0 > 0.$$

В этом параграфе строятся конечномерные приближения решения задачи (1.1). Напомним, что в пространстве $Z = X \cap Y$ содержится плотное множество X_0 , состоящее из гладких функций, по крайней мере непрерывных в $\bar{\Omega}$. Из множества X_0 выделим счетную полную в X систему линейно независимых элементов $e_1, e_2, e_3, \dots$. Линейные комбинации этой системы плотны как в пространстве X , так и в $Y = L^r(\Omega)$. Ищем приближенные решения задачи (1.1) в виде суммы $u_N = \sum_{k=1}^N c_{Nk}(t)e_k$, считая функции $c_{Nk}(t)$ непрерывно дифференцируемыми. Для каждого целого $N = 1, 2, 3, \dots$ составим систему уравнений

$$(\beta(u_N)u'_N, e_m) + (Au_N, e_m) = (f, e_m), \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (3.1)$$

Дополним ее начальным условием $u_N(0) = u_{N0}$, предполагая, что последовательность $u_{N0} = \sum_{k=1}^N c_{Nk}(0)e_k$ сходится к данной функции u_0 в норме пространства $Y = L^r(\Omega)$. Отсюда следует, что последовательность $u_N(0)$ равномерно ограничена в Y , т.е.

$$\|u_N(0)\|_Y \leq C. \quad (3.2)$$

В развернутом виде система (3.1) имеет вид

$$\sum_{k=1}^N (\beta(u_N)e_k, e_m)c'_{Nk}(t) + (Au_N, e_m) = (f, e_m), \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (3.3)$$

Отсюда непосредственно видно, что получилась система обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $c_{Nk}(t)$, $k = 1, 2, \dots, N$, не разрешенная относительно производных. Учитывая, что $\beta(u)$ — числовая функция, запишем коэффициенты при $c'_{Nk}(t)$ в виде

$$\beta_{km} = (\sqrt{\beta(u_N)}e_k, \sqrt{\beta(u_N)}e_m).$$

Очевидно, что определитель из элементов β_{km} является определителем Грама системы функций $g_k = \sqrt{\beta(u_N)}e_k$. Построим линейную комбинацию этих функций

$$\sum_{k=1}^N \alpha_k g_k = \sqrt{\beta(u_N)} \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k.$$

Множитель $\beta(u_N) \geq c_0 > 0$ по условию 4B, и потому линейная комбинация $\sum_{k=1}^N \alpha_k g_k$ может обратиться в нуль только при условии, что $\sum_{k=1}^N \alpha_k e_k = 0$, откуда $\alpha_k = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots, N$, так как функции e_k по условию линейно независимы. Это показывает, что система функций g_k также линейно независима, и потому ее определитель Грама отличен от нуля. А тогда систему дифференциальных уравнений (3.3) можно привести к нормальной форме невырожденным преобразованием. Напомним еще, что функция $\beta(u)$ и оператор A непрерывны, что обеспечивает непрерывность коэффициентов системы (3.3) относительно

неизвестных функций $c_{Nk}(t)$. Изложенное выше дает возможность утверждать, что рассматриваемая система дифференциальных уравнений (3.3) разрешима при каждом $N = 1, 2, \dots$ по крайней мере на некотором интервале $[0, T_N)$. Мы пришли к следующему утверждению.

ЛЕММА 3.1. *Для каждого $N = 1, 2, \dots$ система обыкновенных дифференциальных уравнений (3.3) относительно функций $c_{Nk}(t)$ разрешима на некотором интервале $[0, T_N)$. При этом функции $c_{Nk}(t)$ как решения системы дифференциальных уравнений непрерывно дифференцируемы. Построенная по ним функция $u_N(t) = \sum_{k=1}^N c_{Nk}(t)e_k$ удовлетворяет системе уравнений (3.1).*

Чтобы полученные решения $u_N(t)$ продолжить на весь отрезок $[0, T]$, получим для них подходящую оценку. Для этого каждое уравнение системы (3.1) под номером $m = 1, \dots, N$ умножим на функцию $c_{Nm}(t)$, сложим все уравнения и результат проинтегрируем по отрезку $[0, t]$, считая $t < T_N$. В результате получим тождество

$$\int_0^t (\beta(u_N)u'_N, u_N) dt + \int_0^t (Au_N, u_N) dt = \int_0^t (f, u_N) dt. \quad (3.4)$$

Напомним, что функции e_k , составляющие решение $u_N = \sum_{k=1}^N c_{Nk}(t)e_k$, предполагаются непрерывными на $\overline{\Omega}$. Это дает возможность использовать для вычисления двойственности формулу (1.4). В частности, первое слагаемое тождества (3.4) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} \beta(u_N)u'_N u_N dx dt &= \int_{\Omega} \left(\int_{u_N(0,x)}^{u_N(t,x)} u \beta(u) du \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \Gamma[u_N(t, x)] dx - \int_{\Omega} \Gamma[u_N(0, x)] dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь использована функция $\Gamma(v) = \int_0^v u \beta(u) du$. Согласно левому неравенству леммы 2.3

$$\int_{\Omega} \Gamma[u_N(t, x)] dx \geq \int_{\Omega} c_3 |u_N(t, x)|^r dx = c_3 \|u_N(t)\|_Y^r.$$

По лемме 2.3 и неравенству (3.2)

$$\left| \int_{\Omega} \Gamma[u_N(0, x)] dx \right| \leq C \int_{\Omega} (1 + |u_N(0, x)|^r) dx = C_1 + C_2 \|u_N(0)\|_Y^r \leq C.$$

В результате для первого интеграла тождества (3.4) получаем оценку

$$\int_0^t (\beta(u_N)u'_N, u_N) dt \geq c_3 \|u_N(t)\|_Y^r - C.$$

Введем функцию $v_N(t)$, считая ее совпадающей с $u_N(t)$ на выбранном отрезке $[0, t]$ и продолженной нулем вне его. Тогда второй интеграл тождества (3.4) можно представить в виде

$$\int_0^t (Au_N, u_N) dt = \langle Av_N, v_N \rangle,$$

что дает возможность использовать условие коэрцитивности $2A$ оператора A :

$$\begin{aligned} \int_0^t (Au_N, u_N) dt &\geq c_1 \|v_N\|_{\mathcal{X}}^p - C_1 \|v_N\|_{\mathcal{Y}}^r - C_2 \\ &= c_1 \|u_N\|_{L^p(0,t;X)}^p - C_1 \|u_N\|_{L^r(0,t;Y)}^r - C_2. \end{aligned}$$

Оценим еще правую часть тождества (3.4), снова используя введенную выше функцию $v_N(t)$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t (f, u_N) dt \right| &= |\langle f, v_N \rangle| \leq \|f\|_{\mathcal{X}'} \cdot \|v_N\|_{\mathcal{X}} \\ &= C(\|u_N\|_{L^p(0,t;X)} + \|u_N\|_{L^r(0,t;Y)}) \\ &\leq \varepsilon \|u_N\|_{L^p(0,t;X)}^p + \varepsilon \|u_N\|_{L^r(0,t;Y)}^r + C(\varepsilon). \end{aligned}$$

Здесь ε — любое положительное число. Собирая вместе приведенные выше оценки отдельных слагаемых тождества (3.4), приходим к неравенству

$$c_3 \|u_N(t)\|_Y^r + (c_1 - \varepsilon) \|u_N\|_{L^p(0,t;X)}^p \leq (C_1 + \varepsilon) \int_0^t \|u_N(s)\|_Y^r ds + C(\varepsilon). \quad (3.6)$$

Введем числовую функцию $y(t) = \|u_N(t)\|_Y^r$ и выделим из (3.6) неравенство

$$c_3 y(t) \leq (C_1 + \varepsilon) \int_0^t y(s) ds + C(\varepsilon).$$

Отсюда по неравенству Гронуолла [13; гл. IV, § 4, теорема 2]

$$\int_0^t y(t) dt \leq C_1(\varepsilon).$$

Подставляя этот результат в неравенство (3.6), получаем

$$c_3 \|u_N(t)\|_Y^r + (c_1 - \varepsilon) \|u_N\|_{L^p(0,t;X)}^p \leq C_2(\varepsilon).$$

Выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, но фиксированным, приходим к оценкам

$$\|u_N\|_{L^\infty(0,t;Y)} \leq C, \quad \|u_N\|_{L^p(0,t;X)} \leq C, \quad (3.7)$$

где постоянные не зависят от параметра $t \in [0, T]$ и номера $N = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что решения $u_N(t)$ можно продолжить на весь отрезок $[0, T]$ с сохранением приведенных оценок. Из первой оценки (3.7), в частности, следует, что

$$\|u_N\|_{\mathcal{Y}}^r = \int_0^T \|u_N(t)\|_Y^r dt \leq T \|u_N\|_{L^\infty(0,T;Y)}^r \leq C.$$

Объединив ее со второй оценкой (3.7), которую представим в форме $\|u_N\|_{\mathcal{X}} \leq C$, получим, что $\|u_N\|_{\mathcal{X}} \leq C$. Напомним еще, что по условию $1A$ оператор A действует ограниченно из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}'$ и потому $\|Au_N\|_{\mathcal{X}'} \leq C$. Все указанные оценки объединим в следующем утверждении.

ЛЕММА 3.2. Решения системы (3.1) определены на всем отрезке $[0, T]$ и удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} \max_t \|u_N(t)\|_Y &\leq C, & \|u_N\|_{\mathcal{Y}} &\leq C, \\ \|u_N\|_{\mathcal{X}} &\leq C, & \|Au_N\|_{\mathcal{X}'} &\leq C. \end{aligned}$$

Здесь постоянные не зависят от номера $N = 1, 2, \dots$.

В дальнейшем существенную роль играет последовательность $U_N = Bu_N$. Отметим некоторые ее свойства.

ЛЕММА 3.3. Последовательность U_N равномерно ограничена как в пространстве $L^\infty(0, T; Y')$, так и в пространстве $\mathcal{Y}'$. Справедлива формула

$$\langle U'_N, u_N \rangle = \int_{\Omega} \Gamma[u_N(T, x)] dx - \int_{\Omega} \Gamma[u_N(0, x)] dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что по лемме 2.2 оператор $B: Y \rightarrow Y'$ ограничен, и потому из первой оценки леммы 3.2 вытекает, что $\max_t \|Bu_N\|_{Y'} \leq C$. Это соответствует равномерной ограниченности последовательности U_N в пространстве $L^\infty(0, T; Y')$. Аналогично, из второй оценки леммы 3.2 вытекает неравенство $\|Bu_N\|_{\mathcal{Y}'} \leq C$, что означает ограниченность последовательности U_N в пространстве $\mathcal{Y}'$. Остается убедиться в заключительном тождестве леммы. Так как $U'_N = \beta(u_N)u'_N$, то оно фактически совпадает с тождеством (3.5), в котором следует считать $t = T$. Это завершает доказательство леммы.

Перейдем к более тонким свойствам последовательности U_N . Пусть $t, t+h \in [0, T]$. Рассмотрим приращения $\Delta_h U_N = U_N(t+h) - U_N(t)$. Введем конечномерные пространства E_N , натянутые на первые N элементов базиса $e_1, \dots, e_N$. Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.4. Пусть $e \in E_N$. Тогда

$$|(\Delta_h U_N, e)| \leq Ch^\alpha \|e\|_Z, \quad \alpha = \min\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{r}\right).$$

Здесь постоянная не зависит от h и номера $N = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем очевидное представление

$$(\Delta_h U_N, e) = \int_t^{t+h} (U'_N(\tau), e) d\tau.$$

Согласно введенным ранее обозначениям

$$U'_N = \frac{\partial}{\partial t} B(u_N) = B'(u_N)u'_N = \beta(u_N)u'_N.$$

В результате тождество (3.1) для всякого элемента $e \in E_N$ можно представить в виде

$$(U'_N, e) + (Au_N, e) = (f, e), \quad e \in E_N. \quad (3.8)$$

Выразим отсюда первое слагаемое и подставим в формулу для $(\Delta_h U_N, e)$, что дает

$$(\Delta_h U_N, e) = \int_t^{t+h} (f, e) d\tau - \int_t^{t+h} (Au_N, e) d\tau. \quad (3.9)$$

Введем функцию $v(\tau)$, считая ее равной элементу e для каждого $\tau \in [t, t+h]$ и продолженной нулем вне этого отрезка. Тогда равенство (3.9) можно представить в виде

$$(\Delta_h U_N, e) = \langle f, v \rangle - \langle Au_N, v \rangle. \quad (3.10)$$

Оценим каждое слагаемое правой части:

$$\begin{aligned} |\langle f, v \rangle| &\leq \|f\|_{\mathcal{X}'} \cdot \|v\|_{\mathcal{X}} \leq C \|v\|_{\mathcal{X}}, \\ |\langle Au_N, v \rangle| &\leq \|Au_N\|_{\mathcal{X}'} \cdot \|v\|_{\mathcal{X}} \leq C \|v\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Здесь использована лемма 3.2. В результате из (3.10) следует неравенство

$$|(\Delta_h U_N, e)| \leq C \|v\|_{\mathcal{X}}. \quad (3.11)$$

Последняя норма легко вычисляется с учетом определения функции $v(t)$:

$$\|v\|_{\mathcal{X}} = \|v\|_{\mathcal{X}} + \|v\|_{\mathcal{Y}} = h^{1/p} \|e\|_X + h^{1/r} \|e\|_Y \leq h^\alpha \|e\|_Z, \quad \alpha = \min \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{r} \right).$$

Подставляя это неравенство в (3.11), получаем утверждение леммы.

ЛЕММА 3.5. Пусть h – фиксированное число, причем $|h| \leq 1$. Введем функцию $u_N(t+h)$, считая ее продолженной нулем вне отрезка $[0, T]$, и определим приращения $\Delta_h u_N = u_N(t+h) - u_N(t)$. Тогда

$$\|\Delta_h u_N\|_{\mathcal{Y}} \leq Ch^\beta, \quad \beta = \frac{\alpha}{r}.$$

Здесь постоянная не зависит от h и номера $N = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произведение

$$(\Delta_h U_N, \Delta_h u_N) = (U_N(t+h) - U_N(t), u_N(t+h) - u_N(t)).$$

Напомним, что $U_N = Bu_N$, поэтому

$$(\Delta_h U_N, \Delta_h u_N) = (Bu_N(t+h) - Bu_N(t), u_N(t+h) - u_N(t)).$$

Используем лемму 2.2 о равномерной монотонности оператора $B: Y \rightarrow Y'$, что дает оценку снизу

$$(\Delta_h U_N, \Delta_h u_N) \geq c_2 \|u_N(t+h) - u_N(t)\|_Y^r.$$

Элемент $u_N(t) = \sum_{k=1}^N c_{Nk}(t)e_k$ при каждом $t \in [0, T]$ принадлежит пространству E_N , и потому к рассматриваемому произведению можно применить лемму 3.4, полагая $e = \Delta_h u_N(t)$. Это дает оценку сверху

$$|(\Delta_h U_N, \Delta_h u_N)| \leq Ch^\alpha \|\Delta_h u_N(t)\|_Z \leq 2Ch^\alpha \|u_N(t)\|_Z.$$

Объединяя оценки снизу и сверху, получаем

$$c_2 \|u_N(t+h) - u_N(t)\|_Y^r \leq Ch^\alpha \|u_N(t)\|_Z.$$

Это неравенство интегрируем по отрезку $[0, T]$ и используем лемму 3.2, что дает

$$c_2 \int_0^T \|u_N(t+h) - u_N(t)\|_Y^r dt \leq Ch^\alpha.$$

Это есть утверждение леммы.

ЛЕММА 3.6. *Найдется функция $u(t, x) \in \mathcal{X} \cap L^\infty(0, T; Y)$ со следующими свойствами: из последовательности u_N можно извлечь подпоследовательность, снова обозначаемую через u_N , такую, что при $N \rightarrow \infty$*

- (а) $u_N \rightarrow u$ почти всюду в Q ;
- (б) $U_N \rightarrow U = Bu$ почти всюду в Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (а) есть следствие леммы 3.5 и теоремы 2.1 о компактности. Пункт (б) является следствием предыдущего, так как $U_N = Bu_N$, где B — непрерывная функция. Принадлежность $u \in \mathcal{X} \cap L^\infty(0, T; Y)$ вытекает из оценок леммы 3.2.

ЛЕММА 3.7. *Из последовательности u_N можно извлечь подпоследовательность, снова обозначаемую через u_N , такую, что при $N \rightarrow \infty$:*

- (а) $u_N \rightarrow u$ слабо в $\mathcal{X}$;
- (б) $Au_N \rightarrow W$ слабо в $\mathcal{X}'$;
- (с) $U_N \rightarrow U = Bu$ *-слабо в $L^\infty(0, T; Y')$, т.е. $\langle U_N, v \rangle \rightarrow \langle U, v \rangle$ для любого элемента $v \in L^1(0, T; Y)$; при этом $U \in L^\infty(0, T; Y')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.2 $\|u_N\|_{\mathcal{X}} \leq C$. Так как пространство $\mathcal{X}$ сепарабельно и рефлексивно, то найдется элемент $u^{(1)} \in \mathcal{X}$ такой, что $u_N \rightarrow u^{(1)}$ слабо в $\mathcal{X}$. Одновременно по лемме 3.6 $u_N \rightarrow u$ почти всюду в Q , причем $u \in \mathcal{X}$. Совпадение двух указанных пределов установлено, например, в [5; гл. II, лемма 1.19]. Тем самым $u^{(1)} = u$, что доказывает п. (а). Аналогично п. (с) следует из лемм 3.3 и 3.6. Поскольку пространство $\mathcal{X}'$ также сепарабельно и рефлексивно, то найдется элемент $W \in \mathcal{X}'$ такой, что $Au_N \rightarrow W$ слабо в $\mathcal{X}'$ при $N \rightarrow \infty$. Это доказывает п. (б) и завершает доказательство леммы.

Обозначим через $\mathcal{Y}_N$ пространство функций вида $\sum_{k=1}^N d_k(t)e_k$, $d_k \in C^1[0, T]$. И пусть $\mathcal{Y}_0 = \bigcup_{k=1}^\infty \mathcal{Y}_N$. Очевидно, что $\mathcal{Y}_0$ содержится в пространстве $\mathcal{X}$ и плотно в нем.

ЛЕММА 3.8. *Для функции $U(t) = Bu(t)$, построенной в лемме 3.6, определена производная $U'(t) = \frac{\partial}{\partial t} Bu(t)$ как элемент пространства $\mathcal{D}'(0, T; Y')$. Эта производная принадлежит пространству $\mathcal{X}'$ и удовлетворяет уравнению*

$$U' + W = f, \quad (\text{а})$$

которое понимается как равенство в пространстве $\mathcal{X}'$ и где элемент W взят из леммы 3.7. Для каждой функции $v \in \mathcal{Y}_0$ при $N \rightarrow \infty$ справедливо предельное соотношение

$$\langle U'_N, v \rangle \rightarrow \langle U', v \rangle, \quad v \in \mathcal{Y}_0. \quad (\text{б})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$; $e \in Y$. Полагаем $v = \varphi'(t)e$. Очевидно, что $v \in L^1(0, T; Y)$ и потому согласно лемме 3.7(с) при $N \rightarrow \infty$

$$\langle U_N, \varphi'(t)e \rangle \rightarrow \langle U, \varphi'(t)e \rangle.$$

Это соотношение означает, что определены производные U'_N и U' как элементы пространства $\mathcal{D}'(0, T; Y')$, причем для каждой функции $v = \varphi(t)e$, где $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$:

$$\langle U'_N, v \rangle \rightarrow \langle U', v \rangle, \quad N \rightarrow \infty. \quad (3.12)$$

Ясно, что это предельное соотношение распространяется на функции вида $v = \sum_{k=1}^M d_k(t)e_k$, если $d_k \in \mathcal{D}(0, T)$.

Пусть $v \in \mathcal{Y}_0$, т.е. $v = \sum_{k=1}^M d_k(t)e_k$. Тогда $v(t) \in E_N$ для каждого $t \in [0, T]$ и для номеров $N \geq M$. Это значит, что для указанных номеров N можно использовать тождество (3.8), полагая $e = v(t)$, $t \in [0, T]$, что после интегрирования по отрезку $[0, T]$ дает

$$\langle U'_N, v \rangle + \langle Au_N, v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad v \in \mathcal{Y}_0. \quad (3.13)$$

В элементе $v \in \mathcal{Y}_0$ выберем функции $d_k \in \mathcal{D}(0, T)$. Тогда можно использовать предельное соотношение (3.12), которое с учетом соотношения $\langle Au_N, v \rangle \rightarrow \langle W, v \rangle$, установленного в лемме 3.7, приводит к равенству

$$\langle U', v \rangle + \langle W, v \rangle = \langle f, v \rangle. \quad (3.14)$$

Учитывая плотность множества функций $v \in \mathcal{Y}_0$ указанной структуры в пространстве $\mathcal{Z}$, получаем соотношение $U' + W = f$, которое доказывает п. (а). Отсюда следует, в частности, что $U' \in \mathcal{Z}'$. Остается доказать соотношение (б). Оно уже известно для специального класса функций $v = \sum_{k=1}^M d_k(t)e_k$, если $d_k \in \mathcal{D}(0, T)$, и потому задача состоит в расширении класса допустимых множителей v . Пусть $v \in \mathcal{Y}_0$, тогда его можно использовать в тождестве (3.13). Одновременно v можно подставить в равенство (3.14). Вычитая одно из другого, получаем

$$\langle U'_N, v \rangle - \langle U', v \rangle = \langle W, v \rangle - \langle Au_N, v \rangle, \quad v \in \mathcal{Y}_0.$$

Так как правая часть стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$ в силу леммы 3.7(б), то это же верно для левой части, что доказывает п. (б) и завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 3.9. *Из последовательности U_N можно выбрать подпоследовательность, снова обозначаемую через U_N , для которой справедливы следующие соотношения:*

- (а) $U_N(0) \rightarrow U(0)$ в Y' ;
- (б) $U(0) = Bu_0$;
- (в) $U_N(T) \rightarrow U(T)$ слабо в Y' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению $U_N = Bu_N$. По построению $u_N(0) \rightarrow u_0$ в Y . Оператор $B: Y \rightarrow Y'$ непрерывен по лемме 2.2 и потому $Bu_N(0) \rightarrow Bu_0$ в пространстве Y' , т.е. $U_N(0) \rightarrow Bu_0$ в Y' . Остается убедиться, что $Bu_0 = U(0)$. По лемме 3.3 $\|U_N(0)\|_{Y'} \leq C$ и потому можно считать, что $U_N(0) \rightarrow W_0$ слабо в Y' . Пусть $E_0 = \bigcup_{N=1}^{\infty} E_N$. Введем функцию $v = (T - t)e$, полагая $e \in E_0$. Прямым вычислением убеждаемся, что для достаточно больших номеров N

$$\langle U'_N, v \rangle = \int_0^T (U_N(t), e) dt - T(U_N(0), e).$$

Очевидно, что $v \in \mathcal{Y}_0$, поэтому можно использовать лемму 3.8(б), с помощью которой в пределе при $N \rightarrow \infty$ получаем тождество

$$\langle U', v \rangle = \langle U, e \rangle - T(W_0, e).$$

Вычитая его из аналогичного тождества

$$\langle U', (T - t)e \rangle = \langle U, e \rangle - T(U(0), e),$$

получаем равенство $(W_0 - U(0), e) = 0$, $e \in E_0$. Так как множество E_0 плотно в Y , то $W_0 = U(0)$. Вспоминая определение элемента W_0 , приходим к соотношению: $U_N(0) \rightarrow U(0)$ слабо в Y' . Одновременно $U_N(0) \rightarrow Bu_0$ в Y' , как было установлено ранее. Следовательно, $U(0) = Bu_0$ и одновременно $U_N(0) \rightarrow U(0)$ в Y' . Это доказывает пп. (а) и (б). Если провести аналогичные вычисления для функции $v = te$, $e \in E_0$, то придем к соотношению: $U_N(T) \rightarrow U(T)$ слабо в Y' . Это завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 3.10. *Функция $U(t) = Bu(t)$ непрерывна на отрезке $[0, T]$ как абстрактная функция, принимающая значения в пространстве Y' , наделенном слабой топологией, и при этом $U(0) = Bu_0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t, t+h \in [0, T]$. Введем скалярную функцию $(U(t), e)$, считая $e \in Z$. Ее приращение представим в виде

$$(\Delta_h U, e) = (U(t+h) - U(t), e) = \int_t^{t+h} (U'(\tau), e) d\tau.$$

Учитывая равенство $U' = f - W$ леммы 3.8 и используя оценки леммы 3.4, приходим к неравенству

$$|(\Delta_h U, e)| \leq Ch^\alpha \|e\|_Z, \quad \alpha = \min\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{r}\right).$$

Отсюда следует непрерывность введенной функции, что соответствует непрерывности функции $U(t)$ в слабой топологии пространства Y' . Равенство $U(0) = Bu_0$ было установлено в лемме 3.9(b).

ЛЕММА 3.11. *Для построенной выше последовательности u_N справедливы следующие предельные соотношения:*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Gamma[u_N(0, x)] dx = \int_{\Omega} \Gamma[u(0, x)] dx; \quad (a)$$

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \Gamma[u_N(T, x)] dx \geq \int_{\Omega} \Gamma[u(T, x)] dx. \quad (b)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем функцию $\gamma(U)$, $U = B(u)$, определенную в § 2, и тождества (2.1):

$$\gamma(U) = \Gamma(u), \quad U = B(u).$$

В новых обозначениях соотношение (а) примет вид

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \gamma[U_N(0, x)] dx = \int_{\Omega} \gamma[U(0, x)] dx. \quad (3.15)$$

Введем функционал

$$F(U) = \int_{\Omega} \gamma[U(x)] dx,$$

считая его определенным на пространстве Y' . Лемма 2.4 показывает, что функционал F непрерывен и локально ограничен на Y' [14; гл. II, §5, п. 5.1, пример 5.1]. По лемме 3.9 $U_N(0) \rightarrow U(0)$ в Y' , следовательно, $F[U_N(0)] \rightarrow F[U(0)]$ при $N \rightarrow \infty$. Это в точности соответствует равенству (3.15), что доказывает п. (а) леммы.

Перейдем к (b). Снова используя функцию $\gamma(U)$, запишем (b) в виде

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \gamma[U_N(T, x)] dx \geq \int_{\Omega} \gamma[U(T, x)] dx. \quad (3.16)$$

В терминах функционала $F(U)$ соотношение (3.16) имеет вид:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} F[U_N(T)] \geq F[U(T)], \quad (3.17)$$

где $U_N(T) \rightarrow U(T)$ слабо в Y' по лемме 3.9.

Соотношение (3.17) называется слабой полунепрерывностью снизу функционала F и выполняется для непрерывных локально ограниченных выпуклых функционалов [14; гл. III, §8, п. 8.4, теорема 8.10]. Непрерывность и локальная ограниченность рассматриваемого функционала F уже отмечалась выше. Его выпуклость есть следствие выпуклости функции $\gamma(U)$, через которую он определяется [15; гл. 9, §2, п. 2.2, следствие 2.1]. Тем самым выполнены все условия для соотношения (3.17), которое соответствует п. (b) леммы, что завершает ее доказательство.

§ 4. Предельный переход

В предыдущем параграфе созданы предпосылки для доказательства следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1, а также дополнительное условие 4В, имеющее вид: $B'(u) \geq c_0 > 0$. Тогда верно заключение теоремы 1.1 о существовании решения задачи (1.1).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При дополнительном условии 4В в предыдущем параграфе построена последовательность функций u_N и связанная с ней последовательность $U_N = Bu_N$. Для них установлены следующие факты:

$$u_N \rightarrow u \text{ слабо в } \mathcal{X}, \quad Au_N \rightarrow W \text{ слабо в } \mathcal{X}'. \quad (4.1)$$

Кроме того, определена функция $U(t) = Bu(t)$, которая является непрерывной и принимает значения в пространстве Y' , наделенном слабой топологией, причем $Bu(0) = Bu_0$. Это доказывает шп. (а) и (d) теоремы 1.1. Далее, по лемме 3.8 для функции $U(t)$ определена производная $U'(t) = \frac{\partial}{\partial t} Bu$, которая удовлетворяет тождеству

$$W + \frac{\partial}{\partial t} Bu = f \quad (4.2)$$

как равенству в пространстве $\mathcal{X}'$. Остается убедиться, что $W = Au$. В качестве вспомогательного шага вычислим произведение $\langle Au_N, u_N \rangle$. Используя тождество (3.8) для $e = u_N(t)$, после интегрирования по отрезку $[0, T]$ получаем

$$\langle Au_N, u_N \rangle = \langle f, u_N \rangle - \langle U'_N, u_N \rangle.$$

Для произведения $\langle U'_N, u_N \rangle$ применим лемму 3.3, что дает

$$\langle Au_N, u_N \rangle = \langle f, u_N \rangle - \int_{\Omega} \Gamma[u_N(T, x)] dx + \int_{\Omega} \Gamma[u_N(0, x)] dx.$$

Используя соотношения леммы 3.11, получаем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \langle Au_N, u_N \rangle &\leq \langle f, u \rangle - \int_{\Omega} \Gamma[u(T, x)] dx + \int_{\Omega} \Gamma[u(0, x)] dx \\ &= \langle f, u \rangle - \langle U', u \rangle = \langle W, u \rangle. \end{aligned}$$

Итак,

$$\overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \langle Au_N, u_N \rangle \leq \langle W, u \rangle. \quad (4.3)$$

Напомним одно свойство монотонных операторов [5; гл. 3, §1, лемма 1.3]. Если выполнены соотношения (4.1) и (4.3) и при этом оператор A является непрерывным и монотонным, то справедливо равенство $W = Au$. Подставляя его в (4.2), получаем тождество $Au + \frac{\partial}{\partial t} Bu = f$, которое доказывает пп. (b) и (c) теоремы 1.1, что завершает доказательство теоремы 4.1.

Остается избавиться от дополнительного условия $4B$ этой теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Итак, пусть выполнены только условия теоремы 1.1. В частности, функция $B(u)$ считается монотонно возрастающей. Отсюда следует, что ее производная неотрицательна. Введем для каждого $\varepsilon > 0$ новую функцию $B_\varepsilon(u) = B(u) + \varepsilon u$. Тогда очевидно, что $B'_\varepsilon(u) \geq \varepsilon > 0$, т.е. для функции $B_\varepsilon(u)$ выполнено дополнительное условие $4B$ при сохранении остальных условий $1B$ – $3B$, и потому задача

$$Au_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial t} B_\varepsilon u_\varepsilon = f, \quad Bu_\varepsilon(0) = Bu_0, \quad (4.4)$$

имеет решение u_ε со свойствами, описанными в теореме 1.1. Устремим ε к нулю и убедимся, что предельная функция определена и дает решение задачи (1.1). Для этого оценим функции u_ε так же, как последовательность u_N . Стоит отметить, что дополнительное условие $B'(u) \geq c_0 > 0$ было использовано только при доказательстве существования функций u_N и не применялось для вывода оценок на эти функции.

Проверим основные этапы этого нового доказательства. Напомним, что тождество (4.4) рассматривается как равенство в пространстве $\mathcal{Z}'$. В частности, это тождество можно умножать на функцию $u_\varepsilon \in \mathcal{Z}$, что приводит к равенству

$$\begin{aligned} \langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle + \int_{\Omega} \Gamma[u_\varepsilon(T, x)] dx - \int_{\Omega} \Gamma[u_\varepsilon(0, x)] dx \\ + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} u_\varepsilon^2(T, x) dx - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega} u_0^2(x) dx = \langle f, u_\varepsilon \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда по аналогии с леммами 3.2 и 3.3 получаем оценки

$$\begin{aligned} \sup_t \|u_\varepsilon\|_Y &\leq C, \quad \|u_\varepsilon\|_{\mathcal{Z}} \leq C, \\ \|Au_\varepsilon\|_{\mathcal{Z}'} &\leq X, \quad \sup_t \|Bu_\varepsilon\|_{Y'} \leq C. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Это обеспечивает соответствующие слабые сходимости, которые представим в виде

$$\begin{aligned} u_\varepsilon \rightarrow u \text{ слабо в } \mathcal{X}, \quad Au_\varepsilon \rightarrow W \text{ слабо в } \mathcal{X}', \\ U_\varepsilon \equiv B_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow W_0 \text{ *-слабо в } L^\infty(0, T; Y'). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Таких сходимостей недостаточно для предельного перехода в уравнениях (4.4), поэтому стремимся получить еще сходимость последовательности u_ε почти всюду в Q . Для этого составим произведение

$$(\Delta_h U_\varepsilon, \Delta_h u_\varepsilon) = (U_\varepsilon(t+h) - U_\varepsilon(t), u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(t)).$$

Отсюда по аналогии с леммой 3.5 получаем оценку снизу

$$(\Delta_h U_\varepsilon, \Delta_h u_\varepsilon) \geq c_2 \|u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(t)\|_Y^r.$$

Одновременно рассматриваемое произведение можно оценить сверху, представив его в виде

$$(\Delta_h U_\varepsilon, \Delta_h u_\varepsilon) = \int_t^{t+h} (U'_\varepsilon(\tau), \Delta_h u_\varepsilon) d\tau.$$

Поступая далее по аналогии с леммами 3.4, 3.5 и учитывая равномерные оценки (4.5), приходим к неравенству

$$\|u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(t)\|_{\mathcal{Y}} \leq Ch^\beta, \quad \beta > 0.$$

Это дает возможность применить теорему 2.1 о компактности, из которой вытекает, что

$$\begin{aligned} u_\varepsilon \rightarrow u \text{ п.в. в } Q, \quad u \in \mathcal{X} \cap L^\infty(0, T; Y), \\ U_\varepsilon \rightarrow U = Bu \text{ п.в. в } Q. \end{aligned}$$

По аналогии с леммой 3.8 убеждаемся, что определена производная

$$U'(t) = \frac{\partial}{\partial t} Bu(t)$$

как элемент пространства $\mathcal{D}'(0, T; Y')$ и при этом

$$W + U' = f. \quad (4.7)$$

Отсюда, в частности, следует, что $U' \in \mathcal{X}'$. Кроме того,

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(0) \rightarrow U(0) = Bu_0 \text{ в } Y', \\ U_\varepsilon(T) \rightarrow U(T) \text{ слабо в } Y'. \end{aligned}$$

Это дает возможность по аналогии с доказательством теоремы 4.1 получить соотношение

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle Au_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle \leq \langle W, u \rangle. \quad (4.8)$$

Здесь элементы W, u взяты из (4.6). Так как A — непрерывный монотонный оператор, то из (4.8) вытекает, что $W = Au$. Подставляя это равенство в (4.7), получаем тождество $Au + \frac{\partial}{\partial t} Bu = f$, которое показывает, что построенная функция $u(t, x)$ дает решение уравнения (1.1). В ходе доказательства были установлены остальные свойства этой функции, сформулированные в теореме 1.1, что завершает доказательство теоремы.

§ 5. Приложения к параболическим уравнениям высокого порядка

Сформулированная в § 1 теорема 1.1 достаточно легко применяется для доказательства разрешимости нелинейных параболических уравнений вида

$$\sum_{|\alpha| \leq m} D^\alpha A_\alpha(t, x, u, \dots, D^m u) + \beta(u) \frac{\partial u}{\partial t} = f, \quad (5.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad m \geq 1.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс из целых неотрицательных чисел; $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$; $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$; $D_i = \partial/\partial x_i$ ($i = 1, \dots, n$). Через $D^k u$ обозначается вектор из частных производных $D^\alpha u$ с условием $|\alpha| = k$. Уравнение рассматривается в ограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, обеспечивающей применимость теорем вложения Соболева. Дифференциальное уравнение (5.1) дополняется граничными условиями, которые выделяют в пространстве $W_p^m(\Omega)$ с некоторым $p > 1$ замкнутое подпространство X . Предполагается, что

$$\overset{\circ}{W}_p^m(\Omega) \subset X \subset W_p^m(\Omega). \quad (5.2)$$

Напомним некоторые возможности. Случай $X = \overset{\circ}{W}_p^m(\Omega)$ соответствует однородным условиям Дирихле

$$D^\gamma u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (|\gamma| \leq m-1).$$

В качестве плотного множества гладких функций можно выбрать $X_0 = C_0^m(\Omega)$.

Если же считать $X = W_p^m(\Omega)$, то в качестве дополнительных условий получают так называемые естественные граничные условия, выписывать которые довольно затруднительно. В случае $m = 1$ они приводят к нелинейному аналогу граничных условий Неймана. В качестве плотного в X множества гладких функций можно выбрать $X_0 = C^m(\overline{\Omega})$. В целом следует признать, что детальное описание допустимых граничных условий еще не разработано.

Итак, считаем, что граничные условия порождают банахово пространство X , удовлетворяющее (5.2). По нему строим пространство $\mathcal{X} = L^p(0, T; X)$ абстрактных функций, определенных на отрезке $[0, T]$ и принимающих значения в X . Предполагается, что операторы суперпозиции

$$A_\alpha u \equiv A_\alpha(t, x, u(t, x), \dots, D^m u(t, x))$$

переводят каждую функцию $u \in \mathcal{X}$ в элемент из $L^{p'}(Q) = L^{p'}(0, T; L^{p'}(\Omega))$. По известной теореме об операторе суперпозиции [2; гл. I, § 2, теорема 2.1] это обеспечивает непрерывность и ограниченность операторов $A_\alpha: \mathcal{X} \rightarrow L^{p'}(Q)$, что достаточно для непрерывности и ограниченности оператора

$$Au = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(t, x, u, \dots, D^m u),$$

рассматриваемого как оператор из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}'$. Именно этот оператор предполагается монотонным и коэрцитивным в смысле условий 1А–2А § 1. Напомним наиболее

известные примеры дифференциальных выражений, порождающих такие операторы:

$$\begin{aligned} Au &= \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D^\alpha [a_\alpha(t, x) |D^\alpha u|^{p-2} D^\alpha u], \\ Au &= \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D^\alpha [a_\alpha(t, x) |D^m u|^{p-2} D^\alpha u]. \end{aligned}$$

Здесь функции $a_\alpha(t, x) \in L^\infty(Q)$ и удовлетворяют условию $a_\alpha(t, x) \geq c_0 > 0$. Если указанные дифференциальные выражения дополнить одним из описанных ранее граничных условий, то получится монотонный коэрцитивный оператор, действующий из пространства $\mathcal{X} = L^p(0, T; X)$ в $\mathcal{X}'$.

Перейдем к описанию допустимых функций $\beta(u)$. Необходимые условия на них — это неотрицательность и степенной рост при $|u| \rightarrow \infty$. Наиболее простой функцией, подходящей под указанные условия, является $\beta(u) = |u|^\nu$, $\nu > 0$. По $\beta(u)$ строим функции

$$\begin{aligned} B(u) &= \int_0^u \beta(s) ds = (\nu + 1)^{-1} |u|^\nu u, \\ \Gamma(u) &= \int_0^u s \beta(s) ds = (\nu + 2)^{-1} |u|^{\nu+2}, \end{aligned}$$

для которых очевидно выполнение условий $1B-3B$ с показателем $r = \nu + 2$. С указанным r вводим пространство $Y = L^r(\Omega)$, участвующее в формулировке теоремы 1.1.

В приведенном примере функция $\beta(u)$ имеет точно один нуль. Это совершенно не обязательно. Например, подходит функция $\beta(u) = |u|^\nu |u - 1|^\mu$, где $\nu, \mu > 0$. Непосредственным обобщением последнего примера является функция

$$\beta(u) = |u - b_1|^{\nu_1} |u - b_2|^{\nu_2} \dots |u - b_l|^{\nu_l},$$

где числа b_i ($i = 1, \dots, l$) произвольны, а степени ν_i положительны. Тогда число $r = 2 + \sum_{i=1}^l \nu_i$. Очевидно, что подходят также линейные комбинации функций указанной структуры с положительными коэффициентами.

До сих пор не использовалась возможность сузить область определения оператора A на пространство $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$. Это имеет смысл при малых степенях p и больших r , когда пространство $X = W_p^m(\Omega)$ не вкладывается в $Y = L^r(\Omega)$. Тогда есть возможность увеличить степени младших составляющих оператора A . Например, дифференциальное выражение

$$Au = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D^\alpha (|D^\alpha u|^{p-2} D^\alpha u) + |u|^{s-2} u$$

порождает непрерывный монотонный оператор из $\mathcal{X} = L^p(0, T; \overset{\circ}{W}_p^m(\Omega))$ в $\mathcal{X}'$ при условии, что $s \leq p$. Однако этот оператор остается непрерывным при $s > p$ на множестве $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$, если $s \leq r$.

В заключение приведем пример задачи, для которой выполняются все условия теоремы существования решения:

$$\sum_{|\alpha|=m} (-1)^m D^\alpha (|D^\alpha u|^{p-2} D^\alpha u) + |u|^{r-2} \frac{\partial u}{\partial t} = f(t, x),$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad D^\gamma u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (|\gamma| \leq m-1).$$

Здесь степени $p > 1$ и $r \geq 2$ произвольны. Если $u_0 \in L^r(\Omega)$, $f \in L^{p'}(0, T; W_p^{-m}(\Omega)) + L^{r'}(Q)$, то по теореме 1.1 эта задача имеет решение $u(t, x)$ с указанными в теореме свойствами. Напомним, что для уравнений второго порядка, т.е. для случая $m = 1$, теория разрешимости указанной задачи была разработана Равьяром и детально изложена в монографии Лионса [1; гл. 4, § 1].

Список литературы

1. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
2. Скрыпник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
3. Дубинский Ю. А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Совр. пробл. матем. Т. 9. М.: ВИНТИ, 1976. С. 5–130.
4. Дубинский Ю. А. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения // Совр. пробл. матем. Т. 37. М.: ВИНТИ, 1990. С. 89–166.
5. Гаевский Х., Грегер К., Захарис К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1978.
6. Иванов А. В. Квазилинейные параболические уравнения, допускающие двойное вырождение // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 6. С. 114–130.
7. Иванов А. В. Гёльдеровские оценки для уравнений типа быстрой диффузии // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. № 4. С. 101–142.
8. Иванов А. В., Мкртычян П. З., Яегер В. Существование и единственность регулярного решения первой начально-краевой задачи для некоторого класса дважды нелинейных параболических уравнений // Записки науч. сем. ПОМИ. 1994. Т. 213. С. 48–65.
9. Лаптев Г. И. Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 9. С. 83–112.
10. Bernis F. Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains // Math. Ann. 1988. V. 279. P. 373–394.
11. Bernis F. Finite speed of propagation and asymptotic rates for some nonlinear higher order parabolic equations with absorption // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. 1986. V. 104. № 1–2. P. 1–19.
12. Grange O., Mignot F. Sur la résolution d'une équation et d'une inéquation paraboliques non linéaires // J. Funct. Anal. 1972. V. 11. P. 77–92.
13. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. М.: Мир, 1965.
14. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972.
15. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.