Общероссийский математический портал

В. А. Мирзоян, Классификация Рис-полупараллельных гиперповерхностей в евклидовых пространствах, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 9, 65–80

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:39:23

УДК 514.752

В. А. Мирзоян

Классификация Ріс-полупараллельных гиперповерхностей в евклидовых пространствах

Дается полная локальная классификация и геометрическое описание гиперповерхностей с полупараллельным тензором Риччи в евклидовых пространствах.

Библиография: 23 названия.

§ 1. Введение

Римановы Ріс-полупараллельные пространства, характеризуемые полупараллельностью тензора Риччи R_1 ($R(X, Y) \cdot R_1 = \nabla_X \nabla_Y R_1 - \nabla_Y \nabla_X R_1 - \nabla_{[X, Y]} R_1 = 0$), являются естественными обобщениями симметрических ($\nabla R = 0$, где R – тензор кривизны), эйнштейновых ($R_1 = \lambda I$, $\lambda = \text{const}$), полусимметрических ($R(X, Y) \cdot R = 0$) пространств и римановых пространств с параллельным тензором Риччи ($\nabla R_1 = 0$). В этой связи Ріс-полупараллельные пространства и их изометрические погружения стали предметом интенсивного исследования на протяжении последних 30 лет (см. обзор [1]). Общая структурная теорема для Ріс-полупараллельных пространств была доказана автором в [2]. Она гласит, что риманово пространство M класса C^∞ удовлетворяет условию $R(X, Y) \cdot R_1 = 0$ тогда и только тогда, когда M либо двумерно, либо эйнштейново, либо полуэйнштейново, либо локально является произведением таких пространств.

Классификационные задачи были решены сначала для гиперповерхностей, удовлетворяющих некоторым более сильным условиям, чем условие Ріс-полупараллельности. Локальная классификация эйнштейновых гиперповерхностей в евклидовом пространстве E_n давно известна (см. [3; гл. 7, § 5, теорема 5.3]). В пространстве постоянной кривизны $M_n(c)$ ($c \neq 0$) локальная классификация эйнштейновых гиперповерхностей была дана А. Фиалковым [4]. Полные эйнштейновы гиперповерхности были классифицированы П. Раяном [5], который также классифицировал гиперповерхности с параллельным тензором Риччи в $M_n(c)$ [6]. В E_n полные гиперповерхности с типовым числом $t(x) \geq 3$ и удовлетворяющие условию $R(X, Y) \cdot R = 0$ были классифицированы К. Номидзу [7]. Полная классификация таких гиперповерхностей в E_n (без условия $t(x) \geq 3$) была дана З. Саббо [8]. Локальная классификация гиперповерхностей, удовлетворяющих условию $R(X, Y) \cdot R = 0$, в E_n была получена Й. Депри [9] на основе классификации гиперповерхностей, удовлетворяющих условию $\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha_2 = 0$, где α_2 – вторая фундаментальная форма, а $\bar{R}(X, Y)$ – оператор кривизны связности Ван дер Вардена–Бортолотти. Подмногообразия, удовлетворяющие условию $\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha_2 = 0$,

называются *полупараллельными* [9] или *полусимметрическими* [10]. В силу импликации $\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha_2 = 0 \Rightarrow R(X, Y) \cdot R = 0$ полупараллельные подмногообразия имеют внутреннюю геометрию полусимметрического риманова пространства. В пространствах ненулевой постоянной кривизны гиперповерхности, удовлетворяющие условию $R(X, Y) \cdot R = 0$, классифицированы П. Раяном [5]. Более того, в [6] им было доказано, что в $M_n(c)$ ($c \neq 0$) для гиперповерхностей условия $R(X, Y) \cdot R = 0$ и $R(X, Y) \cdot R_1 = 0$ эквивалентны.

В настоящей работе дается полная локальная классификация и геометрическое описание Ric-полупараллельных гиперповерхностей в евклидовом пространстве E_{m+1} (теорема 1), что в совокупности с указанными выше классификационными результатами других авторов завершает классификацию Ric-полупараллельных гиперповерхностей в пространствах постоянной кривизны.

Необходимо также отметить, что на протяжении последних 15 лет в решении задач классификации, геометрического описания и изучения общих свойств различных частных классов Ric-полупараллельных подмногообразий коразмерности ≥ 2 в пространствах постоянной кривизны также достигнут значительный прогресс (см. [10]–[15] и цитированную в этих работах литературу).

§ 2. Формулировка результатов

Приведем сначала определение полуэйнштейновых пространств и конусов с многомерными плоскими образующими над римановыми пространствами.

Пусть M – риманово пространство, а $x \in M$ – произвольная точка. Подпространство $T_x^{(0)}$ касательного пространства $T_x(M)$, определенное равенством $T_x^{(0)} = \{X \in T_x(M) : R(X, Y) = 0 \quad \forall Y \in T_x(M)\}$, называется *пространством дефектности* в точке x , а его размерность – *индексом дефектности*. Пространство $T_x^{(0)}$ было определено С. Чженем и Н. Кюйпером [16]. Распределение $T^{(0)}$ инволютивно и вполне геодезично; $T_x^{(0)}$ всегда содержится в подпространстве собственных векторов тензора Риччи R_1 , отвечающих нулевому собственному значению. Его ортогональное дополнение $T_x^{(1)}$ в $T_x(M)$ инвариантно относительно всех операторов $R(X, Y)$ и тензора R_1 .

Риманово пространство M с ненулевым индексом дефектности в каждой точке x называется *полуэйнштейновым*, если тензор Риччи R_1 на каждом инвариантном подпространстве $T_x^{(1)}$ имеет только одно ненулевое собственное значение [2].

Пусть R^+ обозначает положительную полуось, и пусть $\widetilde{M}$ – некоторое риманово пространство с метрикой $d\tilde{s}^2$. Многообразие $M = R^+ \times \widetilde{M}$, наделенное метрикой $ds^2 = dt^2 + t^2 d\tilde{s}^2$, называется *конусом* (с одномерными образующими) над $\widetilde{M}$ (см. [17]). Такие метрики значительно раньше были получены П. А. Широковым [18].

Понятие конуса допускает следующее обобщение. Пусть $C_1, \dots, C_k$ – ненулевые постоянные, C – произвольная постоянная, и пусть неравенство $C_a x^a + C > 0$ определяет в k -мерном евклидовом пространстве E_k с декартовыми координатами $x^1, \dots, x^k$ некоторое полупространство, которое мы будем обозначать через E_k^+ . Если $\widetilde{M}$ – риманово многообразие с метрикой $d\tilde{s}^2$, то многообразие $M = E_k^+ \times \widetilde{M}$,

наделенное метрикой

$$ds^2 = \sum_{a=1}^k (dx^a)^2 + (C_a x^a + C)^2 d\tilde{s}^2, \quad (2.1)$$

будем называть конусом с k -мерными ($k \geq 1$) плоскими образующими над $\widetilde{M}$. Вершиной конуса является гиперплоскость в E_k , заданная уравнением $C_a x^a + C = 0$. Если в E_k определить полупространство E_k^- неравенством $C_a x^a + C < 0$ и произведение $E_k^- \times \widetilde{M}$ снабдить метрикой (2.1), то получим конус над $\widetilde{M}$, изометричный конусу $E_k^+ \times \widetilde{M}$. Для определенности мы будем рассматривать только конус $E_k^+ \times \widetilde{M}$.

Метрика (2.1) является частным случаем полуприводимой римановой метрики, определенной Г. И. Кручковичем [19] (см. также [20]).

Многообразие $E_k \times \widetilde{M}$ (E_k и $\widetilde{M}$ — как и выше), наделенное метрикой

$$ds^2 = \sum_{a=1}^k (dx^a)^2 + C^2 d\tilde{s}^2, \quad (2.2)$$

где $C = \text{const} (\neq 0)$, является приводимым пространством, и мы будем называть его (как это делается при $C^2 = 1$) цилиндром с k -мерными ($k \geq 1$) плоскими образующими над $\widetilde{M}$.

Справедлива следующая классификационная

ТЕОРЕМА 1. *Гиперповерхность M в евклидовом пространстве E_{m+1} удовлетворяет условию $R(X, Y) \cdot R_1 = 0$ тогда и только тогда, когда она является открытой частью либо*

- (1) гиперсферы S^m в E_{m+1} , либо
- (2) гиперконуса вращения C^m в E_{m+1} , либо
- (3) произведения $S^n \times E_{m-n}$, где S^n — гиперсфера в E_{n+1} , а E_{m-n} — $(m-n)$ -мерная плоскость, $n = 2, \dots, m-1$, либо
- (4) произведения $C^n \times E_{m-n}$, где C^n — гиперконус вращения в E_{n+1} , а E_{m-n} — $(m-n)$ -мерная плоскость, $n = 2, \dots, m-1$, либо
- (5) гиперповерхности ранга ≤ 2 , либо
- (6) полуэйнштейновой гиперповерхности K^m в E_{m+1} ($m \geq 5$), которая несет трехкомпонентную ортогональную сопряженную систему, состоящую из двух сфер $S^p(r_1)$ ($p \geq 2$), $S^q(r_2)$ ($q \geq 2$) и прямой L , и представляет собой конус с одномерными плоскими образующими (прямая L в качестве образующей в каждой точке) над прямым произведением $S^p(r_1) \times S^q(r_2)$, которое является эйнштейновым подмногообразием в E_{m+1} и принадлежит гиперсфере $S^m(r) \subset E_{m+1}$, где радиусы r_1, r_2, r связаны условием $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ и являются линейными (не постоянными) функциями на L , либо
- (7) произведения $K^n \times E_{m-n}$, где K^n — полуэйнштейнова гиперповерхность в E_{n+1} , описываемая как и K^m в п. (6), а E_{m-n} — $(m-n)$ -мерная плоскость, $n = 5, \dots, m-1$.

Отметим, что в ходе доказательства выявляются также некоторые другие интересные свойства гиперповерхности K^m , описываемой в случае (6).

При доказательстве теоремы 1 используются следующие теоремы, которые являются частными случаями более общих результатов, анонсированных автором в [21].

ТЕОРЕМА 2. Пусть E_k — k -мерное евклидово пространство с декартовыми координатами $x^1, \dots, x^k$, а $G(x^1, \dots, x^k)$ — положительная функция, определенная в некоторой области $U \subset E_k$, и пусть $\widetilde{M}$ — некоторое риманово пространство с метрикой $d\tilde{s}^2(x^{k+1}, \dots, x^n)$. Тогда на многообразии $U \times \widetilde{M}$, наделенном метрикой

$$d\tilde{s}^2 = \sum_{a=1}^k (dx^a)^2 + G(x^1, \dots, x^k) d\tilde{s}^2, \quad (2.3)$$

в каждой точке направления $\partial/\partial x^a$ будут принадлежать пространству дефектности в том и только том случае, если (2.3) является либо

- 1) метрикой конуса или цилиндра с k -мерными плоскими образующими над $\widetilde{M}$, либо
- 2) метрикой цилиндра с l -мерными ($1 \leq l < k$) плоскими образующими над конусом с $(k-1)$ -мерными плоскими образующими над $\widetilde{M}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\widetilde{M}$ — эйнштейново пространство размерности $m \geq 2$ с эйнштейновой константой λ . Если $\lambda \leq 0$, то всякий конус с k -мерными ($k \geq 1$) плоскими образующими над $\widetilde{M}$ является неприводимым полуэйнштейновым пространством индекса дефектности k . Если $\lambda > 0$, то всякий конус с k -мерными плоскими образующими над $\widetilde{M}$ является либо

- 1) риччи-плоским пространством, либо
- 2) неприводимым полуэйнштейновым пространством индекса дефектности k , причем выбором вершины конуса всегда можно добиться как случая 1), так и случая 2).

§ 3. Главное расслоение адаптированных ортонормреперов подмногообразия и редукция некоторых условий

Пусть $O(E_n)$ обозначает главное расслоение ортонормированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_n\}$ в евклидовом пространстве E_n . отождествляя точку x со своим радиус-вектором, будем иметь

$$\begin{aligned} dx &= \omega^a e_a, & de_a &= \omega_a^b e_b, \\ \omega_a^b + \omega_b^a &= 0, & a, b &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Отсюда путем внешнего дифференцирования получаются следующие структурные уравнения:

$$d\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a, \quad d\omega_a^b = \omega_a^c \wedge \omega_c^b.$$

Пусть M является m -мерным подмногообразием класса C^∞ в E_n . Тогда расслоение $O(E_n)$ может быть приведено к главному расслоению $O(M, E_n)$ адаптированных к M ортонормированных $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$, характеризуемых тем, что векторы e_j ($j = 1, \dots, m$) принадлежат касательному пространству $T_x(M)$, а векторы e_α ($\alpha = m+1, \dots, n$) – нормальному пространству $T_x^\perp(M)$ (подробности см. в [3]). В силу этого по известной схеме [10], [14] будем иметь:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, \quad h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \quad (3.1)$$

$$\bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = h_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha (= \bar{\nabla}_i h_{kj}^\alpha), \quad (3.2)$$

$$\bar{\nabla} h_{ijk}^\alpha \wedge \omega^k = h_{ij\beta}^\beta \Omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \Omega_i^k - h_{ik}^\alpha \Omega_j^k, \quad (3.3)$$

$$\bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = dh_{ij}^\alpha + h_{ij\beta}^\beta \omega^\beta - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k,$$

$$\bar{\nabla} h_{ijk}^\alpha = dh_{ijk}^\alpha + h_{ijk}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{ljk}^\alpha \omega_i^l - h_{ilk}^\alpha \omega_j^l - h_{ijl}^\alpha \omega_k^l.$$

Здесь $\bar{\nabla}$ – это связность Ван дер Вардена–Бортолотти ($\bar{\nabla} = \nabla \oplus \nabla^\perp$, где ∇ обозначает риманову связность на подмногообразии M , определяемую 1-формами ω_i^j , а $\nabla^\perp$ – нормальную связность, определяемую 1-формами ω_β^α). В (3.3)

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = - \sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha \omega^\alpha \wedge \omega^l, \quad (3.4)$$

$$\Omega_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta = - \sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta \omega^k \wedge \omega^l \quad (3.5)$$

являются 2-формами кривизны связностей ∇ и $\nabla^\perp$ соответственно. В формулах (3.1), (3.2) функции h_{ij}^α , h_{ijk}^α , симметричные по нижним индексам, являются компонентами второй α_2 и третьей α_3 фундаментальных форм (ф.ф.) соответственно.

В формулах (3.4) и (3.5) коэффициенты

$$R_{ikl}^j = - \sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha, \quad R_{\alpha kl}^\beta = - \sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta \quad (3.6)$$

при $\omega^k \wedge \omega^l$ являются компонентами тензоров кривизны R и $R^\perp$ связностей ∇ и $\nabla^\perp$ соответственно. Если $R = 0$, то говорят, что подмногообразие является *локально евклидовым*. Если $R^\perp = 0$, то говорят о подмногообразии с *плоской нормальной связностью*.

Инвариантно определенный нормальный вектор $H = \sum_i h_{ii}^\alpha e_\alpha$ называется вектором *средней кривизны*. Если $H = 0$, то подмногообразие называется *минимальным*. Если $\alpha_2 = 0$ (т.е. $h_{ij}^\alpha = 0$), то говорят о *вполне геодезическом подмногообразии*.

Компоненты R_{jk} тензора Риччи R_1 определяются по формуле

$$R_{jk} = R_{ijk} \delta^{il} = \sum_\alpha (H^\alpha h_{jk}^\alpha - h_{ik}^\alpha h_j^{\alpha i}), \quad (3.7)$$

где $R_{ijk} = R_{ikl}^j$, δ^{il} – символ Кронекера, а H^α – компоненты вектора средней кривизны H .

Пусть T – некоторое тензорное поле на подмногообразии M в E_n , и пусть T_{ij}^α – его компоненты в выбранном выше репере. Такое строение компонент не будет уменьшать общности рассуждений. Первые и вторые ковариантные производные $T_{ij,k}^\alpha, T_{ij,kl}^\alpha$ тензора T_{ij}^α определяются равенствами

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} T_{ij}^\alpha &= dT_{ij}^\alpha + T_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - T_{kj}^\alpha \omega_i^k - T_{ik}^\alpha \omega_j^k = T_{ij,k}^\alpha \omega^k, \\ \bar{\nabla} T_{ij,k}^\alpha &= dT_{ij,k}^\alpha + T_{ij,k}^\beta \omega_\beta^\alpha - T_{lj,k}^\alpha \omega_i^l - T_{il,k}^\alpha \omega_j^l - T_{ij,l}^\alpha \omega_k^l = T_{ij,kl}^\alpha \omega^l.\end{aligned}$$

Дифференцируя внешним образом первое из этих равенств и учитывая второе, получаем

$$T_{ij,kl}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l = T_{pj}^\alpha \Omega_i^p + T_{ip}^\alpha \Omega_j^p - T_{ij}^\beta \Omega_\beta^\alpha.$$

Тензорное поле T называется *полупараллельным*, если

$$T_{kj}^\alpha \Omega_i^k + T_{ik}^\alpha \Omega_j^k - T_{ij}^\beta \Omega_\beta^\alpha = 0.$$

Это условие равносильно симметричности компонент $T_{ij,kl}^\alpha$ по двум последним нижним индексам. В силу того что $T_{ij,kl}^\alpha$ представляются в виде $\bar{\nabla}_l \bar{\nabla}_k T_{ij}^\alpha$, условие полупараллельности T коротко записывается следующим образом: $\bar{R}(X, Y) \cdot T = 0$, где $\bar{R}(X, Y)$ – оператор кривизны связности $\bar{\nabla}$, а X, Y – произвольные касательные к M векторные поля.

Из сказанного выше вытекает, что условия полупараллельности второй ф.ф. α_2 , тензора кривизны R и тензора Риччи R_1 имеют соответственно следующий вид:

$$h_{kj}^\alpha \Omega_i^k + h_{ik}^\alpha \Omega_j^k - h_{ij}^\beta \Omega_\beta^\alpha = 0, \quad (3.8)$$

$$R_{pjkl} \Omega_i^p + R_{ipkl} \Omega_j^p + R_{ijpl} \Omega_k^p + R_{ijkp} \Omega_l^p = 0, \quad (3.9)$$

$$R_{pk} \Omega_j^p + R_{jp} \Omega_k^p = 0 \quad (3.10)$$

или, короче, $\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha_2 = 0$, $R(X, Y) \cdot R = 0$, $R(X, Y) \cdot R_1 = 0$ соответственно.

Путем непосредственных вычислений легко убедиться в справедливости импликаций $(3.8) \Rightarrow (3.9) \Rightarrow (3.10)$, т.е.

$$\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha_2 = 0 \Rightarrow R(X, Y) \cdot R = 0 \Rightarrow R(X, Y) \cdot R_1 = 0.$$

Так как матрица $\|R_{jk}\|$ является симметрической, то в некотором ортонормированном репере она может быть приведена к диагональному виду $\|\rho_j \delta_{jk}\|$ с вещественными диагональными элементами ρ_j , и из (3.10) получаем

$$(\rho_j - \rho_k) \Omega_k^j = 0, \quad (3.11)$$

где нет суммы по j . Это равенство равносильно (3.10) и также является условием полупараллельности тензора Риччи.

Пусть нормальная связность подмногообразия M в E_n является плоской. Тогда в (3.6) $R_{\alpha kl}^\beta = 0$ и мы получим

$$\sum_k h_{ik}^\alpha h_{kj}^\beta = \sum_k h_{ik}^\beta h_{kj}^\alpha.$$

Следовательно, все матрицы $\|h_{ij}^\alpha\|$ и $\|h_{ij}^\beta\|$ при $\alpha \neq \beta$ коммутируют, и в силу этого в некотором ортонормированном базисе они одновременно могут быть приведены к диагональному виду $\|\lambda_i^\alpha \delta_{ij}\|$. Тогда из (3.7) получаем

$$R_{jk} = \sum_{\alpha} (H^\alpha \lambda_j^\alpha - \lambda_j^\alpha \lambda_k^\alpha) \delta_{jk}. \quad (3.12)$$

Отсюда следует, что матрица $\|R_{jk}\|$ также имеет диагональный вид с диагональными элементами

$$\rho_j = \sum_{\alpha} [H^\alpha \lambda_j^\alpha - (\lambda_j^\alpha)^2].$$

Если M имеет полупараллельный тензор Риччи, то, подставляя $R_{jk} = \rho_j \delta_{jk}$ в (3.10) и учитывая, что

$$\Omega_k^j = \sum_{\alpha} \lambda_j^\alpha \lambda_k^\alpha \omega^k \wedge \omega^j,$$

где нет суммы по j, k , будем иметь

$$(\rho_j - \rho_k) \sum_{\alpha} \lambda_j^\alpha \lambda_k^\alpha = 0. \quad (3.13)$$

Это условие является необходимым и достаточным для полупараллельности тензора Риччи в случае плоской нормальной связности. Выражение $\sum_{\alpha} \lambda_j^\alpha \lambda_k^\alpha$ в (3.13) есть не что иное, как секционная кривизна $k(e_j \wedge e_k)$.

Легко показать, что в случае плоской нормальной связности условие (3.8), характеризующее полусимметрическое подмногообразие, равносильно условию

$$(\lambda_i^\alpha - \lambda_j^\alpha) \sum_{\beta} \lambda_i^\beta \lambda_j^\beta = 0 \quad (3.14)$$

для всех i, j .

§ 4. Доказательство теоремы 1

Пусть M — гиперповерхность евклидова пространства E_{m+1} . В этом случае мы имеем только одну матрицу $\|h_{ij}^{m+1}\|$ и во всех формулах §3 индексы α, β, γ принимают только значение $m+1$, причем нормальная связность автоматически плоская. Условия (3.14) и (3.13) для гиперповерхности M сводятся соответственно к следующим:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \lambda_i \lambda_j = 0, \quad (4.1)$$

$$(\lambda_i + \lambda_j - a) (\lambda_i - \lambda_j) \lambda_i \lambda_j = 0, \quad (4.2)$$

где a — средняя кривизна, т.е. $a = \sum_i \lambda_i$ (индекс $m+1$ над λ_i опускаем).

Пусть гиперповерхность M является Rіc-полупараллельной, что равносильно выполнению условия (4.2). Тогда для любых собственных значений λ_i, λ_j матрицы $\|h_{ij}^{m+1}\|$ выполняется хотя бы одно из следующих трех условий: либо они равны, либо одно из них равно нулю, либо их сумма равна средней кривизне. Следовательно, матрица $\|h_{ij}^{m+1}\|$ может иметь не более двух различных ненулевых собственных

значений. Действительно, если $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$ — три различных ненулевых собственных значения, то $\lambda_i + \lambda_j = a, \lambda_i + \lambda_k = a$. Следовательно, $\lambda_j = \lambda_k$, что противоречит предположению.

Рассмотрим несколько случаев.

Пусть матрица $\|h_{ij}^{m+1}\|$ имеет либо только одно собственное значение, либо одно ненулевое собственное значение λ кратности p и нулевое собственное значение кратности $m - p$. Это равносильно условию (4.1), т.е. условию полусимметричности $\bar{R}(X, Y) \cdot \alpha_2 = 0$, что, в свою очередь, согласно результату Й. Депри [9] (уточненному Ю. Г. Лумисте [10]) равносильно тому, что гиперповерхность либо имеет ранг ≤ 1 , либо является одной из гиперповерхностей (1)–(4), перечисленных в теореме 1.

Пусть теперь матрица $\|h_{ij}^{m+1}\|$ имеет два ненулевых собственных значения λ и $a - \lambda$ кратностей p и q соответственно и нулевое собственное значение кратности $m - p - q$. Тогда

$$(p - q)\lambda = a(1 - q) \quad \text{или} \quad (p - 1)\lambda + (q - 1)(a - \lambda) = 0$$

и мы рассмотрим два случая.

А) Пусть $p = 1$. Тогда $q = 1$ и ранг гиперповерхности равен 2. Легко видеть, что всякая гиперповерхность ранга 2 имеет полупараллельный тензор Риччи. Аналогично рассматривается случай $q = 1$.

В) Пусть $p \geq 2, q \geq 2$. Тогда

$$a = \frac{p - q}{1 - q}\lambda, \quad a - \lambda = \frac{p - 1}{1 - q}\lambda. \quad (4.3)$$

Следовательно, в настоящем случае, который является самым общим, матрица $\|h_{ij}^{m+1}\|$ имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \overset{(p)}{\lambda} & & & & & & & & \overset{(p+q)}{} \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda & & & & & & \\ & & & \frac{p-1}{1-q}\lambda & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \frac{p-1}{1-q}\lambda & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Обратно, если матрица $\|h_{ij}^{m+1}\|$ второй фундаментальной формы α_2 некоторой гиперповерхности M в E_{m+1} в каком-то ортонормальном базисе приводится к виду (4.4), где $\lambda \neq 0, p \geq 2, q \geq 2$, то M удовлетворяет условию $R(X, Y) \cdot R_1 = 0$.

Итак, пусть матрица $\|h_{ij}^{m+1}\|$ второй фундаментальной формы α_2 гиперповерхности M в E_{m+1} имеет вид (4.4), и пусть $T_x^{(\lambda)}, T_x^{(\mu)}, T_x^{(0)}$ обозначают подпространства собственных векторов матрицы (4.4) в касательном пространстве $T_x(M)$, отвечающие собственным значениям $\lambda, \mu = a - \lambda, 0$ соответственно. Здесь $T_x^{(0)}$ фактически является пространством дефектности гиперповерхности в точке x . Через $T^{(\lambda)}, T^{(\mu)}, T^{(0)}$ будем обозначать соответствующие распределения. Пусть индексы пробегает следующие значения:

$$b, c = 1, \dots, p, \quad u, v = p + 1, \dots, p + q, \quad s, t = p + q + 1, \dots, m,$$

и пусть адаптированный к M ортонормрепер $(e_1, \dots, e_m, e_{m+1})$ согласован со структурой распределений $T^{(\lambda)}, T^{(\mu)}, T^{(0)}$. Это значит, что $e_b \in T^{(\lambda)}, e_u \in T^{(\mu)}, e_s \in T^{(0)}$. Тогда $\lambda_b = \lambda, \lambda_u = \mu, \lambda_s = 0$ и, вычисляя компоненты тензора Риччи по формуле $R_{jk} = \rho_j \delta_{jk} = (a\lambda_j - \lambda_j^2)\delta_{jk}$ (см. §3), получаем

$$\rho_b = \rho_u = \frac{p-1}{1-q}\lambda^2 < 0, \quad \rho_s = 0.$$

Отсюда следует, что гиперповерхность M является полуэйнштейновой. Из первого равенства в (4.3) следует, что M будет минимальной тогда и только тогда, когда $p = q$.

Уравнение (3.2) в нашем случае принимает следующий вид

$$(d\lambda_i)\delta_{ij} + (\lambda_j - \lambda_i)\omega_j^i = h_{ij}^{m+1}\omega^k,$$

где $i, j, k = 1, \dots, m$, причем в левой части нет суммы по i . Придавая индексам различные значения и учитывая связь между λ и μ , получаем:

$$\begin{aligned} h_{bck}^{m+1} &= 0, \quad b \neq c, \quad h_{uvk}^{m+1} = 0, \quad u \neq v, \\ h_{bbb}^{m+1} &= h_{uuu}^{m+1} = h_{bbu}^{m+1} = h_{buu}^{m+1} = h_{stk}^{m+1} = 0, \quad h_{bbs}^{m+1} = h_{ccs}^{m+1}, \quad b \neq c, \\ h_{uus}^{m+1} &= h_{vvs}^{m+1}, \quad u \neq v, \quad h_{uus}^{m+1} = \frac{p-1}{1-q}h_{ccs}^{m+1}, \\ \begin{cases} d\lambda = h_s\omega^s, & \lambda\omega_b^s = h_s\omega^b + h_{sbu}^{m+1}\omega^u, \\ \mu\omega_u^s = h_{sub}^{m+1}\omega^b + \frac{p-1}{1-q}h_s\omega^u, & (\mu - \lambda)\omega_u^b = h_{ubs}^{m+1}\omega^s, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $h_s = h_{bbs}^{m+1}$.

Покажем, что распределения $T^{(\lambda)}, T^{(\mu)}, T^{(0)}$ являются вполне интегрируемыми, и выясним, что представляют собой их интегральные многообразия.

Распределение $T^{(\lambda)}$ задается пфафовой системой

$$\omega^{m+1} = 0, \quad \omega^u = 0, \quad \omega^s = 0. \quad (4.6)$$

Так как в этом случае система (4.5) принимает вид

$$\lambda = \text{const}, \quad \omega_u^b = 0, \quad \omega_b^s = \frac{h_s}{\lambda}\omega^b, \quad \omega_u^s = \frac{h_{sub}^{m+1}}{\mu}\omega^b,$$

то, учитывая, что $\omega_b^{m+1} = \lambda \omega^b$, получаем

$$d\omega^{m+1} = 0, \quad d\omega^u = 0, \quad d\omega^s = 0.$$

Следовательно, система (4.6) вполне интегрируема, а из

$$\omega_b^u = 0, \quad \omega_b^s = \frac{h_s}{\lambda} \omega^b, \quad \omega_b^{m+1} = \lambda \omega^b$$

следует, что ее интегральное многообразие максимальной размерности оказывается вполне омбилическим (но не вполне геодезическим, так как $\lambda \neq 0$) в E_{m+1} , т.е. локально является p -мерной сферой, которую обозначим через $S^p(r_1)$.

Аналогично доказывается, что пфафова система

$$\omega^{m+1} = 0, \quad \omega^b = 0, \quad \omega^s = 0,$$

задающая распределение $T^{(\mu)}$, вполне интегрируема и ее интегральное многообразие максимальной размерности локально представляет собой q -мерную сферу, которую обозначим через $S^q(r_2)$.

Распределение $T^{(0)}$ задается системой

$$\omega^{m+1} = 0, \quad \omega^u = 0, \quad \omega^b = 0. \quad (4.7)$$

В этом случае уравнения в (4.5) принимают вид

$$d\lambda = h_s \omega^s, \quad \omega_b^s = \omega_u^s = 0, \quad (\mu - \lambda) \omega_u^b = h_{ubs}^{m+1} \omega^s,$$

и мы легко получаем, что

$$d\omega^{m+1} = 0, \quad d\omega^u = 0, \quad d\omega^b = 0.$$

Следовательно, система (4.7) вполне интегрируема, и в силу условия $\omega_s^b = \omega_s^u = \omega_s^{m+1} = 0$ ее интегральное многообразие $M^{(0)}$ является вполне геодезическим в E_{m+1} , т.е. представляет собой $(m - p - q)$ -мерную плоскость.

Таким образом, гиперповерхность M в случае $p \geq 2, q \geq 2$ несет трехкомпонентную ортогональную сопряженную систему из двух сфер и плоскости размерностей p, q и $m - p - q$ соответственно, причем равенство размерностей сфер ($p = q$) является необходимым и достаточным, чтобы M была минимальной.

Теперь докажем, что в системе (4.5) $h_{sbu}^{m+1} = 0$. Для этого рассмотрим пфаффову систему

$$\omega^{m+1} = 0, \quad \omega^s = 0,$$

которая задает распределение $T^{(\lambda)} + T^{(\mu)}$, сопоставляющее каждой точке x гиперповерхности M прямую сумму $T_x^{(\lambda)} + T_x^{(\mu)}$. В силу равенств $\omega_b^{m+1} = \lambda \omega^b$, $\omega_u^{m+1} = \mu \omega^u$ имеем

$$d\omega^{m+1} = \lambda \sum_b \omega^b \wedge \omega^b + \mu \sum_u \omega^u \wedge \omega^u = 0.$$

Далее,

$$d\omega^s = \omega^b \wedge \omega_b^s + \omega^u \wedge \omega_u^s = \lambda^{-1} h_{sbu}^{m+1} \omega^b \wedge \omega^u + \mu^{-1} h_{sub}^{m+1} \omega^u \wedge \omega^b = 0,$$

где последнее равенство следует из того, что h_{sub}^{m+1} симметричны по индексам u, b , а выражение $\omega^b \wedge \omega^u$ кососимметрично по этим индексам. Следовательно, распределение $T^{(\lambda)} + T^{(\mu)}$ вполне интегрируемо, и мы обозначим через $M^{(\lambda, \mu)}$ его интегральное многообразие. Так как $\omega_s^{m+1} = 0$, то нормальное векторное поле e_{m+1} является параллельным в нормальном расслоении подмногообразия $M^{(\lambda, \mu)}$. Но так как объемлющее пространство является евклидовым, то из параллельности e_{m+1} следует его коммутруемость (см. [22]). Это значит, что матрица $\|\bar{h}_{\gamma\delta}^{m+1}\|$ ($\gamma, \delta = 1, \dots, p+q$) второго фундаментального тензора подмногообразия $M^{(\lambda, \mu)}$, соответствующего вектору e_{m+1} , коммутирует со всеми матрицами $\|\bar{h}_{\gamma\delta}^s\|$ вторых фундаментальных тензоров подмногообразия $M^{(\lambda, \mu)}$, соответствующих нормальным к $M^{(\lambda, \mu)}$ векторам e_s . Так как $\omega_b^{m+1} = \lambda \omega^b$, $\omega_u^{m+1} = \mu \omega^u$, то матрица $\|\bar{h}_{\gamma\delta}^{m+1}\|$ является диагональной с диагональными элементами λ, μ кратностей p и q соответственно.

Из второго и третьего уравнений системы (4.5) следует, что

$$\|\bar{h}_{\gamma\delta}^s\| = \begin{pmatrix} (p) \\ \left\| \begin{array}{cccc} \lambda^{-1} h_s & & 0 & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda^{-1} h_s & \vdots \\ 0 & & & \vdots \\ \dots\dots\dots & & & \vdots \\ & & & \lambda^{-1} h_s & 0 \\ & \lambda^{-1} h_{sub}^{m+1} & & \vdots \\ & & & \vdots \\ & & & 0 & \lambda^{-1} h_s \end{array} \right\| \end{pmatrix}.$$

Теперь путем непосредственных вычислений легко показать, что условие $h_{sbu}^{m+1} = 0$ является необходимым и, как видно, достаточным для коммутирования матриц $\|\bar{h}_{\gamma\delta}^{m+1}\|$ и $\|\bar{h}_{\gamma\delta}^s\|$. Таким образом, $h_{sbu}^{m+1} = 0$ и

$$\|\bar{h}_{\gamma\delta}^s\| = \left\| \begin{array}{ccc} \lambda^{-1} h_s & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda^{-1} h_s \end{array} \right\|. \quad (4.8)$$

Отсюда следует, что относительно всех направлений e_s подмногообразие $M^{(\lambda, \mu)}$ является омбилическим. Тогда все матрицы $\|\bar{h}_{\gamma\delta}^s\|$ коммутируют между собой и нормальная связность подмногообразия $M^{(\lambda, \mu)}$ плоская. Из (4.5) в силу $h_{sbu}^{m+1} = 0$ получаем $\omega_u^b = 0$, что означает параллельность распределений $T^{(\lambda)}$ и $T^{(\mu)}$ на $M^{(\lambda, \mu)}$. Так как $T^{(\lambda)}$ и $T^{(\mu)}$ сопряжены относительно второй фундаментальной формы подмногообразия $M^{(\lambda, \mu)}$, то согласно критерию Дж. Мура [23] $M^{(\lambda, \mu)}$ является прямым произведением их интегральных многообразий, т.е. сфер $S^p(r_1)$ и $S^q(r_2)$.

Возвращаясь к системе (4.5) и полагая в ней $h_{sbu}^{m+1} = 0$, получаем

$$\left\{ d\lambda = h_s \omega^s, \quad \omega_b^s = \frac{h_s}{\lambda} \omega^b, \quad \omega_u^s = \frac{h_s}{\lambda} \omega^u, \quad \omega_u^b = 0. \right. \quad (4.9)$$

Дифференцируя внешним образом эти уравнения, будем иметь

$$\left\{ \begin{aligned} dh_s - h_t \omega_s^t &= A_{st} \omega^t, \quad A_{st} = A_{ts}, \\ d\left(\frac{h_s}{\lambda}\right) - \frac{h_t}{\lambda} \omega_s^t &= \frac{h_s}{\lambda^2} h_t \omega^t, \\ \sum_s h_s^2 &= \lambda^4 \frac{p-1}{q-1}. \end{aligned} \right. \quad (4.10)$$

Из последнего уравнения этой системы в силу $\lambda \neq 0$ следует, что хотя бы одна из функций h_s отлична от нуля.

Так как подмногообразие $M^{(\lambda, \mu)}$ имеет плоскую нормальную связность, а нормальное векторное поле e_{m+1} является параллельным в нормальном расслоении, то в его ортогональном дополнении $T^{(0)}$ как подрасслоении нормального расслоения для $M^{(\lambda, \mu)}$ индуцируется плоская связность. Это значит, что нормальные к $M^{(\lambda, \mu)}$ векторные поля e_s в $T^{(0)}$ можно выбрать так, что они будут параллельными в нормальном расслоении. При таком выборе векторных полей e_s будем иметь: $\omega_s^t = 0$ при $\omega^s = 0$. Но поскольку в общем случае $\omega_s^t = \Gamma_{si}^t \omega^i$, то $\Gamma_{sb}^t = \Gamma_{su}^t = 0$ и $\omega_s^t = \Gamma_{sr}^t \omega^r$. Тогда из (4.10) получаем

$$\left\{ \begin{aligned} dh_s &= (h_t \Gamma_{sr}^t + A_{sr}) \omega^r, \quad A_{sr} = A_{rs}, \\ d\left(\frac{h_s}{\lambda}\right) &= \left(\lambda^{-1} h_t \Gamma_{sr}^t + \frac{h_s}{\lambda^2} h_r\right) \omega^r, \\ \sum_s h_s^2 &= \lambda^4 \frac{p-1}{q-1}. \end{aligned} \right. \quad (4.11)$$

Из первых уравнений систем (4.9) и (4.11) следует, что на подмногообразии $M^{(\lambda, \mu)}$ функции λ и h_s являются постоянными. Так как на $M^{(\lambda, \mu)}$ имеет место $\omega_s^t = 0$, то нормальное к $M^{(\lambda, \mu)}$ векторное поле

$$\overline{H} = \frac{1}{p+q} \left(\sum_{\gamma} \bar{h}_{\gamma\gamma}^s \right) e_s = \sum_s \frac{h_s}{\lambda} e_s$$

(см. (4.8)) является параллельным в нормальном расслоении подмногообразия $M^{(\lambda, \mu)}$. Тогда параллельный нормальный вектор e_m можем выбрать так, что $\overline{H} = \nu e_m$. Следовательно, $\nu = h_m / \lambda$ и $h_s = 0$ при $s = p+q+1, \dots, m-1$. Отождествляя точку $x \in M^{(\lambda, \mu)}$ с радиус-вектором, получаем

$$d\left(x + \frac{\lambda}{h_m} e_m\right) = 0.$$

Следовательно, $x + (\lambda/h_m) e_m = \text{const}$ и подмногообразие $M^{(\lambda, \mu)}$ принадлежит некоторой гиперсфере $S(r)$ пространства E_{m+1} , для которой e_m является нормальным вектором. Радиус гиперсферы определяется по формуле $r = |\lambda/h_m|$. Теперь

покажем, что $M^{(\lambda, \mu)}$ является эйнштейновым. Действительно, вычисляя компоненты тензора Риччи $\bar{R}_{\beta\gamma}$ по формуле (3.12), будем иметь

$$\bar{R}_{\beta\gamma} = \left(\frac{p+q-1}{\lambda^2} \sum_s h_s^2 + \frac{p-1}{1-q} \lambda^2 \right) \delta_{\beta\gamma}$$

($\beta, \gamma = 1, \dots, p+q$) и с учетом последнего уравнения системы (4.11) окончательно получим

$$\bar{R}_{\beta\gamma} = \frac{(p-1)(p+q-2)}{q-1} \lambda^2 \delta_{\beta\gamma},$$

что и доказывает эйнштейновость $M^{(\lambda, \mu)}$.

Так как в силу выбора векторов e_s имеем $h_s = 0$ при $s = p+q+1, \dots, m-1$, то система (4.9) сводится к следующей:

$$\begin{cases} d\lambda = h_m \omega^m, & \omega_b^m = \frac{h_m}{\lambda} \omega^b, & \omega_u^m = \frac{h_m}{\lambda} \omega^u, \\ \omega_u^b = 0, & \omega_b^s = \omega_u^s = 0, & s = p+q+1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (4.12)$$

Из системы (4.11) в силу $\Gamma_{sr}^t = -\Gamma_{tr}^s$ имеем

$$\begin{cases} dh_m = A_{mr} \omega^r, \\ d\left(\frac{h_m}{\lambda}\right) = \left(\frac{h_m}{\lambda}\right)^2 \omega^m, \\ A_{sr} = \Gamma_{sr}^m = 0, & s < m, \\ h_m = \pm \lambda^2 \sqrt{\frac{p-1}{q-1}}. \end{cases} \quad (4.13)$$

Тогда $\omega_s^m = 0$ для любого $s = p+q+1, \dots, m-1$, и с учетом того, что $\omega_b^s = \omega_u^s = 0$ при тех же значениях s , получим, что распределение $\bar{T}$, сопоставляющее каждой точке гиперповерхности линейную оболочку векторов $e_{p+q+1}, \dots, e_{m-1}$, является параллельным и, как мы знаем, его интегральное многообразие есть $(m-p-q-1)$ -мерная плоскость, которую обозначим через $\bar{M}$. Ортогональное дополнение к $\bar{T}_x$ в касательном пространстве гиперповерхности имеет вид $T_x^{(\lambda)} + T_x^{(\mu)} + L_x$, где L_x — прямая, определяемая вектором e_m . Соответствующее распределение $T^{(\lambda)} + T^{(\mu)} + L$ также параллельно, и в силу сопряженности $\bar{T}$ и $T^{(\lambda)} + T^{(\mu)} + L$ относительно второй фундаментальной формы гиперповерхности M получаем, что M является прямым произведением их интегральных многообразий $\bar{M}$ и $M^{(\lambda, \mu, 1)}$, причем $M^{(\lambda, \mu, 1)}$ уже является полуэйнштейновой гиперповерхностью $(p+q+2)$ -мерного евклидова пространства E_{p+q+2} и несет трехкомпонентную сопряженную систему, состоящую из двух сфер $S^p(r_1)$, $S^q(r_2)$ размерностей p и q соответственно и прямой. Произведение этих сфер образует $(p+q)$ -мерное эйнштейново подмногообразие пространства E_{p+q+2} и принадлежит гиперболу этого пространства.

Так как $\bar{M}$ является евклидовым пространством размерности $(m-p-q-1)$, то можем считать, что в качестве локальных координат в $\bar{M}$ взяты прямоугольные

декартовы координаты. Тогда $\omega_s^t = 0$ при $t, s = p + q + 1, \dots, m - 1$ и, следовательно, $\Gamma_{sr}^t = 0$ при этих же значениях индексов t, s и любом $r = p + q + 1, \dots, m$. Таким образом, $\Gamma_{sr}^t = 0$ при любых $r, t, s = p + q + 1, \dots, m$.

Так как на $M^{(\lambda, \mu, 1)}$ интегральное многообразие распределения L есть прямая с единичным вектором e_m в каждой точке, то мы обозначим через x^m координату на этой прямой и можем считать, что $\omega^m = dx^m$ (это вытекает также из того, что $d\omega^m = 0$). Из третьего уравнения системы (4.13) следует, что $A_{sr} = 0$ при $s < m$ и $r < m$, и остается определить только функцию λ , так как из первого уравнения системы (4.12) и первого уравнения системы (4.13), которое фактически имеет вид $dh_m = A_{mm} dx^m$, следует, что

$$h_m = \frac{d\lambda}{dx^m}, \quad A_{mm} = \frac{dh_m}{dx^m} = \frac{d^2\lambda}{d(x^m)^2}.$$

Интегрируя систему (4.13), получаем

$$\begin{aligned} \lambda &= \left(C \mp \sqrt{\frac{p-1}{q-1}} x^m \right)^{-1}, \quad h_m = \pm \sqrt{\frac{p-1}{q-1}} \left(C \mp \sqrt{\frac{p-1}{q-1}} x^m \right)^{-2}, \\ A_{mm} &= 2 \frac{p-1}{q-1} \left(C \mp \sqrt{\frac{p-1}{q-1}} x^m \right)^{-3}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где C – произвольная постоянная.

Рассмотрим теперь гиперповерхность $M^{(\lambda, \mu, 1)}$ в E_{p+q+2} и определим радиус r_1 сферы $S^p(r_1)$. Эта сфера как подмногообразие в E_{p+q+2} в направлениях e_u имеет нулевые матрицы вторых фундаментальных тензоров, а в направлениях e_m и e_{m+1} матрицы вторых фундаментальных тензоров определяются из формул $\omega_b^m = (h_m/\lambda)\omega^b$, $\omega_b^{m+1} = \lambda\omega^b$. Вектор средней кривизны сферы $S^p(r_1)$ имеет вид $(h_m/\lambda)e_m + \lambda e_{m+1} = H_1$. Пусть e – единичный вектор в направлении H_1 . Тогда $d(x + (1/|H_1|)e) = 0$ и $x + (1/|H_1|)e = \text{const}$. Следовательно, радиус r_1 сферы $S^p(r_1)$ равен $1/|H_1|$, т.е.

$$r_1 = \left(\frac{h_m^2}{\lambda^2} + \lambda^2 \right)^{-1/2} = \pm \sqrt{\frac{q-1}{p+q-2}} \cdot \frac{1}{\lambda},$$

где знак выбирается в соответствии со знаком λ . На основании (4.14) заключаем, что r_1 является линейной функцией от x^m . Точно так же доказывается, что радиус r_2 сферы $S^q(r_2)$ линейно зависит от x^m и определяется формулой

$$r_2 = \pm \sqrt{\frac{q-1}{p-1}} \sqrt{\frac{q-1}{p+q-2}} \cdot \frac{1}{\lambda}.$$

Тогда

$$r_1^2 + r_2^2 = r^2 = \frac{q-1}{p-1} \cdot \frac{1}{\lambda^2}, \quad r = \frac{\lambda}{h_m} = \pm \sqrt{\frac{q-1}{p-1}} \cdot \frac{1}{\lambda},$$

где r обозначает радиус гиперсферы $S(r)$ пространства E_{p+q+2} , которой принадлежит эйнштейново подмногообразие $M^{(\lambda, \mu)}$.

Докажем, что гиперповерхность $M^{(\lambda, \mu, 1)}$ в E_{p+q+2} представляет собой конус с одномерной плоской образующей, т.е. что его метрика имеет вид (2.1). Действительно, $M^{(\lambda, \mu, 1)}$ в окрестности каждой точки расслаивается на два подмногообразия: на прямую, которая является вполне геодезическим подмногообразием в $M^{(\lambda, \mu, 1)}$, и эйнштейново подмногообразие $M^{(\lambda, \mu)}$, которое является омбилическим относительно направления, определяемого этой прямой, как это следует из (4.8) при $s = m$. Так как в (4.8) λ и h_m зависят только от x^m , т.е. от координаты на указанной прямой, то при различных фиксированных значениях x^m мы будем получать подобные вполне омбилические эйнштейновы подмногообразия.

Г. И. Кручковичем [19] было доказано, что если риманово пространство N в каждой точке расслаивается на два семейства взаимно ортогональных подмногообразий N_0 и N_1 , причем листы N_0 являются вполне геодезическими в N , а листы N_1 — подобными и вполне омбилическими в N , то его метрику ds^2 локально можно представить в виде

$$ds^2 = ds_0^2 + G ds_1^2,$$

где ds_0^2 — метрика на N_0 , ds_1^2 — метрика на N_1 , а G — функция на N_0 .

Так как для гиперповерхности $M^{(\lambda, \mu, 1)}$ в E_{p+q+2} эти условия выполняются, то ее метрику локально можно представить в виде

$$ds^2 = (dx^m)^2 + G(x^m) d\tilde{s}^2,$$

где $d\tilde{s}^2$ — эйнштейнова метрика на $M^{(\lambda, \mu)}$, а $(dx^m)^2$ — метрика на прямой. Так как направление прямой является направлением дефектности, то в силу теоремы 2 $G = (C'x^m + C'')^2$, где C' и C'' — произвольные постоянные, причем $C' \neq 0$, так как в противном случае мы получили бы приводимую метрику и тогда в (4.12) $\omega_b^m = \omega_u^m = 0$ и $h_m = 0$, что невозможно. Следовательно, гиперповерхность $M^{(\lambda, \mu, 1)}$ является конусом с одномерными плоскими образующими над эйнштейновым подмногообразием $M^{(\lambda, \mu)}$, имеющим положительную эйнштейнову константу.

Таким образом, мы доказали, что в рассматриваемом случае гиперповерхность обладает всеми свойствами, перечисленными в п. (6) теоремы 1. Обратно, с помощью полученных выше формул можно непосредственно убедиться в том, что всякая гиперповерхность, удовлетворяющая условиям п. (6) теоремы 1, имеет полупараллельный тензор Риччи. Это вытекает также из теоремы 3. Действительно, из теоремы 3 следует, что всякая гиперповерхность, которая представляет собой конус с одномерной плоской образующей над эйнштейновым подмногообразием с положительной эйнштейновой константой, либо является полуэйнштейновой, либо риччи-плоской гиперповерхностью, т.е. имеет полупараллельный тензор Риччи. В силу $\lambda \neq 0$ гиперповерхность $M^{(\lambda, \mu, 1)}$ может быть только полуэйнштейновой.

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось заметить, что произведение гиперповерхности $M^{(\lambda, \mu, 1)}$ и произвольной n -мерной плоскости E_n также удовлетворяет условию $R(X, Y) \cdot R_1 = 0$ и является гиперповерхностью $(\lambda + \mu + n + 2)$ -мерного евклидова пространства.

Список литературы

1. *Мирзоян В. А.* Ric-полусимметрические подмногообразия // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. Т. 23. М.: ВИНТИ, 1991. С. 29–66.
2. *Мирзоян В. А.* Структурные теоремы для римановых Ric-полусимметрических пространств // Изв. вузов. Сер. матем. 1992. №6. С. 80–89.
3. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.
4. *Fialkow A.* Hypersurfaces of spaces of constant curvature // Ann. of Math. (2). 1938. V. 39. P. 762–785.
5. *Ryan P. J.* Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces // Tôhoku Math. J. (2). 1969. V. 21. P. 363–388.
6. *Ryan P. J.* Hypersurfaces with parallel Ricci tensor // Osaka J. Math. 1971. V. 8. №2. P. 251–259.
7. *Nomizu K.* On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor // Tôhoku Math. J. 1968. V. 20. №1. P. 46–59.
8. *Szabo Z. I.* Classification and construction of complete hypersurfaces satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$ // Acta Sci. Math. (Szeged). 1984. V. 47. №3–4. P. 321–348.
9. *Deprez J.* Semi-parallel hypersurfaces // Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. 1986. V. 44. №2. P. 303–316.
10. *Лумисте Ю. Г.* Полусимметрические подмногообразия // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. Т. 23. М.: ВИНТИ, 1991. С. 3–28.
11. *Lumiste Ü.* Symmetric orbits of the orthogonal Veronese actions and their second order envelopes // Results Math. 1995. V. 27. P. 284–301.
12. *Lumiste Ü.* Semi-parallel submanifolds of cylindrical or toroidal Segre type // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. 1996. V. 45. №2/3. P. 161–177.
13. *Lumiste Ü.* Semi-parallel submanifolds as some immersed fibred bundles with flat connections // Geom. and Topology of Submanifolds. VIII. 1996. P. 236–244.
14. *Mirzoyan V. A.* S -semi-parallel submanifolds in spaces of constant curvature as the envelopes of s -parallel submanifolds // Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii. Matematika. 1996. V. 31. №5. P. 37–48.
15. *Mirzoyan V. A.* On generalizations of Ü. Lumiste theorem on semi-parallel submanifolds // Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii. Matematika. 1998. V. 33. №1. P. 48–58.
16. *Chern S. S., Kuiper N.* Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemann manifolds in Euclidean space // Ann. of Math. (2). 1952. V. 56. №3. P. 422–430.
17. *Szabo Z. I.* Structure theorems on Riemannian spaces satisfying $R(X, Y) \cdot R = 0$. I. The local version // J. Differential Geom. 1982. V. 17. P. 531–582.
18. *Широков П. А.* Избранные работы по геометрии. Казань: КГУ, 1966.
19. *Кручкович Г. И.* Об одном классе римановых пространств // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Т. 11. М.: МГУ, 1961. С. 103–128.
20. *Bishop R., O'Neill B.* Manifolds of negative curvature // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 145. P. 1–49.
21. *Мирзоян В. А.* Конусы с многомерными образующими над эйнштейновыми пространствами // Докл. НАН Армении. 1998. Т. 98. №4. С. 265–268.
22. *Мирзоян В. А.* Подмногообразия с коммутирующим нормальным векторным полем // Итоги науки и техн. Проблемы геометрии. Т. 14. М.: ВИНТИ, 1983. С. 73–100.
23. *Moor J. D.* Isometric immersions of Riemannian products // J. Differential Geom. 1971. V. 5. №1–2. P. 159–168.