Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Суетин, О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 9, 81–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm508>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 15:00:40

УДК 517.53

С. П. Суетин

О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций

В работе изучается равномерная сходимость диагональных аппроксимаций Паде для функций некоторого класса, являющегося естественным обобщением гиперэллиптических функций. В основе исследования лежит подход Наттолла, который состоит в изучении определенной краевой задачи Римана на соответствующей гиперэллиптической римановой поверхности. В терминах решения этой задачи получена формула сильной асимптотики для неэрмитово ортогональных полиномов – знаменателей аппроксимаций Паде. При некоторых достаточно общих предположениях, формулируемых в терминах периодов соответствующей задаче комплексной функции Грина и справедливых в “общем положении”, доказывается один из вариантов гипотезы Бейкера–Гамелля–Уиллса.

Библиография: 46 названий.

§ 1. Введение

1.1. Постановка задачи. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}} \quad (1)$$

– функция, голоморфная в бесконечно удаленной точке $z = \infty$. Хорошо известно (см. прежде всего классические работы П. Л. Чебышева [1] и А. А. Маркова [2]), что если все ганкелевы определители, составленные из коэффициентов $\{c_k\}$, отличны от нуля, то f можно сопоставить чебышевскую непрерывную дробь

$$\frac{b_1}{z - a_1 - \frac{b_2}{z - a_2 - \frac{b_3}{z - a_3 - \dots}}},$$

подходящие дроби P_n/Q_n которой обладают следующим замечательным свойством:

$$\frac{P_n}{Q_n}(z) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{c_k}{z^{k+1}} + \frac{A_n}{z^{2n+1}} + \dots,$$

тем самым,

$$\left(f - \frac{P_n}{Q_n}\right)(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right). \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01149) и фонда INTAS (грант № 93-219-EXT).

Соотношение (2) единственным образом определяет рациональную функцию P_n/Q_n в классе всех рациональных дробей порядка не выше n . Такая дробь доставляет *наилучшее локальное приближение* ряда (1) в указанном классе функций. Это свойство служит определением *диагональных аппроксимаций Паде* $[n/n]_f = P_n/Q_n$ для произвольного (формального или сходящегося) ряда (1).

В [3] Чебышев впервые изучил *формальные* разложения в непрерывные дроби для функций из фактически введенного им класса

$$\hat{\mu}(z) := \int_S \frac{d\mu(\zeta)}{z - \zeta}, \quad (*)$$

где положительная мера μ с носителем $S = S_\mu \subset \mathbb{R}$ имеет вид: $d\mu(x) = \theta(x) dx$, θ – суммируемая функция, вес. Именно на этом пути Чебышев открыл и исследовал *общие ортогональные многочлены*, соответствующие произвольному весу на $\mathbb{R}$: такие многочлены естественным образом возникают как знаменатели Q_n подходящих дробей функций $\hat{\mu}(z)$ вида (*).

Одним из первых результатов общего характера о *сходимости* диагональных аппроксимаций Паде аналитических функций является классическая теорема Маркова [4], полученная им в терминах чебышевских непрерывных дробей: *для голоморфной в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ функции $\hat{\mu}(z)$ вида (*), где μ – положительная борелевская мера с носителем $S = S_\mu \in \mathbb{R}$, состоящим из бесконечного множества точек, диагональные аппроксимации Паде $[n/n]_{\hat{\mu}}(z)$, построенные по коэффициентам разложения $\hat{\mu}(z)$ в ряд Лорана (1) в точке $z = \infty$, сходятся к $\hat{\mu}(z)$ равномерно внутри области $\overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$, где $[a, b]$ – минимальный отрезок вещественной оси, содержащий S_μ . Тем самым, любая *марковская функция* (т.е. вида (*), где $S_\mu \in \mathbb{R}$, μ – положительная мера) может быть восстановлена вне выпуклой оболочки $\hat{S}_\mu = [a, b]$ носителя меры по коэффициентам своего лорановского разложения в точке $z = \infty$ (моментам меры μ).*

К теореме Маркова непосредственно примыкают результаты А. А. Гончара [5] и Е. А. Рахманова [6] о сходимости диагональных аппроксимаций Паде для *мероморфных* функций $f(z)$ вида

$$f(z) = \hat{\mu}(z) + r(z), \quad (**)$$

где $\hat{\mu}$ – произвольная марковская функция, $r(z)$ – рациональная функция, голоморфная на $[a, b]$ ($r \in \mathcal{O}[a, b]$; f – “рациональное возмущение” $\hat{\mu}$). Конструкция аппроксимаций Паде существенно нелинейна, поэтому исследование сходимости таких аппроксимаций для функций вида (**) – нетривиальная задача. В теореме Гончара [5; п. 2] утверждается, что *диагональные аппроксимации Паде $[n/n]_f$ сходятся равномерно в сферической метрике¹ к функции f внутри области $\overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$ при условии, что $S_\mu = [a, b]$ и $\mu' = \frac{d\mu}{dx} > 0$ почти всюду на $[a, b]$, а функция $r \in \mathbb{C}(z)$ и голоморфна на $[a, b]$. В работе Рахманова [6] аналогичный результат о равномерной сходимости $[n/n]_f$ в сферической метрике вне $[a, b]$ к функции f установлен в предположении, что $\hat{\mu}(z)$ – произвольная марковская функция, а функция $r \in \mathbb{R}(z)$ и голоморфна на $[a, b]$.*

¹Сходимость в сферической метрике фактически предполагает, что в окрестности полюсов функции f рассматривается сходимость последовательности $1/[n/n]_f$ к функции $1/f$.

Из этих результатов Гончара и Рахманова вытекает, что диагональные аппроксимации Паде, которые строятся непосредственно по лорановским коэффициентам ряда (1), в классе функций вида $(**)$ при определенных условиях эффективно решают задачу *мероморфного продолжения* функции, заданной своим разложением в ряд Лорана в бесконечно удаленной точке: полюсы этих аппроксимаций локализуют отрезок $[a, b]$ и особые точки (полюсы и их кратности) функции f в $\overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$, а сами аппроксимации осуществляют мероморфное продолжение ряда f в $\overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$. Подчеркнем, что это замечательное свойство аппроксимаций Паде основано на том, что *все их полюсы “свободны”* и определяются только условием максимального касания (2) в бесконечно удаленной точке. Этим аппроксимации Паде принципиально отличаются от рациональных аппроксимаций с (полностью или частично) *фиксированными* полюсами, в том числе – так называемых аппроксимаций “типа Паде”: для таких аппроксимаций при доказательстве теорем сходимости, аналогичных теоремам Маркова, Гончара или Рахманова, кроме задания лорановских коэффициентов, необходимо накладывать дополнительные условия на структуру таблицы фиксированных полюсов, в том числе заранее знать расположение, вообще говоря, неизвестного носителя меры μ (см., например, [7]). Именно указанное выше свойство аппроксимаций Паде – эффективно решать задачу мероморфного продолжения степенного ряда – лежит в основе их многочисленных успешных применений в численном анализе и при исследовании некоторых задач математической физики (см., например, [8]–[14]).

Тот факт, что в теореме Маркова речь идет о равномерной сходимости не в $\overline{\mathbb{C}} \setminus S_\mu$ – области голоморфности функции $\hat{\mu}(z)$, а лишь вне выпуклой оболочки $\hat{S}_\mu$ носителя меры, связан с существом дела: непосредственно из упомянутого выше факта, что знаменатели диагональных аппроксимаций Паде функции вида $(*)$ являются полиномами, ортогональными относительно меры μ , вытекает, что если носитель меры μ состоит из нескольких непересекающихся отрезков², то в лакунах между этими отрезками могут располагаться полюсы рациональной функции $[n/n]_{\hat{\mu}}$. Более того, как будет показано ниже, “в общем положении” множество предельных точек полюсов рациональных функций $[n/n]_{\hat{\mu}}$ – нулей соответствующих ортогональных полиномов – *совпадает с* $[a, b]$, что делает принципиально невозможной равномерную сходимость $[n/n]_{\hat{\mu}}$ внутри $\overline{\mathbb{C}} \setminus S_\mu$ в классе марковских функций $(*)$. Аналогичная ситуация, когда полюсы диагональных аппроксимаций Паде имеют предельные точки в области мероморфности заданной функции вида $(**)$, не соответствующие полюсам рациональной функции r , имеет место и в условиях теоремы Рахманова. Если же в этом случае допустить, что $r \in \mathbb{C}(z)$, а S_μ состоит в точности из *двух отрезков*, то, как показано в [6], существует аналитическая дуга γ , соединяющая эти отрезки и лежащая в $\overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$, такая, что равномерная сходимость аппроксимаций Паде $[n/n]_f$ к функции f в сферической метрике имеет место в $\overline{\mathbb{C}} \setminus (S_\mu \cup \gamma)$. При этом если число $\omega_1(\infty)$ – гармоническая мера первого отрезка относительно области $\overline{\mathbb{C}} \setminus S_\mu$ в бесконечно удаленной точке – иррационально, то сходимость не имеет места ни в какой области, пересекающейся с γ ; в противном случае существует конечное множество точек $\mathcal{P}$ такое, что равномерная сходимость имеет место в $\overline{\mathbb{C}} \setminus (S_\mu \cup \mathcal{P})$. Дуга γ полностью определяется “геометрией”

²В случае, когда носитель S_μ состоит из двух непересекающихся отрезков, тот факт, что при определенных условиях ровно один нуль ортогонального полинома располагается в лакуне между отрезками, отмечался еще Марковым (см. [2]) при исследовании им вопроса о зависимости нулей ортогональных многочленов от параметра.

задачи: она зависит только от S_μ и расположения полюсов функции g и не зависит от меры μ и вычетов функции g в полюсах. Там же [6; шп. 3, 4] показано, что для функций вида $(**)$ при условии, что носитель меры μ состоит из *конечного числа отрезков*, а $g \in \mathbb{C}(z)$, диагональные аппроксимации Паде $[n/n]_f$ сходятся к функции f внутри области $\overline{\mathbb{C}} \setminus S_\mu$ по (логарифмической) *емкости*. Непосредственно из этого результата вытекает, что тем полюсам аппроксимаций Паде, которые имеют предельные точки в $\overline{\mathbb{C}} \setminus S_\mu$, не соответствующие полюсам f , обязательно сопутствуют в нужном числе близкие нули аппроксимаций. Наконец отметим, что в некоторых работах (см., например, [15]–[18]) для обозначения подобных полюсов используется термин “spurious”. Однако с нашей точки зрения сам термин, введенный, как отмечается в [18], в работе по вычислительной математике (см. [19], [20]) и связанный фактически с *погрешностью вычислений* аппроксимаций Паде, не соответствует существу дела, по крайней мере в контексте настоящей работы.

Комплексный вариант теоремы Рахманова “о двух отрезках” для случая *эллиптической* функции $f \in \mathcal{O}(\infty)$ вида

$$f(z) = \sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_4)} - z^2 + \frac{1}{2}(e_1 + \cdots + e_4)z, \quad (3)$$

где точки $e_1, \dots, e_4 \in \mathbb{C}$ попарно различны и выбрана та ветвь корня, главный член которой в окрестности бесконечно удаленной точки равен z^2 , был получен Дюма [21] в терминах непрерывных дробей почти сто лет назад (см. также [22] и [16]). В [21], в частности, показано, что если некоторые числовые параметры, связанные только с геометрическим расположением точек $e_1, \dots, e_4$, рационально независимы, то множество полюсов диагональных аппроксимаций Паде всюду плотно в $\overline{\mathbb{C}}$, т.е. последовательность $[n/n]_f$ не может равномерно сдвигаться ни в какой подобласти $\mathbb{C}$. Однако эта последовательность так же, как в теореме Рахманова, сходит по емкости в дополнении к некоторым экстремальным разрезам – разрезам “минимальной емкости”. Это утверждение является частным случаем общей теоремы Наттолла [23] о сходимости по емкости последовательности диагональных аппроксимаций Паде функции класса $(*)$ при условии, что носитель $S = S_\mu$ меры μ – компакт минимальной емкости для многозначной функции вида $\sqrt{(z - e_1) \cdots (z - e_{2g+2})}$, где точки $e_1, \dots, e_{2g+2} \in \mathbb{C}$ попарно различны. Сама же мера в этом “случае Наттолла” предполагается достаточно гладким *комплекснозначным* весом на S . Отметим, что этот класс функций содержит и *гиперэллиптические* функции (см. ниже).

Таким образом, как показано Рахмановым и Дюма, для “эллиптического” случая – двух отрезков или, более общо, двух разрезов минимальной емкости – предельные точки полюсов диагональных аппроксимаций Паде могут составлять аналитические дуги в области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S_\mu$ и даже быть всюду плотными в $\overline{\mathbb{C}}$. Более точно, речь идет о том, что по некоторой *подпоследовательности* полюсы аппроксимаций Паде сходятся к любой наперед заданной точке вышеуказанной дуги или соответственно к произвольной точке $\overline{\mathbb{C}}$. В такой ситуации принципиальным является вопрос о том, может ли какой-либо полюс аппроксимаций Паде иметь *предел* (а не только предельную точку) по всей последовательности $n \in \mathbb{N}$, отличный от полюса функции f . Дело в том, что этот вопрос непосредственно связан с так называемыми *обратными* задачами теории сходимости аппроксимаций Паде.

Напомним, что конструкция аппроксимаций Паде основана непосредственно на коэффициентах степенного ряда (1). Как уже отмечалось, именно с этим связаны их разнообразные успешные приложения. Прежде всего с точки зрения таких

приложений представляют несомненный интерес задачи, в которых требуется на основании известной информации об асимптотическом поведении полюсов диагональной последовательности аппроксимаций Паде некоторого степенного ряда сделать те или иные выводы об определяемой этим рядом аналитической функции, в том числе ее особых точках. Отметим, что наиболее общим результатом в этом направлении является теорема Гончара [24] (см. также [25]), в которой, в частности, утверждается, что если при некотором условии “нормальности” *все предельные точки полюсов диагональных аппроксимаций Паде, построенных по формальному ряду (1), лежат в некотором выпуклом множестве в $\mathbb{C}$, то этот ряд определяет функцию, голоморфную в дополнении к этому множеству, а аппроксимации Паде сходятся к функции равномерно внутри этого дополнения*.³

Цель настоящей статьи – доказательство некоторых результатов обратного характера для диагональных аппроксимаций Паде функций вида $f = \hat{\mu} + r$. Прежде всего – в “случае Рахманова”: $r \in \mathbb{C}(z)$, носитель меры μ состоит из конечного числа отрезков, а сама мера – гладкий положительный вес на этих отрезках, при некотором достаточно общем предположении относительно расположения отрезков (в “общем положении”; подробнее см. ниже теорему 1). Кроме того, исследуется и “случай Наттолла” (теорема 2), в котором концевые точки носителя меры μ располагаются в комплексной плоскости, а отрезки, образующие носитель, заменяются на дуги, составляющие компакт минимальной емкости для квадратного корня из полинома (четной степени) с простыми нулями в этих концевых точках. Мера μ здесь является гладким комплекснозначным весом. “Случай Наттолла” фактически охватывает и общие гиперэллиптические функции.

Отметим, что методы настоящей работы таковы, что эти результаты обратного характера вытекают непосредственно из положительного решения задачи о существовании для произвольной функции из определенного класса равномерно сходящейся в сферической метрике к этой функции в ее области мероморфности $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$ подпоследовательности диагональных аппроксимаций Паде. Для случая, когда область мероморфности функции – дополнение к некоторому кругу, соответствующая гипотеза о существовании равномерно сходящейся в сферической метрике подпоследовательности диагональных аппроксимаций Паде широко известна как *гипотеза Бейкера–Гаммеля–Уиллса* (см. прежде всего [8], а также [7] и [17]).

Наконец, отметим, что наиболее общий результат о сходимости диагональных аппроксимаций Паде получен Шталем [26]. Для функций вида (**), где носитель S состоит из конечного числа аналитических дуг в $\mathbb{C}$ и удовлетворяет определенному свойству “симметрии” (так называемому $\mathcal{S}$ -свойству, которое означает, что в точках носителя нормальные производные функции Грина области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$, вычисленные “сверху” и “снизу”, равны по величине), Шталь доказал сходимость диагональных последовательностей аппроксимаций Паде по *емкости* при условии, что комплекснозначная мера μ такова, что $\mu' = \frac{d\mu}{ds} \neq 0$ на S за исключением некоторого множества нулевой емкости. При этом показано, что область $\overline{\mathbb{C}} \setminus S$ – максимальная (по включению) область сходимости по емкости последователь-

³С учетом этого результата теорема Маркова вытекает непосредственно из установленного Чебышевым факта, что полюсы диагональных аппроксимаций Паде $[n/n]_{\hat{\mu}}$ – нули полиномов, ортогональных по мере μ , и, тем самым, лежат на отрезке $[a, b]$.

ности $[n/n]_f$, а точечная мера, ассоциированная с полюсами аппроксимаций Паде, слабо сходится к равновесной мере компакта S . Отметим, что в “случае Шталя” класс $(**)$ фактически содержит *алгебраические* функции. Непосредственно из этого результата Шталя вытекает, что полюс рациональной функции $[n/n]_f$, имеющий при $n \rightarrow \infty$ предельную точку в $\overline{\mathbb{C}} \setminus S$, не соответствующую полюсу функции f , имеет близкий (“сопутствующий”) нуль.

В дальнейшем предполагается, что функция $\hat{\mu}$ допускает представление

$$\hat{\mu}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\rho(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\sqrt{h(\zeta)}} =: \hat{\rho}(z; h), \quad (\diamond)$$

где $h = h_{2g+2} \in \mathbb{C}[z]$ – полином четной степени $2g + 2$, $g \geq 0$, с единичным старшим коэффициентом, все корни $\{e_j\}$ которого – простые, $S = S(h)$ – компакт, имеющий минимальную емкость среди всех компактов в $\mathbb{C}$, в дополнении к которым выделяется однозначная ветвь квадратного корня $\sqrt{h(z)}$, $S = \bigcup_{j=1}^{g+1} S_j$, $S_j = \text{arc}(e_{2j-1}, e_{2j})$ (дуги S_j , вообще говоря, могут пересекаться); под $\sqrt{h(\zeta)}$, $\zeta \in S$, понимаются “верхние” граничные значения на S той ветви корня, которая определяется условием $\sqrt{h(z)}/z^{g+1} \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$; комплекснозначная функция $\rho(\zeta) \neq 0$ и удовлетворяет на S условию Гёльдера с показателем $\alpha \leq 1$ (будем говорить, что ρ H -непрерывна на S и писать $\rho \in H(\alpha; S)$, $0 < \alpha \leq 1$). Такую функцию ρ в дальнейшем будем называть *допустимым весом*; в частном случае, когда $\rho(\zeta)$ – рациональная функция переменной ζ ($\rho \in \mathbb{C}(\zeta)$), не имеющая на S ни нулей, ни полюсов, функция $\hat{\rho}(\cdot; h)$ – гиперэллиптическая функция, определенная на гиперэллиптической римановой поверхности $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(h)$ рода $g = g(h)$, заданной уравнением $w^2 = h(z)$: $\hat{\rho}(z; h) = r_1(z)w + r_2(z)$, где $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(z)$; тем самым, $\hat{\rho}(\cdot; h) \in \mathbb{C}(z, w)$. В дальнейшем, допуская некоторую вольность в обозначениях при записи функции вида $(\diamond)$, ссылку на h будем, как правило, опускать и писать $\hat{\rho}(z)$ или просто $\hat{\rho}$. Наконец, отметим, что в соответствии с выбранной нами ветвью функции $\sqrt{h}$ марковскому случаю положительной меры μ соответствует такой вес ρ с носителем на $\mathbb{R}$, для которого имеет место неравенство $i\rho/\sqrt{h} > 0$ на S .

Как уже отмечалось, вопрос о сходимости диагональных и близких к ним последовательностей аппроксимаций Паде функций вида $(\diamond)$ впервые изучался Наттолом и Сингхом [23] (см. также [27]), обобщившими на случай произвольного $h \in \mathbb{C}[z]$ четной степени, $\deg h = 2g + 2$, и комплексного веса $\rho(\zeta) \neq 0$ классический *аппроксимационный метод Бернштейна–Сегё*, основанный на явных формулах для полиномов, ортогональных относительно веса вида “единица делить на полином” (см. [28; § 2.6, (2.6.1)], [29]). При несколько более общих, чем в настоящей статье, условиях на вес ρ , но также в предположении, что компакт минимальной емкости имеет равно $g + 1$ компоненту связности (т.е. дуги S_j попарно не пересекаются; ниже мы накладываем это условие на взаимное расположение точек $e_1, \dots, e_{2g+2}$ как *первое условие* “общего положения”), Наттолом и Сингхом [23] была доказана сходимость по емкости таких аппроксимаций к функции $\hat{\rho}$ равномерно внутри (на компактных подмножествах) области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$. Как уже отмечалось, использование понятия сходимости по емкости связано с существом дела: хотя “почти все” полюсы диагональных аппроксимаций Паде $[n/n]_{\hat{\rho}}$ функции $\hat{\rho}$ “стягиваются” к S , конечное число полюсов рациональных функций $[n/n]_{\hat{\rho}}$ (Наттолл фактически показал, см. [23], [27], что их число $\leq g$) может иметь предельные точки в D – области голоморфности функции $\hat{\rho}$. Наличие таких “лишних” полюсов и является, по существу, единственным препятствием для равномерной сходимости диагональных

аппроксимаций Паде функций вида $(\diamond)$. Таким образом, вопрос о *существовании* равномерно сходящейся подпоследовательности аппроксимаций Паде сводится к вопросу о существовании подпоследовательности, по которой эти аппроксимации не имеют полюсов в D . Тем самым, поскольку знаменатели диагональных аппроксимаций Паде функции $(\diamond)$ – многочлены, *неэрмитово* ортогональные на S относительно веса $\rho(\zeta)/\sqrt{h(\zeta)}$, естественным образом приходим к задаче о так называемой “*сильной*” (т.е. типа Сегё) асимптотике этих (неэрмитово) ортогональных многочленов – *многочленов Паде*. Наиболее общие результаты об асимптотике такого вида для многочленов, *эрмитово* ортогональных на системе кривых и дуг в $\mathbb{C}$ относительно *вещественного* веса $\rho \geq 0$, удовлетворяющего условию Сегё, получены Видомом [30] (см. также [31]); ответ дан им в терминах решений некоторых экстремальных весовых (относительно ρ) задач, в которых условие вещественности и неотрицательности веса ρ играет ключевую роль. Таким образом, полученные в настоящей работе результаты “пересекаются” с результатами Видома только для классического случая – *полиномов Ахизера* [32]–[34]: все корни полинома $h(z)$ – вещественные, т.е. S состоит из конечного числа отрезков вещественной оси $\mathbb{R}$, а $i\rho(\zeta)/\sqrt{h(\zeta)} > 0$ на S . Отметим, что и в этой ситуации нам удалось сделать некоторое уточнение к результату Видома (см. ниже предложения 3 и 4).

В целом же рассматриваемая здесь задача об асимптотике полиномов Паде потребовала иного, чем у Видома, подхода, который впервые, главным образом в виде примеров и гипотез⁴, был предложен Наттолом [27]. Речь идет о том, что при некоторых достаточно общих геометрических условиях на расположение точек $e_1, \dots, e_{2g+2}$ (точнее, в случае “общего положения”; подробнее см. ниже п. 1.2) нам удалось фактически охарактеризовать асимптотическое поведение полиномов Паде, как в “случае Рахманова”, так и в “случае Наттолла”, в терминах решения некоторой *краевой задачи Римана*, поставленной на расширенной комплексной плоскости с разрезами по аналитическим дугам, составляющим компакт минимальной емкости S . Подчеркнем, что этот *подход Наттолла* позволяет обойтись без традиционного аппроксимационного метода Бернштейна–Сегё, о котором говорилось выше.

Отметим также, что первый положительный результат, касающийся гипотезы Бейкера–Гамелля–Уиллса, был получен Шталем [16] для *гиперэллиптических функций*

$$f(z) = r_1(z)w + r_2(z), \quad (4)$$

$w^2 = h(z)$, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(z)$, при некотором дополнительном условии на нули и полюсы рациональных функций r_1, r_2 и также в условиях “общего положения”; непосредственно из полученного ниже тождества (7) вытекает, что “общее положение” из работы Шталя [16] эквивалентно используемому в настоящей статье. Тем самым, из результатов настоящей работы следует, что гипотеза Бейкера–Гамелля–Уиллса справедлива в “общем положении” и для функций более общего вида, чем (4):

$$f(z) = \widehat{\rho}(z; h) + r(z), \quad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus S, \quad (\diamond\diamond)$$

где $\text{supp } \rho = S$, $\rho \neq 0$ и H -непрерывна на S , $S = S(h)$, $h \in \mathbb{C}[z]$, $\deg h = 0 \pmod{2}$, $r \in \mathbb{C}(z) \cap \mathcal{O}(S)$.

⁴В настоящей работе фактически доказаны некоторые из гипотез Наттолла; см., например, [27; п. 4.3.1, формула (4.3.27)].

Класс таких функций f вида $(\diamond\diamond)$ будем обозначать через $\mathcal{N}$; если же, кроме того, в $(\diamond\diamond)$ все нули полинома h лежат на $\mathbb{R}$ и вес ρ удовлетворяет неравенству $i\rho/\sqrt{h} > 0$ на S , то будем писать $f \in \mathcal{N}^\circ$, а вес ρ называть *допустимым в классе $\mathcal{N}^\circ$* . Для функции $f \in \mathcal{N}$ соответствующую область $\mathbb{C} \setminus S$ будем обозначать через $D = D_f$.

Основные результаты настоящей работы анонсированы в [35].

1.2. Формулировка основных результатов. Пусть f – ряд (1), $\{[n/n]_f\}_{n \in \mathbb{N}}$ – соответствующая ему последовательность диагональных аппроксимаций Паде (“главная диагональ” Паде).

Для произвольной точки $a \in D_f$ определим следующую характеристику $k_f(a) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Пусть $\mathcal{P}_n(f) = \{\zeta_{1,n}, \dots, \zeta_{n',n}\}$, $n' \leq n$, – множество всех полюсов⁵ рациональной функции $[n/n]_f$; будем считать, что полюсы занумерованы в порядке неубывания их расстояния от точки a : $\zeta_{j,n} = \zeta_{j,n}(a)$. Тогда

$$k_f(a) = \sup\{k \in \mathbb{N} : \zeta_{k,n}(a) \rightarrow a, n \rightarrow \infty\};$$

если множество индексов k в последней формуле пусто, то полагаем $k_f(a) = 0$. Очевидно, $0 \leq k_f(a) \leq \infty$, причем, при $f \in \mathcal{N}$ величина $k_f(a) \geq 1$, если a – полюс f ; из приводимых ниже результатов вытекает, что в “общем положении” для $f \in \mathcal{N}$ величина $k_f(a) < \infty$, если $a \in D_f$.

Для произвольной точки $a \in D_f$ положим: $p_f(a)$ – кратность полюса функции f в этой точке, если a – полюс f , и $p_f(a) = 0$ в противном случае; тем самым, $p_f(z)$, $z \in D_f$, – дивизор полюсов функции $f \in \mathcal{N}$ в области D_f .

Для функции $f \in \mathcal{N}^\circ$ “общим положением” будем называть ситуацию, когда нули полинома $h = h(z; f)$, все лежащие на одной прямой, таковы, что числа $\omega_1(\infty), \dots, \omega_{g+1}(\infty)$ – гармонические меры отрезков, составляющих множество S , относительно области D_f , взятые в бесконечно удаленной точке – рационально независимы. Нетрудно видеть, что такая ситуация действительно является “общим положением” в смысле работы [16]: если рассматривать аппроксимации Паде функции $f \in \mathcal{N}^\circ$, соответствующие разложению f в ряд в некоторой точке $x \in \mathbb{R} \setminus S$, то в любом интервале $\ell \subset \mathbb{R}$ множество точек $x \in \ell$ таких, что числа $\omega_1(x), \dots, \omega_{g+1}(x)$ рационально независимы, имеет полную относительно ℓ линейную меру Лебега.

“Общее положение” в классе функций $\mathcal{N}$ определяется условиями (C_1) – (C_2) (см. ниже).

Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть ряд (1) определяет функцию $f \in \mathcal{N}^\circ$ и нули полинома $h = h(z; f)$, все лежащие на одной прямой, находятся в “общем положении”. Тогда $p_f(a) = k_f(a)$ для любой точки $a \in D_f$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ряд (1) определяет функцию $f \in \mathcal{N}$, причем нули полинома $h = h(z; f)$ находятся в “общем положении”. Тогда $p_f(a) = k_f(a)$ для любой точки $a \in D_f$.

Таким образом, в условиях теорем 1 и 2 каждый полюс a функции f в D притягивает ровно $k = p_f(a)$ полюсов аппроксимаций Паде $[n/n]_f$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\zeta_{j,n}(a) \rightarrow a, \quad j = 1, \dots, k, \quad n \rightarrow \infty; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\zeta_{k+1,n}(a)| > 0,$$

⁵Как обычно, здесь и всюду в дальнейшем нули и полюсы функций считаются и выписываются с учетом их кратностей.

где $|\cdot; \cdot|$ — расстояние в сферической метрике между двумя точками из $\overline{\mathbb{C}}$.

Иначе говоря, диагональные аппроксимации Паде *восстанавливают дивизор полюсов* в области $D = D_f$ находящейся в “общем положении” мероморфной функции f из класса $\mathcal{N}$ или $\mathcal{N}^\circ$.

Этот результат в определенном смысле дополняет теорему Наттолла о сходимости по емкости диагональных аппроксимаций Паде функции $f \in \mathcal{N}$. Действительно, непосредственно из этой теоремы Наттолла вытекает, что мера, ассоциированная с нулями знаменателя Q_n , слабо сходится к равновесной мере компакта S . Тем самым, в классе функций $\mathcal{N}$ главная диагональ Паде восстанавливает носитель S .

Из метода доказательства теорем 1 и 2 вытекает следующий формально более общий результат.

СЛЕДСТВИЕ. *В условиях теоремы 1 или 2 главная диагональ Паде восстанавливает дивизор (нулей и полюсов) функции f в D_f .*

Как уже отмечалось, эти результаты являются прямыми следствиями теорем о существовании в “общем положении” для функций классов $\mathcal{N}^\circ$ и $\mathcal{N}$ равномерно сходящихся в сферической метрике подпоследовательностей диагональных аппроксимаций Паде. Более точно, *схема доказательства* теорем 1 и 2 состоит в выводе следующих импликаций:

- 1) существование обладающего определенными свойствами решения проблемы Якоби обращения абелевых интегралов $\implies$
- 2) существование решения некоторой краевой задачи Римана $\implies$
- 3) существование сильной асимптотики полиномов Паде $\implies$
- 4) равномерная сходимость в сферической метрике диагональных аппроксимаций Паде $\implies$
- 5) справедливость обратных теорем 1 и 2.

Для функции $f \in \mathcal{N}$ будем говорить, что подпоследовательность диагональных аппроксимаций Паде $[n/n]_f(z)$, $n \in \Lambda$, равномерно в сферической метрике сходится к функции f внутри области D_f , если для любого компакта $K \Subset D_f$

$$\sup_{z \in K} |f(z); [n/n]_f(z)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \Lambda.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если все точки $e_1, \dots, e_{2g+2}$ расположены на одной прямой и числа $\omega_1(\infty), \dots, \omega_{g+1}(\infty)$ — гармонические меры отрезков, составляющих множество S , относительно области D — рационально независимы, то для любой функции $f(z) = \widehat{\rho}(z; h) + r(z)$, где ρ — допустимый в классе $\mathcal{N}^\circ$ вес на S , а $r \in \mathbb{C}(z) \cap \mathcal{O}(S)$, существует подпоследовательность $\Lambda \subset \mathbb{N}$ такая, что*

$$[n/n]_f(z) \rightarrow f(z), \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \Lambda,$$

равномерно в сферической метрике внутри D .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если точки $e_1, \dots, e_{2g+2}$ находятся в “общем положении” $(C_1)-(C_2)$, то для любой функции $f(z)$ вида*

$$f(z) = \widehat{\rho}(z; h) + r(z),$$

где вес ρ – допустимый, а $r \in \mathbb{C}(z) \cap \mathcal{O}(S)$, существует бесконечная подпоследовательность $\Lambda \subset \mathbb{N}$ такая, что $\deg Q_n = n$ для $n \in \Lambda$ и

$$[n/n]_f(z) \rightarrow f(z), \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \Lambda,$$

равномерно в сферической метрике внутри D .

Как уже отмечалось, наш подход к изучаемой проблеме таков, что в основе исследования вопроса о равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде лежит доказательство формулы сильной асимптотики для знаменателей этих рациональных функций – полиномов Паде. Точнее, пусть f – ряд (1) и полиномы $P_n(z) = P_n(z; f)$ и $Q_n(z) = Q_n(z; f)$, $P_n, Q_n \in \mathbb{C}[z]$, $\deg P_n \leq n-1$, $\deg Q_n \leq n$, $Q_n \not\equiv 0$, удовлетворяют соотношению

$$(Q_n f - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Тогда $[n/n]_f(z) = P_n(z)/Q_n(z)$. Напомним, что рациональная функция $[n/n]_f(z)$ однозначно определяется условием (2) максимального касания ряда f в классе рациональных функций степени не выше n . Как обычно, индекс n назовем *нормальным*, если $\deg Q_n = n$ для любого Q_n , удовлетворяющего (5); в таком случае нормировкой $Q_n(z) = z^n + \dots$ полином Паде определяется однозначно. Для функции $f = \hat{\rho}$ вида $(\diamond)$ полиномы Q_n неэрмитово ортогональны на $S = S(h)$ относительно веса $\rho/\sqrt{h}$.

Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если выполняются условия теоремы 1 или 2 на полином h , то для любого допустимого в классе $\mathcal{N}^\circ$ или $\mathcal{N}$ веса ρ на S существует бесконечная подпоследовательность $\Lambda \subset \mathbb{N}$ такая, что при $n \in \Lambda$ индекс n – нормальный и

- (i) $Q_n(z; \hat{\rho}) = \text{cap}(S)^n \Phi^n(z) F_n(z; \rho) (1 + o(1))$, $n \in \Lambda$, равномерно внутри области D , где $\Phi(z)$ – отображающая функция, $F_n(z; \rho)$ – многозначная аналитическая функция с однозначным модулем, $|F_n(\infty; \rho)| = 1$, не имеющая нулей в D ;
- (ii) $[n/n]_{\hat{\rho}}(z) \rightarrow \hat{\rho}(z)$, $n \in \Lambda$, равномерно внутри области D ;
- (iii) при $n \in \Lambda$ рациональная функция $[n/n]_{\hat{\rho}}(z)$ интерполирует функцию $\hat{\rho}(z)$ дополнительно⁶ в g конечных точках области D .

Изучение асимптотических свойств полиномов Паде, в свою очередь, основано на исследовании некоторой *краевой задачи Римана* для многосвязной области D .

Как уже отмечалось, компакт минимальной емкости для гиперэллиптического случая состоит из конечного числа замкнутых, вообще говоря, пересекающихся аналитических дуг S_j (см., например, [23], [27], а также [36], [37]). Будем считать, что выполнено *первое условие “общего положения”*:

⁶ Напомним, что если индекс n нормален, для рациональной функции $[n/n]_f$ выполняется интерполяционное соотношение (2).

(C₁) аналитические дуги S_j , $j = 1, \dots, g+1$, составляющие компакт минимальной емкости S , не пересекаются.

При этом условии $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$ — g -связная область в $\overline{\mathbb{C}}$. Через S_j^+ , S_j^- будем обозначать соответственно “верхний” и “нижний” берега дуг $S_j = \text{arc}(e_{2j-1}, e_{2j})$, $j = 1, \dots, g+1$, составляющих S и ориентированных согласованно с ориентацией S как границы области D : область D остается слева при обходе j -й компоненты от точки e_{2j-1} к точке e_{2j} по “верхнему” берегу и обратно от e_{2j} к e_{2j-1} по “нижнему”. Пусть $\Gamma = S^+ \cup S^-$; отметим, что кривая $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{g+1} \Gamma_j$, $\Gamma_j = \text{arc}(e_{2j-1}, e_{2j}) \cup \text{arc}(e_{2j}, e_{2j-1})$, рассматриваемая как кривая на римановой поверхности $\mathfrak{R}$, состоит из конечного числа непересекающихся аналитических жордановых контуров Γ_j , $j = 1, \dots, g+1$. Через $\mathcal{C}(D)$ обозначим класс всех функций, мероморфных в D и H -непрерывно продолжимых на $S^+ \cup S^-$ (т.е. с граничными значениями, удовлетворяющими условию Гёльдера с показателем ≤ 1). Предельные значения функций такого класса на S^+ и S^- будем обозначать соответственно при помощи “+” и “−”. Пусть на S задана комплекснозначная H -непрерывная функция $\rho \neq 0$ (т.е. допустимый вес). Как уже отмечалось, наш подход к изучению асимптотических свойств полиномов Паде основан на исследовании некоторой краевой задачи для многосвязной области D .

Для фиксированного $n \in \mathbb{N}$, $n \geq g$, рассмотрим следующую краевую задачу Римана.

ЗАДАЧА ($\mathcal{R}$). Найти пару функций $\varphi_n, \psi_n \in \mathcal{C}(D)$ таких, что

- (i) φ_n имеет полюс порядка n в точке $z = \infty$ и не имеет ни других полюсов, ни нулей в D (т.е. дивизор функции φ_n имеет вид: $(\varphi_n)_D = \infty^{-n}$);
- (ii) ψ_n имеет нуль кратности $n - g$ в точке $z = \infty$ и еще ровно g “свободных” нулей в $D^* = D \setminus \{\infty\}$; других нулей или полюсов функция ψ_n не имеет (т.е. дивизор функции ψ_n имеет вид: $(\psi_n)_D = \infty^{n-g} \cdot z_{1,n} \cdots z_{g,n}$, все $z_{j,n} \in D^*$);
- (iii) на множестве S выполняются краевые условия $\rho \varphi_n^+ = \psi_n^-$, $\rho \varphi_n^- = \psi_n^+$.

Пару таких функций $\varphi_n = \varphi_n(z; \rho)$, $\psi_n = \psi_n(z; \rho)$, нормированных условием $\varphi_n(z)/z^n \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$, назовем *решением* задачи ($\mathcal{R}$). Ниже будет показано, что если при введенной нормировке решение этой задачи существует, то оно единственно.

Исследованию вопроса существования решения задачи ($\mathcal{R}$) посвящен §3 настоящей работы. Задачу ($\mathcal{R}$) удастся изучить, рассматривая ее фактически как краевую задачу Римана для кусочно-мероморфной функции на двулистной гиперэллиптической римановой поверхности $\mathfrak{R}$: $w^2 = h(z)$. Отметим, что хотя в [38] такие краевые задачи рассмотрены для более общего случая произвольной компактной римановой поверхности, в нашей ситуации задача приобретает определенную специфику из-за того, что краевое условие задается на кривой $\Gamma \subset \mathfrak{R}$, каноническая проекция которой на $\mathbb{C}$ есть компакт минимальной емкости. Как и в [38], анализ существования и структуры решения задачи будет проведен с помощью анализа существования обладающего определенными свойствами решения *проблемы обращения Якоби* (см. §3).

Наш подход к изучению асимптотических свойств полиномов Паде $Q_n(z)$ основан на свойствах решения задачи ($\mathcal{R}$): здесь фактически доказано, что при выполнении (C₁) достаточным условием существования по некоторой подпоследова-

тельности сильной асимптотики полиномов Паде является разрешимость по этой подпоследовательности задачи $(\mathcal{R})$. Точнее, имеет место следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если для некоторой последовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$ задача $(\mathcal{R})$ имеет решение φ_n, ψ_n , $n \in \Lambda$, причем “свободные” нули функций ψ_n компактно по $n \in \Lambda$ принадлежат области D^* , то индекс $n \in \Lambda$ – нормальный и при нормировке полиномов Паде условием $Q_n(z; \hat{\rho}) = z^n + \dots$ для $n \in \Lambda$ имеем:*

- (i) $Q_n(z; \hat{\rho}) = \varphi_n(z; \rho)(1 + o(1))$ равномерно внутри области D ;
- (ii) $Q_n(\zeta; \hat{\rho}) = \varphi_n^+(\zeta; \rho) + \varphi_n^-(\zeta; \rho) + o(1)$ равномерно на S ;
- (iii) если вес ρ аналитичен на каждой дуге S_j , то в (i)–(ii) имеем: $o(1) = o(q^n)$, $0 < q < 1$; для $\rho \in \mathcal{H}(\alpha; S)$ в (i)–(ii) имеем: $o(1) = o(\log n/n^\alpha)$.

Отметим, что непосредственно из утверждения (i) этого предложения вытекает, что по подпоследовательности Λ полюсы диагональных аппроксимаций Паде не имеют предельных точек в D . Для частного случая, когда множество S расположено на прямой, а $\rho(x)$ – допустимый вес, имеем: $Q_n(x; \hat{\rho}) = t_n(x; \rho) -$ полиномы Ахиезера, ортогональные на системе из $g + 1$ отрезков с весом $\rho/\sqrt{h}$, а $P_n(x; \hat{\rho}) = u_{n-1}(x; \rho)$ – соответствующие полиномы второго рода (см. [32]). Тем самым, для этого случая формула (i) (см. также предложение 3, п. (i)) является некоторым уточнением результата Видома [30; §§ 12, 14].

Задачу $(\mathcal{R})$ удастся исследовать в нужном для нас смысле пока только для двух случаев:

- (I) все точки $e_1, \dots, e_{2g+2}$ лежат на одной прямой, а гармонические меры соответствующих отрезков $\omega_1(\infty), \dots, \omega_{g+1}(\infty)$ рационально независимы (это так называемое “общее положение” в классе $\mathcal{N}^\circ$);
- (II) имеет место “общее положение” в классе $\mathcal{N}$, которое кроме первого условия (C_1) включает еще и второе условие (C_2) :

(C_2) периоды⁷ комплексной функции Грина $G_D(z, \infty)$, соответствующей компакту минимальной емкости S , рационально независимы с числом $2\pi i$.

Случай (I) не включается в (II): легко видеть, что в условиях (I) не выполняется условие (C_2) “общего положения” – если все точки $\{e_j\}$ лежат на одной прямой, то все b -периоды функции Грина равны нулю (см. ниже).

На множестве всех $\mathcal{H}$ -непрерывных на S весов введем отношение эквивалентности. Два веса ρ_1 и ρ_2 назовем *эквивалентными*, если имеют место соотношения:

$$\int_S \log \rho_1(\zeta) d\Omega_k^+(\zeta) = \int_S \log \rho_2(\zeta) d\Omega_k^+(\zeta) \pmod{\pi i}, \quad k = 1, \dots, g;$$

здесь $d\Omega_k$, $k = 1, \dots, g$, – a -нормированный базис голоморфных абелевых дифференциалов на $\mathcal{R}$ (см. § 2). Класс всех весов, эквивалентных весу ρ , будем обозначать через $[\rho]$.

Справедливо следующее

⁷Напомним, что комплексная функция Грина имеет $2g$ независимых периодов, которые все чисто мнимые.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если выполняется условие (I) или условие (II), то для любого веса ρ существует бесконечная подпоследовательность $\Lambda = \Lambda_{[\rho]} \subset \mathbb{N}$ такая, что для каждого $n \in \Lambda$ задача (R) имеет решение для всех допустимых весов из класса $[\rho]$, причем “свободные” нули функций $\psi_n(z)$ компактно по $n \in \Lambda$ принадлежат области $D^* = D \setminus \{\infty\}$.

Тем самым, в условиях “общего положения” (I) или (II) для $n \in \Lambda$ имеют место асимптотические соотношения (i) и (ii) предложения 4.

Наконец, отметим противоположный случай по отношению к случаю “общего положения”, и тем самым не подпадающий под действие вышеуказанных теорем: периоды комплексной функции Грина $G_D(z, \infty)$ – рациональные кратные $2\pi i$. Хорошо известно, что в этом случае поддается исследованию ситуация, когда вес $\rho(z) \in \mathbb{C}[z]$ – полином степени g , все корни которого лежат среди $e_1, \dots, e_{2g+2}$ (ρ делит полином $h: \rho \mid h$).

ТЕОРЕМА НАТТОЛЛА–РАХМАНОВА. Если точки $e_1, \dots, e_{2g+2}$ таковы, что периоды комплексной функции Грина $G_D(z, \infty)$ – рациональные кратные $2\pi i$, а вес $\rho(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg \rho = g$ и $\rho \mid h$, то по некоторой подпоследовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$ все индексы n нормальны и полиномы Паде $Q_n(z) = z^n + \dots$ допускают явное представление $Q_n(z) = \text{cap}(S)^n \cdot (\Phi^n(z) + \Phi^{-n}(z))$, где $\Phi(z) = \exp\{G_D(z, \infty)\}$.

Тем самым, для каждого $n \in \Lambda$ все нули полиномов $Q_n(z)$ лежат на S . Подчеркнем, что $Q_n(z)$ – один и тот же для всех полиномов $\rho \mid h$. Ниже (см. п. 5.4) будет показано, что этот результат Наттолла–Рахманова фактически эквивалентен классической теореме Абеля о существовании полиномиального интегрирующего множителя для дифференциала $dz/\sqrt{h(z)}$. В частности, полиномы Паде удовлетворяют уравнению Пелля $(Q_n/2)^2 - p^2 h \equiv 1$, $p \in \mathbb{C}[z]$, $\deg p = n - g - 1$. Отметим, что если в рассматриваемом случае все точки $\{e_j\}$ лежат на одной прямой, то при $n \in \Lambda$ имеем $Q_n(z) = T_n(z; S)$ – полиномы Чебышева для системы отрезков $S = \bigcup_{j=1}^{g+1} [e_{2j-1}, e_{2j}]$: они ортогональны на S относительно веса $\rho(x)/\sqrt{h(x)}$ и наименее уклоняются от нуля на S в равномерной норме (ср. [39]).

§2. Основные определения и вспомогательные результаты

2.1. Всюду в дальнейшем при использовании понятий, связанных с римановой поверхностью, мы в основном следуем [38], [40]–[42]. Будем считать, что точки $e_1, \dots, e_{2g+2}$ удовлетворяют первому условию общего положения (C_1). Через $\mathfrak{R}$ обозначаем гиперэллиптическую риманову поверхность рода g , заданную уравнением $w^2 = h_{2g+2}(z)$ и реализованную как двулистное разветвленное накрытие римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$ таким образом, что два листа представляют собой два экземпляра $\overline{\mathbb{C}}$ с разрезами по дугам, составляющим компакт минимальной емкости, “склеенные” друг с другом “накрест” по противоположным берегам соответствующих разрезов. Таким образом, аналитическим дугам S_j , составляющим компакт минимальной емкости, соответствуют на $\mathfrak{R}$ замкнутые аналитические (в топологии $\mathfrak{R}$) жордановы кривые Γ_j , $j = 1, \dots, g+1$, – циклы на $\mathfrak{R}$; положим $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{g+1} \Gamma_j$. Листы римановой поверхности будем обозначать соответственно через $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$; имеем $\mathfrak{R} = D^{(1)} \cup \Gamma \cup D^{(2)}$, каждый из листов – g -связная область, первый лист $D^{(1)}$ мы будем отождествлять с многосвязной областью $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$. Для точек z ,

лежащих на первом листе, $\mathbf{z} \in D^{(1)}$, имеем $\mathbf{z} = (z, \sqrt{h(z)})$, где, как и выше, выбрана однозначная в D ветвь $\sqrt{h(z)}$, удовлетворяющая условию $\sqrt{h(z)}/z^{g+1} \rightarrow 1$ при $z \rightarrow \infty$; для $\mathbf{z} \in D^{(2)}$ имеем: $\mathbf{z} = (z, -\sqrt{h(z)})$; для явного указания, на каком именно листе римановой поверхности лежит точка $\mathbf{z}$, мы будем часто использовать сокращенную запись $z^{(1)}$ при $\mathbf{z} \in D^{(1)}$ и $z^{(2)}$ при $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, причем в соответствии с нашим соглашением об отождествлении D и $D^{(1)}$ будем считать, что $z = z^{(1)}$. Соответственно $w(\mathbf{z}) = \sqrt{h(z)}$ при $\mathbf{z} = z^{(1)}$ и $w(\mathbf{z}) = -\sqrt{h(z)}$ при $\mathbf{z} = z^{(2)}$. Для $\mathbf{z} = z^{(1)}$ будем часто писать просто $w(z)$ вместо $w(\mathbf{z})$; тем самым, приобретает смысл и запись $w^+(\zeta)$, $\zeta \in S$. Каноническая проекция $\pi: \mathfrak{R} \rightarrow \mathbb{C}$ определяется соотношением $\pi(\mathbf{z}) = z$, в частности $\pi(D^{(1)}) = \pi(D^{(2)}) = D$. Две различные точки $\mathbf{z}$ и ζ будем называть *сопряженными* и писать $\zeta = \mathbf{z}^*$, если $\pi(\mathbf{z}) = \pi(\zeta)$. Напомним, что $\pi(\Gamma) = S$.

Положительным обходом контура Γ на $\mathfrak{R}$ будем считать такой, при котором область $D^{(1)}$ остается слева, а область $D^{(2)}$ — справа; соответствующее обозначение Γ^+ . Предельное положение точки $\mathbf{z} \in D^{(1)}$ (соответственно $\mathbf{z} \in D^{(2)}$) на Γ , когда $\mathbf{z}$ стремится к точке $\zeta \in \Gamma$, будем обозначать $\zeta+$ (соответственно $\zeta-$). Если в $D^{(1)}$ задана функция $F(\mathbf{z})$, то под $F(\zeta+)$ понимаются ее предельные значения, если они существуют, в точке $\zeta \in \Gamma$; аналогичный смысл придается и $F(\zeta-)$.

2.2. Первые g из контуров Γ_j выберем в качестве базисных a -циклов $\{\mathbf{a}_j, j = 1, \dots, g\}$, а затем стандартным образом дополним этот набор b -циклами $\{\mathbf{b}_j, j = 1, \dots, g\}$ так, что матрица пересечений имеет вид $\mathbf{a}_k \circ \mathbf{a}_j = \mathbf{b}_k \circ \mathbf{b}_j = 0$, $j \neq k$, $\mathbf{a}_k \circ \mathbf{b}_j = \delta_{kj}$ и циклы $\{\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j\}$ образуют базис гомологий на $\mathfrak{R}$, т.е. любой цикл $\mathbf{c}$ на $\mathfrak{R}$ гомологичен целочисленной линейной комбинации $\mathbf{a}_j$ и $\mathbf{b}_j$: $\mathbf{c} = \sum_{j=1}^g n_j \mathbf{a}_j + m_j \mathbf{b}_j$, $n_j, m_j \in \mathbb{Z}$. Для произвольного голоморфного абелева дифференциала $d\Omega$ функция $\int^{\mathbf{z}} d\Omega$ определяется однозначно по модулю его a - и b -периодов: $\oint_{\mathbf{a}_j} d\Omega$ и $\oint_{\mathbf{b}_j} d\Omega$. Как известно, введенный выше *канонический* базис гомологий $\{\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j\}$ порождает на $\mathfrak{R}$ соответствующий *a -нормированный* базис голоморфных абелевых дифференциалов $\{d\Omega_k\}$: $\oint_{\mathbf{a}_j} d\Omega_k(\zeta) = \delta_{kj}$, $k, j = 1, \dots, g$. Для такого базиса матрица $\mathbf{B} = \|B_{kj}\|_{k,j=1,\dots,g}$, $B_{kj} = \oint_{\mathbf{b}_j} d\Omega_k(\zeta)$, является *матрицей Римана*: она симметрична, $B_{kj} = B_{jk}$, а ее мнимая часть положительно определена, $\|\operatorname{Im} B_{jk}\| > 0$.

Фиксируем стандартный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_g$ в $\mathbb{R}^g$: $(\mathbf{e}_k)_j = \delta_{kj}$. Тогда векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_g, \mathbf{B}\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{B}\mathbf{e}_g$ линейно независимы над $\mathbb{R}$ и образуют базис в $\mathbb{C}^g$. Факторпространство $\mathbb{C}^g / \{N + \mathbf{B}M\}$ по целочисленной решетке, $N, M \in \mathbb{Z}^g$, является $2g$ -мерным вещественным тором $\mathbb{T}^{2g}$ и называется *многообразием Якоби* $\mathcal{J}\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{R}$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Любой вектор $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^g$ однозначно представим в виде $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} + N + \mathbf{B}M = \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} \pmod{\text{периодов}}$, $0 \leq (\mathbf{x})_j, (\mathbf{y})_j < 1$, $N, M \in \mathbb{Z}^g$; иногда для краткости знак сравнения по модулю периодов дифференциалов $\{d\Omega_k\}$ мы будем опускать и писать просто $\mathbf{v} \equiv \mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y}$. Вещественные числа $x_j = (\mathbf{x})_j, y_j = (\mathbf{y})_j \in [0, 1)$, $j = 1, \dots, g$, называются соответственно x - и y -координатами вектора $\mathbf{v}$ в многообразии Якоби (точнее, класса $[\mathbf{v}]$ всех эквивалентных $\mathbf{v}$ векторов). Пусть $\mathbf{z}_0$ — некоторая фиксированная точка римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Вектор-функция $A(\mathbf{z}) = (A_1(\mathbf{z}), \dots, A_g(\mathbf{z}))$ с координатами

$$A_j(\mathbf{z}) = \int_{\mathbf{z}_0}^{\mathbf{z}} d\Omega_j \pmod{\text{периодов}}, \quad j = 1, \dots, g,$$

определяет *отображение Абеля* $A: \mathfrak{R} \rightarrow \text{Jac } \mathfrak{R}$.

Неупорядоченные наборы точек $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g, \mathbf{z}_j \in \mathfrak{R}$, образуют g -ю симметрическую степень $S^g \mathfrak{R}$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Вектор-функция $\mathfrak{A}(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) = (\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_g)$ с координатами

$$\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}_k(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) \equiv \sum_{j=1}^g A_k(\mathbf{z}_j) \equiv \sum_{j=1}^g \int_{\mathbf{z}_0}^{\mathbf{z}_j} d\Omega_k, \quad k = 1, \dots, g,$$

также называется *отображением Абеля* $\mathfrak{A}: S^g \mathfrak{R} \rightarrow \text{Jac } \mathfrak{R}$. Если задан вектор $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_g) \in \text{Jac } \mathfrak{R}$, то задача нахождения неупорядоченного набора точек $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g, \mathbf{z}_j \in \mathfrak{R}$, для которого

$$\mathfrak{A}_k(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_g) = v_k \pmod{\text{периодов}}, \quad k = 1, \dots, g, \quad (6)$$

называется *проблемой Якоби обращения абелевых интегралов* или просто *проблемой обращения Якоби*. Хорошо известно, что проблема обращения Якоби всегда разрешима, но, вообще говоря, не единственным образом.

2.3. Для любых двух различных точек $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ римановой поверхности $\mathfrak{R}$ существует абелев дифференциал третьего рода, голоморфный всюду на $\mathfrak{R}$, за исключением этих двух точек, в которых он имеет простые полюсы с вычетами соответственно 1 и -1 ; такой дифференциал называется *нормальным*. Нормальный дифференциал будет определен однозначно, если потребовать, чтобы все его a -периоды были равны нулю; будем называть такой дифференциал *a -нормированным* абелевым дифференциалом третьего рода и обозначать $d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$; для a -нормированного дифференциала $d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z})$ будем иногда для краткости использовать обозначение $d\Omega(\mathbf{z})$. Другой способ однозначно задать (нормировать) дифференциал третьего рода – потребовать, чтобы все его периоды были чисто мнимыми. Таким, например, является дифференциал комплексной функции Грина $G_D(z, \infty) = g_D(z, \infty) + i\tilde{g}_D(z, \infty)$ (здесь $\tilde{g}_D(z, \infty)$ – функция, гармонически сопряженная к функции Грина $g_D(z, \infty)$), соответствующей компакту минимальной емкости S . Хорошо известно [23], [27], что

$$G_D(z, \infty) = \int_{e_1}^z \frac{p_g(\zeta)}{\sqrt{h_{2g+2}(\zeta)}} d\zeta, \quad z \in D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S,$$

где $p_g(z) = p_g(z; h) = z^g + \dots \in \mathbb{C}[z]$ – некоторый полином, нули которого при условии (C_1) лежат вне S . Дифференциал $dG(\mathbf{z}) = dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = p_g(z) dz/w(\mathbf{z})$ определен на всей римановой поверхности $\mathfrak{R}$, имеет чисто мнимые периоды и простые полюсы в точках $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ и $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ с вычетами соответственно -1 и 1 . Следовательно, функция $u(\mathbf{z}) = \text{Re} \int_{e_1}^{\mathbf{z}} dG(\zeta)$ – однозначная гармоническая функция на $\mathfrak{R} \setminus \{\infty^{(1)}, \infty^{(2)}\}$, линия уровня которой $\{\mathbf{z} : u(\mathbf{z}) = 0\}$ совпадает с Γ , а $g_D(z, \infty) = u(z^{(1)}), z \in D$. Важную роль в наших рассуждениях играет следующее соотношение между дифференциалом $dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z})$ и a -нормированным дифференциалом $d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z})$:

$$dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) + 2\pi i \sum_{k=1}^g \omega_k(\infty) d\Omega_k(\mathbf{z}) + d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = 0; \quad (7)$$

здесь $\omega_k(\infty)$, $k = 1, \dots, g$, — гармоническая мера k -й компоненты S_k относительно D в бесконечно удаленной точке (доказательство см. в § 4).

Как известно, a -периоды дифференциала комплексной функции Грина связаны с гармоническими мерами $\omega_j(\infty)$ следующим образом: $\oint_{\mathbf{a}_k} dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = -2\pi i \omega_k(\infty)$. Положим по аналогии $\Delta_k(\infty) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{b}_k} dG(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) \in \mathbb{R}$.

Подобным образом, если для произвольной точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{e_1, \dots, e_{2g+2}\}$ через $S(z_0)$ обозначим множество минимальной емкости относительно этой точки, содержащее $e_1, \dots, e_{2g+2}$, то при условии, что кривые $\Gamma_k(z_0)$ гомотопны кривым Γ_k , $k = 1, \dots, g+1$, для дифференциала $dG(z_0^{(1)}, z_0^{(2)}; \mathbf{z})$, соответствующего комплексной функции Грина $G_{\overline{\mathbb{C}} \setminus S(z_0)}(z, z_0)$, имеем

$$dG(z_0^{(1)}, z_0^{(2)}; \mathbf{z}) + 2\pi i \sum_{k=1}^g \omega_k(z_0) d\Omega_k(\mathbf{z}) + d\Omega(z_0^{(1)}, z_0^{(2)}; \mathbf{z}) = 0, \quad (8)$$

где $\omega_k(z_0) = \omega_k(z_0; S(z_0))$, $k = 1, \dots, g$, — соответствующая гармоническая мера k -й компоненты. Соотношение (8) понадобится нам в дальнейшем только для случая, когда все точки $e_1, \dots, e_{2g+2}$ лежат на одной прямой и, тем самым, множество минимальной емкости S состоит из отрезков $[e_{2j-1}, e_{2j}]$, $j = 1, \dots, g+1$, а $S(z_0) = S$ для любой точки z_0 , лежащей в лакуне между этими отрезками, в том числе — содержащей бесконечно удаленную точку.

Приведем также используемые в дальнейшем “явные” представления для некоторых a -нормированных абелевых дифференциалов третьего рода:

$$\begin{aligned} d\Omega(z_1^{(1)}, z_2^{(1)}; \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{w(\mathbf{z}) + w(\mathbf{z}_1)}{z - z_1} \frac{dz}{w(\mathbf{z})} - \frac{w(\mathbf{z}) + w(\mathbf{z}_2)}{z - z_2} \frac{dz}{w(\mathbf{z})} + \frac{p_1(z)}{w(\mathbf{z})} dz \right\}, \\ d\Omega(z_1^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) &= \frac{1}{2} \frac{w(\mathbf{z}) + w(\mathbf{z}_1)}{z - z_1} \frac{dz}{w(\mathbf{z})} - \frac{1}{2} \frac{z^g + p_2(z)}{w(\mathbf{z})} dz, \\ d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) &= -\frac{z^g + p_3(z)}{w(\mathbf{z})} dz, \end{aligned} \quad (9)$$

$p_j \in \mathbb{C}[z]$, $\deg p_j \leq g-1$.

Рассеченная риманова поверхность $\tilde{\mathfrak{R}}$ получается из $\mathfrak{R}$ проведением сечений по базисным циклам $\mathbf{a}_k, \mathbf{b}_k$, $k = 1, \dots, g$, поверхности: $\tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} \setminus (\bigcup_{k=1}^g \mathbf{a}_k \cup \bigcup_{k=1}^g \mathbf{b}_k)$; $\tilde{\mathfrak{R}}$ связна (переход с одного листа на другой осуществляется через Γ_{g+1}) и односвязна (она топологически эквивалентна $4g$ -угольнику). Для b -периодов a -нормированного абелева дифференциала $d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$ справедливо следующее соотношение Римана:

$$\int_{\mathbf{b}_j} d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \zeta) = -2\pi i \int_{\mathbf{z}_1}^{\mathbf{z}_2} d\Omega_j(\zeta), \quad j = 1, \dots, g, \quad (10)$$

где интеграл берется по произвольному пути, соединяющему точки $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ и лежащему в $\tilde{\mathfrak{R}}$.

2.4. Дивизором d на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ будем называть формальный символ $d = \mathbf{z}_1^{\nu_1} \mathbf{z}_2^{\nu_2} \cdots \mathbf{z}_m^{\nu_m}$, где точки $\mathbf{z}_j \in \mathfrak{R}$, $\nu_j \in \mathbb{Z}$; $|d| = \sum_{j=1}^m \nu_j$ — степень дивизора d ; если точки $\mathbf{z}_j$ попарно различны и все $\nu_j \geq 0$, то дивизор d — *целый*. Произвольной функции F , мероморфной на $\mathfrak{R}$, $F \in \mathbb{C}(z, w)$, сопоставим дивизор (F) ее нулей и полюсов: $(F) = \mathbf{z}_1^{\nu_1} \cdots \mathbf{z}_\ell^{\nu_\ell} \cdot \zeta_1^{-\mu_1} \cdots \zeta_m^{-\mu_m}$, где $\mathbf{z}_j, \zeta_j \in \mathfrak{R}$ — соответственно нули и полюсы F , а $\nu_j, \mu_j \geq 0$ — их кратности; такие дивизоры называются *главными*. По теореме Абеля дивизор $d = \mathbf{z}_1^{\nu_1} \cdots \mathbf{z}_\ell^{\nu_\ell} \cdot \zeta_1^{-\mu_1} \cdots \zeta_m^{-\mu_m}$ — главный тогда и только тогда, когда $|d| = 0$ и для всех $k = 1, \dots, g$

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\ell} \nu_j \int_{\infty^{(1)}}^{\mathbf{z}_j} - \sum_{j=1}^m \mu_j \int_{\infty^{(1)}}^{\zeta_j} \right\} d\Omega_k = 0 \pmod{\text{периодов}}.$$

Два дивизора d_1 и d_2 *эквивалентны*, если их отношение d_1/d_2 — главный дивизор. Хорошо известно (см., например, [43], [38], [23]), что два целых дивизора степени g , $d_1 = \mathbf{z}_1 \cdots \mathbf{z}_g$ и $d_2 = \zeta_1 \cdots \zeta_g$, заданных на гиперэллиптической римановой поверхности рода g , эквивалентны тогда и только тогда, когда $d_1 = \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1^* \cdots \mathbf{t}_{2m} \mathbf{t}_{2m}^* \mathbf{z}_{2m+1} \cdots \mathbf{z}_g$, $d_2 = \tau_1 \tau_1^* \cdots \tau_{2m} \tau_{2m}^* \mathbf{z}_{2m+1} \cdots \mathbf{z}_g$, $m \leq g/2$. Отсюда непосредственно вытекает следующее свойство отображения Абеля $\mathfrak{A}: S^g \mathfrak{R} \rightarrow \text{Jac } \mathfrak{R}$. Пусть $\mathcal{U} \subset S^g \mathfrak{R}$ — произвольное множество такое, что каждая из g его компонент $\mathcal{U}_j$ — компакт в $D^{(1)}$ и $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k = \emptyset$ при $j \neq k$. Тогда сужение $\mathfrak{A}$ на $\mathcal{U}$ биективно: $\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{A}(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$.

2.5. Предположим, что на $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ задана (кусочно) мероморфная функция $F(\mathbf{z})$, имеющая полюсы только в бесконечно удаленных точках $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ и $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ каждого порядка $\leq g$, предельные значения которой на Γ существуют и удовлетворяют условию:

$$F(\zeta+) - F(\zeta-) = \chi(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma, \quad (11)$$

где χ — Н-непрерывна на Γ . Тогда с помощью мероморфного абелева дифференциала

$$d\Omega(\mathbf{z}; \zeta) = \frac{1}{2} \frac{w(\zeta) + w(\mathbf{z})}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w(\zeta)}, \quad (12)$$

заданного на римановой поверхности $\mathfrak{R}$, функция $F(\mathbf{z})$ восстанавливается по граничным условиям (11) интегралом типа Коши:

$$F(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma+} \chi(\zeta) d\Omega(\mathbf{z}; \zeta) + p(z), \quad \mathbf{z} \notin \Gamma, \quad (13)$$

где $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg p \leq g$, а контур Γ^+ ориентирован положительно относительно области $D^{(1)}$: область остается слева при обходе по контуру.

Действительно, легко проверяются следующие свойства дифференциала (12):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma+} P(\zeta) d\Omega(\mathbf{z}; \zeta) = \begin{cases} -P(z)/2, & \mathbf{z} \in D^{(1)}, \\ P(z)/2, & \mathbf{z} \in D^{(2)}, \end{cases} \quad P \in \mathbb{C}[z], \quad \deg P \leq g;$$

дифференциал $d\Omega(\mathbf{z}; \zeta)$ имеет полюсы только в точках $\mathbf{z}, \infty^{(1)}, \infty^{(2)}$ с вычетами соответственно $1, -1/2, -1/2$.

Если функция χ H -непрерывна на Γ , то функция

$$F_\chi(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma+} \chi(\zeta) d\Omega(\mathbf{z}; \zeta), \quad \mathbf{z} \notin \Gamma,$$

обладает следующими свойствами:

- 1) F_χ голоморфна в $D^{(1)} \setminus \{\infty^{(1)}\}$ и $D^{(2)} \setminus \{\infty^{(2)}\}$;
- 2) $F_\chi(\mathbf{z}) = O(z^g)$ при $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(1)}$ или $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(2)}$;
- 3) справедлива формула Сохоцкого

$$F_\chi(\zeta_0 \pm) = \pm \frac{1}{2} \chi(\zeta_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma+} \chi(\zeta) d\Omega(\zeta_0; \zeta)$$

(последний интеграл понимается как несобственный);

- 4) $F_\chi(\zeta_0+) - F_\chi(\zeta_0-) = \chi(\zeta_0)$, $\zeta_0 \in \Gamma$.

Рассмотрим разность $v(\mathbf{z}) = F(\mathbf{z}) - F_\chi(\mathbf{z})$. В силу (11) эта функция продолжается на всю $\mathfrak{R}$ как мероморфная функция, т.е. $v \in \mathbb{C}(z, w)$, а следовательно, имеет вид $v(\mathbf{z}) = r_1(z) + r_2(z)w(\mathbf{z})$, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(z)$. Так как v может иметь полюсы порядка $\leq g$ и только в точках $\infty^{(1)}$ и $\infty^{(2)}$, то $r_j = p_j \in \mathbb{C}[z]$. Следовательно, $v(\mathbf{z}) = p_1(z) + p_2(z)w(\mathbf{z})$. Учитывая, что $|w(\mathbf{z})| \sim |z|^{g+1}$ при $\mathbf{z} \rightarrow \infty^{(1)}, \infty^{(2)}$, получаем $p_2 \equiv 0$, $\deg p_1 \leq g$. Формула (13) доказана.

В заключение приведем некоторые “явные” представления дифференциала (12). При $\zeta = \zeta^{(1)}$, $\mathbf{z} = z^{(1)}$ или $\zeta = \zeta^{(2)}$, $\mathbf{z} = z^{(2)}$ имеем

$$d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(1)}) = d\Omega(z^{(2)}; \zeta^{(2)}) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{h(\zeta)} + \sqrt{h(z)}}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\sqrt{h(\zeta)}};$$

при $\zeta = \zeta^{(2)}$, $\mathbf{z} = z^{(1)}$ имеем

$$d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(2)}) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{h(\zeta)} - \sqrt{h(z)}}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\sqrt{h(\zeta)}}, \quad (14)$$

т.е. в этом случае при $\zeta = z$ дифференциал особенности не имеет.

§3. Краевая задача Римана

В этом параграфе мы исследуем сформулированную во введении краевую задачу Римана. Нетрудно видеть, что с учетом сделанных выше обозначений задача $(\mathcal{R})$ эквивалентна следующей краевой задаче Римана на двулистной гиперэллиптической поверхности $\mathfrak{R}$.

Задача $(\mathcal{R}')$. Найти функцию $\Psi(\mathbf{z})$, мероморфную в $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ и такую, что

- (i) дивизор функции Ψ имеет вид: $(\Psi) = (\infty^{(2)})^{n-g} \cdot z_{1,n}^{(2)} \cdots z_{g,n}^{(2)} / (\infty^{(1)})^n$;
- (ii) на кривой Γ выполняется следующее краевое условие: $\rho(\zeta)\Psi(\zeta+) = \Psi(\zeta-)$, $\zeta \in \Gamma$.

Действительно, положим $\varphi_n(z) = \Psi(z^{(1)})$, $\psi_n(z) = \Psi(z^{(2)})$. Теперь доказательство эквивалентности двух указанных задач не составляет труда, если учесть, что множество S – каноническая проекция Γ на $\overline{\mathbb{C}}$.

Благодаря эквивалентности задач $(\mathcal{R})$ и $(\mathcal{R}')$ анализ существования решения задачи $(\mathcal{R})$ оказывается возможным провести на основе исследования проблемы обращения Якоби. А именно имеет место

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. При фиксированном $n \in \mathbb{N}$ справедливы следующие утверждения.

- (а) Если решение задачи (R) существует, то оно единственно.
 (б) Решение задачи (R) существует для всех весов класса $[\rho]$ одновременно. Для существования решения необходимо и достаточно, чтобы проблема обращения Якоби

$$\sum_{j=1}^g \int_{\infty^{(1)}}^{z_{j,n}} d\Omega_k(\zeta) \equiv \frac{i}{\pi} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_k^+(\zeta) + \{n\Delta_k(\infty)\} + \sum_{j=1}^g \{n\omega_j(\infty)\} B_{kj},$$

$$k = 1, \dots, g, \quad (15)$$

имела решение, принадлежащее первому листу: $z_{j,n} = z_{j,n}^{(1)}$, $j = 1, \dots, g$ (здесь $\{\cdot\}$ – дробная часть соответствующего числа).

- (с) Справедливо следующее “явное” представление решения φ_n, ψ_n задачи (R):

$$\varphi_n(z; \rho) = \text{cap}(S)^n \cdot \Phi(z)^n F_n(z; \rho), \quad \psi_n(z; \rho) = \text{cap}(S)^n \cdot \frac{X_{g,n}(z)}{\Phi(z)^n F_n(z; \rho)}, \quad (16)$$

где $\Phi(z)$ – отображающая функция, $X_{g,n}(z) = \prod_{j=1}^g (z - z_{j,n})$, $F_n(z; \rho)$ – многозначная аналитическая в области D функция, модуль которой однозначен и $|F_n(\infty; \rho)| = 1$; F_n зависит от класса эквивалентности $[\rho]$, а ее модуль равномерно по $n \in \Lambda$ ограничен и отграничен от нуля внутри области D .

В дальнейшем (см. §4) мы докажем существование решения проблемы обращения Якоби (15), удовлетворяющего условиям п. (б), по некоторой подпоследовательности Λ в двух случаях: (I) в ситуации, когда все точки $e_1, \dots, e_{2g+2}$ лежат на одной прямой, а гармонические меры $\omega_1(\infty), \dots, \omega_{g+1}(\infty)$ рационально независимы (как уже отмечалось, если все точки $\{e_j\}$ лежат на одной прямой, то в “общем положении” это условие на гармонические меры отрезков всегда выполняется), и (II) в случае “общего положения” $(C_1)-(C_2)$. Тем самым для этой подпоследовательности будут доказаны и утверждения п. (с).

СЛЕДСТВИЕ (основной леммы). Предположим, что при каждом n из некоторой последовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$ существует решение задачи (R) такое, что все “свободные” нули компактно по $n \in \Lambda$ принадлежат области $D^* = D \setminus \{\infty\}$, и, кроме того, в области D^* задана последовательность дивизоров нулевой степени $d_n = a_1 \cdots a_m / (a_{1,n} \cdots a_{m,n})$ таких, что все $a_{j,n} \rightarrow a_j \in D^*$ при $n \rightarrow \infty$, $j = 1, \dots, m$. Тогда существует пара функций $\varphi_n, \psi_n \in \mathcal{C}(D)$ таких, что

- (i) φ_n имеет полюс порядка n в точке $z = \infty$ и нуль в каждой точке a_j , $j = 1, \dots, m$ (т.е. дивизор функции φ_n имеет вид: $(\varphi_n)_D = \infty^{-n} \cdot a_1 \cdots a_m$);
 (ii) ψ_n имеет нуль кратности $n - g$ в точке $z = \infty$, полюс в каждой точке $a_{j,n}$, $j = 1, \dots, m$, и еще ровно g “свободных” нулей, компактно по $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$, принадлежащих области D^* (т.е. дивизор функции ψ_n имеет вид: $(\psi_n)_D = \infty^{n-g} \cdot z_{1,n} \cdots z_{g,n} \cdot a_{1,n}^{-1} \cdots a_{m,n}^{-1}$, все $z_{j,n} \in D^*$);
 (iii) на множестве S выполняются краевые условия $\rho \varphi_n^+ = \psi_n^-$, $\rho \varphi_n^- = \psi_n^+$.

При этом для функций φ_n , ψ_n справедливо представление (16), в котором точки $z_{1,n}, \dots, z_{g,n}$ являются решениями некоторой “возмущенной” проблемы обращения Якоби, а к функции $F_n(z)$ добавлены соответственно сомножители

$$\text{const} \cdot \exp \left\{ \sum_{j=1}^m \Omega(a_j^{(1)}, \infty^{(2)}; z^{(1)}) \right\} \quad \text{и} \quad \text{const} \cdot \exp \left\{ - \sum_{j=1}^m \Omega(a_{j,n}^{(1)}, \infty^{(2)}; z^{(1)}) \right\},$$

сохраняющие ее основные свойства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ. Легко видеть, что вопрос о разрешимости этой “модифицированной” краевой задачи Римана эквивалентен проблеме обращения Якоби вида (15) относительно точек $z_{1,n}, \dots, z_{g,n}$, где к правой части добавлены слагаемые

$$\sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{a_{j,n}} d\Omega_k, \quad k = 1, \dots, g.$$

Из условий следствия вытекает, что все эти величины стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Утверждение следствия вытекает теперь непосредственно из свойств отображения Абеля $\mathfrak{A}: S^g \mathfrak{R} \rightarrow \text{Jac } \mathfrak{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ЛЕММЫ. (а) *Единственность*. Для доказательства единственности решения задачи $(\mathcal{R})$ воспользуемся эквивалентностью $(\mathcal{R})$ и $(\mathcal{R}')$. Предположим, что существуют два решения задачи $(\mathcal{R})$: (φ, ψ) и $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ (здесь и далее в этом разделе зависимость от n мы явно не указываем). Тогда функция $F(z^{(2)}) = \psi(z)/\tilde{\psi}(z)$, $z^{(2)} \in D^{(2)}$, $F(z^{(1)}) = \varphi(z)/\tilde{\varphi}(z)$, $z^{(1)} \in D^{(1)}$, “склеивается” в единую мероморфную функцию $F(\mathbf{z})$, заданную на всей поверхности $\mathfrak{R}$, дивизор которой имеет вид $(F) = z_1^{(2)} \dots z_g^{(2)} / (\tilde{z}_1^{(2)} \dots \tilde{z}_g^{(2)})$. Из упомянутого в п. 2.4 свойства эквивалентных дивизоров, заданных на гиперэллиптической римановой поверхности, вытекает, что все $z_j^{(2)} = \tilde{z}_j^{(2)}$. Следовательно, $(F) = 1$ и $F \equiv \text{const}$.

(б) *Необходимость*. Пусть пара функций φ, ψ – решение задачи $(\mathcal{R})$, $z_1, \dots, z_g$ – свободные нули функции ψ . Перемножая “накрест” краевые условия для функций φ и ψ , получаем $(\varphi\psi)^+ = (\varphi\psi)^-$; кроме того, $\varphi\psi \in \mathcal{C}(D)$ и дивизор $(\varphi\psi)_D = \infty^{-g} z_1 \dots z_g$. Отсюда уже непосредственно вытекает, что $(\varphi\psi)(z) \equiv \text{const} \cdot X_g(z)$, $X_g(z) = \prod_{j=1}^g (z - z_j)$, а для функций φ и ψ получаются отдельные краевые условия: $\varphi^+ \varphi^- = \text{const} \cdot X_g / \rho$, $\psi^+ \psi^- = \text{const} \cdot \rho X_g$, где X_g – неизвестный полином (“полиномиальный параметр” задачи).⁸ В дальнейших рассуждениях этого параграфа нам удобно временно перейти от стандартной нормировки решения φ, ψ задачи $(\mathcal{R})$ к другой, положив выше $\text{const} = 1$, т.е., сохранив прежние обозначения, имеем $\varphi^+ \varphi^- = X_g / \rho$, $\psi^+ \psi^- = \rho X_g$ (более точно, этими условиями функции φ и ψ определяется с точностью до знака $\pm$; нетрудно также увидеть, что для решения модифицированной задачи имеем: $(\varphi\psi)(z) \equiv \text{const} \cdot X_g(z) r_n(z)$, где $r_n(z) = \prod_{j=1}^m (z - a_j) / (z - a_{j,n})$).

Рассмотрим теперь a -нормированные абелевы дифференциалы третьего рода $d\Omega(z_j^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z})$, $j = 1, \dots, g$, и $d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z})$. В многосвязной области $D^{(1)}$

⁸ В классическом случае $g = 0$ непосредственно из последних краевых условий вытекает нужное представление функций φ, ψ , см. [27; с. 301].

они имеют периоды, кратные $2\pi i$. Следовательно, абелевы интегралы

$$\begin{aligned}\Omega(z_j^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) &= \int_{e_{2g+1}}^{\mathbf{z}} d\Omega(z_j^{(1)}, \infty^{(2)}; \zeta), \quad j = 1, \dots, g, \\ \Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) &= \int_{e_{2g+1}}^{\mathbf{z}} d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \zeta)\end{aligned}$$

в области $D^{(1)}$ однозначны по модулю $2\pi i$ (интегрирование ведется по кривой, соединяющей точки e_{2g+1} и $z^{(1)}$ и целиком лежащей в $D^{(1)}$).

Тем самым функция

$$F(z) = \exp\{(n - g)\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; z^{(1)})\} \exp\left\{\sum_{j=1}^g \Omega(z_j^{(1)}, \infty^{(2)}; z^{(1)})\right\} \quad (17)$$

однозначна в многосвязной области D , а ее дивизор в D имеет вид: $(F)_D = \infty^{n-g} \cdot z_1 \cdots z_g$; кроме того, $F(e_{2g+1}) = 1$.

Непосредственно из явного представления (9) абелевых дифференциалов третьего рода вытекает, что для этих дифференциалов выполняются следующие краевые условия при $\zeta \in S$:

$$\begin{aligned}d\Omega^+(z_1^{(1)}, \infty^{(2)}; \zeta) + d\Omega^-(z_1^{(1)}, \infty^{(2)}; \zeta) &= \frac{d\zeta}{\zeta - z_1}, \\ d\Omega^+(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \zeta) + d\Omega^-(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \zeta) &= 0\end{aligned}$$

(отметим, что последнее условие, по существу, характеризует S как компакт минимальной емкости); в свою очередь, функция F удовлетворяет на S краевым условиям:

$$F^+(\zeta)F^-(\zeta) = \prod_{j=1}^g (\zeta - z_j) \cdot C_k, \quad \zeta \in S_k, \quad k = 1, \dots, g+1,$$

где постоянные $C_k = e^{c_k}$, $k = 1, \dots, g$,

$$c_k = c_{g+1} - \int_{\mathbf{b}_k} \left\{ \sum_{j=1}^g d\Omega(z_j^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) + (n - g) d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) \right\}, \quad k = 1, \dots, g, \quad (18)$$

а $e^{c_{g+1}} = C_{g+1} = 1/X_g(e_{2g+1})$.

Итак, функция $F(z)$ удовлетворяет на S краевым условиям $F^+F^- = C_k \cdot X_g$, $\zeta \in S_k$, $k = 1, \dots, g+1$, а ее дивизор в D имеет вид: $(F)_D = \infty^{n-g} \cdot z_1 \cdots z_g$. Следовательно, функция $\theta(z) = \psi(z)/F(z)$ — (однозначная) голоморфная функция в D , которая не имеет в этой области нулей (дивизор $(\theta)_D = 1$), а на границе $\partial D = S^+ \cup S^-$ удовлетворяет краевому условию: $\theta^+\theta^- = \rho/C_k$, $\zeta \in S_k$, $k = 1, \dots, g+1$, $C_{g+1} = 1/X_g(e_{2g+1})$, остальные C_k определяются соотношениями (18).

Аналитическая функция $\chi(z) = \log \theta(z)$ — вообще говоря, многозначная функция в D ; ее многозначность обусловлена только многосвязностью D , а периоды — целые кратные $2\pi i$. Ясно, что при надлежащем выборе целых чисел m_j , $j = 1, \dots, g$,

функция $2\pi i \sum_{j=1}^g m_j \Omega_j(z)$, где, как и ранее, $\Omega_j(z) = \int_{e^{2g+1}}^z d\Omega_j(z)$, имеет те же периоды, что и функция $\chi(z)$. Тем самым, для функции

$$\chi_0(z) = \chi(z) - 2\pi i \sum_{j=1}^g m_j \Omega_j(z) \quad (19)$$

имеем:

- (i) $\chi_0(z)$ — голоморфная функция в D ;
- (ii) на S выполняется краевое условие:

$$\begin{aligned} \chi_0^+ + \chi_0^- &= \log \rho(\zeta) - c_{g+1} + 2\pi i n_{g+1}, \quad \zeta \in S_{g+1}, \\ \chi_0^+ + \chi_0^- &= \log \rho(\zeta) - c_k + 2\pi i n_k + \sum_{j=1}^g 2\pi i m_j B_{kj}, \quad \zeta \in S_k, \quad k = 1, \dots, g. \end{aligned}$$

Отсюда немедленно вытекает, что функция $\Sigma(z) = \chi_0(z)/w(z)$, голоморфная в D и имеющая в точке $z = \infty$ нуль кратности $g+1$, восстанавливается в D интегралом типа Коши по правой части краевого условия

$$\begin{aligned} \Sigma^+ - \Sigma^- &= \frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} - \frac{c_{g+1}}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_{g+1}}{w^+(\zeta)}, \quad \zeta \in S_{g+1}, \\ \Sigma^+ - \Sigma^- &= \frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} - \frac{c_k}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_k}{w^+(\zeta)} + \sum_{j=1}^g \frac{2\pi i m_j B_{kj}}{w^+(\zeta)}, \quad \zeta \in S_k, \quad k = 1, \dots, g, \end{aligned} \quad (20)$$

а нужная кратность нуля этого интеграла в бесконечно удаленной точке достигается при выполнении g условий ортогональности

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) \frac{\zeta^{\ell-1}}{w^+(\zeta)} d\zeta \\ &+ \sum_{k=1}^{g+1} \left(-c_k \frac{1}{\pi i} \int_{S_k} \frac{\zeta^{\ell-1}}{w^+(\zeta)} d\zeta + 2n_k \int_{S_k} \frac{\zeta^{\ell-1}}{w^+(\zeta)} d\zeta + \sum_{k=1}^g \sum_{j=1}^g 2m_j B_{kj} \int_{S_k} \frac{\zeta^{\ell-1}}{w^+(\zeta)} d\zeta \right) = 0, \\ &\ell = 1, \dots, g. \end{aligned}$$

Заменяя в правой части последней формулы интегрирование по дугам S_k на интегрирование по циклам $\mathbf{a}_k$, а дифференциалы $\zeta^{\ell-1} d\zeta/w(\zeta)$ на нормированные дифференциалы $d\Omega_\ell(\zeta)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_\ell^+(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} (c_\ell - c_{g+1}) + (n_{g+1} - n_\ell) - \sum_{j=1}^g m_j B_{\ell j} \\ &= \frac{1}{2\pi i} (c_\ell - c_{g+1}) \pmod{\text{периодов}}, \quad \ell = 1, \dots, g. \end{aligned} \quad (21)$$

Воспользуемся теперь в очередной раз соотношением Римана (10) для того, чтобы преобразовать выражение (18) к виду:

$$c_\ell = c_{g+1} + 2\pi i \left\{ \sum_{j=1}^g \int_{z_j^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_\ell(\zeta) + (n - g) \int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_\ell(\zeta) \right\}. \quad (22)$$

Наконец, из (21) и (22) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^g \int_{\infty^{(1)}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell(\zeta) &= -\frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_\ell^+(\zeta) + n \int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_\ell(\zeta) \\ &\quad + (n_\ell - n_{g+1}) - \sum_{j=1}^g m_j B_{\ell j} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\equiv -\frac{1}{\pi i} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_\ell^+(\zeta) + n \int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_\ell(\zeta), \quad k = 1, \dots, g \quad (24)$$

(ср. [27; п. 4.3.1, формула (4.3.25)]).

Займемся теперь преобразованием к нужному виду последнего интеграла в выражении (24).

Хорошо известна [30; § 4, (4.3)] следующая формула для a -периодов дифференциала комплексной функции Грина: $\oint_{\mathbf{a}_k} dG(\mathbf{z}) = -2\pi i \omega_k(\infty)$, где $\omega_k(\infty)$, $k = 1, \dots, g$, — гармоническая мера k -й компоненты множества S относительно D в бесконечно удаленной точке, $\omega_k(\infty) > 0$, $\sum_{k=1}^{g+1} \omega_k(\infty) = 1$. Непосредственно из этой формулы для a -периодов дифференциала $dG(\mathbf{z})$ вытекает, что справедливо следующее тождество:

$$dG(\mathbf{z}) + 2\pi i \sum_{k=1}^g \omega_k(\infty) d\Omega_k(\mathbf{z}) + d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = 0. \quad (25)$$

Действительно, слева в последней формуле стоит голоморфный абелев дифференциал, все a -периоды которого равны нулю; следовательно, этот дифференциал равен нулю тождественно. Отсюда и из соотношения Римана (см. (10)) для b -периодов a -нормированного дифференциала третьего рода

$$\oint_{\mathbf{b}_j} d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = -2\pi i \int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_j(\mathbf{z})$$

(напомним, что интегрирование ведется по путям, лежащим в рассеченной римановой поверхности $\tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} \setminus (\bigcup_{k=1}^g \mathbf{a}_k \cup \bigcup_{k=1}^g \mathbf{b}_k)$) получаем

$$\int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_j(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{b}_j} dG(\mathbf{z}) + \sum_{k=1}^g \omega_k(\infty) B_{kj}, \quad j = 1, \dots, g, \quad (26)$$

где имеем $\oint_{\mathbf{b}_j} dG(\mathbf{z}) = 2\pi i \Delta_j(\infty) \in i\mathbb{R}$ (см. п. 2.3). Тем самым, x -, y -координаты

вектора $\int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_j(\mathbf{z})$, $j = 1, \dots, g$, в многообразии Якоби $\text{Jac } \mathfrak{R}$ равны соответ-

ственно $\{\Delta_j(\infty)\}$ и $\omega_j(\infty)$, $j = 1, \dots, g$, а вектора $n \int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_j(\mathbf{z})$ — соответственно $\{n\Delta_j(\infty)\}$ и $\{n\omega_j(\infty)\}$; здесь $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа. Кроме того, из (25) для $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}$ имеем

$$G(\mathbf{z}) + 2\pi i \sum_{k=1}^g \omega_k(\infty) \Omega_k(\mathbf{z}) + \Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \mathbf{z}) = 0, \quad (27)$$

где интегрирование проводится от e_{2g+1} до $\mathbf{z}$ по произвольному пути, лежащему в $\tilde{\mathfrak{R}}$.

Таким образом, из (24) окончательно получаем

$$\sum_{j=1}^g \int_{\infty^{(1)}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell(\zeta) \equiv \frac{i}{\pi} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_\ell^+(\zeta) + \{n\Delta_\ell(\infty)\} + \sum_{k=1}^g \{n\omega_k(\infty)\} B_{\ell k},$$

$$\ell = 1, \dots, g. \quad (28)$$

Необходимость разрешимости проблемы обращения Якоби (15) доказана.

Нетрудно видеть, что проведенные рассуждения обратимы, так что достаточность условия (15) также имеет место.

Для доказательства (с) отметим сначала, что равенства (23) – точные. Совместный анализ (23) и (28) показывает, что если все точки $z_j^{(1)}$ компактно по $n \rightarrow \infty$ принадлежат области D , то $m_k = [n\omega_k(\infty)] + N_k$, где целые числа $N_k = N_k(n)$ ограничены в совокупности при $n \rightarrow \infty$ (здесь $[\cdot]$ – целая часть числа).

Запишем теперь формулы (20) для скачка функции Σ в виде

$$\begin{aligned} \Sigma^+ - \Sigma^- &= \frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} - \frac{c_{g+1}}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_{g+1}}{w^+(\zeta)}, \quad \zeta \in S_{g+1}, \\ \Sigma^+ - \Sigma^- &= \frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} - \frac{c_{g+1}}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_{g+1}}{w^+(\zeta)} - \frac{c_k - c_{g+1}}{w^+(\zeta)} \\ &\quad + \frac{2\pi i (n_k - n_{g+1})}{w^+(\zeta)} + \sum_{j=1}^g \frac{2\pi i m_j B_{kj}}{w^+(\zeta)}, \quad \zeta \in S_k, \quad k = 1, \dots, g. \end{aligned}$$

Первая часть (21) – точное равенство, поэтому последние краевые условия приводятся к виду

$$\begin{aligned} \Sigma^+ - \Sigma^- &= \frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} - \frac{c_{g+1}}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_{g+1}}{w^+(\zeta)}, \quad \zeta \in S_{g+1}, \\ \Sigma^+ - \Sigma^- &= \frac{\log \rho(\zeta)}{w^+(\zeta)} - \frac{c_{g+1}}{w^+(\zeta)} + \frac{2\pi i n_{g+1}}{w^+(\zeta)} + \frac{\lambda_k}{w^+(\zeta)}, \quad \zeta \in S_k, \quad k = 1, \dots, g, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\text{где } \lambda_k = -2 \int_S \log \rho(t) d\Omega_k^+(t)$$

(величины λ_k определены однозначно по модулю $2\pi i$).

Из (17), (19) и (29) получаем, что для $\psi(z) = F(z)\theta(z) = F(z)e^{\chi(z)}$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} c_g + (n - g) \Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; z^{(1)}) + \sum_{j=1}^g \Omega(z_j^{(1)}, \infty^{(2)}; z^{(1)}) \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ 2\pi i \sum_{k=1}^g m_k \Omega_k(z) \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ w(z) \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w^+(\zeta)} + w(z) \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g \lambda_k \int_{S_k} \frac{1}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w^+(\zeta)} \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

Отметим, что классическому случаю $g = 0$ и $S = [-1, 1]$ соответствуют $\lambda_1 = 0$ и

$$\theta(z) = \exp \left\{ \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\log \rho(x)}{z - x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \right\}$$

— классическая функция Сегё. Случай, когда S есть объединение непересекающихся интервалов вещественной оси, а вес ρ такой, что $i\rho\sqrt{h} > 0$ и выполняются условия ортогональности

$$\int_S \log \rho(t) d\Omega_k^+(t) = 0, \quad k = 1, \dots, g,$$

фактически рассматривался Ахиезером [32], [33], который для такого веса ввел оператор

$$A(z; \rho) = \exp \left\{ \sqrt{h(z)} \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\log \rho(x)}{z - x} \frac{dx}{\sqrt{-h(x)}} \right\}.$$

Воспользуемся теперь тем, что $m_k = [n\omega_k(\infty)] + N_k$, где целые числа $N_k = N_k(n)$ ограничены в совокупности при $n \rightarrow \infty$. Из представления (30) с помощью (27) получаем для функции ψ :

$$\psi(z) = \exp \{ -(n - g)G(z, \infty) \} W(z) = \Phi(z)^{-(n-g)} W(z),$$

где многозначная функция

$$\begin{aligned} W(z) = & \exp \left\{ -\frac{1}{2}c_{g+1} + 2\pi i \sum_{k=1}^g (g - \{n\omega_k(\infty)\})\Omega_k(z) + \sum_{j=1}^g \Omega(z_j^{(1)}, \infty^{(2)}; z^{(1)}) \right\} \\ & \times \exp \left\{ w(z) \frac{1}{2\pi i} \int_S \frac{\log \rho(\zeta)}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w^+(\zeta)} + w(z) \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^g \lambda_k \int_{S_k} \frac{1}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w^+(\zeta)} \right\} \end{aligned}$$

зависит только от “геометрии” задачи и от класса эквивалентности $[\rho]$; кроме того, она равномерно ограничена по модулю внутри области D . Соответствующее представление получаем и для функции $\varphi(z) = X_g(z)/\psi(z)$.

Наконец, вспомним, что мы временно изменили нормировку решения задачи $(\mathcal{R})$. С учетом этого замечания получаем, что равномерно внутри D

$$\varphi_n(z; \rho) = \text{cap}(S)^n \cdot \Phi(z)^n F_n(z; \rho),$$

где функция F_n обладает теми же свойствами, что и функция W . Аналогично, равномерно внутри D

$$\psi_n(z; \rho) = \text{cap}(S)^n \cdot \Phi(z)^{-n} \frac{X_{g,n}(z)}{F_n(z; \rho)}.$$

Основная лемма доказана.

§ 4. Решение проблемы обращения Якоби

4.1. Разрешимость проблемы обращения Якоби в случае “общего положения” (C_1)–(C_2) (случай (II)). По теореме Кронекера из рациональной независимости периодов функции Грина с числом $2\pi i$ (ср. [30; с. 190, 191]) вытекает, что правая часть (15) всюду плотна в $\text{Jas } \mathfrak{R}$ при $n \rightarrow \infty$. С другой стороны, как хорошо известно [42], [38], [40], отображение Абеля $\mathfrak{A}: S^g \mathfrak{R} \rightarrow \text{Jas } \mathfrak{R}$ является сюръективным и локально биголоморфным. Отсюда уже легко вытекает существование требуемой подпоследовательности. Действительно, выберем множество $\mathcal{U}$ в $S^g \mathfrak{R}$ так, что все его соответствующие компоненты $\mathcal{U}_j$, $j = 1, \dots, g$, – замкнутые круги, которые лежат на первом листе и не пересекаются между собой: $\mathcal{U}_j \subset D^{(1)}$, $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k = \emptyset$. В соответствии со свойствами отображения Абеля ограничение $\mathfrak{A}$ на $\mathcal{U}$ – биекция и $\mathfrak{A}^{-1}(\mathfrak{A}(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$, т.е. проблема обращения Якоби (6) при $\mathbf{v} \in \mathfrak{A}(\mathcal{U})$ имеет единственное решение в $S^g \mathfrak{R}$, причем все соответствующие точки $\mathbf{z}_j = z_j^{(1)} \in \mathcal{U}_j$ и, тем самым, попарно различны.

Так как правая часть (15) всюду плотна в $\text{Jas } \mathfrak{R}$ при $n \rightarrow \infty$, то по некоторой бесконечной подпоследовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$ эта правая часть принадлежит $\mathfrak{A}(\mathcal{U})$. Следовательно, соответствующие точки $\mathbf{z}_{j,n}$ – решение проблемы обращения Якоби – принадлежат первому листу: $\mathbf{z}_{j,n} = z_{j,n}^{(1)} \in \mathcal{U}_j$, $j = 1, \dots, g$. Разрешимость проблемы обращения Якоби в нужном нам смысле доказана.

4.2. Разрешимость проблемы обращения Якоби в случае (I). Напомним, что для b -периодов a -нормированного абелева дифференциала $d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \mathbf{z})$ справедливо соотношение Римана:

$$\int_{\mathbf{b}_j} d\Omega(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2; \zeta) = -2\pi i \int_{\mathbf{z}_1}^{\mathbf{z}_2} d\Omega_j(\zeta), \quad j = 1, \dots, g,$$

в частности

$$\int_{\mathbf{b}_j} d\Omega(z_0^{(1)}, z_0^{(2)}; \zeta) = -2\pi i \int_{z_0^{(1)}}^{z_0^{(2)}} d\Omega_j(\zeta), \quad j = 1, \dots, g, \quad (31)$$

и

$$\int_{\mathbf{b}_j} d\Omega(\infty^{(1)}, \infty^{(2)}; \zeta) = -2\pi i \int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_j(\zeta), \quad j = 1, \dots, g; \quad (32)$$

как обычно, интегрирование ведется по путям, лежащим в рассеченной римановой поверхности $\mathfrak{R}$. Подчеркнем, что в рассматриваемом случае a -циклы – это отрезки $[e_{2j-1}, e_{2j}]$, $j = 1, \dots, g$, проходимые дважды: по “верхнему” и по “нижнему” берегам; b -циклы устроены следующим образом. j -й b -цикл состоит из a -циклов $\mathbf{a}_k$, $k = j + 1, \dots, g$, и “зацепленных” за них циклов, состоящих из лакун $[e_{2k}, e_{2k+1}]$, $k = j, \dots, g$, проходимых дважды: по первому листу в направлении от e_{2k} к e_{2k+1} и по второму листу – в противоположном направлении. Под $\int_{\infty^{(1)}}^{z^{(1)}}$ будем понимать

интеграл по пути, расположенному целиком на вещественной оси и идущему “справа налево” от точки $+\infty$ до точки $z_j^{(1)} = z_j \in (e_{2j}, e_{2j+1})$, $j = 1, \dots, g$. Тем самым,

$$\begin{aligned} \int_{\infty^{(1)}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell^+(\zeta) &= \int_{\infty^{(1)}}^{e_{2g+2}} d\Omega_\ell^+(\zeta) + \int_{e_{2g+2}}^{e_{2g+1}} d\Omega_\ell^+(\zeta) + \int_{e_{2g+1}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell^+(\zeta) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_\ell(\zeta) - \int_{S_{g+1}} d\Omega_\ell^+(\zeta) + \int_{e_{2g+1}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell^+(\zeta) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\infty^{(1)}}^{\infty^{(2)}} d\Omega_\ell(\zeta) + \frac{1}{2} + \int_{e_{2g+1}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell^+(\zeta) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{b}_\ell} dG(\zeta) + \sum_{k=1}^g \omega_k(\infty) B_{\ell k} \right) + \frac{1}{2} + \int_{e_{2g+1}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell^+(\zeta). \end{aligned} \quad (33)$$

Из (31) и (32) для $z_j^{(1)} = z_j \in (e_{2j}, e_{2j+1})$, $j = 1, \dots, g$, получаем

$$\int_{e_{2g+1}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell^+(\zeta) = \left\{ \int_{e_{2g+1}}^{e_{2j}} + \int_{e_{2j}}^{z_j^{(1)}} \right\} d\Omega_\ell^+(\zeta) = -\frac{1}{2} B_{j\ell} - \frac{1}{2} \theta_{\ell j} + \int_{e_{2j}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell^+(\zeta), \quad (34)$$

$$\int_{z_j^{(2)}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell(\zeta) = \left\{ \int_{e_{2j}^{(2)}}^{e_{2j}^{(1)}} - 2 \int_{z_j^{(1)}}^{e_{2j}^{(1)}} \right\} d\Omega_\ell^+(\zeta) = -B_{j\ell} + 2 \int_{e_{2j}^{(1)}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell^+(\zeta), \quad (35)$$

где

$$\theta_{\ell j} = \sum_{k=j+1}^g \delta_{\ell k} = \begin{cases} 1, & \ell > j, \\ 0, & \ell \leq j, \end{cases} \quad \sum_{j=1}^g \theta_{\ell j} = \ell - 1, \quad 1 \leq \ell \leq g.$$

Если теперь мы подставим (34) в (33), то получим

$$\int_{\infty^{(1)}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell^+(\zeta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^g \omega_k(\infty) B_{\ell k} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} B_{j\ell} - \frac{1}{2} \theta_{\ell j} + \int_{e_{2j}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell^+(\zeta).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^g \int_{\infty^{(1)}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell^+(\zeta) &= \frac{g}{2} \sum_{s=1}^g \omega_k(\infty) B_{\ell s} + \frac{g}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g B_{j\ell} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g \theta_{\ell j} + \sum_{j=1}^g \int_{e_{2j}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell^+(\zeta) \\ &= \frac{g}{2} \sum_{s=1}^g \omega_k(\infty) B_{\ell s} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^g B_{j\ell} + \frac{g - \ell + 1}{2} + \sum_{j=1}^g \int_{e_{2j}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell^+(\zeta). \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, функция $\hat{\rho}(z; h)$ вида $(\diamond)$ – марковская при условии, что $i\rho/\sqrt{h} > 0$ на S , т.е. для выбранной выше ветви корня $\sqrt{h(z)}$ имеем: $\arg \rho(\zeta) = \arg \sqrt{h(\zeta)} - \pi/2$, $\zeta \in S$; в частности, $\arg \rho(\zeta) = 0$ при $\zeta \in S_{g+1}$ (напомним, что $\sqrt{h(z)} > 0$ при $z > e_{2g+2}$). Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_S \log \rho(\zeta) d\Omega_\ell^+(\zeta) &= \int_S \log |\rho(\zeta)| d\Omega_\ell^+(\zeta) + \sum_{k=1}^g (g+1-s) \pi i \int_{S_k} d\Omega_\ell^+(\zeta) \\ &= \int_S \log |\rho(\zeta)| d\Omega_\ell^+(\zeta) + \frac{g - \ell + 1}{2} \pi i. \end{aligned}$$

Таким образом, система (15) эквивалентна следующей системе относительно точек $z_j^{(1)} = z_{j,n}^{(1)}$, $\ell = 1, \dots, g$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^g \int_{e_{2j}^{(1)}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell(\zeta) \equiv & -\frac{g}{2} \sum_{k=1}^g \omega_k(\infty) B_{\ell k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^g B_{\ell k} \\ & + \frac{i}{\pi} \int_S \log |\rho(\zeta)| d\Omega_\ell^+(\zeta) + \sum_{k=1}^g \{n\omega_k(\infty)\} B_{\ell k}. \end{aligned} \quad (36)$$

Нетрудно видеть, что из условия каноничности базиса дифференциалов $d\Omega_\ell(\zeta)$ (относительно заданных базисных циклов $\{\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j\}$) вытекает, что каждый дифференциал $d\Omega_\ell(\zeta)$ вещественнозначен на S и имеет ровно один нуль в каждом интервале (e_{2j-1}, e_{2j}) , $j = 1, \dots, g+1$, $j \neq \ell$. В лакунах (e_{2j}, e_{2j+1}) , $j = 1, \dots, g$, эти дифференциалы комплекснозначны и отличны от нуля. Отсюда вытекает, во-первых, что все $B_{\ell k}$ чисто мнимые и, во-вторых, что и левая, и правая части (36) также чисто мнимые. Кроме того, матрица $\|B_{\ell k}\|$ невырождена. Следовательно, система сравнений

$$\sum_{k=1}^g x_k B_{\ell k} = \sum_{j=1}^g \int_{e_{2j}^{(1)}}^{z_j^{(1)}} d\Omega_\ell(\zeta) \pmod{\text{периодов}}, \quad \ell = 1, \dots, g,$$

относительно вещественных величин $x_1, \dots, x_g$ имеет (единственное) решение такое, что все $x_j \in [0, 1)$. Аналогично, существуют вещественные величины $\rho_1, \dots, \rho_g$ такие, что

$$\sum_{k=1}^g \rho_k B_{\ell k} = \frac{i}{\pi} \int_S \log |\rho(\zeta)| d\Omega_\ell^+(\zeta) \in i\mathbb{R}, \quad \ell = 1, \dots, g.$$

Тем самым, (36) эквивалентно системе сравнений

$$\sum_{k=1}^g x_k B_{\ell k} \equiv -\frac{g}{2} \sum_{k=1}^g \omega_k(\infty) B_{\ell k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^g B_{\ell k} + \sum_{k=1}^g \rho_k B_{\ell k} + \sum_{k=1}^g \{n\omega_k(\infty)\} B_{\ell k},$$

или

$$x_k = -\frac{g}{2} \omega_k(\infty) + \frac{1}{2} + \rho_k + n\omega_k(\infty) \pmod{1},$$

где, подчеркнем, величины $x_1, \dots, x_g$, $x_j \in [0, 1)$, определяются точками $z_j^{(1)} \in (e_{2j}, e_{2j+1})$, $j = 1, \dots, g$. Так как по условию числа $\omega_1(\infty), \dots, \omega_{g+1}(\infty)$ рационально независимы, то рассуждения, подобные использованным выше в п. 4.1, доказывают нужный нам результат.

Отметим, что для величин ρ_k справедливо представление

$$\rho_k = \frac{1}{\pi} \int_S \log |\rho(\zeta)| \frac{\partial \omega_k(\zeta)}{\partial n_\zeta^+} d\zeta, \quad k = 1, \dots, g,$$

а система (36) приводится к виду

$$\sum_{j=1}^g \omega_k(z_j) = (g - 2n)\omega_k(\infty) - \frac{2}{\pi} \int_S \log |\rho(\zeta)| \frac{\partial \omega_k(\zeta)}{\partial n_\zeta^+} d\zeta \pmod{2}, \quad k = 1, \dots, g \quad (37)$$

(ср. [30] и [6; лемма 3]). Тем самым, здесь фактически доказано, что по некоторой подпоследовательности система сравнений (37) имеет решение $z_1, \dots, z_g$ такое, что все $z_j \in (e_{2j}, e_{2j+1})$.

§ 5. Доказательство основных результатов

5.1. Случай, когда допустимый вес ρ аналитичен на S : асимптотическая формула для полиномов Паде вне множества S . Пусть $f = \hat{\rho} + r$, $f \in \mathcal{N}$ или $f \in \mathcal{N}^\circ$ и выполняются соответствующие условия “общего положения”. Положим $\{a_1, \dots, a_m\}$ — полюсы функции f в D . Из сходимости главной диагонали $[n/n]_f$ по емкости к функции f внутри области D вытекает, что по крайней мере m полюсов рациональной функции $[n/n]_f$ (нулей полинома Q_n) сходятся к m полюсам функции f в D . Обозначим эти нули полинома Q_n через $a_{1,n}, \dots, a_{m,n}$. Так как выполнены условия “общего положения”, то в соответствии со следствием из основной леммы для всех n из некоторой подпоследовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$ существует решение φ_n, ψ_n “модифицированной” краевой задачи Римана, где в качестве параметров $a_1, \dots, a_m$ и $a_{1,n}, \dots, a_{m,n}$ выбраны соответственно полюсы функций f и $[n/n]_f$.

Непосредственно из формулы Сохоцкого для предельных значений интеграла типа Коши на контуре интегрирования вытекает следующее соотношение для функции остатка $R_n(z) = (Q_n f - P_n)(z)$ на множестве S :

$$R_n^+(\zeta) - R_n^-(\zeta) = \frac{Q_n(\zeta)\rho(\zeta)}{w^+(\zeta)}, \quad \zeta \in S.$$

Из этого соотношения, используя краевые условия, которым удовлетворяют на S функции φ_n и ψ_n , легко получить следующую пару соотношений:

$$\begin{aligned} (R_n \varphi_n w)^+(\zeta) + (R_n \psi_n w)^-(\zeta) \frac{1}{\rho(\zeta)} &= 2Q_n(\zeta)\psi_n^-(\zeta), \quad \zeta \in S, \\ (R_n \varphi_n w)^-(\zeta) + (R_n \psi_n w)^+(\zeta) \frac{1}{\rho(\zeta)} &= 2Q_n(\zeta)\psi_n^+(\zeta), \quad \zeta \in S. \end{aligned} \quad (38)$$

Определим теперь на двулистной римановой поверхности $\mathfrak{R}$ кусочно-мероморфную функцию $F(\mathbf{z})$ следующим образом:

$$F(\mathbf{z}) = \begin{cases} R_n(z)\varphi_n(z)w(z), & \mathbf{z} \in D^{(1)}, \\ 2Q_n(z)\psi_n(z), & \mathbf{z} \in D^{(2)}. \end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что в бесконечно удаленных точках $\mathbf{z} = \infty^{(1)}$ и $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ функция F имеет полюсы порядка $\leq g$; в остальных точках $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$ функция F голоморфна. Непосредственно из (38) вытекает, что на кривой Γ для функции F выполняется граничное условие

$$F(\zeta+) - F(\zeta-) = \chi(\zeta-) \frac{1}{\rho(\zeta)}, \quad \zeta \in \Gamma, \quad (39)$$

где мы положили $\chi(\mathbf{z}) = -R_n(z)\psi_n(z)w(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$. Как известно (см. п. 2.5), с помощью мероморфного абелева дифференциала

$$d\Omega(\mathbf{z}; \zeta) = \frac{1}{2} \frac{w(\zeta) + w(\mathbf{z})}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{w(\zeta)},$$

заданного на римановой поверхности $\mathfrak{R}$, функция $F(\mathbf{z})$ восстанавливается по граничным условиям (39) интегралом типа Коши:

$$F(\mathbf{z}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma+} \chi(\zeta-) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(\mathbf{z}; \zeta) + p_n(z), \quad \mathbf{z} \notin \Gamma, \quad (40)$$

где $p_n(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg p_n \leq g$.

Рассмотрим эту формулу для $\mathbf{z} \in D^{(1)}$. Так как $\rho(\zeta)$ голоморфна на каждой связной компоненте S_j компакта S , то $\rho(\zeta)$ голоморфна на каждой кривой Γ_j . Поэтому контур Γ можно не меняя значения интеграла покомпонентно продеформировать в близкий контур Γ' , также состоящий из $g+1$ компоненты и целиком расположенный в втором листе $D^{(2)}$ в некоторой окрестности Γ , в которой определена и голоморфна функция $\rho(\zeta)$ (напомним, что функция $\chi(\zeta)$ определена и голоморфна на всем втором листе $D^{(2)}$). Полученная интегральная формула задает аналитическое продолжение функции $F(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(1)}$, через контур Γ на второй лист римановой поверхности вплоть до контура Γ' (отметим, что для $\mathbf{z} \in D^{(2)}$ оно не совпадает с функцией $F(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in D^{(2)}$, определенной выше). Отсюда, учитывая определения функций F и χ , получаем:

$$\begin{aligned} (R_n \varphi_n w)(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (R_n \psi_n w)(\zeta) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(2)}) + p_n(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (R_n \varphi_n w)(\zeta) \frac{\psi_n(\zeta)}{\varphi_n(\zeta)} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(2)}) + p_n(z), \quad z \in \overline{D}. \end{aligned} \quad (41)$$

Выберем теперь и зафиксируем произвольное достаточно малое $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее следующим условиям: линия уровня функции Грина $L(\varepsilon) = \{z : g_D(z, \infty) = \varepsilon\}$ состоит ровно из $g+1$ компоненты; функция ρ голоморфна внутри и на $L(\varepsilon)$; все точки a_j лежат в области $D(\varepsilon) = \{z : g_D(z, \infty) > \varepsilon\}$, а точки $a_{j,n}, z_{j,n} \in D(\varepsilon)$ для достаточно больших $n \in \Lambda$. Только такие $n \in \Lambda$ мы и рассматриваем в дальнейшем. Последовательность $\{\varepsilon_n\}_{n \in \Lambda}$, $\varepsilon_n \in [\varepsilon/2, 3\varepsilon/4]$, выберем исходя из следующего условия: $\max_{z \in L(\varepsilon_n)} |p_n(z)| = O(1) \cdot \min_{z \in L(\varepsilon_n)} |p_n(z)|$ при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$ (это, очевидно, возможно, так как $\deg p_n \leq g$).

Пусть теперь контур $\Gamma' = \Gamma'(n) \subset D^{(2)}$ в (41) такой, что в области D ему соответствует линия уровня $\overline{L(\varepsilon_n)}$. Подчеркнем еще раз, что формула (41) справедлива в замкнутой области $\overline{D^{(1)}}$, т.е. остается верной и для $z = z^{(1)} \in \Gamma$: непосредственно из явного вида (14) ядра $d\Omega(z^{(1)}; \zeta^{(2)})$ вытекает, что оно не имеет особенностей при $z = \zeta$.

С учетом того, что голоморфная в $\mathbb{C} \setminus S$ функция $(R_n \varphi_n w)(z)$ имеет полюс в точке $z = \infty$ порядка $\leq g$, и явного представления функций φ_n и ψ_n получаем из (41) следующее соотношение для максимума модуля M_n функции $(R_n \varphi_n w)(z)$ на $S^+ \cup S^-$:

$$M_n = M_n \cdot O(q^n) + \max_{z \in S} |p_n(z)|, \quad n \in \Lambda, \quad n \rightarrow \infty,$$

$q = \exp\{-2\varepsilon_n\} \in (0, 1)$. Следовательно, $M_n = \max_{z \in S} |p_n(z)|(1 + o(q^n))$, $n \in \Lambda$, $n \rightarrow \infty$, и, кроме того, $\max_{z \in S} |(R_n \varphi_n w)(z) - p_n(z)| = M_n \cdot O(q^n)$.

Рассмотрим теперь формулу (40) для $\mathbf{z} \in \overline{D^{(2)}(\varepsilon)} = \{\mathbf{z} \in D^{(2)} : g_D(z, \infty) \geq \varepsilon\}$:

$$\begin{aligned} (2Q_n \psi_n)(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} (R_n \psi_n w)(\zeta) \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(2)}; \zeta^{(2)}) + p_n(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} (R_n \varphi_n w)(\zeta) \frac{\psi_n(\zeta)}{\varphi_n(\zeta)} \frac{1}{\rho(\zeta)} d\Omega(z^{(2)}; \zeta^{(2)}) + p_n(z), \quad z \in \overline{D(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Из (42) и условия выбора ε_n вытекает, что

$$\begin{aligned} \max_{z \in L(\varepsilon_n)} |(2Q_n \psi_n)(z) - p_n(z)| &= \max_{z \in L(\varepsilon_n)} |p_n(z)| \cdot O(q^n) \\ &= \min_{z \in L(\varepsilon_n)} |p_n(z)| \cdot O(q^n), \end{aligned} \quad (43)$$

где $0 < q < 1$. Поскольку мы заранее выбрали $\varepsilon > 0$ так, что все $\mathbf{g}$ “свободных” нулей функции ψ_n компактно (при $n \rightarrow \infty, n \in \Lambda$) принадлежат области $D(\varepsilon)$, то с помощью теоремы Руше легко получаем из (43), что функции $(2Q_n \psi_n)(z)$ и $p_n(z)$ для всех достаточно больших $n \in \Lambda$ имеют в $D(\varepsilon_n)$ одинаковое количество нулей. Так как функция ψ_n имеет в конечной плоскости ровно $\mathbf{g}$ нулей, получаем, что $\deg p_n = \mathbf{g}$ и все его $\mathbf{g}$ нулей компактно (по $n \in \Lambda$) принадлежат $D(\varepsilon)$. Отсюда уже вытекает: $\deg Q_n = n$ (т.е. индекс n – нормальный), все предельные точки $(n - m)$ нулей полинома $Q_n(z)$, $n \in \Lambda$, лежат на S , а асимптотическое поведение $\mathbf{g}$ нулей полинома p_n – такое же, как $\mathbf{g}$ “свободных” нулей $\psi_n(z)$. Легко так же видеть, что если $p_n(z) = k_n z^{\mathbf{g}} + \dots$, то $p_n(z)/(k_n X_{\mathbf{g},n}(z)) = 1 + o(q^n)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на $L(\varepsilon_n)$. Используя только что найденные свойства полинома p_n и тождество $\varphi_n(z) \psi_n(z) \equiv C_n X_{\mathbf{g},n}(z) r_n(z)$, из (43) легко получаем, что если нормировать Q_n условием $Q_n(z) = z^n + \dots$, то

$$\max_{z \in L(\varepsilon)} \left| \frac{Q_n(z)}{\varphi_n(z)} r_n(z) - \frac{p_n(z)}{k_n X_{\mathbf{g},n}(z)} \right| = o(q^n), \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \Lambda.$$

Следовательно,

$$\max_{z \in D(\varepsilon)} \left| \frac{Q_n(z)}{\varphi_n(z)} r_n(z) - 1 \right| = o(q^n), \quad n \rightarrow \infty, \quad n \in \Lambda.$$

В частности, для $f = \hat{\rho}$ имеем: $Q_n(z) = \varphi_n(z)(1 + o(q^n))$, $0 < q < 1$, при $n \rightarrow \infty$, $n \in \Lambda$, равномерно по $z \in \overline{D(\varepsilon)}$, $\varepsilon > 0$ произвольно мало, $q = q(\varepsilon)$.

Вернемся теперь к случаю $\mathbf{z} \in D^{(1)}$. Непосредственно из (41) получаем, что функция $(R_n \varphi_n w)(z)$ имеет в D_ε ровно $\mathbf{g}$ конечных нулей. Следовательно, этим свойством обладает и функция $R_n(z)$. Тем самым, для $n \in \Lambda$ аппроксимации Паде $[n/n]_{\hat{\rho}}$ интерполируют функцию $\hat{\rho}(z)$ дополнительно в $\mathbf{g}$ точек, компактно по $n \in \Lambda$ принадлежащих D .

5.2. Случай, когда допустимый вес ρ аналитичен на S : асимптотическая формула для полиномов Паде на множестве S . Непосредственно из формулы (41) вытекает, что граничные значения функции $R_n \varphi_n w$ на S удовлетворяют соотношению: $(R_n \varphi_n w)^\pm(\zeta) = o(q^n) \cdot M_n + p_n(\zeta)$, $0 < q < 1$. Откуда, используя свойства полинома p_n , получаем, что $(R_n \varphi_n w)^\pm(\zeta) = p_n(\zeta)(1 + o(q^n)) = X_{\mathbf{g},n}(\zeta)(1 + o(q^n))$, $\zeta \in S$, $n \rightarrow \infty$. Тем самым,

$$(R_n)^\pm(\zeta) = \frac{X_{\mathbf{g},n}(\zeta)}{(\varphi_n w)^\pm(\zeta)} (1 + o(q^n)) = \frac{\psi^\pm}{w^\pm r_n}(\zeta) (1 + o(q^n)).$$

Учитывая формулу для скачка функции $R_n(z)$ на S , получаем отсюда

$$Q_n(\zeta) = \frac{(\psi_n^+ + \psi_n^-)(\zeta)}{(r_n \rho)(\zeta)} + o(q^n) = \frac{(\varphi_n^+ + \varphi_n^-)(\zeta)}{r_n(\zeta)} + o(q^n).$$

В частности, для $f = \hat{\rho}$ имеем: $Q_n(\zeta) = \varphi_n^+(\zeta) + \varphi_n^-(\zeta) + o(q^n)$, $\zeta \in S$.

5.3. Случай, когда допустимый вес ρ удовлетворяет условию Гёльдера на S . При исследовании это случая мы в основном следуем традиционному подходу, изложенному, например, в [30; §8, с. 181–184], [23], и опираемся на стандартную технику, связанную с изучением свойств граничных значений интегралов типа Коши и коэффициентов Фурье (см., например, [44; §5], [45; гл. II, §4], а также [46]).

Стандартными методами теории сингулярных интегралов типа Коши доказывается следующая

ЛЕММА. Пусть заданы: H -непрерывная на единичной окружности $|z| = 1$ функция $h(z)$ и последовательность функций $\{F_n(z)\}$, $F_n(z) \in \mathcal{O}(1 < |z| < R) \cap C(1 \leq |z| \leq R)$. Тогда для функций

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{F_n(t)h(t)}{t^n} \frac{dt}{t-z}, \quad |z| < 1,$$

имеем: радиальные граничные значения $f_n(e^{i\theta})$ существуют и

$$\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |f_n(e^{i\theta})| = o(1) \cdot \max_{1 \leq |z| \leq R} |F_n(z)|, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $o(1) = o(\log n/n^\alpha)$, если $h \in H(\alpha; |z| = 1)$, $0 < \alpha \leq 1$.

Используем вновь интегральное представление (40). Дифференциал $d\Omega(\mathbf{z}; \zeta)$ при $\zeta = \zeta^{(1)}$, $\mathbf{z} = z^{(1)}$ имеет вид

$$d\Omega(\zeta^{(1)}; z^{(1)}) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{h(\zeta)} + \sqrt{h(z)}}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\sqrt{h(\zeta)}}.$$

Для (многозначной) отображающей функции $\Phi(z) = e^{G(z, \infty)}$ имеем

$$d\Phi = \Phi dG(z, \infty) = \frac{\Phi(\zeta)p(\zeta)d\zeta}{\sqrt{h(\zeta)}}.$$

Следовательно, $d\zeta/\sqrt{h(\zeta)} = d\Phi/(\Phi(\zeta)p(\zeta))$, где, как известно, $p(\zeta) \neq 0$ на S . Рассмотрим произвольный контур Γ_j , $j = 1, \dots, g+1$, кривой Γ . Нетрудно видеть, что если мы сделаем в соответствующем интеграле из (40) замену переменных $t = \Phi^{1/\omega_j(\infty)}$, то окажемся в условиях леммы. Дальнейший ход рассуждений подобен пп. 5.1 и 5.2.

5.4. Связь теоремы Наттолла–Рахманова и теоремы Абеля. В условиях теорем имеем: $\hat{\rho}(z) = \frac{1}{2}\rho(z)/\sqrt{h(z)}$, $z \notin S$; при некотором $m \in \mathbb{N}$ и каждом $n = 0 \pmod{m}$ функция $V_n(z) = \Phi^n(z) + \Phi^{-n}(z)$ определена и однозначна в $\mathbb{C} \setminus \{e_1, \dots, e_{2g+2}\}$ и, кроме того, $V_n(z) = O(z^n)$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает, что V_n – полином степени n ; теперь уже нетрудно доказать, что $Q_n(z) = \text{const} \cdot V_n(z)$, а $P_n(z) = \text{const} \cdot \hat{\rho}(z)(\Phi^n(z) - \Phi^{-n}(z))$. Очевидно, что в условиях теоремы функция $\Phi^m(z) = \exp\{mG_D(z, \infty)\}$ – однозначная мероморфная функция на римановой поверхности $\mathfrak{R}$, т.е. $\Phi^m \in \mathbb{C}(z, w)$. Следовательно, $\Phi^m(z) = \tau_1(z) + \tau_2(z)w(z)$, $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C}(z)$. Так как $dG_D(z, \infty) = p(z)dz/\sqrt{h(z)}$, $p \in \mathbb{C}[z]$, $p(z) = z^g + \dots$, то

$$\int_{e_1}^z \frac{p(\zeta)}{\sqrt{h(\zeta)}} d\zeta = \frac{1}{m} \log(\tau_1(z) + \tau_2(z)\sqrt{h(z)});$$

значит, $p(z)$ – искомый интегрирующий множитель для дифференциала $dz/\sqrt{h(z)}$.

Список литературы

1. Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. Т. II, III. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948.
2. Марков А. А. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.: Гостехиздат, 1948.
3. Чебышев П. Л. О непрерывных дробях // Ученые записки Имп. Академии Наук. 1855. Т. III. С. 636–664. (Полное собрание сочинений. Т. II. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 103–126.)
4. Марков А. А. Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues // Acta Math. 1895. V. 19. P. 93–104. (Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей // Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.: Гостехиздат, 1948. С. 106–119.)
5. Гончар А. А. О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций // Матем. сб. 1975. Т. 97 (139). С. 607–629.
6. Рахманов Е. А. О сходимости диагональных аппроксимаций Паде // Матем. сб. 1977. Т. 104 (146). №2. С. 271–291.
7. Magnus A. P. On optimal Padé-type cuts // Ann. Numer. Math. 1997. V. 4. №4. P. 435–449.
8. Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986.
9. Nuttall J. Sets of minimal capacity, Padé approximations and the bubble problem // Bifurcation phenomena in mathematical physics and related topics / ed. C. Bardos, D. Bessis. Dordrecht: Reidel, 1980. P. 185–201.
10. Dadfar M. B., Geer J. F., Andersen C. M. Perturbation analysis of the limit cycle of the free van der Pol equation // SIAM J. Appl. Math. 1982. V. 42. №3. P. 678–693.
11. Andersen C. M., Geer J. F. Power series expansions for the frequency and period of the limit cycle of the van der Pol equation // SIAM J. Appl. Math. 1984. V. 44. №5. P. 881–895.
12. Карабун Е. А. Применение степенных рядов по времени в задаче о движении цилиндрической полости в жидкости. III. Замена переменных в степенных рядах // Динамика сплошной среды. Вып. 81. 1987. С. 57–77.
13. Andrianov I. V. Application of Padé-approximants in perturbation methods // Adv. Mech. 1991. V. 14. №2. P. 3–25.
14. Cattapan G., Maglione E. From bound states to resonances: analytic continuation of the wave function // arXiv: nudd-th/0001037. 20 Jan 2000.
15. Baker G. A., Jr. Defects and the convergence of Padé approximants // International Conference of Rational Approximations, Antwerpen, Belgium, June 6–11, 1999 (to appear).
16. Stahl H. Diagonal Padé approximants to hyperelliptic functions // Ann. Fac. Sci. Toulouse. Math. (6). Spec. Iss. 1996. P. 121–193.
17. Stahl H. Conjectures around Baker–Gammel–Wilkes conjecture // J. Constr. Approx. 1997. V. 13. P. 287–292.
18. Stahl H. Spurious poles in Padé approximation // J. Comput. Appl. Math. 1998. V. 99. №1, 2. P. 511–527.

19. *Gilewicz J.* Approximants de Padé // *Lecture Notes in Math.* V. 667. Heidelberg: Springer, 1978.
20. *Gilewicz J., Pindor M.* Padé approximants and noise: the case of geometric series. Marseille: Technical report, Centre de Physique Théoretique, 1997.
21. *Dumas S.* Sur le développement des fonctions elliptiques en fractions continues. Thesis. Zürich, 1908.
22. *Никишин Е. М.* О сходимости диагональных аппроксимаций Паде для некоторых функций // *Матем. сб.* 1976. Т. 101 (143). №2. С. 280–292.
23. *Nuttall J., Singh R. S.* Orthogonal polynomials and Padé approximants associated with a system of arcs // *J. Approx. Theory.* 1977. V. 21. P. 1–42.
24. *Гончар А. А.* О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде // *Матем. сб.* 1982. Т. 118 (160). №4 (8). С. 535–556.
25. *Гончар А. А.* О сходимости диагональных аппроксимаций Паде в сферической метрике // *Математические структуры. Вычислительная математика. Математическое моделирование. Труды, посвященные семидесятилетию академика Л. Илиева.* София, 1984. С. 19–35.
26. *Stahl H.* Orthogonal polynomials with complex valued weight function. I, II // *Constr. Approx.* 1986. V. 2. P. 225–240; 241–251.
27. *Nuttall J.* Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials // *J. Approx. Theory.* 1984. V. 42. P. 299–386.
28. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
29. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
30. *Widom H.* Extremal polynomials associated with a system of curves in the complex plane // *Adv. Math.* 1969. V. 3. P. 127–232.
31. *Антексарев А. И.* Асимптотические свойства многочленов, ортогональных на системе контуров, и периодические движения цепочек Тода // *Матем. сб.* 1984. Т. 125 (167). №2 (10). С. 231–258.
32. *Ахиезер Н. И.* Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах // *Докл. АН СССР.* 1960. Т. 134. №1. С. 9–12.
33. *Ахиезер Н. И., Томчук Ю. Я.* К теории ортогональных многочленов на нескольких интервалах // *Докл. АН СССР.* 1961. Т. 138. №4. С. 743–746.
34. *Ахиезер Н. И.* Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов // *Докл. АН СССР.* 1961. Т. 141. №2. С. 263–266.
35. *Суетин С. П.* Асимптотика полиномов Ахиезера и равномерная сходимость аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций // *УМН.* 1998. Т. 53. №6. С. 267–268.
36. *Stahl H.* Extremal domains associated with an analytic function, I, II // *Complex Variables Theory Appl.* 1985. V. 4. P. 311–324, 325–338.
37. *Stahl H.* Structure of extremal domains associated with an analytic function // *Complex Variables Theory Appl.* 1985. V. 4. P. 339–354.
38. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях // *УМН.* 1971. Т. 26. №1. С. 113–180.
39. *Peherstorfer F.* Minimal polynomials on several intervals with respect to the maximum norm. A survey // *Complex methods in approximation theory* / ed. A. Martínez Finkelshtein, F. Marcellán, J. J. Moreno. Universidad de Almería, 1997. P. 137–160.
40. *Дубровин Б. А.* Тэта-функции и нелинейные уравнения // *УМН.* 1981. Т. 36. №2. С. 11–80.
41. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей. М.: ИЛ, 1960.
42. *Форстер О.* Римановы поверхности. М.: Мир, 1980.
43. *Krazer A.* Lehrbuch der Thetafunktionen. New York: Chelsea Publishing Company, XXIV, 1970.
44. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1977.
45. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1. М.: Мир, 1965.
46. *Nuttall J.* Padé polynomial asymptotics from a singular integral equation // *Constr. Approx.* 1990. V. 6. №2. P. 157–166.