Общероссийский математический портал

А. А. Тарасов, О некоторых коммутативных подалгебрах в универсальной оберты-
вающей алгебре алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 9, 115–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm509>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и со-
гласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:16:12

УДК 519.46

А. А. Тарасов

**О некоторых коммутативных подалгебрах
в универсальной обертывающей алгебре
алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$**

Для случая $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ доказывается, что максимальные коммутативные подалгебры алгебры Пуассона $P(\mathfrak{g})$, получающиеся методом сдвига инвариантов, могут быть подняты в обертывающую алгебру. Более того, это поднятие может быть осуществлено с помощью отображения симметризации.

Библиография: 4 названия.

Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли, $U(\mathfrak{g})$ – ее универсальная обертывающая алгебра. Алгебра $U(\mathfrak{g})$ имеет возрастающую фильтрацию $U(\mathfrak{g}) = \bigcup_{k=0}^{\infty} U^k(\mathfrak{g})$, в которой $U^k(\mathfrak{g})$ есть подпространство элементов, представимых в виде многочленов степени $\leq k$ от элементов алгебры $\mathfrak{g}$. Через $P(\mathfrak{g})$ обозначим ассоциированную градуированную алгебру (алгебру Пуассона), т. е.

$$P(\mathfrak{g}) = \text{gr } U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} P_k(\mathfrak{g}), \quad P_k(\mathfrak{g}) = U^k(\mathfrak{g})/U^{k-1}(\mathfrak{g}).$$

Согласно теореме Пуанкаре–Биркгофа–Витта алгебра $P(\mathfrak{g})$ канонически изоморфна симметрической алгебре пространства $\mathfrak{g}$. В $P(\mathfrak{g})$ естественным образом вводится ливевская операция (скобка Пуассона) $\{\cdot, \cdot\}$, для которой $\{P_k(\mathfrak{g}), P_l(\mathfrak{g})\} \subset P_{k+l-1}(\mathfrak{g})$. А именно при

$$u \in U^k(\mathfrak{g}), \quad v \in U^l(\mathfrak{g})$$

принимается, что

$$\{u + U^{k-1}(\mathfrak{g}), v + U^{l-1}(\mathfrak{g})\} = [u, v] + U^{k+l-2}(\mathfrak{g}).$$

Тождество Лейбница связывает скобку Пуассона с умножением:

$$\{x, yz\} = \{x, y\}z + y\{x, z\}.$$

Алгебры $U(\mathfrak{g})$ и $P(\mathfrak{g})$ можно рассматривать как алгебры Ли относительно операции коммутирования и скобки Пуассона соответственно. Алгебра $\mathfrak{g}$ канонически вкладывается в эти алгебры Ли. Образ элемента $x \in \mathfrak{g}$ в $P(\mathfrak{g})$ будем отождествлять с x (и обозначать той же буквой), а образ x в $U(\mathfrak{g})$ будем обозначать через $\widehat{x}$. Вложение $\mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})$ продолжим до изоморфизма $\mathfrak{g}$ -модулей $P(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$, при котором

$$x_1 \cdots x_k \mapsto \widehat{x_1 \cdots x_k} := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} \widehat{x}_{\sigma(1)} \cdots \widehat{x}_{\sigma(k)} \quad (x_1, \dots, x_k \in \mathfrak{g}).$$

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$.

Обозначим через e_{ij} ($1 \leq i, j \leq n$) матричные единицы, составляющие базис алгебры $\mathfrak{g}$, и определим “главные миноры порядка p ” как элементы

$$M_{i_1 \dots i_p} = \sum_{\sigma \in S_p} (\operatorname{sgn} \sigma) e_{i_1 i_{\sigma(1)}} \cdots e_{i_p i_{\sigma(p)}} \quad (i_1 < \dots < i_p),$$

где умножение понимается как операция в алгебре Пуассона $P(\mathfrak{g})$. Суммы

$$F_p = \sum_{i_1 < \dots < i_p} M_{i_1 \dots i_p} \quad (p = 1, \dots, n)$$

алгебраически независимы и порождают центр Z алгебры Ли $P(\mathfrak{g})$, см. [1]. (Как известно, Z состоит из инвариантов естественного действия алгебры $\mathfrak{g}$ в $P(\mathfrak{g})$.) Заметим, что элементы $\hat{F}_r$ ($r = 1, \dots, n$) порождают центр алгебры $U(\mathfrak{g})$.

Положим $N_{i_1 \dots i_k} := M_{1 \dots \hat{i}_1 \dots \hat{i}_2 \dots i_k \dots n}$ ($i_1 < \dots < i_k$), где $\hat{j}$ обозначает пропуск индекса j , и $N_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}} := N_{i_1 \dots i_k}$ для всякого $\sigma \in S_k$.

Пусть $\partial_{ij} \in \operatorname{Der} P(\mathfrak{g})$ обозначает дифференцирование по e_{ij} . Для любой матрицы $a = (a_{ij})$ положим

$$\partial_a u = \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{ij} u \quad (u \in P(\mathfrak{g})).$$

Пусть $h = \operatorname{diag}(h_1, \dots, h_n)$, причем $h_1, \dots, h_n$ различны. Тогда согласно общему результату А. Т. Фоменко и А. С. Мищенко [1] элементы

$$F_{p,k}(h_1, \dots, h_n) = \partial_h^k F_p \quad (p = 1, \dots, n; \quad k = 0, \dots, p-1)$$

алгебры Пуассона $P(\mathfrak{g})$ алгебраически независимы и попарно коммутируют относительно скобки Пуассона.

Пусть $L(h)$ – коммутативная подалгебра алгебры Ли $P(\mathfrak{g})$, порожденная элементами $F_{p,k}(h_1, \dots, h_n)$. Известно (см. [2]), что $L(h)$ имеет максимальную возможную степень трансцендентности среди коммутативных подалгебр алгебры Ли $P(\mathfrak{g})$. Известно также (см. [2]), что если бы удалось поднять образующие алгебры $L(h)$ до коммутирующих элементов алгебры $U(\mathfrak{g})$, то подалгебра, порожденная этими элементами, имела бы максимальную степень трансцендентности среди коммутативных подалгебр алгебры $U(\mathfrak{g})$. В [3] доказано существование такого поднятия, но его явный вид автору неизвестен. Задача настоящей работы – показать, что такое поднятие может быть осуществлено с помощью отображения “ $\hat{}$ ”. А именно будет доказана

ТЕОРЕМА. *Для любых $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{C}$ элементы $\hat{F}_{p,k} \equiv \hat{F}_{p,k}(h_1, \dots, h_n)$ ($p = 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, \dots, p-1$) попарно коммутируют.*

Автор глубоко признателен своему научному руководителю профессору Э. Б. Винбергу за постановку задачи, а также за постоянное внимание к работе.

Доказательство теоремы

1. Найдем необходимое и достаточное условие того, что $\widehat{F}_{p,k}$ ($p = 1, \dots, n$; $k = 0, \dots, p-1$) попарно коммутируют для любых $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{C}$.

Для любого подмножества $I \subset \{1, \dots, n\}$ через $|I|$ будем обозначать его мощность. Запись $I \perp U$ будет означать, что $I \cap U = \emptyset$, а $IU := I \cup U$ при $I \perp U$. Для $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ положим $h_I := h_{i_1} \cdots h_{i_k}$.

Ясно, что

$$\partial_h^k F_n = \sum_I h_I N_I$$

и, следовательно,

$$\widehat{\partial_h^k F_n} = \sum_I h_I \widehat{N_I},$$

где суммирование происходит по всем подмножествам $I \subset \{1, \dots, n\}$ мощности k .

Аналогично,

$$\widehat{\partial_h^k F_p} = \sum_I h_I \sum_{U \perp I} \widehat{N_{IU}},$$

где $|I| = k$, $|U| = n - p$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} [\widehat{\partial_h^k F_p}, \widehat{\partial_h^l F_q}] &= \left[\sum_I h_I \sum_{U \perp I} \widehat{N_{IU}}, \sum_J h_J \sum_{V \perp J} \widehat{N_{JV}} \right] \\ &= \sum_I \sum_J h_I h_J \left[\sum_{U \perp I} \widehat{N_{IU}}, \sum_{V \perp J} \widehat{N_{JV}} \right], \end{aligned}$$

где $|I| = k$, $|U| = n - p$, $|J| = l$, $|V| = n - q$. Приводя подобные члены, получаем, что элементы $F_{p,k}(h_1, \dots, h_n)$ попарно коммутируют для любых $h_1, \dots, h_n$ тогда и только тогда, когда

$$Y_{S,T}(k, l, p, q) := \sum_{\substack{I \cup J = S \\ I \cap J = T}} \left[\sum_{U \perp I} \widehat{N_{IU}}, \sum_{V \perp J} \widehat{N_{JV}} \right] = 0 \quad (1)$$

для любых $S, T \subset \{1, \dots, n\}$, $T \subset S$.

2. Будем доказывать равенства $Y_{S,T}(k, l, p, q) = 0$ индукцией по n .

При $n = 1$ они, очевидно, верны. Предполагая, что равенства справедливы для матриц порядка $< n$, докажем их для матриц порядка n .

ЛЕММА 0. Если $T \neq \emptyset$, то $Y_{S,T}(k, l, p, q) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что у всякой матричной единицы $\widehat{e}_{\gamma\delta}$, входящей в выражение (1), индексы γ, δ не принадлежат T . Обозначим через $\mathbf{g}'$ подалгебру алгебры $\mathbf{g}$, порожденную такими матричными единицами. Тогда $Y_{S,T}(k, l, p, q) = Y'_{S \setminus T, \emptyset}(k - t, l - t, p, q)$, где $t = |T|$, а штрих указывает, что обозначение относится к алгебре $\mathbf{g}'$. Поэтому если $T \neq \emptyset$, то $Y_{S,T}(k, l, p, q) = 0$ по предположению индукции.

Теперь осталось разобраться со случаем, когда $T = \emptyset$. Положим

$$Y_S := Y_S(k, l, p, q) := Y_{S, \emptyset}(k, l, p, q) = \sum_{\substack{I \cup J = S \\ I \perp J}} \left[\sum_{U \perp I} \hat{N}_{IU}, \sum_{V \perp J} \hat{N}_{JV} \right], \quad (2)$$

где, как и выше, $|I| = k$, $|U| = n - p$, $|J| = l$, $|V| = n - q$. Будем называть индексы из S *главными*, а остальные индексы – *простыми*.

3. Заметим, что

$$Y_S = \sum_{\substack{I \cup J = S \\ I \perp J}} \sum_{U \perp S} \sum_{V \perp S} [\hat{N}_{IU}, \hat{N}_{JV}] + \sum_{\substack{I \cup J = S \\ I \perp J}} \sum_{\substack{U \perp I, V \perp J \\ (I \cap V) \cup (J \cap U) \neq \emptyset}} [\hat{N}_{IU}, \hat{N}_{JV}]. \quad (3)$$

Обозначим первое слагаемое через Z_S , второе – через X_S . Наряду с равенством $Y_S = 0$ будем доказывать по индукции, что $Z_S = 0$ (база индукции очевидна).

Исходя из предположения индукции, докажем, что $X_S = 0$.

Разобьем X_S на подсуммы, сгруппировав слагаемые с одинаковыми пересечениями $I_0 = I \cap V$ и $J_0 = J \cap U$. Каждая такая подсумма равна $Z'_{S \setminus (I_0 \cup J_0)}(k - k_0, l - l_0, p - l_0, q - k_0)$, где $k_0 = |I_0|$, $l_0 = |J_0|$, а штрих указывает, что обозначение относится к подалгебре $\mathfrak{g}'$ алгебры $\mathfrak{g}$, порожденной матричными единицами $\hat{e}_{\gamma\delta}$, индексы γ, δ которых не принадлежат $I_0 \cup J_0$. По предположению индукции все эти подсуммы равны нулю. Следовательно, $X_S = 0$, так что $Y_S = Z_S$.

4. Пусть M – произвольный набор индексов, $M \subset \{1, \dots, n\}$. Обозначим через $\mathfrak{gl}(M)$ подалгебру, порожденную элементами e_{ij} , $i, j \in M$, а через $\mathrm{GL}(M)$ – соответствующую подгруппу группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

ЛЕММА 1. *Для любых простых индексов γ, δ имеем $[\hat{e}_{\gamma\delta}, Y_S] = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно, так как в (2) каждая из сумм в коммутаторах коммутирует с $\hat{e}_{\gamma\delta}$ в силу того, что каждая из сумм миноров до поднятия является инвариантом действия группы GL_{n-k} , где $k = |U|$ для левой суммы или $k = |V|$ для правой суммы.

ЛЕММА 2. *Для любых главных индексов γ, δ имеем $[\hat{e}_{\gamma\delta}, Z_S] = 0$ (и, следовательно, $[\hat{e}_{\gamma\delta}, Y_S] = 0$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательный элемент

$$Z_{S'} = Z_{S'}(k - 1, l - 1, p - 1, q - 1) = \sum_{\substack{I' \cup J' = S' \\ I' \perp J'}} \left[\sum_{U' \perp S'} \hat{N}_{I'U'}, \sum_{V' \perp S'} \hat{N}_{J'V'} \right],$$

где $S' = S \setminus \{\gamma, \delta\}$. Поскольку для $Z_{S'}$ γ, δ суть простые индексы, то $[\hat{e}_{\gamma\delta}, Z_{S'}] = 0$ по лемме 1.

Выясним для произвольного коммутатора вида $[\hat{N}_{I'U'}, \hat{N}_{J'V'}]$ из $Z_{S'}$, принадлежат ли индексы γ, δ наборам U' и V' . Всего существует 16 вариантов принадлежности (каждый из двух индексов может входить или не входить в каждый из двух наборов). Обозначим для каждого варианта через $Z(*, *)$ сумму всех коммутаторов, соответствующих этому варианту, причем вместо первой (второй) звездочки

будем писать те из индексов γ, δ , которые входят в U' (соответственно V'). Положим $H(*, *) = [\widehat{e}_{\gamma\delta}, Z(*, *)]$.

Ясно, что

$$Z_S = Z_1 + Z(\gamma, \delta) + Z(\delta, \gamma),$$

где Z_1 — сумма коммутаторов из Z_S , для которых либо $\gamma, \delta \in I$, либо $\gamma, \delta \in J$ (см. (3)).

Ясно, кроме того, что $e_{\gamma\delta}$ коммутирует с любым неподнятым минором, который содержит или не содержит одновременно индексы γ, δ . Следовательно, $\widehat{e}_{\gamma\delta}$ коммутирует с Z_1 , а также $H(\emptyset, \emptyset) = H(\emptyset, \gamma\delta) = H(\gamma\delta, \emptyset) = H(\gamma\delta, \gamma\delta) = 0$.

Докажем, что $H(\gamma, \emptyset) + H(\delta, \emptyset) = 0$. Заметим, что

$$Z(\gamma, \emptyset) + Z(\delta, \emptyset) = \sum_{\substack{I' \cup J' = S' \\ I' \perp J'}} \sum_{\substack{U' \perp S'; U'' = (U' \cup \delta) \setminus \gamma \\ \gamma \in U'; \delta \notin U'}} \sum_{\substack{V' \perp S' \\ \gamma, \delta \notin V'}} [\widehat{N}_{I'U'} + \widehat{N}_{I'U''}, \widehat{N}_{J'V'}]. \quad (4)$$

Очевидно, что $[\widehat{e}_{\gamma\delta}, \widehat{N}_{I'U'} + \widehat{N}_{I'U''}] = 0$, так как последняя сумма миноров до поднятия инвариантна относительно действия подгруппы $\text{GL}(\{\gamma, \delta\})$.

Аналогично доказывается, что

$$H(\emptyset, \gamma) + H(\emptyset, \delta) = H(\gamma, \gamma\delta) + H(\delta, \gamma\delta) = H(\gamma\delta, \gamma) + H(\gamma\delta, \delta) = 0.$$

В силу предположения индукции $H(\gamma, \gamma) + H(\gamma\delta, \gamma) + H(\gamma, \gamma\delta) + H(\gamma\delta, \gamma\delta) = H(\delta, \delta) + H(\gamma\delta, \delta) + H(\delta, \gamma\delta) + H(\gamma\delta, \gamma\delta) = 0$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &= [H(\gamma, \gamma) + H(\gamma\delta, \gamma) + H(\gamma, \gamma\delta) + H(\gamma\delta, \gamma\delta)] \\ &\quad + [H(\delta, \delta) + H(\gamma\delta, \delta) + H(\delta, \gamma\delta) + H(\gamma\delta, \gamma\delta)] \\ &= [H(\gamma, \gamma) + H(\delta, \delta)] + [H(\gamma, \gamma\delta) + H(\delta, \gamma\delta)] + [H(\gamma\delta, \gamma) + H(\gamma\delta, \delta)] + 2H(\gamma\delta, \gamma\delta) \\ &= H(\gamma, \gamma) + H(\delta, \delta). \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned} [\widehat{e}_{\gamma\delta}, Z_S] &= [\widehat{e}_{\gamma\delta}, Z(\gamma, \delta) + Z(\delta, \gamma)] \\ &= [\widehat{e}_{\gamma\delta}, Z_{S'}] - H(\emptyset, \emptyset) - H(\emptyset, \gamma\delta) - H(\gamma\delta, \emptyset) - H(\gamma\delta, \gamma\delta) \\ &\quad - [H(\gamma, \gamma) + H(\delta, \delta)] - [H(\gamma, \gamma\delta) + H(\delta, \gamma\delta)] - [H(\gamma\delta, \gamma) + H(\gamma\delta, \delta)] \\ &\quad - [H(\emptyset, \gamma) + H(\emptyset, \delta)] - [H(\gamma, \emptyset) + H(\delta, \emptyset)] = 0. \end{aligned}$$

5. Раскрывая скобки в (2), получаем линейную комбинацию произведений вида $\widehat{e}_{p_1 q_1} \cdots \widehat{e}_{p_s q_s}$, в которых каждый индекс встречается одинаковое число раз слева и справа, причем это число ≤ 1 для главных индексов и ≤ 2 для простых индексов. После возможного понижения степени за счет применения соотношений вида

$$\widehat{e}_{pq} \widehat{e}_{qr} - \widehat{e}_{qr} \widehat{e}_{pq} = \widehat{e}_{pr} - \delta_{pr} \widehat{e}_{qq}$$

указанные свойства сохраняются.

Пусть m – наименьшее целое число, для которого $Z_S \in U^m(\mathfrak{g})$, и W_S – проекция Z_S на $P_m(\mathfrak{g})$. Ясно, что $[e_{\gamma\delta}, W_S] = 0$ для любых простых (главных) индексов γ, δ .

Пусть $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ – подпространство $U(\mathfrak{g})$, элементы которого коммутируют с $\mathfrak{h}$ (алгеброй диагональных матриц). Введем подпространство $U'(\mathfrak{g}) \subset U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$ элементов, которые могут быть представлены в виде линейной комбинации произведений вида $\hat{e}_{p_1 q_1} \cdots \hat{e}_{p_s q_s}$, в которых каждый главный индекс встречается слева (и соответственно справа) не более одного раза, и аналогично определим подпространство $P'(\mathfrak{g}) \subset P(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$. Тогда $\text{gr } U'(\mathfrak{g}) = P'(\mathfrak{g})$. Ясно, что $W_S \in P'_m(\mathfrak{g}) = P'(\mathfrak{g}) \cap P_m(\mathfrak{g})$.

6. Пусть τ – антиавтоморфизм алгебры Ли $U(\mathfrak{g})$, переводящий $\hat{e}_{ij}$ в $\hat{e}_{ji}$. Ясно, что τ сохраняет поднятые миноры, т.е. $\tau(\hat{N}_I) = \hat{N}_I$. Но тогда τ умножает коммутаторы миноров $[\hat{N}_{IU}, \hat{N}_{JV}]$ (и, стало быть, элементы Y_S) на -1 . Итак, $\tau(Y_S) = -Y_S$. Заметим, что τ сохраняет фильтрацию и, тем самым, индуцирует автоморфизм алгебры Ли $P(\mathfrak{g})$, причем $\tau(W_S) = -W_S$.

В следующих пунктах будет доказано, что $\tau(W_S) = W_S$. Отсюда будет следовать, что $Y_S = 0$.

7. Пусть S – набор главных индексов, T – набор простых индексов.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. Пусть W – элемент пространства $P'_m(\mathfrak{g})$, инвариантный относительно действия групп $\text{GL}(S)$ и $\text{GL}(T)$.

Тогда $\tau(W) = W$.

8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обозначим через

$$P_m^R(\mathfrak{g}) \subset P'_m(\mathfrak{g})$$

пространство однородных элементов с фиксированным набором $R \subset S$ главных индексов (одинаковым для левых и правых индексов). Определим линейное преобразование π на $P_m^R(\mathfrak{g})$ как усреднение по перестановкам одинаковой четности левых и правых главных индексов.

Заметим, что π можно определить на всем $P'_m(\mathfrak{g})$, представив его в виде прямой суммы подпространств типа $P_m^R(\mathfrak{g})$.

ЛЕММА 3. $\pi W = W$.

Лемма 3, очевидно, следует из леммы 4.

ЛЕММА 4. Элемент W вместе с любым членом вида $se_{i\gamma}e_{j\delta}f$ (где i, j – неравные главные индексы, γ и δ – какие-то индексы, f – произведение остальных множителей) содержит член $-se_{j\gamma}e_{i\delta}f$. Аналогичное утверждение верно, если главные индексы стоят справа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию основной леммы $[\mathfrak{gl}(S), W] = 0$. В частности, $[e_{ij}, W] = 0$. Но $[e_{ij}, W] = [e_{ij}, se_{i\gamma}e_{j\delta}f + \cdots] = se_{i\gamma}e_{i\delta}f + \cdots$. В итоге член $se_{i\gamma}e_{i\delta}f$ должен сократиться с какими-то другими членами после коммутирования. Но это может случиться только в том случае, если есть $-se_{j\gamma}e_{i\delta}f$.

Очевидно, $\pi\tau = \tau\pi$.

9. ЛЕММА 5. *Всякий элемент $x \in P(\mathfrak{g})$, инвариантный относительно $\mathfrak{gl}(M)$, где $M \subset \{1, \dots, n\}$, выражается в виде многочлена от:*

- 1) $A_{ij} = e_{ij}$;
- 2) $B_{ij}(l) = \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_l} e_{i\gamma_1} e_{\gamma_2 \gamma_3} \dots e_{\gamma_l j}$, $l \geq 1$;
- 3) $C(l) = \sum_{\gamma_1, \dots, \gamma_l} e_{\gamma_1 \gamma_2} e_{\gamma_2 \gamma_3} \dots e_{\gamma_l \gamma_1}$, $l \geq 1$,

где $i, j \in \{1, \dots, n\} \setminus M$; $\gamma_1, \dots, \gamma_l \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действие $\mathrm{GL}(M)$ на $\mathfrak{g}$ можно рассматривать как действие на наборе, состоящем из одного линейного оператора, $n - m$ линейных форм, $n - m$ векторов и $(n - m)^2$ скаляров, где $m = |M|$. Лемма следует из описания инвариантов системы тензоров группы $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ (см. [4]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Разложимый инвариант* — это произведение элементов вида A_{ij} , $B_{ij}(l)$, $C(l)$, где $i, j \in S$, а $\gamma_1, \gamma_2, \dots \in T$.

По лемме 5 элемент W можно записать как линейную комбинацию разложимых инвариантов, в которых набор левых главных индексов совпадает с набором правых ($M = T$).

10. Доказательство основной леммы. Возьмем некоторый член u из выражения для W и рассмотрим разложимый инвариант, в котором u содержится. Пусть разложимый инвариант имеет вид

$$A_{i_1 j_1} \dots A_{i_s j_s} B_{p_1 q_1}(l_1) \dots B_{p_t q_t}(l_t) C(m_1) \dots C(m_z).$$

Тогда u имеет вид

$$u = (e_{i_1 j_1} \dots e_{i_s j_s}) (e_{p_1 \gamma_1^1} e_{\gamma_1^1 \gamma_2^1} \dots e_{\gamma_{l_1-1}^1 \gamma_{l_1}^1} \dots e_{p_t \gamma_t^t} e_{\gamma_t^t \gamma_1^t} \dots e_{\gamma_{l_t-1}^t \gamma_{l_t}^t}) \\ \times (e_{\delta_1^1 \delta_2^1} \dots e_{\delta_{m_1-1}^1 \delta_{m_1}^1} \dots e_{\delta_1^z \delta_2^z} \dots e_{\delta_{m_z-1}^z \delta_{m_z}^z}),$$

где $i_\lambda, j_\lambda, p_\lambda, q_\lambda$ — главные индексы, а γ_λ^μ и δ_λ^μ — простые индексы.

Ему можно однозначно поставить в соответствие член u' из этого же разложимого инварианта, который выглядит так:

$$u' = (e_{i_1 j_1} \dots e_{i_s j_s}) (e_{p_1 \gamma_{l_1}^1} e_{\gamma_{l_1}^1 \gamma_{l_1-1}^1} \dots e_{\gamma_1^1 \gamma_{l_1}^1} \dots e_{p_t \gamma_{l_t}^t} e_{\gamma_{l_t}^t \gamma_{l_t-1}^t} \dots e_{\gamma_1^t \gamma_{l_t}^t}) \\ \times (e_{\delta_1^1 \delta_{m_1}^1} \dots e_{\delta_2^1 \delta_1^1} \dots e_{\delta_1^z \delta_{m_z}^z} \dots e_{\delta_2^z \delta_1^z}).$$

Покажем, что $\pi u' = \pi \tau u$. Для этого предъявим подстановку левых и правых главных индексов, с помощью которой из u' получается τu .

Выпишем для u' последовательности левых и правых главных индексов при указанном выше порядке множителей:

$$\sigma_1 = (i_1 i_2 \dots i_s p_1 \dots p_t) \text{ для левых индексов,} \\ \sigma_2 = (j_1 j_2 \dots j_s q_1 \dots q_t) \text{ для правых индексов.}$$

Рассмотрим подстановку $\sigma := \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$. Чтобы из u' получить τu , надо к σ_1 применить σ , а к σ_2 применить σ^{-1} . Очевидно, $\mathrm{sgn}(\sigma) \mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = 1$. Таким образом, четность соблюдена и по лемме 3 равенство $\pi u' = \pi \tau u$ доказано.

Аналогично рассуждая для остальных членов этого разложимого инварианта, получаем $\pi u' = \pi \tau u$.

Применяя последнее равенство ко всем разложимым инвариантам, входящим в разложение W , получаем $\pi W = \pi \tau W$. Но $\pi W = W$ и $\pi \tau = \tau \pi$. Таким образом, $W = \pi W = \pi \tau W = \tau \pi W = \tau W$.

Список литературы

1. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Уравнения Эйлера на конечномерных группах Ли // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 2. С. 396–415.
2. Винберг Э. Б. О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной обертывающей алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 1. С. 3–25.
3. *Nazarov M., Olshanski Gr.* Bethe subalgebras in twisted yangians // Comm. Math. Phys. 1996. V. 178. P. 433–506.
4. Винберг Э. Б., Попов В. Л. Теория инвариантов // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–309.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
13.10.1999