Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Платонов, О некоторых задачах теории приближения функций на компактных однородных многообразиях, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 6, 67–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm5096>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 17:37:57

УДК 517.518.8

С. С. Платонов

О некоторых задачах теории приближения функций на компактных однородных многообразиях

Изучаются задачи теории приближения функций на произвольном компактном симметрическом пространстве M ранга один в метрике L_p , $1 \leq p \leq \infty$, обобщенными сферическими полиномами (т.е. линейными комбинациями собственных функций оператора Бельтрами–Лапласа на M). Доказаны аналоги прямых теорем Джексона для модуля гладкости произвольного порядка, построенного на основе оператора сферического усреднения. Установлена эквивалентность модуля гладкости и K -функционала, построенного по пространству соболевского типа, соответствующего дифференциальному оператору Бельтрами–Лапласа.

Библиография: 35 названий.

Ключевые слова: приближение функций, компактные симметрические пространства, многочлены Якоби, модули гладкости, теоремы Джексона.

§ 1. Введение. Формулировка основных результатов

Компактные симметрические пространства ранга один (КРОСПы по терминологии книги [1]) образуют важный класс однородных римановых многообразий, для которых имеется хорошо разработанный аппарат гармонического анализа (инвариантные дифференциальные операторы, ряды Фурье). В частности, к КРОСПам относятся n -мерные сферы S^n . Естественным образом на КРОСПах можно изучать аналоги различных классических задач гармонического анализа и теории приближения функций. Для приближения функций на КРОСПах используются обобщенные сферические полиномы (на сфере S^n они совпадают с обычными сферическими полиномами). В настоящее время имеется много работ, в которых изучаются различные задачи теории приближения функций на сфере S^n (см. [2]–[6] и ссылки в них), а также ряд работ о приближениях функций на КРОСПах (см. [7]–[16]).

В настоящей работе изучаются задачи теории приближения функций на КРОСПах в метрике L_p , $1 \leq p \leq \infty$. Доказаны аналоги прямых теорем Джексона для модуля гладкости произвольного порядка, построенного на основе оператора сферического усреднения. Установлена эквивалентность модуля гладкости и K -функционала, построенного по пространству соболевского типа, соответствующего дифференциальному оператору Бельтрами–Лапласа.

Перейдем к более подробному изложению результатов. Всюду далее M – это КРОСП. Хорошо известна полная классификация КРОСПов (см., например, [17], [18]). Их всего четыре серии (индекс n всюду означает размерность

многообразия): сферы $\mathbb{S}^n$, $n = 1, 2, \dots$, вещественные, комплексные и кватернионные проективные пространства ($P^n(\mathbb{R})$, $n = 2, 3, \dots$, $P^n(\mathbb{C})$, $n = 4, 6, \dots$, $P^n(\mathbb{H})$, $n = 8, 12, \dots$) и одно особое пространство – эллиптическая плоскость Кэли $P^{16}(Cay)$ ($n = 16$).

КРОСП M всегда является римановым многообразием. Пусть $d(x, y)$ – риманово расстояние между точками $x, y \in M$, dx – элемент объема на M , $L_p(M)$ – банахово пространство, состоящее из всех измеримых функций $f(x)$ на M (с точностью до значений на множестве меры нуль) с конечной нормой

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(M)} := \left(\int_M |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Во всех функциональных пространствах функции предполагаются комплекснозначными. Пусть $L_\infty(M) = C(M)$ – банахово пространство непрерывных функций на M с нормой

$$\|f\|_\infty = \|f\|_C := \max_{x \in M} |f(x)|,$$

$\mathcal{E}(M) = C^\infty(M)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций на M . Множество $\mathcal{E}(M)$ является топологическим векторным пространством с обычной топологией. Обозначим через $\mathcal{E}'(M)$ множество обобщенных функций на M , т.е. линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{E}(M)$. Значение функционала $f \in \mathcal{E}'(M)$ на функции $\varphi \in \mathcal{E}(M)$ обозначим через $\langle f, \varphi \rangle$. Пространства $L_p(M)$, $1 \leq p \leq \infty$, вкладываются в $\mathcal{E}'(M)$, если для $f \in L_p(M)$ и $\varphi \in \mathcal{E}(M)$ положить

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_M f(x) \varphi(x) dx. \quad (1.1)$$

Пусть $\mathcal{B}$ – дифференциальный оператор Бельтрами–Лапласа на римановом многообразии M . Обозначим через $\mathcal{B}^m$ m -ую степень оператора $\mathcal{B}$, $m \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$. Действие дифференциального оператора $\mathcal{B}$ может быть естественным образом распространено с пространства $\mathcal{E}(M)$ на пространство обобщенных функций $\mathcal{E}'(M)$, если положить

$$\langle \mathcal{B}f, \varphi \rangle := \langle f, \mathcal{B}\varphi \rangle, \quad f \in \mathcal{E}'(M), \quad \varphi \in \mathcal{E}(M). \quad (1.2)$$

В частности, действие оператора $\mathcal{B}$ определено для любой функции $f \in L_p(M)$, но при этом, вообще говоря, $\mathcal{B}f$ будет обобщенной функцией.

Известно (см. [1], [17]), что на любом КРОСПе M все геодезические линии замкнуты и имеют одинаковую длину $2L$, где

$$L = \max\{d(x, y) : x, y \in M\} \quad (1.3)$$

– диаметр многообразия M .

Пусть

$$\sigma(x; t) = \{y \in M : d(x, y) = t\}$$

– сфера на M с центром в точке x и радиуса t ($0 < t < L$). Обозначим через $d\sigma_x(y)$ $(n-1)$ -мерный элемент площади сферы $\sigma(x; t)$. Пусть $|\sigma(t)|$ – площадь

всей сферы $\sigma(x; t)$ (она не зависит от точки x). Для любой функции $f \in C(M)$ оператор сферического усреднения определим формулой

$$(S_t f)(x) := \frac{1}{|\sigma(t)|} \int_{\sigma(x; t)} f(y) d\sigma_x(y), \quad 0 < t < L. \quad (1.4)$$

Можно показать (см. § 2), что оператор S_t продолжается по непрерывности с пространства $C(M)$ до линейного ограниченного оператора на пространстве $L_p(M)$. Это продолжение будем также обозначать через S_t .

Отметим, что на римановых многообразиях (например, на сфере $\mathbb{S}^n$) оператор S_t часто используется в роли оператора сдвига для построения аналогов некоторых теорем гармонического анализа. В частности, этот оператор может служить для построения модулей непрерывности и гладкости (см., например, [3], [4], [6], [13], [19], [20]). Дискретный аналог оператора S_t рассматривался в [21].

Для любой функции $f \in L_p(M)$ разности ${}^*\Delta_h^k f(x)$ порядка k , $k \in \mathbb{N}$, с шагом h , $0 < h < L$, и модуль гладкости $\omega_k(f, \delta)_p$ порядка k определяются формулами

$${}^*\Delta_h^1 f(x) = {}^*\Delta_h f(x) := f(x) - S_h f(x), \quad (1.5)$$

$${}^*\Delta_h^k f(x) := {}^*\Delta_h({}^*\Delta_h^{k-1} f(x)), \quad k > 1,$$

$$\omega_k(f, \delta)_p := \sup_{0 < h \leq \delta} \|{}^*\Delta_h^k f\|_p, \quad \delta > 0. \quad (1.6)$$

Для любого КРОСПа M спектр оператора Бельтрами–Лапласа $\mathcal{B}$ в гильбертовом пространстве $L_2(M)$ является дискретным, действительным и неположительным. Обозначим через $(-\lambda_k)$ собственные значения оператора $\mathcal{B}$, причем упорядочим их по возрастанию модулей ($0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$), через $\mathcal{H}_k$ обозначим собственное подпространство (всегда конечномерное) оператора $\mathcal{B}$, отвечающее собственному значению $-\lambda_k$. Пусть $\mathcal{P}_\nu(M) := \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \dots + \mathcal{H}_\nu$, $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Функции из $\mathcal{P}_\nu(M)$ назовем обобщенными сферическими полиномами на M степени ν (при $M = \mathbb{S}^n$ они совпадают с обычными сферическими полиномами). Наилучшим приближением функции $f \in L_p(M)$ обобщенными сферическими полиномами степени ν в метрике L_p называется число

$$E_\nu(f)_p := \inf\{\|f - \Phi\|_p : \Phi \in \mathcal{P}_\nu(M)\}. \quad (1.7)$$

Следующая теорема является аналогом прямой теоремы Джексона в классической теории приближения функций (см. [22; гл. 5]).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть функции $f, \mathcal{B}f, \dots, \mathcal{B}^m f$, $m \in \mathbb{Z}_+$, принадлежат пространству $L_p(M)$, где $\mathcal{B}$ – оператор Бельтрами–Лапласа, $1 \leq p \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}$ – произвольное число. Тогда для любого $\nu = 1, 2, 3, \dots$ справедливо неравенство

$$E_\nu(f)_p \leq \frac{c}{\nu^{2m}} \omega_k\left(\mathcal{B}^m f, \frac{1}{\nu}\right)_p, \quad (1.8)$$

где $c = c(k, m, M) > 0$ – некоторая постоянная.

Пусть $W_p^m(M)$ – пространство Соболева порядка $m \in \mathbb{N}$, построенное по дифференциальному оператору $\mathcal{B}$, т.е.

$$W_p^m(M) := \{f \in L_p(M) : \mathcal{B}^j f \in L_p(M), j = 1, 2, \dots, m\}. \quad (1.9)$$

Определим K -функционал, построенный по пространствам $L_p(M)$ и $W_p^m(M)$:

$$K(f, t; L_p(M), W_p^m(M)) := \inf \{ \|f - g\|_p + t \|\mathcal{B}^m g\|_p : g \in W_p^m(M) \}, \quad (1.10)$$

где $f \in L_p(M)$, $t > 0$.

В следующей теореме устанавливается эквивалентность модуля гладкости и K -функционала. Эта теорема является аналогом теоремы об эквивалентности модуля гладкости и K -функционала в классической теории приближений, которая имеет многочисленные приложения в различных задачах теории приближений (см. [23], [24]).

ТЕОРЕМА 1.2. *Существуют положительные постоянные $c_1 = c_1(M, m)$ и $c_2 = c_2(M, m)$ такие, что*

$$c_1 \omega_m(f, \delta)_p \leq K(f, \delta^{2m}; L_p(M), W_p^m(M)) \leq c_2 \omega_m(f, \delta)_p,$$

где $f \in L_p(M)$, $\delta > 0$.

Доказательство теорем 1.1 и 1.2 является основной целью настоящей работы. Для сферы $\mathbb{S}^n$ теорема 1.2 доказана Г. А. Калябиным [19] при $1 < p < \infty$, теоремы 1.1 и 1.2 доказаны Х. П. Рустамовым [4] и Юан Ксу [3]. Различные частные случаи теоремы 1.1 для сферы доказывались и ранее разными авторами, обзор этих результатов см. в [4]. В настоящей статье доказательства теорем 1.1 и 1.2 приводятся для любого КРОСПа M . В частности, получено новое доказательство для сферы $\mathbb{S}^n$. Всюду будем предполагать, что $n = \dim M \geq 2$, так как при $n = 1$ (тогда $M = \mathbb{S}^1$) теоремы 1.1 и 1.2 хорошо известны.

В § 2 приведены необходимые для дальнейшего сведения из гармонического анализа на КРОСПах: сферические функции, свертка функций, преобразование Фурье на КРОСПах. Основным элементом при доказательстве теорем 1.1 и 1.2 являются зональные сферические функции $\varphi_m(x)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, на КРОСПе M , которые выражаются через нормированные полиномы Якоби $R_m^{(\alpha, \beta)}(z)$, где (α, β) – некоторые параметры, зависящие от M . В § 3 рассматриваются различные свойства многочленов Якоби $R_m^{(\alpha, \beta)}(z)$ и функций $R_\mu^{(\alpha, \beta)}(z)$, получаемых продолжением многочленов Якоби с $m \in \mathbb{Z}_+$ на произвольные действительные значения параметра $\mu > 0$. Доказаны различные оценки для функций $R_\mu^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)$ и их производных по параметру μ . В § 4 рассматриваются свойства модуля гладкости $\omega_k(f, \delta)_p$ и доказываются теоремы 1.1 и 1.2. В качестве следствия получен аналог неравенства Никольского–Стечкина для обобщенных сферических полиномов на КРОСПах.

Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания.

§ 2. Гармонический анализ на КРОСПах

В этом параграфе приведены необходимые сведения из гармонического анализа на КРОСПах (см. [25]–[28]) в удобной для дальнейшего форме.

Пусть M – произвольный КРОСП, $n = \dim M$, L – диаметр многообразия M . Риманова метрика на M определена с точностью до умножения на положительное число. Для удобства нормируем риманову метрику на M так, чтобы $L = \pi$.

Пусть $\rho(t) = |\sigma(t)|$, $0 < t < \pi$, – полная площадь $((n-1)$ -мерная) сферы радиуса t на M . Известно, что

$$\rho(t) = C_M \left(\sin \frac{t}{2} \right)^a (\sin t)^b, \quad (2.1)$$

где C_M – константа, а числа a и b принимают следующие значения для различных КРОСПов:

$$\begin{aligned} M = \mathbb{S}^n : & \quad a = 0, \quad b = n - 1; \\ M = P^n(\mathbb{R}) : & \quad a = n - 1, \quad b = 0; \\ M = P^n(\mathbb{C}) : & \quad a = n - 2, \quad b = 1; \\ M = P^n(\mathbb{H}) : & \quad a = n - 4, \quad b = 3; \\ M = P^{16}(Cay) : & \quad a = 8, \quad b = 7. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отметим, что $n = \dim M = a + b + 1$. Для постоянной C_M можно выписать и явную формулу: $C_M = 2^a \Omega_n$, где

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

– площадь единичной сферы в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть G – группа изометрий многообразия M . Группа G компактная и естественным образом действует на M , причем это действие транзитивно. Пусть o – фиксированная точка многообразия M , K – стационарная подгруппа точки o в группе G . Через dg и dk обозначим элементы нормированных мер Хаара на группах G и K соответственно (мера Хаара называется *нормированной*, если мера всей группы равна единице). Так как группы G и K компактные, то меры Хаара dg и dk инвариантны относительно левых и правых сдвигов, а также относительно преобразования инверсии $g \mapsto g^{-1}$. Из единственности (с точностью до множителя) G -инвариантной меры на многообразии M следует, что для любой функции $f \in L_1(M)$

$$\int_M f(x) dx = A \int_G f(go) dg, \quad (2.3)$$

где $A = \int_M dx$ – полный объем многообразия M .

Будем называть функцию $f(x)$ на M *зональной*, если она зависит только от расстояния $d(x, o)$. Для любой зональной функции $f(x)$ определим функцию $f^*(t)$, $t \in [0, \pi]$, условием

$$f(x) = f^*(d(x, o)), \quad x \in M. \quad (2.4)$$

Множество всех зональных функций обозначим через $\mathcal{Z}(M)$. Будем также использовать следующие обозначения

$$\begin{aligned} C_Z(M) &:= C(M) \cap \mathcal{Z}(M), & L_p^Z(M) &:= L_p(M) \cap \mathcal{Z}(M), \\ \mathcal{E}_Z(M) &:= \mathcal{E}(M) \cap \mathcal{Z}(M). \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{E}'_Z(M)$ – множество зональных обобщенных функций, т.е. линейных непрерывных функционалов на пространстве $\mathcal{E}_Z(M)$.

Если $\varphi(x) \in L_1^Z(M)$, то справедливо равенство

$$\int_M \varphi(x) dx = \int_0^\pi \varphi^*(t) \rho(t) dt, \quad (2.5)$$

где функция $\rho(t)$ задается формулой (2.1).

Так как G – группа изометрий многообразия M , то для любого элемента $g \in G$ справедливо равенство $d(go, o) = d(o, g^{-1}o)$. Поэтому для любой зональной функции $f(x)$ выполняется соотношение

$$f(go) = f(g^{-1}o), \quad g \in G. \quad (2.6)$$

Отметим еще, что функция $f(x)$ является зональной только тогда, когда $f(kx) = f(x)$ для любых $k \in K$, $x \in M$.

Для любых функций $f(x) \in L_1(M)$, $\varphi(x) \in L_1^Z(M)$ определим свертку

$$(f * \varphi)(x) := A \int_G f(go) \varphi(g^{-1}x) dg, \quad x \in M, \quad (2.7)$$

где A – коэффициент из формулы (2.3). Проверим, что при $f \in L_1(M)$, $\varphi \in L_1^Z(M)$ справедливо неравенство

$$\|f * \varphi\|_1 \leq \|f\|_1 \|\varphi\|_1 \quad (2.8)$$

и, в частности, $f * \varphi \in L_1(M)$.

Используя инвариантность меры dx и формулу (2.3), получаем

$$\begin{aligned} \|f * \varphi\|_1 &\leq A \int_X \int_G |f(go)| |\varphi(g^{-1}x)| dg dx = A \int_G |f(go)| \left(\int_X |\varphi(g^{-1}x)| dx \right) dg \\ &= \|\varphi\|_1 A \int_G |f(go)| dg = \|\varphi\|_1 \|f\|_1, \end{aligned}$$

что доказывает неравенство (2.8).

Легко проверить следующие свойства свертки:

- 1) если $\varphi, \psi \in L_1^Z(M)$, то $\varphi * \psi \in L_1^Z(M)$;
- 2) ассоциативность свертки: для любых функций $f \in L_1(M)$, $\varphi, \psi \in L_1^Z(M)$ справедливо равенство

$$(f * \varphi) * \psi = f * (\varphi * \psi); \quad (2.9)$$

- 3) коммутативность свертки зональных функций: если $\varphi, \psi \in L_1^Z(M)$, то

$$\varphi * \psi = \psi * \varphi;$$

- 4) если $f \in L_p(M)$, $1 \leq p \leq \infty$, $\varphi \in L_1^Z(M)$, то $f * \varphi \in L_p(M)$ и справедливо неравенство

$$\|f * \varphi\|_p \leq \|f\|_p \|\varphi\|_1. \quad (2.10)$$

Пусть $x, y \in M$, $x = ho$, $y = go$, $h, g \in G$. Используя равенства (2.6) и (2.3), преобразуем правую часть формулы (2.7):

$$A \int_G f(go) \varphi(g^{-1}ho) dg = A \int_G f(go) \varphi(h^{-1}go) dg = \int_M f(y) \varphi(h^{-1}y) dy.$$

Следовательно, свертку $f * \varphi$ можно также записать в виде

$$f * \varphi(x) = \int_M f(y) \varphi(h^{-1}y) dy, \quad (2.11)$$

где $x = ho$, $h \in G$.

Пользуясь (2.11), можно распространить свертку на обобщенные функции. Для любой функции $\varphi(x)$ на M и для любого $h \in G$ введем обозначение $\varphi^h(x) := \varphi(h^{-1}x)$. Если $f \in \mathcal{E}'(M)$, $\varphi \in \mathcal{E}_Z(M)$, то полагаем

$$f * \varphi(x) := \langle f, \varphi^h \rangle, \quad (2.12)$$

где $x = ho$. Легко видеть, что $f * \varphi \in \mathcal{E}(M)$ и для $f \in \mathcal{E}'(M)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{E}_Z(M)$ остается справедливым равенство (2.9). Отметим также, что

$$\langle f * \varphi, \psi \rangle = \langle f, \psi * \varphi \rangle \quad (2.13)$$

для любых функций $f \in \mathcal{E}'(M)$, $\varphi \in \mathcal{E}_Z(M)$, $\psi \in \mathcal{E}(M)$.

ЛЕММА 2.1. Пусть $f \in \mathcal{E}'(M)$, $\varphi \in \mathcal{E}_Z(M)$, $\mathcal{B}$ – оператор Бельтрами–Лапласа. Справедливо равенство

$$\mathcal{B}(f * \varphi) = (\mathcal{B}f) * \varphi = f * (\mathcal{B}\varphi). \quad (2.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi \in \mathcal{E}(M)$. Пользуясь тем, что оператор $\mathcal{B}$ перестановочен с действием группы G , получим

$$\mathcal{B}(\psi * \varphi)(x) = \mathcal{B} \left(\int_G \psi(go) \varphi(g^{-1}x) dg \right) = \int_G \psi(go) (\mathcal{B}\varphi)(g^{-1}x) dg = (\psi * \mathcal{B}\varphi)(x).$$

Следовательно,

$$\mathcal{B}(\psi * \varphi) = \psi * (\mathcal{B}\varphi). \quad (2.15)$$

Из определения действия оператора $\mathcal{B}$ на обобщенные функции (см. (1.2)) и из свойств (2.13) и (2.15) получаем, что

$$\langle (\mathcal{B}f * \varphi), \psi \rangle = \langle \mathcal{B}f, \psi * \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{B}(\psi * \varphi) \rangle = \langle f, \psi * (\mathcal{B}\varphi) \rangle = \langle f * \mathcal{B}\varphi, \psi \rangle. \quad (2.16)$$

Так как ψ – произвольная функция из $\mathcal{E}(M)$, то из (2.16) следует, что

$$(\mathcal{B}f) * \varphi = f * (\mathcal{B}\varphi) \quad (2.17)$$

для любых $f \in \mathcal{E}'(M)$, $\varphi \in \mathcal{E}_Z(M)$.

Используя (2.17) и определение действия оператора $\mathcal{B}$, получим

$$\langle \mathcal{B}(f * \varphi), \psi \rangle = \langle f * \varphi, \mathcal{B}\psi \rangle = \langle f, (\mathcal{B}\psi) * \varphi \rangle = \langle f, \psi * (\mathcal{B}\varphi) \rangle = \langle f * (\mathcal{B}\varphi), \psi \rangle. \quad (2.18)$$

Так как ψ – произвольная функция из $\mathcal{E}(M)$, то из (2.18) следует, что

$$\mathcal{B}(f * \varphi) = f * (\mathcal{B}\varphi). \quad (2.19)$$

Объединяя (2.17) и (2.18), получаем равенство (2.14).

Для любой функции $f \in C(M)$ оператор сферического усреднения $S_t f$, $t \in (0, \pi)$, определен формулой (1.4).

ЛЕММА 2.2. Пусть $f \in C(M)$, g и u – произвольные элементы из группы G , такие, что $go = x$, $d(uo, o) = t$. Тогда

$$S_t f(x) = \int_K f(gkuo) dk. \quad (2.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Временно обозначим

$$\tilde{S}_u f(x) := \int_K f(gkuo) dk, \quad x = go.$$

Пусть $f^h(x) := f(h^{-1}x)$ для любой функции $f(x)$ на M и для любого $h \in G$. Очевидно, что

$$(S_t f)^h = S_t(f^h), \quad (\tilde{S}_u)^h = \tilde{S}_u(f^h),$$

поэтому для доказательства того, что

$$S_t f(x) = \tilde{S}_u f(x) \quad \forall f \in C(M), \quad \forall x \in M, \quad (2.21)$$

достаточно показать, что

$$S_t f(o) = \tilde{S}_u f(o) \quad \forall f \in C(M). \quad (2.22)$$

Пусть $\sigma(o; t)$ – сфера на M с центром в точке o и радиуса t . Любой КРОСП является двухточечным однородным пространством, т.е. группа K транзитивно действует на сфере $\sigma(o; t)$. Из единственности (с точностью до умножения на положительное число) инвариантной меры на однородном многообразии следует, что

$$\int_{\sigma(o; t)} f(y) d\sigma_o(y) = C \int_K f(kuo) dk \quad \forall f \in C(M), \quad (2.23)$$

где C – некоторая постоянная. Положив в (2.23) $f(x) \equiv 1$, получим, что $C = |\sigma(t)|$, откуда следует равенство (2.22), что завершает доказательство.

Пусть $1 \leq p < \infty$. Из (2.20), используя неравенство Гёльдера и равенство $\int_K 1 \cdot dk = 1$, получим

$$|S_t f(x)| \leq \int_K |f(gkuo)| dk \leq \left(\int_K |f(gkuo)|^p dk \right)^{1/p}. \quad (2.24)$$

Отсюда в силу (2.3) и инвариантности меры Хаара на группе G имеем

$$\|S_t f\|_p^p \leq A \int_G \left(\int_K |f(gkuo)|^p dk \right) dg = \int_K \left(A \int_G |f(gkuo)|^p dg \right) dk = \|f\|_p^p.$$

Таким образом,

$$\|S_t f\|_p \leq \|f\|_p. \quad (2.25)$$

Легко видеть, что неравенство (2.25) справедливо также и при $p = \infty$.

Из (2.16) следует, что оператор S_t продолжается по непрерывности с подпространства $C(M) \subset L_p(M)$ на все банахово пространство $L_p(M)$, причем для продолженного оператора также выполняется неравенство (2.25).

Проверим, что для любой функции $f(x) \in L_p(M)$, $1 \leq p \leq \infty$, отображение $t \mapsto S_t f$ из интервала $(0, \pi)$ в пространство $L_p(M)$ непрерывно, т.е.

$$\|S_{t+\delta}f - S_t f\|_p \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.26)$$

При $p = \infty$ функция $f(x)$ равномерно непрерывна на M и из определения оператора S_t (см. (1.4)) легко видеть, что

$$\|S_{t+\delta}f - S_t f\|_\infty \rightarrow 0, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (2.27)$$

Пусть $1 \leq p < \infty$. В пространстве $L_p(M)$ всюду плотное подмножество образуют непрерывные функции. Если $f \in C(M)$, то соотношение (2.26) следует из (2.27). В общем случае соотношение (2.26) легко получить, приближая f (по норме $\|\cdot\|_p$) непрерывными функциями.

Оператор S_t можно продолжить и на обобщенные функции. Из формулы (2.20) для оператора S_t следует, что S_t является линейным непрерывным оператором в пространстве $\mathcal{E}(M)$. Далее заметим, что

$$\langle S_t f, \varphi \rangle = \langle f, S_t \varphi \rangle \quad (2.28)$$

для любых функций $f, \varphi \in C(M)$, где $\langle f, \varphi \rangle$ определяется формулой (1.1). Действительно, пользуясь (2.3) и (2.20), получим

$$\begin{aligned} \langle S_t f, \varphi \rangle &= A \int_G \int_K f(gkuo) \varphi(go) dk dg = A \int_K \left(\int_G f(gkuo) \varphi(go) dg \right) dk \\ &= A \int_K \left(\int_G f(gkuk^{-1}o) \varphi(go) dg \right) dk = A \int_K \left(\int_G f(go) \varphi(gku^{-1}k^{-1}o) dg \right) dk \\ &= A \int_G \left(f(go) \int_K \varphi(gku^{-1}o) dk \right) dg = \langle f, S_t \varphi \rangle, \end{aligned}$$

где $t = d(uo, o)$. При этом использовано то, что $ko = o$ для всех $k \in K$, инвариантность меры dg , а также то, что $d(u^{-1}o, o) = d(uo, o)$.

На обобщенные функции действие оператора S_t распространим по формуле

$$\langle S_t f, \varphi \rangle := \langle f, S_t \varphi \rangle, \quad f \in \mathcal{E}'(M), \quad \varphi \in \mathcal{E}(M). \quad (2.29)$$

ЛЕММА 2.3. Пусть $\varphi(x)$ – непрерывная зональная функция. Для любых $g, h \in G$ справедливо равенство

$$\int_K \varphi(gkho) dk = \int_K \varphi(hkgo) dk. \quad (2.30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $d(go, o) = d(g^{-1}o, o)$, то точки go и $g^{-1}o$ лежат на одной сфере с центром в точке o . Группа K транзитивно действует на этой сфере, поэтому найдется элемент $\delta_1 \in K$ такой, что

$$g^{-1}o = \delta_1 go, \quad (2.31)$$

а так как K – стационарная подгруппа точки o , то из (2.31) следует, что существует элемент $\delta_2 \in K$, такой, что $g^{-1} = \delta_1 g \delta_2$. Аналогично, $h^{-1} = \delta_3 h \delta_4$, где δ_3, δ_4 – некоторые элементы из K .

Используя тождества

$$\varphi(g^{-1}o) = \varphi(go), \quad \varphi(k_1 g k_2 o) = \varphi(go) \quad \forall g \in G, \quad \forall k_1, k_2 \in K \quad (2.32)$$

и инвариантность меры dk , получим

$$\begin{aligned} \int_K \varphi(gkh o) dk &= \int_K \varphi(h^{-1}k^{-1}g^{-1}o) dk = \int_K \varphi(h^{-1}kg^{-1}o) dk \\ &= \int_K \varphi(\delta_3 h \delta_4 k \delta_1 g \delta_2 o) dk = \int_K \varphi(hkg o) dk, \end{aligned}$$

что доказывает (2.30).

ЛЕММА 2.4. Для любых функций $f \in L_1(M)$, $\varphi \in L_1^Z(M)$ (или $f \in \mathcal{E}'(M)$, $\varphi \in \mathcal{E}_Z(M)$) справедливо равенство

$$S_t(f * \varphi) = (S_t f) * \varphi = f * (S_t \varphi). \quad (2.33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как подмножество $C(M)$ всюду плотно в банаховом пространстве $L_1(M)$ и $C_Z(M)$ всюду плотно в $L_1^Z(M)$, то равенство (2.33) достаточно доказать для $f \in C(M)$, $\varphi \in C_Z(M)$.

Равенство $S_t(f * \varphi) = f * (S_t \varphi)$ получается непосредственной проверкой на основе формул (2.20) и (2.11). Для доказательства равенства $S_t(f * \varphi) = (S_t f) * \varphi$ заметим, что

$$\begin{aligned} S_t(f * \varphi)(x) &= A \int_K \int_G f(go) \varphi(g^{-1} h k u o) dg dk \\ &= A \int_G f(go) \left(\int_K \varphi(g^{-1} h k u o) dk \right) dg, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где $h, u \in G$, $ho = x$, $d(uo, o) = t$. С другой стороны, используя инвариантность мер dg и dk , получим

$$\begin{aligned} ((S_t f) * \varphi)(x) &= A \int_G \left(\int_K f(gku o) \varphi(g^{-1} ho) dk \right) dg \\ &= A \int_K \left(\int_G f(gkuk^{-1} o) \varphi(g^{-1} ho) dg \right) dk \\ &= A \int_K \left(\int_G f(go) \varphi(kuk^{-1} g^{-1} ho) dg \right) dk \\ &= A \int_G f(go) \left(\int_K \varphi(ukg^{-1} ho) dk \right) dg. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Из леммы 2.3 следует, что правые части в (2.34) и (2.35) совпадают. Поэтому $S_t(f * \varphi) = (S_t f) * \varphi$.

Случай, когда $f \in \mathcal{E}'(M)$, $\varphi \in \mathcal{E}_Z(M)$, рассматривается аналогично.

Пространство $L_2(M)$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2) := \int_M f_1(x) \overline{f_2(x)} dx, \quad f_1, f_2 \in L_2(M). \quad (2.36)$$

Пусть $\mathcal{B}$ – оператор Бельтрами–Лапласа на M , $(-\lambda_j)$ – собственные значения оператора $\mathcal{B}$ ($j \in \mathbb{Z}_+$, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$), $\mathcal{H}_j$ – собственное подпространство (всегда конечномерное) оператора $\mathcal{B}$, соответствующее собственному значению $(-\lambda_j)$. В явном виде λ_j задается формулой

$$\lambda_j = j \left(j + \frac{a}{2} + b \right), \quad (2.37)$$

где a и b – числа из формулы (2.1).

Гильбертово пространство $L_2(M)$ раскладывается в ортогональную прямую сумму подпространств $\mathcal{H}_j$, т.е.

$$L_2(M) = \bigoplus_{j=0}^{\infty} \mathcal{H}_j.$$

Известно, что в каждом подпространстве $\mathcal{H}_j$ существует единственная зональная функция $\varphi_j(x)$, нормированная условием $\varphi_j(o) = 1$. Функция $\varphi_j(x)$ называется сферической функцией, соответствующей собственному значению $(-\lambda_j)$. Отметим следующее важное свойство сферических функций (см., например, [25; гл. IV, предложение 2.2]):

$$\int_K \varphi_j(gkh) dk = \varphi_j(g) \varphi_j(h) \quad \forall g, h \in G. \quad (2.38)$$

Пусть в соответствии с (2.4) $\varphi_j^*(t)$, $t \in [0, \pi]$, – функция, определяемая из условия $\varphi_j(x) = \varphi_j^*(d(x, o))$, $x \in M$. Известна явная формула для функции $\varphi_j^*(t)$ (см. [25; гл. V]):

$$\varphi_j^*(t) = \frac{j! \Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(j + \alpha + 1)} P_j^{(\alpha, \beta)}(\cos t), \quad (2.39)$$

где $P_j^{(\alpha, \beta)}(z)$ – полином Якоби степени j , $\alpha = (a + b - 1)/2$, $\beta = (b - 1)/2$, $\Gamma(z)$ – Γ -функция.

Ортогональная проекция гильбертова пространства $L_2(M)$ на подпространство $\mathcal{H}_j$ задается формулой

$$\Lambda_j: f(x) \mapsto \widehat{f}_j(x) = \omega_j(f * \varphi_j)(x), \quad \omega_j := \|\varphi_j\|_2^{-2}. \quad (2.40)$$

Из (2.5) следует, что

$$\|\varphi\|_2^2 = \int_0^\pi |\varphi_j^*(t)|^2 \rho(t) dt. \quad (2.41)$$

Для любой обобщенной функции $f \in \mathcal{E}'(M)$ определим семейство функций

$$\widehat{f}_j(x) := \omega_j(f * \varphi_j) \in \mathcal{H}_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.42)$$

Будем называть последовательность $\{\widehat{f_j}(x)\}$ преобразованием Фурье функции f и использовать обозначение $\mathcal{F}(f) := \{f_j(x)\}$ (будем также иногда писать $\mathcal{F}(f)_j$ вместо $\widehat{f_j}$). Функция f однозначно восстанавливается по своему преобразованию Фурье $\mathcal{F}(f)$, так как последовательность

$$S_N(f; x) := \sum_{j=0}^N \widehat{f_j}(x)$$

сходится к f при $N \rightarrow \infty$ в слабой топологии пространства $\mathcal{E}'(M)$. В частности, преобразование Фурье определено для любой функции $f \in L_p(M)$, $1 \leq p \leq \infty$. Если $f \in L_2(M)$, то справедливо равенство Парсеваля

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \|\widehat{f_j}\|_2^2.$$

Если φ – зональная обобщенная функция (т.е. $\varphi \in \mathcal{E}'_Z(M)$), то функция $\widehat{\varphi_j}(x)$ тоже будет зональной функцией, а так как в пространстве $\mathcal{H}_j$ есть единственная с точностью до множителя зональная функция – сферическая функция $\varphi_j(x)$, то

$$\widehat{\varphi_j}(x) = a_j \omega_j \varphi_j(x), \quad (2.43)$$

где a_j – некоторое комплексное число. Последовательность чисел $\{a_j\}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, будем называть *зональным преобразованием Фурье* функции φ и обозначать через $\mathcal{F}_Z(\varphi)$, т.е. $\mathcal{F}_Z(\varphi) := \{a_j\}$, где числа a_j определяются из (2.43) или, что эквивалентно, из условия

$$\varphi * \varphi_j = a_j \varphi_j. \quad (2.44)$$

Приведем необходимые свойства преобразований Фурье.

1) Если $f \in L_p(M)$, $\varphi \in L_1^Z(M)$ (или $f \in \mathcal{E}'(M)$, $\varphi \in \mathcal{E}_Z(M)$), $\mathcal{F}(f) = \{\widehat{f_j}\}$, $\mathcal{F}_Z(\varphi) = \{a_j\}$, то

$$\mathcal{F}(f * \varphi) = \{a_j \widehat{f_j}\}. \quad (2.45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя свойства (2.9) и (2.44), получим, что

$$(\widehat{f * \varphi})_j = \omega_j(f * \varphi) * \varphi_j = \omega_j f * (\varphi * \varphi_j) = \omega_j f * (a_j \varphi_j) = a_j(\omega_j f * \varphi_j) = a_j \widehat{f_j}.$$

2) Если $f \in \mathcal{E}'(M)$, $\mathcal{B}$ – оператор Бельтрами–Лапласа, то

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}f) = \{(-\lambda_j) \widehat{f_j}\}. \quad (2.46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (2.14), получим

$$(\widehat{\mathcal{B}f})_j = \omega_j(\mathcal{B}f * \varphi_j) = \omega_j f * (\mathcal{B}\varphi_j) = (-\lambda_j) \omega_j f * \varphi_j = (-\lambda_j) \widehat{f_j}.$$

3) Если $f \in \mathcal{E}'(M)$, S_t – оператор сферического усреднения, то

$$\mathcal{F}(S_t f) = \{\varphi_j^*(t) \widehat{f_j}\}. \quad (2.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя свойства (2.38) и (2.20), получаем, что

$$(S_t \varphi_j)(x) = \int_K \varphi_j(gkuo) dk = \varphi_j(go) \varphi_j(uo) = \varphi_j^*(t) \varphi_j(x), \quad (2.48)$$

где $x = go$, $t = d(uo, o)$. Далее, пользуясь (2.48) и (2.33), получим

$$\widehat{(S_t f)}_j = \omega_j(S_t f) * \varphi_j = \omega_j f * (S_t \varphi_j) = \varphi_j^*(t) \omega_j(f * \varphi_j) = \varphi_j^*(t) \widehat{f}_j.$$

§ 3. Вспомогательные результаты

В этом параграфе будут рассмотрены некоторые вспомогательные результаты, связанные с ортогональными многочленами Якоби.

Пусть α и β — произвольные действительные числа, удовлетворяющие условиям $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ и $\alpha \neq -1/2$. Пусть $P_m^{(\alpha, \beta)}(z)$ — многочлен Якоби степени m (см. [29], [30]). Известно (см. [29; гл. IV]), что

$$\max_{z \in [-1, 1]} P_m^{(\alpha, \beta)}(z) = P_m^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{m + \alpha}{m} := \frac{\Gamma(\alpha + m + 1)}{m! \Gamma(\alpha + 1)}. \quad (3.1)$$

Введем следующие обозначения:

$$R_m^{(\alpha, \beta)}(z) := \frac{P_m^{(\alpha, \beta)}(z)}{P_m^{(\alpha, \beta)}(1)}, \quad (3.2)$$

$$\rho^{(\alpha, \beta)}(\theta) := C_{\alpha, \beta} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2\beta+1}, \quad (3.3)$$

где

$$C_{\alpha, \beta} := \frac{2^{2\alpha-2\beta+1} \pi^{\alpha+1/2}}{\Gamma(\alpha + 1/2)}, \quad \omega_m^{(\alpha, \beta)} := \left(\int_0^\pi (R_m^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta))^2 \rho^{(\alpha, \beta)}(\theta) d\theta \right)^{-1}. \quad (3.4)$$

Используя известные формулы для интегралов от многочленов Якоби (см., например, [31; п. 7.39]), легко получить, что

$$\omega_m^{(\alpha, \beta)} = \frac{(2m + \alpha + \beta + 1) \Gamma(m + \alpha + \beta + 1) \Gamma(m + \alpha + 1)}{\Gamma(m + 1) \Gamma(m + \beta + 1) \Gamma(\alpha + 1) 2^{2\beta+2} \pi^{\alpha+1}}. \quad (3.5)$$

При $m \rightarrow \infty$ справедливо следующее асимптотическое равенство:

$$\omega_m^{(\alpha, \beta)} \asymp m^{2\alpha+1}, \quad (3.6)$$

где, как обычно, $A_m \asymp B_m$, если $A_m, B_m > 0$ и $c_1 B_m \leq A_m \leq c_2 B_m$ для некоторых постоянных $c_1 > 0$, $c_2 > 0$.

Многочлены $R_m^{(\alpha, \beta)}(z)$ часто называют нормализованными многочленами Якоби. В дальнейшем все необходимые формулы для многочленов Якоби из книг [29], [30] будут записываться через нормализованные многочлены Якоби.

Обозначим через $L_p^{(\alpha, \beta)}$, $1 \leq p < \infty$, банахово пространство, состоящее из всех измеримых комплекснозначных функций $f(\theta)$ на отрезке $[0, \pi]$ с конечной нормой

$$\|f\|_p^{(\alpha, \beta)} := \left(\int_0^\pi |f(\theta)|^p \rho^{(\alpha, \beta)}(\theta) d\theta \right)^{1/p}. \quad (3.7)$$

При $p = \infty$ будем считать, что $L_\infty^{(\alpha, \beta)} = C[0, \pi]$ состоит из всех непрерывных на отрезке $[0, \pi]$ функций с нормой

$$\|f\|_\infty^{(\alpha, \beta)} := \max_{0 \leq \theta \leq \pi} |f(\theta)|. \quad (3.8)$$

Функции $R_m^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, образуют полную ортогональную систему в гильбертовом пространстве $L_2^{(\alpha, \beta)}$.

Отметим, что в частном случае, когда $\alpha = (a + b - 1)/2$, $\beta = (b - 1)/2$, а числа a и b соответствуют КРОСПу M (см. (2.2)), справедливы равенства $\rho^{(\alpha, \beta)}(\theta) = \rho(\theta)$ (см. (2.1)) и $\omega_m^{(\alpha, \beta)} = \omega_m$ (см. (2.40), (2.41)). Банахово пространство $L_p^{(\alpha, \beta)}$ изоморфно банахову пространству зональных функций $L_p^Z(M)$. Изоморфизм задается формулой

$$\Lambda : f(x) \mapsto f^*(\theta), \quad (3.9)$$

где $f(x) \in L_p^Z(M)$, а $f^*(\theta)$ – функция, определяемая условием (2.4).

С учетом равенства (2.39) обозначим

$$\varphi_m^*(\theta) := R_m^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \quad (3.10)$$

для любых α и β , не обязательно соответствующих какому-нибудь КРОСПу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $l = [\alpha] + 2$ ($[\alpha]$ – целая часть числа α), и пусть $\gamma(t, h)$ – комплекснозначная функция, определенная на прямоугольнике $(0, +\infty) \times (0, h_0) \subset \mathbb{R}^2$, $h_0 > 0$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) по переменной t существуют непрерывные частные производные

$$\partial_t^k \gamma(t, h) = \frac{\partial^k \gamma}{\partial t^k}(t, h)$$

до порядка $(l + 1)$ включительно;

2) для любых чисел $k = 0, 1, \dots, (l + 1)$ и $r = 0, 1, \dots, (l + 2)$ существует число $c(k, r) > 0$ такое, что справедливо неравенство

$$|(ht)^r \partial_t^k \gamma(t, h)| \leq c(k, r) h^k, \quad t \in (0, +\infty), \quad h \in (0, h_0). \quad (3.11)$$

Тогда семейство функций

$$\Phi_h(\theta) := \sum_{m=0}^{\infty} \gamma(m, h) \omega_m^{(\alpha, \beta)} \varphi_m^*(\theta) \quad (3.12)$$

ограничено в пространстве $L_1^{(\alpha, \beta)}$, т.е. найдется число $C = C(\gamma, \alpha, \beta, h_0) > 0$ такое, что при любом $h \in (0, h_0)$

$$\|\Phi_h\|_1^{(\alpha, \beta)} \leq C. \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через $c_1, c_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, которые могут зависеть от $\alpha, \beta, \gamma, h_0$, но не зависят от t и h . Для любой последовательности $\{a_m\}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, через $\Delta^k a_m$ обозначим обычную разность

k -го порядка, т.е. $\Delta^1 a_m = \Delta a_m := a_{m+1} - a_m$, $\Delta^k a_m := \Delta^{k-1} a_{m+1} - \Delta^{k-1} a_m$, $k \geq 2$.

Из известных асимптотических формул для интегралов от многочленов Якоби (см. [29; теорема 7.34]) следует, что

$$\|\varphi_m^*\|_1^{(\alpha, \beta)} = \|R_m^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)\|_1^{(\alpha, \beta)} \asymp m^{-\alpha-1/2}. \quad (3.14)$$

Из асимптотик (3.14), (3.6) и из неравенства

$$|\gamma(m, h)| \leq \frac{c_1}{(hm)^{l+2}} \quad (3.15)$$

(которое получается из (3.11) при $k = 0$ и $r = l + 2$) получаем, что ряд в правой части (3.12) сходится по норме пространства $L_1^{(\alpha, \beta)}$ при любом $h \in (0, h_0)$.

С помощью $(k + 1)$ -кратного преобразования Абеля формулу (3.12) можно преобразовать к виду

$$\Phi_h(\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (\Delta^{k+1} \gamma(m, h)) A_m^k \sigma_m^k(\theta), \quad (3.16)$$

где $\Delta^{k+1} \gamma(m, h)$ – разность порядка $(k + 1)$ по переменной m , $\sigma_m^k(\theta)$ – сумма Чезаро порядка k для ряда

$$\sum_{m=0}^{\infty} \omega_m^{(\alpha, \beta)} \varphi_m^*(\theta), \quad (3.17)$$

$A_m^k = \binom{m+k}{k}$ – биномиальный коэффициент.

Известно (см. [29; п. 9.41]), что при $k > \alpha + 1/2$ суммы Чезаро $\sigma_m^k(\theta)$ ряда (3.17) ограничены по норме пространства $L_1^{(\alpha, \beta)}$. Возьмем $k = l$. Тогда

$$\|\sigma_m^l(\theta)\|_1^{(\alpha, \beta)} \leq c_2, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.18)$$

Из (3.16) и (3.18) следует, что

$$\|\Phi_h\|_1^{(\alpha, \beta)} \leq c_2 \sum_{m=0}^{\infty} |\Delta^{l+1} \gamma(m, h)| A_m^l. \quad (3.19)$$

Разность $\Delta^{l+1} \gamma(m, h)$ можно записать в виде $(l + 1)$ -кратного интеграла

$$\Delta^{l+1} \gamma(m, h) = (-1)^{l+1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \partial_t^{l+1} \gamma(m + s_0 + \cdots + s_l, h) ds_0 \cdots ds_l. \quad (3.20)$$

Из (3.20) и (3.11) следует, что при $r = 0, 1, \dots, (l + 2)$ справедлива оценка

$$|\Delta^{l+1} \gamma(m, h)| \leq \frac{c(l + 1, r)}{(hm)^r} h^{l+1}. \quad (3.21)$$

Из асимптотики для чисел A_m^l имеем

$$A_m^l \leq c_3 m^l,$$

поэтому из (3.21) получаем оценку

$$|\Delta^{l+1}\gamma(m, h)|A_m^l \leq \frac{c(l+1, r)}{(hm)^{r-l}}h. \quad (3.22)$$

Разобьем сумму в правой части (3.19) на два слагаемых:

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\Delta^{l+1}\gamma(m, h)|A_m^l = \sum_{m < 1/h} |\Delta^{l+1}\gamma(m, h)|A_m^l + \sum_{m \geq 1/h} |\Delta^{l+1}\gamma(m, h)|A_m^l. \quad (3.23)$$

Оценим каждое слагаемое. При оценке первого слагаемого используем формулу (3.21) при $r = 0$. Получаем

$$\sum_{m < 1/h} |\Delta^{l+1}\gamma(m, h)|A_m^l \leq \sum_{m < 1/h} c_4 h^{l+1} c_3 m^l = c_5 \sum_{m < 1/h} (mh)^l h \leq c_5 \frac{1}{h} h = c_5. \quad (3.24)$$

Для оценки второго слагаемого в (3.23), используя неравенство (3.22) при $r = l + 2$, получаем

$$\sum_{m \geq 1/h} |\Delta^{l+1}\gamma(m, h)|A_m^l \leq \sum_{m \geq 1/h} \frac{1}{(hm)^2} h. \quad (3.25)$$

Пусть m_0 – наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $m_0 \geq 1/h$, и $x_i := (m_0 + i)h$, $i \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $h = x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ и справедливо неравенство

$$\sum_{m \geq 1/h} \frac{1}{(hm)^2} h = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{x_i^2} \Delta x_i \leq c_7 \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = c_7. \quad (3.26)$$

Из (3.25) и (3.26) следует, что

$$\sum_{m \geq 1/h} |\Delta^{l+1}\gamma(m, h)|A_m^l \leq c_8. \quad (3.27)$$

Из неравенств (3.19), (3.24) и (3.27) получаем неравенство (3.13).

Многочлены Якоби можно выразить через гипергеометрическую функцию по формуле (см. [30; т. II])

$$R_m^{(\alpha, \beta)}(z) = F\left(-m, m + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-z}{2}\right), \quad (3.28)$$

где $F(a, b; c; z) = {}_2F_1(a, b; c; z)$ – гипергеометрическая функция. Правая часть в (3.28) имеет смысл, если вместо m подставить любое действительное (и даже комплексное) число μ . Полученную функцию обозначим через $R_\mu^{(\alpha, \beta)}(z)$. Пусть

$$\varphi_\mu^*(\theta) := R_\mu^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = F\left(-\mu, \mu + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right). \quad (3.29)$$

Всюду далее будем предполагать, что $\mu \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, \pi)$.

Рассмотрим некоторые свойства функций $\varphi_\mu^*(\theta)$, которые будут необходимы для дальнейшего. Прежде всего получим интегральные представления для этих функций. Отдельно рассмотрим следующие случаи: 1) $\alpha = \beta > -1/2$; 2) $\alpha > \beta = -1/2$; 3) $\alpha > \beta > -1/2$.

1) Пусть $\alpha = \beta > -1/2$. При этих значениях параметров α и β функции $R_\mu^{(\alpha, \beta)}(z)$ выражаются через функции Гегенбауэра $C_\mu^\nu(z)$:

$$R_\mu^{(\alpha, \alpha)}(z) = \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(2\nu)}{\Gamma(\mu+2\nu)} C_\mu^\nu(z), \quad \nu = \alpha + \frac{1}{2}. \quad (3.30)$$

Формула (3.30) следует из (3.29) и из известного представления функции $C_\mu^\nu(z)$ через гипергеометрическую функцию (см. [30; т. I, п. 3.5, формула (3)]):

$$C_\mu^\nu(z) = \frac{\Gamma(\mu+2\nu)}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(2\nu)} F\left(-\mu, \mu+2\nu; \nu + \frac{1}{2}; \frac{1-z}{2}\right). \quad (3.31)$$

Известно интегральное представление для функции $C_\mu^\nu(\cos \theta)$ (см. [30; т. I, п. 3.15, формула (23)]):

$$\begin{aligned} C_\mu^\nu(\cos \theta) &= \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\mu+2\nu)\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu)\Gamma(\mu+1)} (\sin \theta)^{1-2\nu} \\ &\quad \times \int_0^\theta (\cos t - \cos \theta)^{\nu-1} \cos((\nu+\mu)t) dt. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Из (3.30) и (3.32) получаем интегральное представление для функций $\varphi_\mu^*(\theta)$ при $\alpha = \beta$:

$$\begin{aligned} \varphi_\mu^*(\theta) &= R_\mu^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta) \\ &= c_{\alpha, \alpha} (\sin \theta)^{-2\alpha} \int_0^\theta (\cos t - \cos \theta)^{\alpha-1/2} \cos((\alpha+\mu+1/2)t) dt, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где

$$c_{\alpha, \alpha} = \frac{2^{\alpha+1/2}\Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)}.$$

2) Пусть $\alpha > \beta$, $\beta = -1/2$. Известна следующая формула для гипергеометрической функции [30; т. I, п. 2.11, формула (2)]:

$$F\left(2a, 2b; a+b+\frac{1}{2}; z\right) = F\left(a, b; a+b+\frac{1}{2}; 4z(1-z)\right). \quad (3.34)$$

Подставляя в (3.34) $a = -\mu$, $b = \mu + \alpha + 1/2$, $z = \sin^2(\theta/2)$ и используя (3.29), получим, что

$$R_{2\mu}^{(\alpha, \alpha)}\left(\cos \frac{\theta}{2}\right) = R_\mu^{(\alpha, -1/2)}(\cos \theta). \quad (3.35)$$

Из (3.35) и (3.33) находим интегральное представление для функции $\varphi_\mu^*(\theta)$ при $\beta = -1/2$:

$$\begin{aligned} \varphi_\mu^*(\theta) &= R_\mu^{(\alpha, -1/2)}(\cos \theta) = c_{\alpha, -1/2} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{-2\alpha} \\ &\quad \times \int_0^\theta \left(\cos \frac{t}{2} - \cos \frac{\theta}{2}\right)^{\alpha-1/2} \cos\left(\left(m + \frac{2\alpha+1}{4}\right)t\right) dt, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где

$$c_{\alpha, -1/2} = \frac{2^{\alpha-1/2} \Gamma(\alpha+1)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\alpha+1/2)}.$$

3) Пусть $\alpha > \beta > -1/2$. Воспользуемся следующей формулой для гипергеометрической функции [32; т. II, п. 13.1, формула (94)]:

$$\int_0^1 (1-x)^{\sigma-1} x^{c-1} F(a, b; c; xy) dx = \frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(c)}{\Gamma(\sigma+c)} F(a, b; c+\sigma; y), \quad (3.37)$$

где $\operatorname{Re} c > 0$, $\operatorname{Re} \sigma > 0$, $|y| < 1$.

Сделаем замену переменных

$$y = \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad x = \left(\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\theta/2)} \right)^2,$$

преобразуем (3.37) к виду

$$\begin{aligned} \frac{2^\sigma \Gamma(\sigma)\Gamma(c)}{\Gamma(\sigma+c)} F\left(a, b; c+\sigma; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) &= \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{-2c-2\sigma+2} \\ &\times \int_0^\theta (\cos \varphi - \cos \theta)^{\sigma-1} \left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^{2c-2} F\left(a, b; c; \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Подставляя в (3.38) $a = -\mu$, $b = \mu + \alpha + \beta + 1$, $c = (\alpha + \beta)/2 + 1$, $\sigma = (\alpha - \beta)/2$, получим

$$\begin{aligned} F\left(-\mu, \mu + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^\sigma \Gamma(\sigma)\Gamma(\nu+1/2)} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{-2\alpha} \\ &\times \int_0^\theta (\cos \theta - \cos \varphi)^{\sigma-1} \left(\sin \frac{\varphi}{2}\right)^{2\nu-1} F\left(-\mu, \mu + 2\nu; \nu + \frac{1}{2}; \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi d\varphi, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где $\nu = (\alpha + \beta + 1)/2$, $\sigma = (\alpha - \beta)/2$.

Из (3.39), используя (3.29), (3.31) и (3.32), получим интегральное представление для функции $\varphi_\mu^*(\theta)$ при $\alpha > \beta > -1/2$:

$$\begin{aligned} \varphi_\mu^*(\theta) &= R_\mu^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = c_{\alpha, \beta} \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{-2\alpha} \int_0^\theta (\cos \varphi - \cos \theta)^{\sigma-1} \left(\cos \frac{\varphi}{2}\right)^{1-2\nu} \\ &\times \left(\int_0^\varphi (\cos t - \cos \varphi)^{\nu-1} \cos((\nu + \mu)t) dt\right) \sin \varphi d\varphi, \end{aligned} \quad (3.40)$$

где

$$c_{\alpha, \beta} = \frac{2^{-\nu-\sigma+1} \Gamma(\nu + \sigma + 1/2)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu) \Gamma(\sigma)}, \quad \nu = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 1), \quad \sigma = \frac{1}{2}(\alpha - \beta).$$

Основные свойства функций $\varphi_\mu^*(\theta)$ указаны в следующих предложениях. Всюду $\mu \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, \pi)$, $c_1, c_2, \dots$ – положительные постоянные (вообще говоря, разные в разных местах), которые могут зависеть от α и β .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. 1) Функция $w = \varphi_\mu^*(\theta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\rho(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\rho(\theta) \frac{dw}{d\theta} \right) + \mu(\mu + \alpha + \beta + 1)w = 0 \quad (3.41)$$

с начальными условиями

$$w(0) = 1, \quad \frac{dw}{d\theta}(0) = 0, \quad (3.42)$$

где функция $\rho(\theta) = \rho^{(\alpha, \beta)}(\theta)$ задается формулой (3.3).

2) При $\mu > 0$ и $\theta \in (0, \pi/2]$ справедливо неравенство

$$|\varphi_\mu^*(\theta)| < 1. \quad (3.43)$$

3) Для любого $\varkappa > 0$ существует число $c_1 = c_1(\varkappa, \alpha, \beta) > 0$ такое, что для всех μ и θ , удовлетворяющих условию $\varkappa/\mu \leq \theta \leq \pi/2$, выполняется неравенство

$$|\varphi_\mu^*(\theta)| \leq c_1(\mu\theta)^{-\alpha-1/2}. \quad (3.44)$$

4) Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\theta \in (0, \pi/2)$ имеет место неравенство

$$|\partial_\mu^k \varphi_\mu^*(\theta)| \leq c_2 \theta^k. \quad (3.45)$$

5) Справедливы оценки

$$1 - \varphi_\mu^*(\theta) \leq c_3 \mu(\mu + \alpha + \beta + 1) \theta^2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad (3.46)$$

$$1 - \varphi_\mu^*(\theta) \geq c_4 \mu(\mu + \alpha + \beta + 1) \theta^2, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{\mu + \alpha + \beta + 1}. \quad (3.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Дифференциальное уравнение (3.41) следует из дифференциального уравнения для гипергеометрической функции $F(a, b; c; z)$ (см. [30; т. I]) и из (3.29). Начальные условия (3.42) следуют из (3.29) и из того, что $F(a, b; c; 0) = 1$.

2) Доказательство неравенства (3.43) основано на классическом подходе Н. Я. Сонины, который часто используется для оценки функций, удовлетворяющих линейному дифференциальному уравнению второго порядка (см., например, [29; пп. 7.31, 7.32]). Пусть $w(\theta) = \varphi_\mu^*(\theta)$, $\mu > 0$. Определим функцию

$$v(\theta) := (w(\theta))^2 + \frac{1}{\mu(\mu + \alpha + \beta + 1)} (w'(\theta))^2.$$

Используя дифференциальное уравнение (3.41), производную $v'(\theta)$ можно преобразовать к виду

$$v' = \frac{(-2)}{\mu(\mu + \alpha + \beta + 1)} \frac{\rho'}{\rho} (w')^2. \quad (3.48)$$

Заметим, что

$$\frac{\rho'}{\rho} = \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \left(\beta + \frac{1}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

На интервале $(0, \pi)$ функция ρ'/ρ равна нулю только при

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{2\alpha+1}{2\beta+1}} \geq 1.$$

Поэтому при $\theta \in (0, \pi/2)$ знак ρ'/ρ не меняется и $\rho'/\rho > 0$. Из (3.48) следует, что $v' < 0$ на интервале $(0, \pi/2)$, поэтому функция $v(\theta)$ убывает на отрезке $[0, \pi/2]$. Остается заметить, что $(w(\theta))^2 \leq v(\theta) < v(0) = 1$ при $\theta \in (0, \pi/2)$. Следовательно, $|w(\theta)| < 1$.

3) Для многочленов Якоби известна следующая асимптотическая формула (см. [29; теорема 8.21.13]):

$$R_m^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) = m^{-\alpha-1/2} k(\theta) (\cos(N\theta + \gamma) + (m \sin \theta)^{-1} O(1)) \quad (3.49)$$

при $m \rightarrow \infty$, $\theta \in [1/m, \pi - 1/m]$, где

$$k(\theta) = \pi^{-1/2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{-\beta-1/2},$$

$$N = m + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}, \quad \gamma = -\left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2}.$$

Из доказательства формулы (3.49) (см. [29; пп. 8.21, 8.63]) легко видеть, что она остается справедливой при замене натурального числа m на произвольное действительное число $\mu > 0$. При $\theta \in [1/\mu, \pi/2]$ из (3.49) и из неравенства $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ следует, что

$$|\varphi_\mu^*(\theta)| = |R_\mu^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta)| \leq c_1 (\mu\theta)^{-\alpha-1/2},$$

где c_1 – некоторая постоянная, не зависящая от μ и θ .

4) Для доказательства неравенства (3.45) будем использовать интегральные представления (3.33), (3.36) и (3.40) для функции $\varphi_\mu^*(\theta)$. Для определенности рассмотрим случай $\alpha > \beta > -1/2$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Так как

$$\partial_\mu^k \cos((\nu + \mu)t) = \begin{cases} (-1)^{(k+1)/2} t^k \sin((\nu + \mu)t), & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ (-1)^{k/2} t^k \cos((\nu + \mu)t), & \text{если } k \text{ четно,} \end{cases}$$

то из (3.40) получаем, что

$$|\partial_\mu^k \varphi_\mu^*(\theta)| \leq c_{\alpha\beta} \theta^k A(\theta), \quad (3.50)$$

где

$$A(\theta) = \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-2\alpha} \int_0^\theta (\cos \varphi - \cos \theta)^{\sigma-1} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right)^{1-2\nu} \\ \times \left(\int_0^\varphi (\cos t - \cos \varphi)^{\nu-1} dt \right) \sin \varphi d\varphi. \quad (3.51)$$

Легко видеть, что функция $A(\theta)$ ограничена при $\theta \in (0, \pi/2)$ и поэтому из (3.50) следует неравенство (3.45).

5) Для определенности рассмотрим случай $\alpha > \beta > -1/2$. Случаи $\alpha = \beta > -1/2$ и $\alpha > \beta = -1/2$ рассматриваются аналогично. Воспользуемся интегральным представлением (3.40). Учитывая, что $\varphi_0^*(\theta) \equiv 1$, из (3.40) получаем

$$1 - \varphi_\mu^*(\theta) = c_{\alpha, \beta} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-2\alpha} \int_0^\theta (\cos \varphi - \cos \theta)^{\sigma-1} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right)^{1-2\nu} \times \left(\int_0^\varphi (\cos t - \cos \varphi)^{\nu-1} (\cos \nu t - \cos(\nu + \mu)t) dt \right) \sin \varphi d\varphi, \quad (3.52)$$

где $c_{\alpha, \beta}$ – постоянная, $\nu = (\alpha + \beta + 1)/2$, $\sigma = (\alpha - \beta)/2$.

Так как

$$\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{y-x}{2} \sin \frac{y+x}{2}, \quad (3.53)$$

то (3.52) можно переписать в виде

$$1 - \varphi_\mu^*(\theta) = c_{\alpha, \beta} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-2\alpha} \int_0^\theta (\cos \varphi - \cos \theta)^{\sigma-1} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right)^{1-2\nu} \times \left(\int_0^\varphi (\cos t - \cos \varphi)^{\nu-1} \sin \frac{\mu t}{2} \sin \frac{(2\nu + \mu)t}{2} dt \right) \sin \varphi d\varphi. \quad (3.54)$$

Пользуясь оценками

$$\sin x \leq x, \quad x \in [0, +\infty), \quad \sin x \geq \frac{2}{\pi} x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad (3.55)$$

получаем неравенства

$$1 - \varphi_\mu^*(\theta) \leq \frac{1}{2} c_{\alpha, \beta} \mu (2\nu + \mu) B(\theta), \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad (3.56)$$

$$1 - \varphi_\mu^*(\theta) \geq \frac{2}{\pi^2} c_{\alpha, \beta} \mu (2\nu + \mu) B(\theta), \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{\mu + 2\nu}\right), \quad (3.57)$$

где

$$B(\theta) = \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-2\alpha} \int_0^\theta (\cos \varphi - \cos \theta)^{\sigma-1} \left(\cos \frac{\varphi}{2} \right)^{1-2\nu} \times \left(\int_0^\varphi (\cos t - \cos \varphi)^{\nu-1} t^2 dt \right) \sin \varphi d\varphi. \quad (3.58)$$

Для любых функций $f(\theta) > 0$ и $g(\theta) > 0$ будем использовать обозначение $f(\theta) \asymp g(\theta)$, если для некоторых постоянных $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ выполняется неравенство $c_1 f(\theta) \leq g(\theta) \leq c_2 f(\theta)$ при $\theta \in (0, \pi/2)$. Из тождества (3.53) и из неравенств (3.55) следует, что

$$\int_0^\varphi (\cos t - \cos \varphi)^{\nu-1} t^2 dt = 2^{\nu-1} \int_0^\varphi \left(\sin \frac{\varphi-t}{2} \sin \frac{\varphi+t}{2} \right)^{\nu-1} t^2 dt \asymp \int_0^\varphi (\varphi^2 - t^2)^{\nu-1} t^2 dt = c_1 \varphi^{2\nu+1}, \quad (3.59)$$

где c_1 – постоянная. Используя (3.59) и (3.55), получаем, что

$$\begin{aligned} B(\theta) &\asymp \theta^{-2\alpha} \int_0^\theta (\theta^2 - \varphi^2)^{\sigma-1} \left(\int_0^\varphi (\varphi^2 - t^2)^{\nu-1} t^2 dt \right) \varphi d\varphi \\ &\asymp \theta^{-2\alpha} \int_0^\theta (\theta^2 - \varphi^2)^{\sigma-1} \varphi^{2\nu+1} \varphi d\varphi = c_2 \theta^{-2\alpha} \theta^{2\sigma-2} \theta^{2\nu+1} \theta^2 = c_2 \theta^2, \end{aligned}$$

где c_2 – постоянная. Итак,

$$B(\theta) \asymp \theta^2. \quad (3.60)$$

Из неравенств (3.56) и (3.57), учитывая (3.60), получаем неравенства (3.46) и (3.47).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Для любого $\varkappa > 0$ существует число $c = c(\varkappa, \alpha, \beta) > 0$ такое, что при $\theta\mu \geq \varkappa$ справедливо неравенство*

$$1 - \varphi_\mu^*(\theta) \geq c. \quad (3.61)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Очевидно, что если неравенство (3.61) справедливо при некотором $\varkappa = \varkappa_1$, то оно будет справедливо и для всех $\varkappa = \varkappa_2 > \varkappa_1$. Поэтому без ограничения общности можно считать $\varkappa$ настолько малым числом, что выполняются неравенства

$$\pi c_3 \varkappa < 1, \quad \varkappa < \pi, \quad (3.62)$$

где c_3 – постоянная из неравенства (3.46).

2) Как и при доказательстве п. 2) предложения 3.2, определим функцию

$$v(\theta) := (\varphi_\mu^*(\theta))^2 + \frac{1}{\mu(\mu + \alpha + \beta + 1)} \left(\frac{d}{d\theta} \varphi_\mu^*(\theta) \right)^2. \quad (3.63)$$

Так как функция $v(\theta)$ убывает на отрезке $[0, \pi/2]$, то при $\theta \in [\varkappa/\mu, \pi/2]$ справедливо неравенство

$$v(\theta) \leq v\left(\frac{\varkappa}{\mu}\right). \quad (3.64)$$

Из (3.63) и (3.64) следует, что при $\theta\mu \geq \varkappa$

$$1 - \varphi_\mu^*(\theta) \geq 1 - \sqrt{v(\theta)} \geq 1 - \sqrt{v\left(\frac{\varkappa}{\mu}\right)}, \quad (3.65)$$

поэтому для доказательства (3.61) достаточно показать, что верна оценка

$$1 - \sqrt{v\left(\frac{\varkappa}{\mu}\right)} \geq c, \quad \mu \in \left[\frac{2}{\pi} \varkappa, +\infty\right).$$

Определим функцию

$$\Lambda(\mu) := 1 - \sqrt{v\left(\frac{\varkappa}{\mu}\right)}, \quad \mu \in \left[\frac{2}{\pi} \varkappa, +\infty\right).$$

Требуется доказать, что

$$\inf \left\{ \Lambda(\mu) : \mu \geq \frac{2}{\pi} \varkappa \right\} > 0. \quad (3.66)$$

Функция $\Lambda(\mu)$ непрерывная и положительная (так как $v(\theta) < 1$ при $\theta \in (0, \pi/2]$), поэтому для доказательства (3.66) достаточно показать, что для некоторого числа $A > 0$ справедливо неравенство

$$\inf \{ \Lambda(\mu) : \mu \geq A \} > 0. \quad (3.67)$$

Число A будет указано далее.

3) Пусть $A > 0$ – любое число, для которого

$$\varkappa \left(1 + \frac{\alpha + \beta + 1}{A} \right) < \pi \quad (3.68)$$

(все достаточно большие числа A удовлетворяют (3.68) в силу (3.62)).

Из (3.47) следует, что

$$1 - \varphi_\mu^* \left(\frac{\varkappa}{\mu} \right) \geq c_4 \mu (\mu + \alpha + \beta + 1) \left(\frac{\varkappa}{\mu} \right)^2 = c_4 \left(1 + \frac{\alpha + \beta + 1}{\mu} \right) \varkappa^2 > \varkappa^2 c_4. \quad (3.69)$$

Таким образом,

$$\varphi_\mu^* \left(\frac{\varkappa}{\mu} \right) \leq 1 - \varkappa^2 c_4 < 1. \quad (3.70)$$

Заметим, что $\varphi_\mu^*(\varkappa/\mu) \geq 0$ при $\mu \geq A$. Действительно, если $\varphi_\mu^*(\varkappa/\mu) < 0$, то $1 - \varphi_\mu^*(\varkappa/\mu) > 1$. Однако из неравенства (3.46) в силу (3.68) и (3.62) получаем, что

$$1 - \varphi_\mu^* \left(\frac{\varkappa}{\mu} \right) \leq c_3 \mu (\mu + \alpha + \beta + 1) \frac{\varkappa^2}{\mu^2} = c_3 \varkappa^2 \left(1 + \frac{\alpha + \beta + 1}{\mu} \right) < \pi c_3 \varkappa < 1.$$

4) Используя известное тождество для гипергеометрической функции

$$\frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z)$$

(см. [32; т. I, п. 2.8]), легко получить, что

$$\frac{d}{dz} R_{\mu}^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{\mu(\mu + \alpha + \beta + 1)}{(2\alpha + 2)} R_{\mu-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(z). \quad (3.71)$$

Из (3.71) и (3.29) следует, что

$$\frac{d}{d\theta} \varphi_\mu^*(\theta) = -\frac{\mu(\mu + \alpha + \beta + 1)}{(2\alpha + 2)} (\sin \theta) R_{\mu-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\cos \theta). \quad (3.72)$$

Так как $R_{\mu-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\cos \theta) \leq 1$, то из (3.63), (3.72) и (3.70) получаем оценку

$$v \left(\frac{\varkappa}{\mu} \right) \leq \left(\varphi_\mu^* \left(\frac{\varkappa}{\mu} \right) \right)^2 + \left(\frac{\varkappa}{\mu} \right)^2 \frac{1}{(2\alpha + 2)} \leq (1 - \varkappa^2 c_4)^2 + \frac{\varkappa^2}{\mu^2 (2\alpha + 2)}. \quad (3.73)$$

Число A выберем настолько большим, чтобы выполнялись неравенство (3.68) и неравенство

$$(1 - \varkappa^2 c_4)^2 + \frac{\varkappa^2}{(2\alpha + 2)A^2} \leq 1 - \varepsilon^2, \quad (3.74)$$

где $\varepsilon > 0$ – некоторое число (это возможно, так как $0 \leq 1 - \varkappa^2 c_4 < 1$). Тогда при $\mu \geq A$ справедливо неравенство

$$\Lambda(\mu) = 1 - \sqrt{v\left(\frac{\varkappa}{\mu}\right)} \geq \varepsilon,$$

откуда следует, что

$$\sup\{\Lambda(\mu) : \mu \geq A\} \geq \varepsilon,$$

что доказывает (3.67) и завершает доказательство предложения 3.3.

§ 4. Доказательства основных теорем

В этом параграфе мы будем использовать обозначения из §§ 1, 2. В частности, M – произвольное компактное симметрическое пространство ранга один (КРОСП), $\mathcal{B}$ – оператор Бельтрами–Лапласа на M , S_t , $0 < t < \pi$, – оператор усреднения, $W_p^m(M)$ – пространство Соболева (см. (1.9)), ${}^*\Delta_h f(x) = f(x) - S_h f(x)$ – разность первого порядка с шагом h , $\mathcal{F}(f) = \{\hat{f}_j\}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, – преобразование Фурье функции f на КРОСПе M (см. (2.41)), a и b – числа, соответствующие пространству M (см. (2.2)), $\alpha = (a + b - 1)/2$, $\beta = (b - 1)/2$. Всюду далее $c, c_1, c_2, \dots$ – положительные постоянные, которые могут зависеть от M , t и некоторых несущественных параметров (обычно эти параметры указываются), вообще говоря, разные в разных местах. Если не оговорено противное, то всюду p – произвольное число, $p \in [1, +\infty]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Для любой функции $f \in W_p^1(M)$ и любого $h \in (0, \pi/2)$ выполняется неравенство*

$$\|{}^*\Delta_h f\|_p \leq \frac{1}{2} h^2 \|\mathcal{B}f\|_p. \quad (4.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предварительно докажем справедливость равенства

$${}^*\Delta_h f = -h^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} u(S_{huv}(\mathcal{B}f)) du dv, \quad (4.2)$$

где $\rho(t)$ – функция, определенная формулой (2.1). Интеграл в правой части формулы (4.2) понимается как интеграл Римана от непрерывной вектор-функции со значениями в банаховом пространстве $L_p(M)$ (так как $\mathcal{B}f \in L_p(M)$ и функция $S_t f$ непрерывно зависит от параметра t).

Чтобы доказать равенство (4.2), вычислим преобразования Фурье левой и правой частей в формуле (4.2). Из (2.47) следует, что

$$(\widehat{{}^*\Delta_h f})_j = (1 - \varphi_j^*(h)) \hat{f}_j. \quad (4.3)$$

Из п. 1) предложения 3.2 получаем, что функция $w = \varphi_j^*(\theta)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{\rho(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\rho(\theta) \frac{dw}{d\theta} \right) = -\lambda_j w, \quad (4.4)$$

где $\lambda_j = -j(j + \alpha + \beta + 1)$, и начальным условиям

$$w(0) = 1, \quad w'(0) = 0. \quad (4.5)$$

Из (4.4) и (4.5) следует, что

$$1 - \varphi_j^*(h) = \lambda_j \int_0^h \frac{1}{\rho(t)} \left(\int_0^t \rho(s) \varphi_j^*(s) ds \right) dt,$$

откуда, сделав замену $t = hu$ и $s = huv$, получаем

$$1 - \varphi_j^*(h) = \lambda_j h^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} u \varphi_j^*(huv) du dv. \quad (4.6)$$

Временно обозначим правую часть формулы (4.2) через $g(x)$. Из свойств (2.46) и (2.47) преобразования Фурье следует, что

$$\widehat{g}_j = \lambda_j h^2 \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} u \varphi_j^*(huv) du dv \right) \widehat{f}_j. \quad (4.7)$$

Из (4.3), (4.6) и (4.7) имеем, что $(\widehat{*}\Delta_h f)_j = \widehat{g}_j$, откуда следует равенство (4.2).

Так как функция $\rho(t)$ возрастает на интервале $(0, \pi/2)$ и $u, v \in (0, 1)$, то

$$0 \leq \frac{\rho(huv)}{\rho(hv)} \leq 1.$$

Учитывая эту оценку, из (4.2) получаем неравенство

$$\|*\Delta_h f\|_p \leq h^2 \int_0^1 \int_0^1 u \|\mathcal{B}f\|_p du dv = \frac{h^2}{2} \|\mathcal{B}f\|_p,$$

что доказывает (4.1).

Модуль гладкости k -го порядка $\omega_k(f, t)_p$, $f \in L_p(M)$, $t \in (0, \pi)$, определен в § 1 (см. (1.5), (1.6)). Его можно также записать в виде

$$\omega_k(f, t)_p = \sup_{0 < h \leq t} \|*\Delta_h^k f\|_p = \sup_{0 < h \leq t} \|(I - S_h)^k f\|_p, \quad (4.8)$$

где I – единичный оператор. При $t \geq \pi$ будем считать, что по определению

$$\omega_k(f, t)_p = \omega_k(f, \pi)_p = \sup_{0 < h < \pi} \|*\Delta_h^k f\|_p.$$

Основные свойства $\omega_k(f, t)_p$ перечислены в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Для модуля гладкости $\omega_k(f, t)_p$, $k \in \mathbb{N}$, $t > 0$, справедливы следующие свойства:

- 1) по переменной t функция $\omega_k(f, t)_p$ не убывает и $\omega_k(f, t)_p = \omega_k(f, \pi)_p$, $t \geq \pi$;
- 2) функция $\omega_k(f, t)_p$ непрерывна по t и $\omega_k(f, t)_p \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$;
- 3) $\omega_k(f + g, t)_p \leq \omega_k(f, t)_p + \omega_k(g, t)_p$, $f, g \in L_p(M)$;
- 4) $\omega_k(f, t)_p \leq 2^k \|f\|_p$;
- 5) если $l \leq k$, то $\omega_k(f, t)_p \leq 2^{k-l} \omega_l(f, t)_p$;
- 6) если $f \in W_p^m(M)$, то для любого $k > m$

$$\omega_k(f, t)_p \leq ct^{2m} \omega_{k-m}(\mathcal{B}^m f, t)_p,$$

где $c = c(M, m)$ – некоторая постоянная;

- 7) если $f \in W_p^m(M)$, то

$$\omega_m(f, t)_p \leq c_1 t^{2m} \|\mathcal{B}^m f\|_p,$$

где $c_1 = c_1(M, m)$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1) и 3) следуют из определения модуля гладкости $\omega_k(f, t)_p$. Свойство 2) следует из того, что функция $S_h f$ непрерывно зависит от h в пространстве $L_p(M)$ (см. (2.26)). Свойства 4) и 5) вытекают из того, что $\|S_h f\|_p \leq \|f\|_p$ при $f \in L_p(M)$ (см. (2.25)).

Если $f \in W_p^m(M)$, то из неравенства (4.1) и из того, что оператор $\mathcal{B}$ перестановочен с оператором Δ_h , получаем

$$\|\Delta_h^k f\|_p \leq \left(\frac{1}{2}\right)^m \|\Delta_h^{k-m} \mathcal{B}^m f\|_p. \quad (4.9)$$

Из (4.9) и из определения модуля гладкости (см. (4.8)) следует свойство 6). Свойство 7) также вытекает из (4.9).

Пусть $\eta^*(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ – произвольная четная функция, удовлетворяющая следующим условиям: $\eta^*(t) \geq 0$, $\eta^*(t) = 1$ при $|t| \leq 1$ и $\eta^*(t) = 0$ при $|t| \geq 2$. Далее будем считать, что функция $\eta^*(t)$ фиксирована, и мы не будем уточнять, что постоянные в оценках могут зависеть от η^* .

Определим семейство операторов P_ν , $\nu > 0$, по формуле

$$P_\nu(f) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta^*\left(\frac{j}{\nu}\right) \widehat{f}_j(x), \quad f \in L_p(M). \quad (4.10)$$

Пусть

$$\eta_\nu(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta^*\left(\frac{j}{\nu}\right) \omega_j \varphi_j(x). \quad (4.11)$$

Функция $\eta_\nu(x)$ является зональной и из свойства (2.45) следует, что оператор P_ν можно записать в виде свертки

$$P_\nu(f) = f * \eta_\nu. \quad (4.12)$$

При $\nu \in \mathbb{Z}_+$ в § 1 определено пространство $\mathcal{P}_\nu(M)$ обобщенных сферических полиномов степени ν . Это определение можно распространить на произвольное действительное число $\nu \geq 0$, полагая

$$\mathcal{P}_\nu(M) := \sum_{k \in [0, \nu] \cap \mathbb{Z}_+} \mathcal{H}_k, \quad (4.13)$$

где $\mathcal{H}_k$ – собственное подпространство оператора $\mathcal{B}$, отвечающее собственному значению $(-\lambda_k)$. Соответственно, на $\nu \in \mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}_+$ – множество неотрицательных действительных чисел) можно распространить наилучшее приближение $E_\nu(f)_p$, полагая

$$E_\nu(f)_p := \inf\{\|f - \Phi\|_p : \Phi \in \mathcal{P}_\nu(M)\}, \quad (4.14)$$

где $f \in L_p(M)$, $\nu \in \mathbb{R}_+$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $f \in L_p(M)$, $\nu > 0$. Тогда:

- 1) $P_\nu(f) \in \mathcal{P}_{2\nu}(M)$ и $P_\nu(\Phi) = \Phi$ для любой функции $\Phi \in \mathcal{P}_\nu(M)$;
- 2) $\|P_\nu(f)\|_p \leq c_1 \|f\|_p$;
- 3) $\|f - P_\nu(f)\|_p \leq c_2 E_\nu(f)_p$, где $c_1 = c_1(M)$, $c_2 = c_2(M)$ – некоторые постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Так как $\eta^*(j/\nu) = 0$ при $j \geq 2\nu$, то $P_\nu(f) \in \mathcal{P}_{2\nu}(M)$. Если $\Phi \in \mathcal{P}_\nu(M)$, то $\hat{\Phi}_j = 0$ при $j > \nu$, а так как $\eta^*(j/\nu) = 1$ при $0 \leq j \leq \nu$, то

$$P_\nu(\Phi) = \sum_{0 \leq j \leq \nu} \hat{\Phi}_j = \Phi.$$

2) Определим функцию $\gamma(t, h)$ формулой

$$\gamma(t, h) := \eta^*(ht), \quad t > 0, \quad h \in (0, 2).$$

Очевидно, что эта функция $\gamma(t, h)$ удовлетворяет всем условиям предложения 3.1 при $h_0 = 2$. Тогда из предложения 3.1 следует, что семейство функций

$$\Phi_h(x) := \sum_{j=0}^{\infty} \gamma(j, h) \omega_j \varphi_j(x)$$

ограничено в пространстве $L_1(M)$, т.е. существует число $c_3 = c_3(M) > 0$ такое, что

$$\|\Phi_h\|_1 \leq c_3, \quad h \in (0, 2).$$

Из определения функции $\eta_\nu(x)$ (см. (4.11)) следует, что $\eta_\nu(x) = \Phi_{1/\nu}(x)$, поэтому $\|\eta_\nu\|_1 \leq c_3$ при $\nu > 1/2$. Заметим, что $\eta_\nu(x) = \eta^*(0) \omega_0 \varphi_0(x) = \omega_0$ при $\nu \leq 1/2$. Поэтому

$$\|\eta_\nu\|_1 \leq c_1 \quad (4.15)$$

при любом $\nu > 0$, где $c_1 = \max\{c_3, \omega_0\}$.

Так как $\|f * \eta_\nu\|_p \leq \|f\|_p \|\eta_\nu\|_1$ (см. (2.10)), то из (4.12) и (4.15) следует свойство 2).

3) Возьмем произвольную функцию $\Phi(x) \in \mathcal{P}_\nu(M)$ такую, что $\|f - \Phi\|_p \leq 2E_\nu(f)_p$. Используя равенство $P_\nu(\Phi) = \Phi$ и свойство 2), получим, что

$$\|f - P_\nu(f)\|_p = \|f - \Phi + P_\nu(f - \Phi)\|_p \leq \|f - \Phi\|_p + c_1 \|f - \Phi\|_p \leq 2(1 + c_1)E_\nu(f)_p,$$

откуда следует неравенство 3) с $c_2 = 2(1 + c_1)$.

Напомним, что разность ${}^*\Delta_h^m f$, $m \in \mathbb{N}$, $h > 0$, определяется формулой

$${}^*\Delta_h^m f := (I - S_h)^m f.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть $f \in L_p(M)$, $m \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$. Для любого $h \in (0, 1/(2\nu)]$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{B}^m(P_\nu(f))\|_p \leq c_1 h^{-2m} \|\Delta_h^m f\|_p, \quad (4.16)$$

а если $f \in W_p^m(M)$, то также справедливо неравенство

$$\|\Delta_h^m(P_\nu(f))\|_p \leq c_2 h^{2m} \|\mathcal{B}^m f\|_p, \quad (4.17)$$

где $c_1 = c_1(M)$, $c_2 = c_2(M)$ – некоторые постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Заметим, что, при $\nu \leq 1/2$ функция $P_\nu(f) = \widehat{f}_0$ является константой, не зависящей от x . Тогда $\mathcal{B}^m(P_\nu(f)) = 0$ и $\Delta_h^m(P_\nu(f)) = 0$, откуда следуют неравенства (4.16) и (4.17). Поэтому далее будем считать, что $\nu > 1/2$.

2) Рассмотрим преобразование Фурье от функции $\mathcal{B}^m(P_\nu(f))$. Используя свойства (2.45) и (2.46) преобразования Фурье и определение оператора P_ν (см. (4.10)), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\mathcal{B}^m(P_\nu(f)))_j &= (-1)^m \lambda_j^m \eta^*\left(\frac{j}{\nu}\right) \widehat{f}_j \\ &= (-1)^m h^{-2m} \frac{h^{2m} \lambda_j^m \eta^*(j/\nu)}{(1 - \varphi_j^*(h))^m} (1 - \varphi_j^*(h))^m \widehat{f}_j. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Определим семейство операторов

$$A_{\nu,h} : L_p(M) \mapsto L_p(M), \quad \nu > \frac{1}{2}, \quad h \in \left(0, \frac{1}{2\nu}\right),$$

по формуле

$$A_{\nu,h}(g) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h^{2m} \lambda_j^m \eta^*(j/\nu)}{(1 - \varphi_j^*(h))^m} \widehat{g}_j(x), \quad g \in L_p(M). \quad (4.19)$$

Так как $\eta^*(j/\mu) = 0$ при $j \geq 2\nu$, то $A_{\nu,h}(g) \in \mathcal{P}_{2\nu}(M)$.

Докажем, что справедливо неравенство

$$\|A_{\nu,h}(g)\|_p \leq c \|g\|_p, \quad (4.20)$$

где c – некоторая постоянная, не зависящая от ν и h .

Заметим, что $jh < 2\nu h < 1$ при $j < 2\nu$, поэтому $\eta^*(hj) = 1$ и (4.19) можно переписать в виде

$$A_{\nu,h}(g) := \sum_{j=1}^{\infty} \eta^*\left(\frac{j}{\nu}\right) \frac{h^{2m} \lambda_j^m \eta^*(hj)}{(1 - \varphi_j^*(h))^m} \widehat{g}_j. \quad (4.21)$$

Помимо зональной функции $\eta_\nu(x)$, определенной в (4.11), определим еще зональную функцию

$$\zeta_h(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{h^{2m} \lambda_j^m \eta^*(hj)}{(1 - \varphi_j^*(h))^m} \omega_j \varphi_j(x). \quad (4.22)$$

Из свойства (2.45) следует, что оператор $A_{\nu,h}$ можно записать в виде свертки

$$A_{\nu,h}(g) = g * \eta_\nu * \zeta_h. \quad (4.23)$$

Из (4.23) и из неравенства (2.10) получаем, что

$$\|A_{\nu,h}(g)\|_p \leq \|\eta_\nu\|_1 \|\zeta_h\|_1 \|g\|_p, \quad (4.24)$$

поэтому для доказательства неравенства (4.20) достаточно показать, что

$$\|\eta_\nu\|_1 \leq c_3 \quad \text{при } \nu > \frac{1}{2}, \quad (4.25)$$

$$\|\zeta_h\|_1 \leq c_4 \quad \text{при } h \in (0, 1) \quad (4.26)$$

для некоторых постоянных c_3 и c_4 . Неравенство (4.25) уже доказано (см. (4.15)). Неравенство (4.26) будет доказано далее, после доказательства некоторых вспомогательных результатов.

3) Определим функцию

$$\gamma(t, h) := \frac{h^{2m} \lambda_t^m}{(1 - \varphi_t^*(h))^m} \eta^*(ht), \quad (4.27)$$

где $\lambda_t = t(t + \alpha + \beta + 1)$, $h \in (0, 1)$, $t > 0$.

Проверим, что функция $\gamma(t, h)$ удовлетворяет условиям предложения 3.1 (этого достаточно для доказательства неравенства (4.26)).

Так как $\varphi_t^*(h) < 1$ при $h \in (0, 1)$ (см. (3.43)), то $\gamma(t, h) \in C^\infty((0, +\infty) \times (0, 1))$. Так как $\eta^*(ht) = 0$ при $ht \geq 2$, то для проверки условия (3.11) достаточно показать, что для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ справедливо неравенство

$$|\partial_t^k \gamma(t, h)| \leq c(k) h^k, \quad h \in (0, 1), \quad t > 0. \quad (4.28)$$

Если определить функцию

$$r(t, h) := \frac{h^{2m} \lambda_t^m}{(1 - \varphi_t^*(h))^m}, \quad (4.29)$$

то $\gamma(t, h) = r(t, h) \eta^*(t, h)$ и очевидно, что для доказательства (4.28) достаточно показать, что

$$|\partial_t^k r(t, h)| \leq c_1(k) h^k \quad (4.30)$$

при $ht < 2$, где $c_1(k)$ – некоторая постоянная.

Рассуждая так же, как при выводе формулы (4.6), получим, что

$$1 - \varphi_t^*(h) = \lambda_t h^2 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} u \varphi_t^*(huv) du dv. \quad (4.31)$$

Из (4.31) следует, что функцию $r(t, h)$ можно записать в виде

$$r(t, h) = \left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} u \varphi_t^*(huv) du dv \right)^{-m}. \quad (4.32)$$

4) Определим функцию

$$\psi(t, h) := \frac{1 - \varphi_t^*(h)}{h^2 \lambda_t}, \quad t > 0, \quad h \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (4.33)$$

Из (4.31) следует, что функцию $\psi(t, h)$ можно записать в виде

$$\psi(t, h) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} u \varphi_t^*(huv) du dv. \quad (4.34)$$

Используя (4.34), доопределим функцию $\psi(t)$ при $t = 0$ и $h = 0$:

$$\psi(t, 0) := \lim_{h \rightarrow 0} \psi(t, h) = \int_0^1 \int_0^1 v^{2\alpha+1} u du dv = (4\alpha + 4)^{-1}, \quad (4.35)$$

$$\psi(0, h) := \lim_{t \rightarrow 0} \psi(t, h) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} u du dv. \quad (4.36)$$

Таким образом, можно считать, что функция $\psi(t, h)$ определена и непрерывна на замкнутом множестве

$$\mathcal{D}_1 := \left\{ (t, h) : t \geq 0, 0 \leq h \leq \frac{\pi}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Заметим, что $\psi(t, h) > 0$ для любой точки $(t, h) \in \mathcal{D}_1$. Действительно, при $t > 0$ и $h > 0$ это следует из п. 2) предложения 3.2, а при $t = 0$ или $h = 0$ следует из формул (4.35) и (4.36).

Пусть

$$\mathcal{D}_2 := \{(t, h) : t \geq 0, 0 \leq h \leq 1, th \leq 2\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Докажем, что существуют постоянные $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$ такие, что для любой точки $(t, h) \in \mathcal{D}_2$ справедливы неравенства

$$A_1 \leq \psi(t, h) \leq A_2. \quad (4.37)$$

Правое неравенство следует из неравенства (3.46). Из неравенства (3.47) получаем, что в области

$$\mathcal{D}_3 := \{(t, h) : t \geq 0, h(t + \alpha + \beta + 1) \leq \pi\}$$

справедливо неравенство

$$\psi(t, h) \geq c_5, \quad (4.38)$$

где $c_5 > 0$ – некоторая постоянная. Разность $\mathcal{D}_2 \setminus \mathcal{D}_3$ содержится в множестве

$$\mathcal{D}_4 := \{(t, h) : 0 \leq h \leq 1, th \leq 2, h(t + \alpha + \beta + 1) \geq \pi\}.$$

Легко видеть, что $\mathcal{D}_4$ является компактным подмножеством множества $\mathcal{D}_1$. Поэтому

$$\psi(t, h) \geq c_6, \quad (t, h) \in \mathcal{D}_4, \quad (4.39)$$

где $c_6 > 0$ – постоянная. Из (4.38) и (4.39) получаем левое неравенство в (4.37) с $A_1 = \min\{c_5, c_6\}$.

5) Из формулы (4.34) следует, что функция $\psi(t, h)$ бесконечно дифференцируемая по t . Докажем, что существует постоянная $c > 0$, такая, что для любых $k \in \mathbb{Z}_+$ и $h \in (0, \pi/2)$ справедливо неравенство

$$|\partial_t^k \psi(t, h)| \leq ch^k. \quad (4.40)$$

Действительно, используя неравенство (3.45), получаем

$$\begin{aligned} |\partial_t^k \psi(t, h)| &= \left| \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} u \partial_t^k \varphi_t^*(huv) du dv \right| \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \frac{\rho(huv)}{\rho(hu)} u c (huv)^k du dv \leq ch^k. \end{aligned}$$

При этом мы учли то, что $u, v \in (0, 1)$ и $\rho(huv)/\rho(hu) \leq 1$.

6) Докажем, что для любой функции $\Lambda(z) \in C^\infty(0, \infty)$ функция $\tau(t, h) := \Lambda(\psi(t, h))$ удовлетворяет неравенству

$$|\partial_t^k \tau(t, h)| \leq c(\Lambda; k) h^k, \quad (t, h) \in \mathcal{D}_2, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (4.41)$$

где $c(\Lambda; k) > 0$ – некоторая постоянная.

Мы знаем, что $A_1 \leq \psi(t, h) \leq A_2$ при $(t, h) \in \mathcal{D}_2$ (см. (4.37)). Пусть

$$\Xi(k) := \max\{|\Lambda^{(k)}(z)| : z \in [A_1, A_2]\}.$$

Очевидно, что производную $\partial_t^k \tau(t, h)$ можно представить как сумму конечного числа (зависящего от k) слагаемых вида

$$\Lambda^{(k_0)}(\psi(t, h)) \partial_t^{k_1} \psi(t, h) \cdots \partial_t^{k_s} \psi(t, h), \quad (4.42)$$

где $k_0, k_1, \dots, k_s$ – некоторые натуральные числа, $k_0 \leq k$ и $k_1 + k_2 + \dots + k_s = k$. Из неравенства (4.40) следует, что каждая функция (4.42) при $(t, h) \in \mathcal{D}_2$ допускает оценку

$$|\Lambda^{(k_0)}(\psi(t, h)) \partial_t^{k_1} \psi(t, h) \cdots \partial_t^{k_s} \psi(t, h)| \leq \Xi(k_0) c^s h^k,$$

откуда вытекает неравенство (4.41).

7) Завершаем доказательство неравенства (4.20). Как было показано в пп. 2), 3), для этого достаточно доказать неравенство (4.30), т.е. что

$$|\partial_t^k r(t, h)| \leq c(k) h^k, \quad (t, h) \in \mathcal{D}_2, \quad (4.43)$$

где $c(k)$ – некоторая постоянная.

Заметим, что функцию $r(t, h)$ можно записать в виде

$$r(t, h) = (\psi(t, h))^{-m} \quad (4.44)$$

(см. (4.32)). Применяя результат п. 6) для случая $\Lambda(z) = z^{-m}$, получим неравенство (4.43).

8) Из равенства (4.18) и из определения оператора $A_{\nu, h}$ (см. (4.19)) следует, что

$$\mathcal{B}^m(P_\nu(f)) = (-1)^m h^{-2m} A_{\nu, h}(*\Delta_h^m f). \quad (4.45)$$

Используя неравенство (4.20), из (4.45) получим, что

$$\|\mathcal{B}^m(P_\nu(f))\|_p \leq ch^{-2m} \|\Delta_h^m f\|_p,$$

что доказывает неравенство (4.16).

9) Для доказательства неравенства (4.17) используется соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(*\Delta_h^m(P_\nu(f)))_j &= (1 - \varphi_j^*(h))^m \eta^*\left(\frac{j}{\nu}\right) \widehat{f}_j \\ &= (-1)^m h^{2m} \frac{(1 - \varphi_j^*(h))^m}{(h^2 \lambda_j)^m} \eta^*\left(\frac{j}{\nu}\right) (-1)^m \lambda_j^m \widehat{f}_j, \end{aligned} \quad (4.46)$$

которое следует из свойств (2.45) и (2.46) преобразования Фурье.

Определим семейство операторов

$$B_{\nu,h} : L_p(M) \mapsto L_p(M), \quad \nu > \frac{1}{2}, \quad h \in \left(0, \frac{1}{2\nu}\right),$$

по формуле

$$B_{\nu,h}(g) := \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \varphi_j^*(h)}{h^2 \lambda_j} \right)^m \eta^*\left(\frac{j}{\nu}\right) \widehat{g}_j, \quad g \in L_p(M). \quad (4.47)$$

Докажем, что справедливо неравенство

$$\|B_{\nu,h}(g)\|_p \leq c \|g\|_p, \quad (4.48)$$

где c – некоторая постоянная, не зависящая от ν и h .

Заметим, что $\eta^*(hj) = 1$ при $j < 2\nu$ (так как $h \in (0, 1/(2\nu)]$) и $\eta^*(j/\nu) = 0$ при $j \geq 2\nu$. Поэтому (4.47) можно переписать в виде

$$B_{\nu,h}(g) := \sum_{j=1}^{\infty} \eta^*\left(\frac{j}{\nu}\right) \left(\frac{1 - \varphi_j^*(h)}{h^2 \lambda_j} \right)^m \eta^*(hj) \widehat{g}_j. \quad (4.49)$$

Помимо зональной функции $\eta_\nu(x)$, определенной в (4.11), определим еще зональную функцию

$$Z_h(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 - \varphi_j^*(h)}{h^2 \lambda_j} \right)^m \eta^*(hj) \omega_j \varphi_j(x). \quad (4.50)$$

Из свойства (2.45) следует, что оператор $B_{\nu,h}$ можно записать в виде свертки

$$B_{\nu,h}(g) = g * \eta_\nu * Z_h. \quad (4.51)$$

Из (4.51) и из неравенства (2.10) получаем, что

$$\|B_{\nu,h}(g)\|_p \leq \|\eta_\nu\|_1 \|Z_h\|_1 \|g\|_p. \quad (4.52)$$

Так как $\|\eta_\nu\|_1 \leq c_1$ (см. (4.15)), то для доказательства неравенства (4.48) достаточно показать, что

$$\|Z_h\|_1 \leq c_2 \quad \text{при } h \in (0, 1). \quad (4.53)$$

10) Определим функции

$$\tilde{r}(t, h) := \left(\frac{1 - \varphi_t^*(h)}{h^2 \lambda_t} \right)^m, \quad (4.54)$$

$$\tilde{\gamma}(t, h) := \tilde{r}(t, h) \eta^*(ht). \quad (4.55)$$

Проверим, что функция $\tilde{\gamma}(t, h)$ удовлетворяет условиям предложения 3.1. Рассуждая, как в п. 3), заметим, что для этого достаточно доказать справедливость неравенства

$$|\partial_t^k \tilde{r}(t, h)| \leq c(k) h^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (t, h) \in \mathcal{D}_2, \quad (4.56)$$

где $c(k) > 0$ – некоторая постоянная.

Функцию $\tilde{r}(t, h)$ можно записать в виде

$$\tilde{r}(t, h) = (\psi(t, h))^m, \quad (4.57)$$

где функция $\psi(t, h)$ определена в (4.33). Используя неравенство (4.41) для случая, когда $\Lambda(z) = z^m$, получаем, что неравенство (4.56) выполняется.

11) Так как функция $\tilde{\gamma}(t, h)$ удовлетворяет условиям предложения 3.1, то из этого предложения и из определения функции $Z_h(x)$ следует неравенство (4.53). Таким образом, доказана справедливость неравенства (4.48).

Из определения оператора $B_{\nu, h}$ и из формулы (4.46) имеем

$$*\Delta_h^m(P_\nu(f)) = (-1)^m h^{2m} B_{\nu, h}(\mathcal{B}^m f). \quad (4.58)$$

Отсюда в силу (4.48) следует неравенство (4.17), что завершает доказательство предложения 4.4.

Если $\Phi(x) \in \mathcal{P}_\nu(M)$, то $P_\nu(\Phi) = \Phi$, и из неравенства (4.16) получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $\Phi(x) \in \mathcal{P}_\nu(M)$, $\nu > 0$, $m \in \mathbb{N}$. Тогда для любого числа $h \in (0, 1/(2\nu)]$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{B}^m \Phi\|_p \leq c h^{-2m} \|*\Delta_h^m \Phi\|_p, \quad (4.59)$$

где $c = c(M, m)$ – некоторая постоянная.

Отметим, что неравенство (4.59) является аналогом классического неравенства Никольского–Стечкина (см. [33]–[35]).

Следующее утверждение можно получить из неравенства (4.16) и определения модуля гладкости.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Для $f \in L_p(M)$, $m \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{B}^m(P_\nu(f))\|_p \leq c \nu^{2m} \omega_m\left(f, \frac{1}{2\nu}\right)_p, \quad (4.60)$$

где $c = c(M, m)$ – некоторая постоянная.

Теперь мы докажем теорему джексоновского типа, из которой в качестве следствия получим теорему 1.1 из § 1.

ТЕОРЕМА 4.1. Для $f \in L_p(M)$, $m \in \mathbb{N}$, $\nu > 0$ справедливо неравенство

$$E_\nu(f)_p \leq c \omega_m \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p, \quad (4.61)$$

где $c = c(M, m)$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Проверим, что неравенство (4.61) достаточно доказать для $\nu > 2/\pi$.

Заметим, что $E_\nu(f)_p$ при $\nu \in (0, 1)$ не зависит от ν , а функция $\omega_m(f, 1/\nu)_p$ – непрерывная и невозрастающая при $\nu > 0$. Если неравенство (4.61) справедливо при $\nu > 2/\pi$, то в силу непрерывности $\omega_m(f, 1/\nu)_p$ оно справедливо и при $\nu = 2/\pi$, т.е.

$$E_{2/\pi}(f)_p \leq c \omega_m \left(f, \frac{\pi}{2} \right)_p.$$

Тогда при $\nu < 2/\pi$ получим

$$E_\nu(f)_p = E_{2/\pi}(f)_p \leq c \omega_m \left(f, \frac{\pi}{2} \right)_p \leq c \omega_m \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p,$$

т.е. неравенство (4.61) справедливо.

Далее при доказательстве теоремы будем считать, что $\nu > 2/\pi$.

2) Так как

$$E_\nu(f)_p \leq \|f - P_{\nu/2}(f)\|_p, \quad \|\Delta_{1/\nu}^m f\|_p \leq \omega_m \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p,$$

то для доказательства неравенства (4.61) достаточно доказать неравенство

$$\|f - P_{\nu/2}(f)\|_p \leq c \|\Delta_{1/\nu}^m f\|_p. \quad (4.62)$$

Из свойств (2.45) и (2.47) преобразования Фурье следует, что преобразования Фурье от функций $f - P_{\nu/2}(f)$ и $\Delta_{1/\nu}^m f$ имеют вид

$$\mathcal{F}(f - P_{\nu/2}(f))_j = \left(1 - \eta^* \left(\frac{2j}{\nu} \right) \right) \widehat{f}_j, \quad (4.63)$$

$$\mathcal{F}(\Delta_{1/\nu}^m f)_j = \left(1 - \varphi_j^* \left(\frac{1}{\nu} \right) \right)^m \widehat{f}_j, \quad j \in \mathbb{Z}_+. \quad (4.64)$$

Из (4.63) и (4.64) получаем, что при $j \geq 1$

$$\mathcal{F}(f - P_{\nu/2}(f))_j = \frac{(1 - \eta^*(2j/\nu))}{(1 - \varphi_j^*(1/\nu))^m} \mathcal{F}(\Delta_{1/\nu}^m f)_j. \quad (4.65)$$

Определим семейство операторов A_h , $h \in (0, \pi)$, условием

$$\mathcal{F}(A_h(g))_j = \begin{cases} 0 & \text{при } j = 0, \\ \frac{(1 - \eta^*(2jh))}{(1 - \varphi_j^*(h))^m} \widehat{g}_j & \text{при } j = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (4.66)$$

где $g \in L_p(M)$.

Далее будет показано, что операторы A_h являются линейными ограниченными операторами в банаховом пространстве $L_p(M)$ и справедливо неравенство

$$\|A_h(g)\|_p \leq c\|g\|_p, \quad g \in L_p(M), \quad (4.67)$$

где c – постоянная, не зависящая от h .

Так как из (4.65) следует, что

$$f - P_{\nu/2}(f) = A_{1/\nu}(*\Delta_{1/\nu}^m f),$$

то из (4.67) получаем неравенство (4.62).

3) При $|s| < 1$ функцию $(1-s)^{-m}$ можно разложить в степенной ряд

$$(1-s)^{-m} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k,$$

где a_k – некоторые коэффициенты.

Пусть N – натуральное число,

$$Q_N^{(1)}(s) := \sum_{k=0}^N a_k s^k, \quad Q_N^{(2)}(s) := (1-s)^{-m} - Q_N^{(1)}(s). \quad (4.68)$$

Определим операторы $A_h^{(1)}$ и $A_h^{(2)}$ условиями

$$\mathcal{F}(A_h^{(i)}(g))_j = \begin{cases} 0 & \text{при } j = 0, \\ (1 - \eta^*(2jh))Q_N^{(i)}(\varphi_j^*(h))\widehat{g}_j & \text{при } j = 1, 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (4.69)$$

где $g \in L_p(M)$, $i = 1, 2$.

Далее мы покажем, что $A_h^{(1)}$ и $A_h^{(2)}$ являются линейными ограниченными операторами в банаховом пространстве $L_p(M)$ и при некотором N (N будет указано далее) справедливы неравенства

$$\|A_h^{(1)}(g)\|_p \leq c_1\|g\|_p, \quad \|A_h^{(2)}(g)\|_p \leq c_2\|g\|_p, \quad (4.70)$$

где $c_1 = c_1(M, m, N)$ и $c_2 = c_2(M, m, N)$ – некоторые постоянные, не зависящие от h . Так как $A_h = A_h^{(1)} + A_h^{(2)}$, то из (4.70) будет следовать неравенство (4.67).

4) Из свойств (2.45) и (2.47) преобразования Фурье и из определения члена $Q_N^{(1)}(s)$ (см. (4.68)) получаем, что функция $A_h^{(1)}(g)$ может быть представлена в виде

$$A_h^{(1)}(g) = \sum_{k=0}^N a_k ((S_h)^k g - ((S_h)^k g) * \eta_{1/(2h)}), \quad (4.71)$$

где S_h – оператор сферического усреднения, функция $\eta_\nu(x)$ определена в (4.11). Так как $\|S_h g\|_p \leq \|g\|_p$ (см. (2.25)) и $\|g * \eta_\nu\|_p \leq \|g\|_p \|\eta_\nu\|_1 \leq c_3\|g\|_p$, где $c_3 = c_3(M)$ – постоянная (см. (2.10) и (4.15)), то из (4.71) следует, что $\|A_h^{(1)}(g)\|_p \leq c_1\|g\|_p$, где $c_1 = c_1(M, N)$ – некоторая постоянная, что доказывает первое неравенство в (4.70).

5) Определим функцию

$$\gamma(t, h) := (1 - \eta^*(2th))Q_N^{(2)}(\varphi_t^*(h)), \quad (4.72)$$

где $t \in (0, +\infty)$, $h \in (0, \pi/2)$. Докажем, что при достаточно большом N функция $\gamma(t, h)$ удовлетворяет условиям предложения 3.1.

Из определения функции $Q_N^{(2)}(s)$ (см. (4.68)) следует, что ее можно представить в виде

$$Q_N^{(2)}(s) = s^{N+1}T_N(s)(1-s)^{-m}, \quad (4.73)$$

где $T_N(s)$ – некоторый многочлен. Так как $|\varphi_t^*(h)| < 1$ при $t > 0$, $h \in (0, \pi/2)$ (см. п. 2) предложения 3.2), то $\gamma(t, h) \in C^\infty((0, +\infty) \times (0, \pi/2))$ и, в частности, выполнено условие 1) предложения 3.1. Для проверки условия 2) нужно показать, что для любых целых чисел k и r , $0 \leq k \leq l+1$, $0 \leq r \leq l+2$, выполняется неравенство

$$|(ht)^r \partial_t^k \gamma(t, h)| \leq ch^k, \quad t \in (0, +\infty), \quad h \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad (4.74)$$

где $l = [\alpha] + 2$, $c = c(k, r)$ – постоянная, не зависящая от t и h .

Рассмотрим следующую область в $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{D} := \left\{ (t, h) : t > 0, \quad h \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad 2th > 1 \right\}.$$

Заметим, что неравенство (4.74) выполняется при $2th \leq 1$, так как при этом $1 - \eta^*(2th) = 0$ и, следовательно, $\gamma(t, h) = 0$. Поэтому достаточно доказать неравенство (4.74) при $(t, h) \in \mathcal{D}$. Будем далее считать, что $(t, h) \in \mathcal{D}$.

Из п. 3) предложения 3.2 при $\varkappa = 1/2$ и из предложения 3.3 следует, что при $(t, h) \in \mathcal{D}$ выполняются неравенства

$$|\varphi_t^*(h)| \leq c_1(2th)^{-\alpha-1/2}, \quad (4.75)$$

$$1 - \varphi_t^*(h) \geq c_2, \quad (4.76)$$

где c_1 и c_2 – некоторые постоянные. В качестве N возьмем любое натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)(N - l) > l + 2 \quad (4.77)$$

(можно, например, взять $N = l + 1 + [(l + 2)/(\alpha + 1/2)]$).

Используя (4.73), представим функцию $\gamma(t, h)$ в виде произведения

$$\gamma(t, h) = \gamma_1(t, h)\gamma_2(t, h)\gamma_3(t, h),$$

где

$$\gamma_1(t, h) := (1 - \eta^*(2th)), \quad (4.78)$$

$$\gamma_2(t, h) := (\varphi_t^*(h))^{N+1}, \quad (4.79)$$

$$\gamma_3(t, h) := T_N(\varphi_t^*(h))(1 - \varphi_t^*(h))^{-m}. \quad (4.80)$$

Очевидно, что для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ выполняется неравенство

$$|\partial_t^k \gamma_1(t, h)| \leq c_3 h^k \quad (4.81)$$

с некоторой постоянной $c_3 = c_3(k)$.

Производную $\partial_t^k \gamma_2(t, h)$ можно представить в виде линейной комбинации функций вида

$$(\varphi_t^*(h))^{N+1-k_0} \partial_t^{k_1} \varphi_t^*(h) \cdots \partial_t^{k_s} \varphi_t^*(h), \quad (4.82)$$

где $k_0, k_1, \dots, k_s$ – некоторые неотрицательные числа, $k_0 \leq k$ и $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = k$.

Если $k \leq l + 1$, то из (4.77) получаем, что

$$\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)(N + 1 - k_0) \geq \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)(M - l) > l + 2.$$

Тогда из (4.75) следует, что

$$|(\varphi_t^*(h))^{N-k_0+1}| \leq c_4 (2th)^{-l-2}, \quad (4.83)$$

а из неравенства (3.45) имеем оценку

$$|\partial_t^{k_1} \varphi_t^*(h) \cdots \partial_t^{k_s} \varphi_t^*(h)| \leq c_5 h^k, \quad (4.84)$$

где $c_4 = c_4(M, k)$ и $c_5 = c_5(M, k)$ – некоторые постоянные.

Так как $\partial_t^k \gamma_2(t, h)$ является линейной комбинацией функций вида (4.82), то, используя (4.83) и (4.84), получаем

$$|\partial_t^k \gamma_2(t, h)| \leq c_6 h^k (th)^{-l-2}, \quad 0 \leq k \leq l + 1, \quad (4.85)$$

где $c_6 = c_6(M, k)$ – постоянная.

Функцию $\gamma_3(t, h)$ представим в виде

$$\gamma_3(t, h) = \Lambda(\varphi_t^*(h)),$$

где $\Lambda(u) := T_N(u)(1 - u)^{-m}$. Из неравенства (4.76) и из того, что $|\varphi_t^*(h)| < 1$, следует, что $\varphi_t^*(h) \in [-1, 1 - c_2]$ при $(t, h) \in \mathcal{D}$. Так как $c_2 > 0$, то функция $\Lambda(u)$ и все ее производные $\Lambda^{(k)}(u)$ ограничены на отрезке $[-1, 1 - c_2]$. Пусть

$$L(k) := \max\{|\Lambda^{(k)}(u)| : u \in [-1, 1 - c_2]\}.$$

Производную $\partial_t^k \gamma_3(t, h)$ можно представить в виде суммы конечного числа (зависящего от k) слагаемых вида

$$\Lambda^{(k_0)}(\varphi_t^*(h)) \partial_t^{k_1} \varphi_t^*(h) \cdots \partial_t^{k_s} \varphi_t^*(h), \quad (4.86)$$

где $k_0, k_1, \dots, k_s$ – некоторые натуральные числа, $k_0 \leq k$ и $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = k$. Из неравенства (3.45) следует, что каждая функция (4.86) при $(t, h) \in \mathcal{D}$ допускает оценку

$$|\Lambda^{(k_0)}(\varphi_t^*(h)) \partial_t^{k_1} \varphi_t^*(h) \cdots \partial_t^{k_s} \varphi_t^*(h)| \leq L(k_0) c^s h^k.$$

Из этой оценки получаем

$$|\partial_t^k \gamma_3(t, h)| \leq c_7 h^k \quad (4.87)$$

с некоторой постоянной $c_7 = c_7(k, M)$.

Далее заметим, что $\partial_t^k \gamma(t, h)$ является конечной суммой слагаемых вида

$$\partial_t^{k_1} \gamma_1(t, h) \partial_t^{k_2} \gamma_2(t, h) \partial_t^{k_3} \gamma_3(t, h),$$

где $k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, k_3 \geq 0$ – целые числа и $k_1 + k_2 + k_3 = k$. Используя оценки (4.81), (4.85) и (4.87), получаем

$$|\partial_t^k \gamma(t, h)| \leq c_8 h^k (th)^{-l-2}, \quad 0 \leq k \leq l+1, \quad (t, h) \in \mathcal{D}, \quad (4.88)$$

где $c_8 = c_8(M, k)$ – постоянная.

Из (4.88) следует неравенство (4.74), что завершает доказательство того, что функция $\gamma(t, h)$ удовлетворяет условиям предложения 3.1.

6) Так как функция $\gamma(t, h)$ удовлетворяет условиям предложения 3.1, то зональная функция

$$\Phi_h(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(j, h) \omega_j \varphi_j(x)$$

удовлетворяет неравенству

$$\|\Phi_h\|_1 \leq c \quad (4.89)$$

с некоторой постоянной $c = c(M)$. Из свойства (2.45) следует, что оператор $A_h^{(2)}$ можно записать в виде свертки

$$A_h^{(2)}(g) = g * \Phi_h, \quad g \in L_p(M), \quad (4.90)$$

а тогда из (4.89) имеем

$$\|A_h^{(2)}(g)\|_p \leq \|g\|_p \|\Phi_h\|_1 \leq c \|g\|_p,$$

откуда следует второе неравенство в (4.70).

Так как первое неравенство в (4.70) уже доказано, то это завершает доказательство теоремы 4.1 (см. п. 2) доказательства).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Пусть $f \in W_p^m(M)$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $k \in \mathbb{N}$. Взяв в теореме 4.1 вместо числа m число $(k + m)$, получим неравенство

$$E_\nu(f)_p \leq c_1 \omega_{k+m} \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p, \quad (4.91)$$

где $c_1 = c_1(k, m, M)$. Из свойств модуля гладкости (см. предложение 4.2, п. 6)) следует, что

$$\omega_{k+m} \left(f, \frac{1}{\nu} \right)_p \leq c_2 \nu^{-2m} \omega_k \left(\mathcal{B}^m f, \frac{1}{\nu} \right)_p,$$

где $c_2 = c_2(k, m, M)$, что доказывает теорему 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условия теоремы 1.1 можно ослабить и вместо $\nu \in \mathbb{N}$ считать, что $\nu > 0$ – произвольное действительное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. 1) Пусть $K(f, t; L_p(M), W_p^m(M))$ – K -функционал, построенный по пространствам $L_p(M)$ и $W_p^m(M)$ (см. (1.10)), и пусть $f \in L_p(M)$, $t > 0$. Для краткости обозначим

$$K_m(f, t)_p := K(f, t; L_p(M), W_p^m(M)). \quad (4.92)$$

С учетом обозначения (4.92), нам нужно показать, что для некоторых постоянных $c_1 = c_1(m, M)$ и $c_2 = c_2(m, M)$ справедливо неравенство

$$c_1 \omega_m(f, t)_p \leq K_m(f, t)_p \leq c_2 \omega_m(f, t)_p. \quad (4.93)$$

2) Для доказательства левого неравенства в (4.93) достаточно показать, что

$$\omega_m(f, t)_p \leq c K_m(f, t)_p, \quad (4.94)$$

где $c = c(m, M)$ – постоянная. Пусть $g \in W_p^m(M)$. Используя свойства модуля гладкости (см. предложение 4.2), получаем

$$\begin{aligned} \omega_m(f, t)_p &\leq \omega_m(f - g, t)_p + \omega_m(g, t)_p \leq 2^m \|f - g\|_p + c_3 t^{2m} \|\mathcal{B}^m g\|_p \\ &\leq c_4 (\|f - g\|_p + t^{2m} \|\mathcal{B}^m g\|_p), \end{aligned}$$

где $c_4 = \max\{2^m, c_3\}$. Взяв нижнюю грань по всем $g \in W_p^m(M)$, мы получаем неравенство (4.94).

3) Докажем правое неравенство в (4.93). Если взять $g = P_\nu(f)$ (оператор P_ν определен в (4.10)), $\nu > 0$, то из определения $K_m(f, t)_p$ следует, что

$$K_m(f, t)_p \leq \|f - P_\nu(f)\|_p + t^{2m} \|\mathcal{B}^m(P_\nu(f))\|_p. \quad (4.95)$$

Согласно п. 3) предложения 4.3 справедливо неравенство

$$\|f - P_\nu(f)\|_p \leq c_5 E_\nu(f)_p. \quad (4.96)$$

Используя следствие 4.2 и монотонность функции $\omega_m(f, t)_p$, получим

$$\|\mathcal{B}^m(P_\nu(f))\|_p \leq c_6 \nu^{2m} \omega_m\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p. \quad (4.97)$$

Из (4.95), (4.96), (4.97) и из теоремы 4.1 следует, что

$$K_m(f, t)_p \leq c_7 (1 + (t\nu)^{2m}) \omega_m\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p. \quad (4.98)$$

Взяв в (4.96) $\nu = 1/t$, получим

$$K_m(f, t)_p \leq 2c_7 \omega_m(f, t)_p,$$

что доказывает правое неравенство в (4.93).

В качестве следствия теоремы 1.2 получим еще одно свойство модуля гладкости $\omega_m(f, t)_p$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Существует постоянная $c = c(m, M)$ такая, что при $f \in L_p(M)$, $t > 0$, $\delta > 0$ справедливо неравенство

$$\omega_m(f, \delta t)_p \leq c \max\{1, \delta^{2m}\} \omega_m(f, t)_p. \quad (4.99)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения K -функционала легко вывести неравенство

$$K_m(f, \delta t)_p \leq \max\{1, \delta^{2m}\} K_m(f, t)_p,$$

из которого в силу (4.93) получаем (4.99).

Список литературы

- [1] А. Бессе, *Многообразия с замкнутыми геодезическими*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: A. L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **93**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1978.
- [2] K. Wang, L. Q. Li, *Harmonic analysis and approximation on the unit sphere*, Science Press, Beijing, 2000.
- [3] Yu. Xu, “Weighted approximation of functions on the unit sphere”, *Constr. Approx.*, **21**:1 (2004), 1–28.
- [4] Х. П. Рустамов, “О приближении функций на сфере”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **57**:5 (1993), 127–148; англ. пер.: Kh. P. Rustamov, “On approximation of functions on the sphere”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **43**:2 (1994), 311–329.
- [5] S. M. Nikolskii, “Approximation on manifolds”, *East J. Approx.*, **1**:1 (1995), 1–24.
- [6] С. М. Никольский, П. И. Лизоркин, “Аппроксимация функций на сфере”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **51**:3 (1987), 635–651; англ. пер.: S. M. Nikol’skii, P. I. Lizorkin, “Approximation of functions on the sphere”, *Math. USSR-Izv.*, **30**:3 (1988), 599–614.
- [7] D. L. Ragozin, “Constructive polynomial approximation on spheres and projective spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **162** (1971), 157–170.
- [8] А. И. Камзолов, “Об интерполяционной формуле Рисса и неравенстве Бернштейна для функций на однородных пространствах”, *Матем. заметки*, **15**:6 (1974), 967–978; англ. пер.: A. I. Kamzolov, “On Riesz’s interpolational formula and Bernstein’s inequality for functions on homogeneous spaces”, *Math. Notes*, **15**:6 (1974), 576–582.
- [9] А. И. Камзолов, “О неравенстве Бора–Фавара для функций на компактных симметрических пространствах ранга 1”, *Матем. заметки*, **33**:2 (1983), 187–193; англ. пер.: A. I. Kamzolov, “Bohr–Favard inequality for functions on compact symmetric spaces of rank one”, *Math. Notes*, **33**:2 (1983), 95–98.
- [10] В. А. Иванов, “О неравенствах Бернштейна–Никольского и Фавара на компактных однородных пространствах ранга 1”, *УМН*, **38**:3 (1983), 179–180; англ. пер.: V. A. Ivanov, “On the Bernstein–Nikol’skii and Favard inequalities on compact homogeneous spaces of rank 1”, *Russian Math. Surveys*, **38**:3 (1983), 145–146.
- [11] В. М. Тихомиров, “Теория приближений”, *Анализ – 2*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **14**, ВИНТИ, М., 1987, 103–260.
- [12] L. Q. Li, “Riesz means on compact Riemannian symmetric spaces”, *Math. Nachr.*, **168** (1994), 227–242.
- [13] С. С. Платонов, “Приближения на компактных симметрических пространствах ранга 1”, *Матем. сб.*, **188**:5 (1997), 113–130; англ. пер.: S. S. Platonov, “Approximations on compact symmetric spaces of rank 1”, *Sb. Math.*, **188**:5 (1997), 753–769.

- [14] С. С. Платонов, “Об эквивалентных нормировках пространств H_p^r на компактных однородных многообразиях”, *Матем. заметки*, **68**:6 (2000), 898–909; англ. пер.: S. S. Platonov, “On equivalent normings in the spaces H_p^r on compact homogeneous spaces”, *Math. Notes*, **68**:5–6 (2000), 760–769.
- [15] С. С. Платонов, “Теоремы джексоновского типа на компактных симметрических пространствах ранга 1”, *Сиб. матем. журн.*, **42**:1 (2001), 136–148; англ. пер.: S. S. Platonov, “Jackson type theorems for compact rank 1 symmetric spaces”, *Siberian Math. J.*, **42**:1 (2001), 119–130.
- [16] А. Г. Бабенко, “Точное неравенство Джексона–Стечкина для L^2 -приближений на отрезке с весом Якоби и проективных пространствах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:6 (1998), 27–52; англ. пер.: A. G. Babenko, “An exact Jackson–Stechkin inequality for L^2 -approximation on the interval with the Jacobi weight and on projective spaces”, *Izv. Math.*, **62**:6 (1998), 1095–1119.
- [17] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства*, Мир, М., 1964; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **12**, Academic Press, New York–London, 1962.
- [18] С. Хелгасон, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства*, Факториал Пресс, М., 2005; пер. с англ.: S. Helgason, *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, Pure Appl. Math., **80**, Academic Press, New York–San Francisco–London, 1978.
- [19] Г. А. Калябин, “О модулях гладкости функций, заданных на сфере”, *Докл. АН СССР*, **294**:5 (1987), 1051–1054; англ. пер.: G. A. Kalyabin, “On moduli of smoothness of functions given in the sphere”, *Soviet Math. Dokl.*, **35**:3 (1987), 619–622.
- [20] С. С. Платонов, “Приближение функций в метрике L_2 на некомпактных симметрических пространствах ранга 1”, *Алгебра и анализ*, **11**:1 (1999), 244–270; англ. пер.: S. S. Platonov, “Approximation of functions in the L_2 -metric on noncompact symmetric spaces of rank 1”, *St. Petersburg Math. J.*, **11**:1 (2000), 183–201.
- [21] В. И. Иванов, О. И. Смирнов, “О теореме Джексона в пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}_2^n)$ ”, *Матем. заметки*, **60**:3 (1996), 390–405; англ. пер.: V. I. Ivanov, O. I. Smirnov, “On Jackson’s theorem in the space $\ell_2(\mathbb{Z}_2^n)$ ”, *Math. Notes*, **60**:3 (1996), 288–299.
- [22] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, 2-е изд., Наука, М., 1977; англ. пер. 1-го изд.: S. M. Nikol’skiĭ, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Grundlehren Math. Wiss., **205**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1975.
- [23] H. Johnen, K. Scherer, “On the equivalence of the K -functional and moduli of continuity and some applications”, *Constructive theory of functions of several variables* (Proc. Conf., Math. Res. Inst., Oberwolfach, 1976), Lecture Notes in Math., **571**, Springer-Verlag, Berlin, 1977, 119–140.
- [24] R. A. DeVore, G. G. Lorentz, *Constructive approximation*, Grundlehren Math. Wiss., **303**, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [25] С. Хелгасон, *Группы и геометрический анализ*, Мир, М., 1987; пер. с англ.: S. Helgason, *Groups and geometric analysis*, Pure Appl. Math., **113**, Academic Press, Orlando, FL, 1984.
- [26] S. Helgason, “The Radon transform on Euclidean spaces, compact two-point homogeneous spaces and Grassmann manifolds”, *Acta Math.*, **113**:1 (1965), 153–180.
- [27] S. Helgason, *Geometric analysis on symmetric spaces*, Math. Surveys Monogr., **39**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [28] Th. Q. Sherman, “The Helgason Fourier transform for compact Riemannian symmetric spaces of rank one”, *Acta Math.*, **164**:1 (1990), 73–144.
- [29] Г. Церё, *Ортогональные многочлены*, Физматлит, М., 1962; пер. с англ.: G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1959.

- [30] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, 2, Наука, М., 1973–1974; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, vols. I, II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1953.
- [31] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, 5-е изд., Наука, М., 1971; англ. пер. 4-го изд.: I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, New York–London–Toronto, ON, 1980.
- [32] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, т. I, II, Наука, М., 1970; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Tables of integral transforms*, vols. I, II, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1954.
- [33] С. М. Никольский, “Обобщение одного неравенства С. Н. Бернштейна”, *Докл. АН СССР*, **60**:9 (1948), 1507–1510.
- [34] С. Б. Стечкин, “Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна”, *Докл. АН СССР*, **60**:9 (1948), 1511–1514.
- [35] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматгиз, М., 1960; англ. пер.: A. F. Timan, *Theory of approximation of functions of a real variable*, Pergamon Press, Oxford–New York, 1963.

С. С. Платонов (S. S. Platonov)

Математический факультет

Петрозаводского государственного университета

E-mail: platonov@psu.karelia.ru

Поступила в редакцию

28.03.2008 и 09.12.2008