Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Неклюдов, Аналоги теорем Чернова и Ли–Троттера, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 10, 81–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm5097>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:44:50

УДК 517.983.23

А. Ю. Неклюдов

Аналоги теорем Чернова и Ли–Троттера

Изучается абстрактная задача Коши $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0 \in \mathcal{D}(A)$ для линейных плотно определенных операторов A в банаховом пространстве X . Доказано, что решение $x(\cdot)$ этой задачи может быть представлено в виде предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \{F(t/n)^n x_0\}$ в слабой топологии $\sigma(X, X^*)$, где функция $F: [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(X)$ удовлетворяет равенству $F'(0)y = Ay$, $y \in \mathcal{D}(A)$, для естественного класса операторов. В отличие от теоремы Чернова здесь не предполагается существование глобального решения задачи Коши. На основе этого результата найдены необходимые и достаточные условия того, что линейный оператор C замыкаем и его замыкание является генератором C_0 -полугруппы. Получены новые критерии того, что сумма двух генераторов C_0 -полугрупп является генератором C_0 -полугруппы и при этом выполняется формула Ли–Троттера.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: теорема Чернова, теорема Ли–Троттера, полугруппы.

§ 1. Введение

Теорема Чернова [1], представляющая собой обобщение теоремы Ли–Троттера [2], используется для исследования задач, связанных с эволюционными уравнениями. В частности, одной из областей применений теоремы Чернова является теория фейнмановских интегралов (введение в эту теорию содержится в книге [3]). С помощью теоремы Чернова были развиты новые методы построения диффузионных процессов на римановых многообразиях и получены формулы Фейнмана (и вытекающие из них формулы Фейнмана–Каца), дающие явные представления решений уравнений типа уравнения теплопроводности на компактных римановых многообразиях (см. [2], [4]–[8]). Теорема Чернова может быть сформулирована следующим образом (см. [9]).

ТЕОРЕМА. Пусть F является функцией, определенной на $[0, \infty)$, со значениями в пространстве $\mathcal{L}(X)$, состоящем из всех непрерывных линейных операторов в банаховом пространстве X . Пусть Z является плотно определенным линейным оператором в пространстве X и выполняются следующие условия:

- i) $F(0) = I$ и существуют $a \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$ такие, что

$$\left\| F^m \left(\frac{s}{n} \right) \right\| \leq M \exp \left(\frac{am}{n} s \right)$$

для любых $n, m \in \mathbb{N}$ и $s \geq 0$;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00230).

ii) $\mathcal{D}(F'(0)) \supset \mathcal{D}(Z)$ и $F'(0)f = Zf$, $f \in \mathcal{D}(Z)$;

iii) замыкание Z существует и является генератором C_0 -полугруппы.

Тогда $F(t/n)^n$ сходится к $\exp(t\bar{Z})$ при $n \rightarrow \infty$ в сильной операторной топологии равномерно относительно $t \in [0, T]$ для каждого $T > 0$.

Основная трудность применения теоремы Чернова заключается в проверке условия iii). В настоящей работе изучается класс $\mathfrak{Z}$, состоящий из всех плотно определенных операторов Z , удовлетворяющих условиям i), ii) теоремы Чернова для некоторой функции F . Заметим, что условие iii) означает существование функции F , удовлетворяющей условиям i), ii) для заданного Z . Действительно, если условие iii) выполнено, то для функции $F(t) = \exp(t\bar{Z})$, где $t \in [0, \infty)$, выполняются условия i), ii). Таким образом, довольно естественной является задача нахождения условий, при которых линейный оператор $Z \in \mathfrak{Z}$ является замыкаемым и его замыкание является генератором C_0 -полугруппы. В статье доказано, что из условий i), ii) следует замыкаемость оператора Z (теорема 3.1). Более того, доказано, что если существует (локальное) решение абстрактной задачи Коши

$$\dot{x} = \bar{Z}x \quad (1.1)$$

с начальным условием $x(0) = x_0 \in \mathcal{D}(\bar{Z})$, то это решение единственно и представляется в виде предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \{F(t/n)^n x_0\}$ в слабой топологии $\sigma(X, X^*)$ (теорема 4.1). Заметим, что здесь в отличие от теоремы Чернова не предполагается существование глобального решения задачи Коши. На основе этого результата для произвольного плотноопределенного диссипативного оператора Z , заданного в гильбертовом пространстве, получено представление решения задачи Коши (1.1) в виде формулы типа Чернова (следствие 4.2). Также из этой теоремы непосредственно следует, что из существования локального решения уравнения Шрёдингера следует представление этого решения в виде фейнмановского интеграла. Далее, на основе теоремы 4.1 выведены необходимые и достаточные условия того, что линейный оператор A замыкаем и его замыкание является генератором C_0 -полугруппы (теоремы 5.1–5.4 и следствия 5.3, 5.4). В качестве следствий этих результатов получены критерии того, что сумма двух генераторов C_0 -полугрупп является генератором C_0 -полугруппы и при этом выполняется формула Ли–Троттера (следствия 5.1, 5.2, 5.5).

§ 2. Терминология и предварительные сведения

Для любого нормированного пространства $(E, \|\cdot\|_E)$ (над полем $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) обозначим через $\mathcal{L}(E)$ пространство всех ограниченных линейных операторов в E с заданной топологией поточечной сходимости (сильной операторной топологией); I – тождественный оператор в E . Для любого линейного оператора A в E пусть $\mathcal{D}(A)$ обозначает область определения A . Далее, любое линейное подпространство E рассматривается как нормированное пространство с нормой, совпадающей с ограничением нормы E на это подпространство. Напомним, что сопряженное пространство E^* представляет собой банахово пространство, состоящее из всех линейных непрерывных функционалов на E с заданной нормой $\|\cdot\|_{E^*}$, определенной равенством $\|f\|_{E^*} = \sup_{\|x\|_E \leq 1} f(x)$, $x \in E$, для

каждого $f \in \mathbf{E}^*$. В дальнейшем будет опускаться индекс пространства в норме $\|\cdot\|_{\mathbf{E}}$. Для любой функции $S: [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{E})$ обозначим через S^* функцию, определенную на $[0, \infty)$, со значениями в $\mathcal{L}(\mathbf{E})$ такую, что $S^*(s) = (S(s))^*$ для каждого $s \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Назовем (сильной) производной в точке нуль функции $S: [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{E})$ линейное отображение $S'(0): \mathcal{D}(S'(0)) \mapsto \mathbf{E}$, определенное равенством $S'(0)\psi = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1}(S(h)\psi - S(0)\psi)$, $\psi \in \mathcal{D}(S'(0))$, где $\mathcal{D}(S'(0))$ состоит из всех $\psi \in \mathbf{E}$, для которых этот предел существует.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $\mathcal{F}_{M,a}^{\mathbf{E}}$, $M \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$, – множество, состоящее из всех функций $F: [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{E})$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) $F(0) = I$ и $\|F^m(s/n)\| \leq M \exp(ams/n)$ для любых $n, m \in \mathbb{N}$ и $s \geq 0$;
- (ii) $\mathcal{D}(F'(0))$ плотно в $\mathbf{E}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. $\mathcal{F}_{\mathbf{E}}$ – множество, состоящее из всех функций $F: [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{E})$, для которых существуют $M \geq 1$, $a \in \mathbb{R}$ такие, что $F \in \mathcal{F}_{M,a}^{\mathbf{E}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Условие (i) определения 2.2 может быть заменено на эквивалентное условие (i*):

- (i*) $F(0) = I$ и $\|F^n(s/n)\| \leq M \exp(as)$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $s \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. $\mathfrak{Z}$ – множество, состоящее из всех плотно определенных линейных операторов в $\mathbf{E}$, для которых существует функция $F \in \mathcal{F}_{\mathbf{E}}$ такая, что $\mathcal{D}(Z) \subset \mathcal{D}(F'(0))$ и $Zf = F'(0)f$ при каждом $f \in \mathcal{D}(Z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Функцию $T: [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{E})$ называют C_0 -полугруппой, если выполняются следующие условия:

- 1) $T(0) = I$, $T(l+m) = T(l)T(m)$ для любых $l, m \in [0, \infty)$;
- 2) функция T непрерывна;
- 3) существуют $M > 1$, $a \in \mathbb{R}$ такие, что $\|T(s)\| \leq M \exp(as)$ при каждом $s \geq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Линейный оператор Z называют генератором C_0 -полугруппы T , если Z является (сильной) производной в точке нуль функции T .

Хорошо известно, что имеется взаимно однозначное соответствие между C_0 -полугруппами и их генераторами. Доказательства следующих результатов можно найти в [10].

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathbf{E}$ – банахово пространство. Предположим, что функция $T: [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{E})$ является C_0 -полугруппой. Тогда $\mathcal{D}(T^{*'}(0))$ *-плотно в $\mathbf{E}^*$, где $T^{*'}(0)$ – (сильная) производная в нуле функции T^* .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Пусть $\mathbf{E}$ – рефлексивное банахово пространство. Предположим, что функция $T: [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbf{E})$ является C_0 -полугруппой. Тогда функция T^* является также C_0 -полугруппой, причем для ее генератора выполнено следующее равенство: $T^{*'}(0) = (T'(0))^*$.

В настоящей статье мы предполагаем, что $\mathbf{X}$ – банахово пространство и $\mathcal{B}$ – либо рефлексивное сепарабельное банахово пространство, либо гильбертово пространство.

§ 3. Замыкаемость операторов из класса $\mathfrak{Z}$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Предположим, что $F \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$, $t > 0$ и $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – строго возрастающая последовательность, состоящая из натуральных чисел. Тогда для любых сепарабельных замкнутых линейных пространств $\Phi \subset \mathbf{X}$ и $\Psi \subset \mathbf{X}^*$ существует подпоследовательность $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что существует предел*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left\{ F \left(\frac{t}{g_k} \right) \right\}^{[g_k s]} g, \varphi \right) \quad (3.1)$$

для любых $g \in \Phi$, $\varphi \in \Psi$ и $s > 0$. Более того, если такая подпоследовательность $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ выбрана, то семейство функций $T_s: \Phi \times \Psi \mapsto \mathbb{T}$, $s \geq 0$, определенное равенством

$$T_s(g, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left\{ F \left(\frac{t}{g_k} \right) \right\}^{[g_k s/t]} g, \varphi \right), \quad (3.2)$$

удовлетворяет следующим условиям.

- a) $T_s(g, \varphi)$ линейна по переменным g и φ , причем выполняется неравенство

$$\|T_s(g, \varphi)\| \leq M \exp(as) \|g\| \|\varphi\|, \quad s \geq 0.$$

- b) $T_s(g, \varphi)$ непрерывна по s при любых фиксированных $g \in \Phi$ и $\varphi \in \Psi$. Более того, эта непрерывность равномерна по $\varphi \in \Upsilon$, где Υ – ограниченное подмножество Ψ .

- c) Если $f \in \Phi \cap \mathcal{D}(F'(0))$ и $F'(0)f \in \Phi$, то существует

$$(T_s(f, \varphi))'_s = T_s(F'(0)f, \varphi), \quad s \geq 0, \quad \varphi \in \Psi,$$

равномерно по $\varphi \in \Upsilon$, где Υ – ограниченное подмножество Ψ .

- d) Предположим, что $\varphi \in \mathcal{D}(F^{*'}(0))$ и $F^{*'}(0)\varphi \in \Psi$. Тогда для любой $f \in \Phi$

$$T_m(f, \varphi) - T_l(f, \varphi) = \int_l^m T_s(f, F^{*'}(0)\varphi) ds, \quad m, l \geq 0.$$

- e) Если $\varphi \in \mathcal{D}(F^{*'}(0))$ и $F^{*'}(0)\varphi \in \Psi$, то для любой $f \in \Phi$

$$(T_s(f, \varphi))'_s = T_s(f, F^{*'}(0)\varphi), \quad s \geq 0.$$

Далее мы сформулируем несколько вспомогательных лемм.

ЛЕММА 3.1. *Предположим, что $F \in \mathcal{F}_{M,a}^{\mathbf{X}}$, $M \geq 1$, $a = 0$. Тогда для любых $g \in \mathbf{X}$ существует предел $\lim_{i/k \rightarrow 0} (F^i(t/k) - I)g = 0$, $i, k \in \mathbb{N}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Предел в лемме 3.1 рассматривается как предел по базе, состоящей из всех множеств вида $\{(i, k) \mid |i/k| < \epsilon, i, k \in \mathbb{N}\}$, где $\epsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Если $g \in \mathcal{D}(F'(0))$, то выполняется следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \left\| \left(F^i \left(\frac{t}{k} \right) - I \right) g \right\| &= i \frac{t}{k} \left\| \left(\frac{F(t/k)^{i-1} + \dots + I}{i} \right) \frac{(F(t/k)g - g)}{t/k} \right\| \\ &\leq i \frac{t}{k} M \left\| \frac{(F(t/k)g - g)}{t/k} \right\| \leq i \frac{t}{k} \cdot 2M \|F'(0)g\|, \end{aligned}$$

где $k > k_0(g)$. Следовательно,

$$\lim_{i/k \rightarrow 0} \left(F^i \left(\frac{t}{k} \right) - I \right) g = 0.$$

Если $g \notin \mathcal{D}(F'(0))$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $g' \in \mathcal{D}(F'(0))$, для которого $\|g - g'\| < \varepsilon/(2M)$ и

$$\begin{aligned} \left\| \limsup_{i/k \rightarrow 0} \left(F^i \left(\frac{t}{k} \right) - I \right) g \right\| \\ \leq \left\| \limsup_{i/k \rightarrow 0} \left(F^i \left(\frac{t}{k} \right) - I \right) (g - g') \right\| + \left\| \limsup_{i/k \rightarrow 0} \left(F^i \left(\frac{t}{k} \right) - I \right) g' \right\| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Из произвольности ε следует утверждение леммы.

Из леммы 3.1 легко выводится следующая лемма.

ЛЕММА 3.2. *Предположим, что $F \in \mathcal{F}_{M,a}^{\mathbf{X}}$, где $M \geq 1$, $a = 0$. Тогда для каждого $g \in \mathbf{X}$ существует предел*

$$\lim_{|i-l/k| \rightarrow 0} \left(F^i \left(\frac{t}{k} \right) - F^l \left(\frac{t}{k} \right) \right) g = 0, \quad i, l, k \in \mathbb{N}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Предел в лемме 3.2 рассматривается как предел по базе, состоящей из всех множеств вида $\{(i, l, k) \mid 0 < |(i-l)/k| < \epsilon, i, k, l \in \mathbb{N}\}$, где $\epsilon > 0$. В этом же смысле мы будем рассматривать предел в лемме 3.3.

ЛЕММА 3.3. *Предположим, что $F \in \mathcal{F}_{M,a}^{\mathbf{X}}$, где $M \geq 1$, $a = 0$. Тогда для каждого $g \in \mathcal{D}(F'(0))$ существует предел*

$$\lim_{|i-l/k| \rightarrow 0} \frac{(F^i(t/k) - F^l(t/k))g}{(i-l)t/k} - \left(F^{\min(i,l)} \left(\frac{t}{k} \right) \right) F'(0)g = 0, \quad i, l, k \in \mathbb{N}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.3. Имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \limsup_{|i-l/k| \rightarrow 0} \left\| \frac{(F^i(t/k) - F^l(t/k))g}{(i-l)t/k} - \left(F^{\min(i,l)} \left(\frac{t}{k} \right) \right) F'(0)g \right\| \\ \leq M \limsup_{|i-l/k| \rightarrow 0} \left\| \frac{(F^{|i-l|}(t/k) - I)g}{|i-l|t/k} - F'(0)g \right\| \\ \leq M \limsup_{i/k \rightarrow 0} \left\| \frac{(F^i(t/k) - I)g}{it/k} - F'(0)g \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq M \limsup_{i/k \rightarrow 0} \left\| \left(\frac{F(t/k)^{i-1} + \dots + I}{i} \right) \left(\frac{F(t/k)g - g}{t/k} - F'(0)g \right) \right\| \\
&\quad + M \limsup_{i/k \rightarrow 0} \left\| \left(\frac{F(t/k)^{i-1} + \dots + I}{i} \right) F'(0)g - F'(0)g \right\| \\
&\leq \limsup_{i/k \rightarrow 0} M^2 \left\| \left(\frac{F(t/k)g - g}{t/k} - F'(0)g \right) \right\| \\
&\quad + M \limsup_{i/k \rightarrow 0} \left\| \left(\frac{F(t/k)^{i-1} - I}{i} + \dots + \frac{I - I}{i} \right) F'(0)g \right\| = 0,
\end{aligned}$$

где последний предел равен нулю по лемме 3.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.1. Будем предполагать, что $a = 0$, так как случай $a \neq 0$ можно легко свести к случаю $a = 0$, рассматривая вместо функции $F(s)$ функцию $F(s) \exp(-as)$.

Выберем подпоследовательность $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ последовательности $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ такую, что для любого рационального числа $r \geq 0$ существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k r]} g, \varphi \right), \quad g \in \mathbf{C}, \quad \varphi \in \mathbf{D},$$

где $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ – плотные счетные подмножества множеств Φ и Ψ соответственно. В самом деле, такую подпоследовательность можно выбрать, так как выполнено неравенство

$$\left\| \left\{ F\left(\frac{t}{n_k}\right) \right\}^{[n_k r]} \right\| \leq M$$

и имеется счетное множество условий на последовательность $\{g_k\}_{k=1}^\infty$. Таким образом, из плотности $\mathbf{C}$ в Φ (и плотности $\mathbf{D}$ в Ψ) следует, что существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k r]} g, \varphi \right)$$

для любых $g \in \Phi$ и $\varphi \in \Psi$. Покажем, что последний предел существует для любого действительного числа $r \geq 0$. Зафиксируем $r > 0$, $z \in \Psi$ и $\epsilon > 0$. Положим $\epsilon' = \epsilon/(3\|z\|)$. Выберем $\epsilon''(g, \epsilon')$ так, чтобы неравенство

$$\left\| \left(F^i\left(\frac{t}{k}\right) - F^l\left(\frac{t}{k}\right) \right) g \right\| < \epsilon'$$

следовало из неравенства $|(i-l)/k| < \epsilon''$, где $i, l, k \in \mathbb{N}$. Это можно сделать, так как существование такого ϵ'' следует из леммы 3.2. Выберем также число $0 < s \in \mathbb{Q}$ такое, что $|r-s| < \epsilon''/2$. Заметим, что существует $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $2/g_{k_0} < \epsilon''/2$. Тогда из существования предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k s]} g, z \right)$$

следует, что можно выбрать $n_0 > k_0$ такое, что при любых $l, m > n_0$, $l, m \in \mathbb{N}$, выполняется равенство

$$\left| \left(\left\{ F\left(\frac{t}{g_l}\right) \right\}^{[g_l s]} - \left\{ F\left(\frac{t}{g_m}\right) \right\}^{[g_m s]} \right) g, z \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Используя это, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
 & \left| \left(\left(\left\{ F\left(\frac{t}{g_l}\right) \right\}^{[g_l r]} - \left\{ F\left(\frac{t}{g_m}\right) \right\}^{[g_m r]} \right) g, z \right) \right| \\
 & \leq \left| \left(\left(\left\{ F\left(\frac{t}{g_l}\right) \right\}^{[g_l r]} - \left\{ F\left(\frac{t}{g_l}\right) \right\}^{[g_l s]} \right) g, z \right) \right| \\
 & \quad + \left| \left(\left(\left\{ F\left(\frac{t}{g_l}\right) \right\}^{[g_l s]} - \left\{ F\left(\frac{t}{g_m}\right) \right\}^{[g_m s]} \right) g, z \right) \right| \\
 & \quad + \left| \left(\left(\left\{ F\left(\frac{t}{g_m}\right) \right\}^{[g_m s]} - \left\{ F\left(\frac{t}{g_m}\right) \right\}^{[g_m r]} \right) g, z \right) \right| \\
 & \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \leq \epsilon.
 \end{aligned}$$

Здесь было использовано неравенство

$$\frac{|[g_n r] - [g_n s]|}{g_n} \leq |g_n r - g_n s| + \frac{2}{g_n} \leq \epsilon'', \quad n > k_0.$$

Таким образом, доказано существование предела

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k s]} g, \varphi \right), \quad s \geq 0, \quad g \in \Phi, \quad \varphi \in \Psi,$$

и, следовательно, первая часть предложения 3.1 доказана.

Теперь рассмотрим пп. а)–е) предложения 3.1.

а) Утверждение п. а) немедленно следует из определения T_s .

б) Зафиксируем $g \in \Phi$. Из леммы 3.2 следует, что для любого $\epsilon > 0$ существуют $h_0 > 0$ и $k_0 \in \mathbb{N}$ такие, что выполняется неравенство

$$\left| \left(\left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k(s+h)/t]} g, \varphi \right) - \left(\left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k s/t]} g, \varphi \right) \right| < \epsilon \|\varphi\|$$

для любых $|h| < h_0$, $h \geq -s$, $k > k_0$, $k \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем неравенство

$$|T_{s+h}(g, \varphi) - T_s(g, \varphi)| \leq \epsilon \|\varphi\|.$$

Тогда из произвольности ϵ следует утверждение п. б) предложения 3.1.

с) Предположим, что $f \in \Phi \cap \mathcal{D}(F'(0))$ и $F'(0)f \in \Phi$. Из леммы 3.3 следует, что для любого $\epsilon > 0$ существуют $h_0 > 0$ и $k_0 \in \mathbb{N}$ такие, что выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
 & \left| \left(F^{[g_k s/t]} \left(\frac{t}{g_k} \right) f, \varphi \right) - \left(F^{[g_k(s+h)/t]} \left(\frac{t}{g_k} \right) f, \varphi \right) - \frac{t}{g_k} \left(\left[g_k \frac{s}{t} \right] - \left[g_k \frac{s+h}{t} \right] \right) \right. \\
 & \quad \times \left. \left(F^{\min([g_k s/t], [g_k(s+h)/t])} \left(\frac{t}{g_k} \right) F'(0)f, \varphi \right) \right| < \epsilon \|\varphi\| \left| \left[g_k \frac{s}{t} \right] - \left[g_k \frac{s+h}{t} \right] \right| \frac{t}{g_k}
 \end{aligned}$$

для любых $|h| < h_0$, $h \geq -s$, $k > k_0$, $k \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем неравенство

$$\|T_s(f, \varphi) - T_{s+h}(f, \varphi) - h T_{\min(s, s+h)}(F'(0)f, \varphi)\| \leq \epsilon |h| \|\varphi\|.$$

Тогда из произвольности ϵ следует утверждение п. с) предложения 3.1.

d) Предположим, что $\varphi \in \mathcal{D}(F^{*'}(0))$ и $F^{*'}(0)\varphi \in \Psi$. Зафиксируем $\epsilon > 0$ и $m > l$. Выберем r_0 и j_0 так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left\| \left(F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k g/t]} f - F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k h/t]} f \right) \right\| < \epsilon, \\ k \geq j_0, \quad |g - h| < r_0, \quad 0 \leq g, \quad h < m.$$

Существование таких r_0 и j_0 следует из леммы 3.2. Следовательно, мы получаем

$$|T_h(f, F^{*'}(0)\varphi) - T_g(f, F^{*'}(0)\varphi)| \leq \epsilon \quad (3.3)$$

при $|g - h| < r_0$, $0 \leq g, h < m$. Таким образом,

$$\left| \sum_{v=0}^{v_0-1} T_{l+v(m-l)/v_0}(f, F^{*'}(0)\varphi) \left(\frac{m-l}{v_0} \right) - \int_l^m T_s(f, F^{*'}(0)\varphi) ds \right| \leq \epsilon |m-l|, \quad (3.4)$$

где $v_0 = [(m-l)/r_0] + 1$. Выберем $j_1 > j_0$ так, чтобы

$$\left| T_{l+v(m-l)/v_0}(f, F^{*'}(0)\varphi) - \left(F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k(l+v(m-l)/v_0)/t]} f, F^{*'}(0)\varphi \right) \right| < \epsilon$$

для любого $v \in \{0, 1, \dots, v_0\}$ при $k > j_1$. Тогда

$$\left| \sum_{v=0}^{v_0-1} T_{l+v(m-l)/v_0}(f, F^{*'}(0)\varphi) \left(\frac{m-l}{v_0} \right) \right. \quad (3.5)$$

$$\left. - \left(\frac{m-l}{v_0} \right) \sum_{v=0}^{v_0-1} \left(F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k(l+v(m-l)/v_0)/t]} f, F^{*'}(0)\varphi \right) \right| < \epsilon |m-l|. \quad (3.6)$$

Далее заметим, что

$$T_m(f, \varphi) - T_l(f, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k m/t]} f - F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k l/t]} f, \varphi \right) \quad (3.7)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left(F\left(\frac{t}{g_k}\right) - I \right) \left(F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k m/t]-1} + \dots + F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k l/t]} \right) f, \varphi \right) \quad (3.8)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{g_k} \left(F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k m/t]-1} + \dots + F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k l/t]} \right) f, \frac{t}{g_k} \left(F^*\left(\frac{t}{g_k}\right) - I \right) \varphi \right) \quad (3.9)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{g_k} \left(F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k m/t]-1} + \dots + F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k l/t]} \right) f, F^{*'}(0)\varphi \right) \quad (3.10)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{t}{g_k} \sum_{s=0}^{d_k} \left(F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k(l+st/g_k)/t]} f, F^{*'}(0)\varphi \right) \quad (3.11)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{v_0-1} \sum_{s \in \mathbf{B}_{k,v,v_0}} \frac{t}{g_k} \left(F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k(l+st/g_k)/t]} f, F^{*'}(0)\varphi \right), \quad (3.12)$$

где $d_k = [(m-l)g_k/t]$ и

$$\mathbf{B}_{k,v,v_0} = \left\{ s \in \mathbb{N} \mid \frac{v(m-l)}{v_0} \leq \frac{st}{g_k} < \frac{(v+1)(m-l)}{v_0} \right\}.$$

Из неравенства (3.3) и равенств (3.7)–(3.12) следует, что

$$\left| T_l(f, \varphi) + \sum_{v=0}^{v_0-1} \left(F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k(l+v(m-l)/v_0)/t]} f, F^{*'}(0)\varphi \right) \left(\frac{m-l}{v_0} \right) - T_m(f, \varphi) \right| \quad (3.13)$$

$$= \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{v=0}^{v_0-1} \sum_{s \in \mathbf{B}_{k,v,v_0}} \frac{t}{g_k} \left(F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k(l+st/g_k)/t]} f, F^{*'}(0)\varphi \right) \right| \quad (3.14)$$

$$- \left(\frac{m-l}{v_0} \right) \sum_{v=0}^{v_0-1} \left(F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k(l+v(m-l)/v_0)/t]} f, F^{*'}(0)\varphi \right) \right| \quad (3.15)$$

$$\leq \sum_{v=0}^{v_0-1} \left| \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{s \in \mathbf{B}_{k,v,v_0}} \frac{t}{g_k} \left(F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k(l+st/g_k)/t]} f, F^{*'}(0)\varphi \right) \right| \quad (3.16)$$

$$- \frac{m-l}{v_0} \left(F\left(\frac{t}{g_k}\right)^{[g_k(l+v(m-l)/v_0)/t]} f, F^{*'}(0)\varphi \right) \right| < \epsilon v_0 \frac{|m-l|}{v_0}. \quad (3.17)$$

Комбинируя неравенства (3.4)–(3.6) и (3.13)–(3.17), мы получаем неравенство

$$\left| T_m(f, \varphi) - T_l(f, \varphi) - \int_l^m T_s(f, F^{*'}(0)\varphi) ds \right| < 3\epsilon |m-l|.$$

Из произвольности ϵ следует утверждение п. d) предложения 3.1.

е) Пункт е) непосредственно следует из пп. b), d).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Предположим, что функция $F \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$. Тогда оператор $F'(0)$ является замыкаемым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что из существования пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F'(0)f_n = h, \quad h \in \mathbf{X},$$

для любой последовательности $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in \mathcal{D}(F'(0))$, следует, что $h = 0$. В самом деле, это непосредственно следует из леммы 1.8 работы [10]. Мы будем доказывать сформулированное выше утверждение от противного. Предположим, что $h \neq 0$. Тогда существует $\varphi \in \mathbf{X}^*$ такое, что $(h, \varphi) \neq 0$. Обозначим через $\mathbf{B}$ замыкание линейной оболочки элементов вида f_i и $F'(0)f_i$, где $i \in \mathbb{N}$. Тогда согласно предложению 3.1 существует строго возрастающая последовательность $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, $g_k \in \mathbb{N}$, такая, что можно определить семейство функций $T_s: \Phi \times \Psi \mapsto \mathbb{T}$, $s \geq 0$, формулой (3.2) с $\Phi = \mathbf{B}$ и $\Psi = \{\varphi\}$. Следовательно,

$$(T_s(f_i, \varphi))'_s = T_s(F'(0)f_i, \varphi)$$

для любых $i \in \mathbb{N}$. Таким образом, получаем равенство

$$T_s(f_i, \varphi) - (f_i, \varphi) = \int_0^s T_t(F'(0)f_i, \varphi) dt, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (3.18)$$

Переходя к пределу при $i \rightarrow \infty$ в выражении (3.18), получаем равенство

$$T_s(0, \varphi) - (0, \varphi) = \int_0^s T_r(h, \varphi) dr = 0, \quad s \geq 0.$$

То, что это можно сделать, следует из равномерной непрерывности семейства функций $\{T_l(\cdot, \varphi) \mid l \in [0, s]\}$. Следовательно, имеем

$$\left(\int_0^s T_t(h, \varphi) dt \right)'_s = T_s(h, \varphi) = 0, \quad s \geq 0. \quad (3.19)$$

Положим $s = 0$ в (3.19). Тогда

$$T_s(h, \varphi) = (h, \varphi) = 0.$$

Таким образом, мы получили противоречие с предположением, что $h \neq 0$. Предположение доказано.

В качестве следствия из предложения 3.2 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть функция $F \in \mathcal{F}_X$. Предположим, что линейный оператор Z имеет область определения $\mathcal{D}(Z) \subset \mathcal{D}(F'(0))$ и

$$Zf = F'(0)f, \quad f \in \mathcal{D}(Z).$$

Тогда Z – замыкаемый оператор.

§ 4. Формула типа Чернова для решения абстрактной задачи Коши

ЛЕММА 4.1. Предположим, что выполнены условия предложения 3.1. Пусть $f_i \in \mathcal{D}(F'(0)) \cap \Phi$ и $F'(0)f_i \in \Phi$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и, кроме того,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = h, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} Zf_i = g.$$

Тогда

$$(T_s(h, \varphi))'_s = T_s(g, \varphi), \quad s \geq 0, \quad \varphi \in \Psi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в выражении

$$\lim_{l \rightarrow 0} l^{-1} (T_{s+l}(f_i, \varphi) - T_s(f_i, \varphi)) = \lim_{l \rightarrow 0} l^{-1} \int_s^{s+l} T_m(Zf_i, \varphi) dm = T_s(Zf_i, \varphi)$$

мы имеем равномерную сходимость относительно $i \in \mathbb{N}$, так как существует предел

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Zf_i = h$$

и семейство функций $\{T_l(\cdot, \varphi) \mid l \in [0, s]\}$ равномерно непрерывно. Следовательно,

$$\begin{aligned} T_s(g, \varphi) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow 0} l^{-1} (T_{s+l}(f_i, \varphi) - T_s(f_i, \varphi)) \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} \lim_{i \rightarrow \infty} l^{-1} (T_{s+l}(f_i, \varphi) - T_s(f_i, \varphi)) \\ &= \lim_{l \rightarrow 0} l^{-1} (T_{s+l}(h, \varphi) - T_s(h, \varphi)) = (T_s(h, \varphi))'_s. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4.2. *Предположим, что условия предложения 3.1 выполнены. Тогда если $f \in \mathcal{D}(\overline{F'(0)}) \cap \Phi$ и $\overline{F'(0)}f \in \Phi$, то*

$$(T_s(f, \varphi))'_s = T_s(\overline{F'(0)}f, \varphi), \quad s \geq 0, \quad \varphi \in \Psi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из того, что $f \in \mathcal{D}(\overline{F'(0)})$, следует, что существует последовательность $\{f_i\}_{i=1}^\infty$, $f_i \in \mathcal{D}(F'(0))$, такая, что $\lim_{i \rightarrow \infty} f_i = f$ и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F'(0)f_i = \overline{F'(0)}f.$$

Обозначим через Φ' минимальное замкнутое пространство, удовлетворяющее следующим условиям: $\Phi \subset \Phi'$ и $f_i, F'(0)f_i \in \Phi'$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда согласно предложению 3.1 можно выбрать подпоследовательность $\{m_k\}_{k=1}^\infty$ последовательности $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ такую, что можно определить семейство функций $T_s^1: (\Phi', \Psi) \mapsto \mathbb{T}$, $s \geq 0$, равенством

$$T_s^1(g, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left\{ F\left(\frac{t}{m_k}\right) \right\}^{[m_k s/t]} g, \varphi \right), \quad g \in \Phi', \quad \varphi \in \Psi.$$

Из леммы 4.1 (примененной с параметрами $h = f$, $g = \overline{F'(0)}f$) следует, что

$$(T_s^1(f, \varphi))'_s = T_s^1(\overline{F'(0)}f, \varphi), \quad s \geq 0.$$

Так как ограничение функции T_s^1 на множество $\Phi \times \Psi$ совпадает с функцией T_s , то получаем равенство

$$(T_s(f, \varphi))'_s = T_s(\overline{F'(0)}f, \varphi), \quad s \geq 0, \quad \varphi \in \Psi.$$

Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Предположим, что функция $F \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$ и $t, l > 0$. Предположим также, что существует локальное решение $f: [0, l) \mapsto \mathcal{D}(\overline{F'(0)})$ системы*

$$f'(s) = \overline{F'(0)}f(s), \quad s \in [0, l), \quad (4.1)$$

$$f(0) = g \in \mathcal{D}(\overline{F'(0)}). \quad (4.2)$$

Тогда это решение единственно и

$$f(s) = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ F\left(\frac{t}{n}\right) \right\}^{[ns/t]} g, \quad s \in [0, l). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f(s)$, $s \in [0, l)$, является локальным решением системы (4.1), (4.2). Тогда для каждого $r \in \mathbb{Q} \cap [0, l)$ существует последовательность $\{x_n^r\}_{n=1}^\infty$, $x_n^r \in \mathcal{D}(F'(0))$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^r = f(r), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{F'(0)}x_n^r = \overline{F'(0)}f(r).$$

Обозначим через $\mathbf{B}$ минимальное замкнутое линейное подпространство пространства $\mathbf{X}$ такое, что $x_n^r \in \mathbf{B}$ для всех $r \in \mathbb{Q} \cap [0, l)$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем,

что $f(s) \in \mathbf{B}$ для всех $s \in [0, l)$ и, следовательно, $\overline{F'(0)}f(s) \in \mathbf{B}$ для всех $s \in [0, l)$. Для произвольного $\varphi \in \mathbf{X}^*$ выберем подпоследовательность $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ некоторой фиксированной строго возрастающей последовательности $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, $n_k \in \mathbb{N}$, такую, что можно определить семейство функций $T_s: \Phi \times \Psi \mapsto \mathbb{T}$, $s \geq 0$, равенством (3.2) с параметрами $\Phi = \mathbf{B}$, $\Psi = \{\varphi\}$. Тогда из леммы 4.2 следует, что

$$(T_s(f(v), \varphi))'_s = T_s(\overline{F'(0)}f(v), \varphi), \quad s, v \in [0, l).$$

Пользуясь предложением 3.1, получаем, что

$$\begin{aligned} (T_s(f(v-s), \varphi))'_s &= \lim_{a \rightarrow 0} a^{-1} (T_{s+a}(f(v-a-s), \varphi) - T_s(f(v-s), \varphi)) \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} a^{-1} (T_{s+a}((f(v-a-s) - f(v-s)), \varphi)) \\ &\quad + \lim_{a \rightarrow 0} a^{-1} (T_{s+a}(f(v-s), \varphi) - T_s(f(v-s), \varphi)) \\ &= T_s(\overline{F'(0)}f(v-s), \varphi) - T_s(\overline{F'(0)}f(v-s), \varphi) = 0 \end{aligned}$$

для $v \in (0, l)$, $s \in (0, v)$. Отсюда следует, что функция $T_s(f(v-s), \varphi)$ является константой по переменной s . Следовательно,

$$T_v(g, \varphi) = (f(v), \varphi), \quad v \in [0, l).$$

Таким образом, из произвольности выбора последовательности $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ для любого фиксированного $\varphi \in \mathbf{X}^*$ мы получаем существование предела (4.3). Но отсюда следует единственность решения системы (4.1), (4.2).

В качестве следствия предложения 4.1 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.1. *Предположим, что функция $F \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$ и $t, l > 0$ и, кроме того, линейный оператор Z имеет область определения $\mathcal{D}(Z) \subset \mathcal{D}(F'(0))$ и*

$$Zf = F'(0)f, \quad f \in \mathcal{D}(Z).$$

Тогда если существует локальное решение $f: [0, l) \mapsto \mathcal{D}(\overline{Z})$ системы

$$f'(s) = \overline{Z}f(s), \quad s \in [0, l), \quad f(0) = g \in \mathcal{D}(\overline{Z}),$$

то это решение единственно и

$$f(s) = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ F\left(\frac{t}{n}\right) \right\}^{[ns/t]} g, \quad s \in [0, l).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Существование замыкания оператора Z в теореме 4.1 следует из теоремы 3.1.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Предположим, что условия теоремы 4.1 выполнены. Тогда*

$$f'(s) = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ F\left(\frac{t}{n}\right) \right\}^{[ns/t]} \overline{Z}f(0), \quad s \in [0, l).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество $\mathbf{B}$ определяется так же, как и в доказательстве предложения 4.1. Для произвольного $\varphi \in \mathbf{X}^*$ выберем подпоследовательность $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ произвольной строго возрастающей последовательности $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, $n_k \in \mathbb{N}$, такую, что можно определить семейство функций $T_s: \Phi \times \Psi \mapsto \mathbb{T}$, $s \geq 0$, равенством (3.2) с параметрами $\Phi = \mathbf{B}$, $\Psi = \{\varphi\}$. Из леммы 4.2 и теоремы 4.1 следует, что

$$(f'(s), \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k s/t]} \bar{Z}f(0), \varphi \right), \quad s \in [0, l].$$

Так как выбор последовательности $\{n_k\}_{k=1}^\infty$ произволен для любого фиксированного $\varphi \in \mathbf{X}^*$, то мы получаем утверждение следствия. Следствие доказано.

Отметим, что если $\mathbf{X}$ – гильбертово пространство, то, как показывает следующее утверждение, множество диссипативных плотно определенных операторов содержится в $\mathfrak{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство. Тогда любой диссипативный плотно определенный оператор Z в $\mathbb{H}$ содержится в $\mathfrak{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Диссипативность оператора Z означает, что для каждого $f \in \mathcal{D}(Z)$ выполнено неравенство $\operatorname{Re}(Zf, f) \leq 0$. Отсюда получаем, что

$$\|(I - tZ)f\| \geq \operatorname{Re}\left((I - tZ)f, \frac{f}{\|f\|}\right) \geq \frac{(f, f)}{\|f\|} = \|f\| \quad (4.4)$$

для каждого $f \in \mathcal{D}(Z)$. Обозначим $\mathbf{G}_t = \overline{(I - tZ)(\mathcal{D}(Z))}$. Пусть $P_{\mathbf{G}_t}$ – ортогональный проектор на подпространство $\mathbf{G}_t$. Определим функцию $F: [0, \infty) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{H})$ равенством

$$F(t) = \overline{(I - tZ)^{-1}} P_{\mathbf{G}_t}, \quad t \geq 0.$$

Корректность этого определения следует из цепочки неравенств 4.4. Также из нее следует, что $\|F(t)\| \leq 1$. Пусть $f \in \mathcal{D}(Z)$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t)f = \lim_{t \rightarrow 0} (F(t)(f - tZf) + tF(t)Zf) = \lim_{t \rightarrow 0} (f + tF(t)Zf) = f, \quad (4.5)$$

поскольку $\|F(t)\| \leq 1$. Тогда в силу плотности $\mathcal{D}(Z)$ в $\mathbb{H}$ получаем, что для каждого $f \in \mathbb{H}$ существует

$$\lim_{t \rightarrow 0} F(t)f = f.$$

Отсюда следует, что

$$F'(0)f = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(F(t)f - f) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(F(t)(f - tZf) - f) \quad (4.6)$$

$$+ \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(F(t)(tZf)) = \lim_{t \rightarrow 0} F(t)Zf = Zf. \quad (4.7)$$

Таким образом, для каждого $g \in \mathcal{D}(Z)$ выполняется равенство $F'(0)g = Zg$. Отсюда следует, что $F \in \mathcal{F}_{\mathbb{H}}$, причем $\mathcal{D}(Z) \subset \mathcal{D}(F'(0))$ и $Zf = F'(0)f$ для каждого $f \in \mathcal{D}(Z)$. Итак, $Z \in \mathfrak{Z}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть $\mathbb{H}$ – гильбертово пространство и Z – диссипативный плотно определенный оператор в $\mathbb{H}$. Тогда для любого $s \geq 0$ оператор $(I - sZ)^{-1}$ однозначно определен на множестве $(I - sZ)(\mathcal{D}(Z))$ и является замыкаемым. Кроме того, если существует локальное решение $f: [0, l) \mapsto \mathcal{D}(\bar{Z})$ системы

$$f'(s) = \bar{Z}f(s), \quad s \in [0, l), \quad f(0) = g \in \mathcal{D}(\bar{Z}),$$

то это решение единственно и выполнено равенство

$$f(s) = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(I - \frac{s}{n}Z \right)^{-1} P_{s/n} \right\}^n g, \quad s \in [0, l),$$

где P_s – ортогональный проектор на подпространство $\overline{(I - sZ)(\mathcal{D}(Z))}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из доказательства предложения 4.2 и теоремы 4.1.

Следующее утверждение дает слабый вариант формулы Ли–Троттера для локального решения уравнения $f'(s) = \overline{C + D}f(s)$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть $t > 0$. Предположим, что C и D являются генераторами C_0 -полугрупп $\exp(sC)$ и $\exp(sD)$. Предположим также, что выполнены следующие условия:

- i) $\mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(D)$ плотно в $\mathbf{X}$;
- ii) существуют $a \in \mathbb{R}$ и $M \geq 1$ такие, что

$$\left\| \left\{ \exp\left(\frac{s}{n}C\right) \exp\left(\frac{s}{n}D\right) \right\}^m \right\| \leq M \exp\left(as \frac{m}{n}\right), \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Тогда сумма операторов C и D является замыкаемым оператором; если существует локальное решение $f: [0, l) \mapsto \mathcal{D}(\overline{C + D})$ системы

$$f'(s) = \overline{C + D}f(s), \quad s \in [0, l), \quad f(0) = g \in \mathcal{D}(\overline{C + D}),$$

то это решение единственно и выполнено равенство

$$f(s) = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \exp\left(\frac{s}{n}C\right) \exp\left(\frac{s}{n}D\right) \right\}^n g, \quad s \in [0, l).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $F(t) = \exp(tC) \exp(tD)$. Тогда $F(0) = I$. Более того, если $f \in \mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(D)$, то

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(F(t)f - f) &= \lim_{t \rightarrow 0} (\exp(Ct)t^{-1}(\exp(Dt)f - f)) + \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(\exp(Ct)f - f) \\ &= Df + Cf. \end{aligned}$$

Следовательно, мы можем применить теорему 4.1.

Отметим, что в общем случае формула Ли–Троттера неверна для произвольных генераторов C и D . Интересные примеры таких ситуаций приведены в статьях [11], [12].

§ 5. Критерии того, когда замыкание оператора является генератором C_0 -полугруппы

ЛЕММА 5.1. Пусть функция $F \in \mathcal{F}_X$. Предположим, что для некоторых $t, l > 0$ и множества $\Phi \subset X$ существует строго возрастающая последовательность $\{g_k\}_{k=1}^\infty$, состоящая из натуральных чисел, такая, что существует предел

$$w\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k s]} g \quad (5.1)$$

для любых $g \in \Phi$ и любых рациональных чисел $s \in [0, l)$. Тогда предел (5.1) существует для любых $g \in \overline{\text{span}\{\Phi\}}$ и $s \in [0, l)$. Кроме того, семейство операторов $T_s: \overline{\text{span}\{\Phi\}} \rightarrow X$, $s \in [0, l)$, определенных равенством

$$T_s g = w\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k s/t]} g, \quad (5.2)$$

удовлетворяет следующим условиям:

- а) $T_s g$ линейна по переменной g и существуют $M \geq 1$ и $a \in \mathbb{R}$ такие, что выполняется неравенство

$$\|T_s g\| \leq M \exp(as) \|g\|, \quad s \in [0, l);$$

- б) $T_s g$ непрерывна по $s \in [0, l)$ при любом фиксированном $g \in \overline{\text{span}\{\Phi\}}$;

- с) если $f \in \overline{\text{span}\{\Phi\}} \cap \mathcal{D}(F'(0))$ и $F'(0)f \in \overline{\text{span}\{\Phi\}}$, то существует

$$(T_s f)'_s = T_s F'(0)f, \quad s \in [0, l);$$

- д) если $\varphi \in \mathcal{D}(F^{*'}(0))$, то выполнено равенство

$$(T_m f, \varphi) - (T_p f, \varphi) = \int_p^m (T_s f, F^{*'}(0)\varphi) ds, \quad m, p \in [0, l), \quad f \in \overline{\text{span}\{\Phi\}};$$

- е) если $\varphi \in \mathcal{D}(F^{*'}(0))$, то

$$(T_s f, \varphi)'_s = (T_s f, F^{*'}(0)\varphi), \quad s \in [0, l),$$

для любых $f \in \overline{\text{span}\{\Phi\}}$;

- ф) если $f \in \overline{\text{span}\{\Phi\}} \cap \mathcal{D}(F'(0))$, $F'(0)f \in \overline{\text{span}\{\Phi\}}$ и $\mathcal{D}(F^{*'}(0))$ *-плотно в X^* , то $T_s f \in \mathcal{D}((F^{*'}(0))^*)$, $s \in [0, l)$, и выполняются следующие условия:

- 1) $\mathcal{D}((F^{*'}(0))^*) \supset \mathcal{D}(F'(0))$, $(F^{*'}(0))^* f = F'(0)f$;
- 2) $(T_s f)'_s = (F^{*'}(0))^* T_s f$ для любых $s \in [0, l)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство существования предела (5.1) для любых $g \in \overline{\text{span}\{\Phi\}}$ и $s \geq 0$ аналогично доказательству первой части предложения 3.1. Пункт а) очевиден. Пункты б)–е) легко выводятся из предложения 3.1. Докажем п. ф). Из пп. с), е) получаем следующую цепочку равенств:

$$((T_s f, g))'_s = (T_s F'(0)f, g) = (T_s f, F^{*'}(0)g), \quad g \in \mathcal{D}(F^{*'}(0)).$$

Следовательно, из $*$ -плотности $\mathcal{D}(F^{*'}(0))$ в $\mathbf{X}^*$ получаем, что для каждого $s \geq 0$

$$T_s f \in \mathcal{D}((F^{*'}(0))^*), \quad (F^{*'}(0))^* T_s f = T_s F'(0) f.$$

Отсюда следует, что $f \in \mathcal{D}((F^{*'}(0))^*)$ и $(F^{*'}(0))^* f = F'(0) f$. Следовательно, используя п. с), находим, что $(T_s f)'_s = (F^{*'}(0))^* T_s f$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть функция $F \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$. Предположим, что линейный оператор Z имеет область определения $\mathcal{D}(Z) \subset \mathcal{D}(F'(0))$ и

$$Zf = F'(0)f, \quad f \in \mathcal{D}(Z).$$

Предположим также, что $\mathbf{A} \subset \mathcal{D}(Z)$ является плотным линейным подпространством $\mathbf{X}$ и для некоторого фиксированного числа $l > 0$ и всех $f_0 \in \mathbf{A}$ существует локальное решение $f: [0, l) \mapsto \mathcal{D}(\bar{Z})$ системы

$$f'(s) = \bar{Z}f(s), \quad s \in [0, l), \quad (5.3)$$

$$f(0) = f_0. \quad (5.4)$$

Тогда оператор $\bar{Z}$ является генератором C_0 -полугруппы S . Кроме того, для каждого $f \in \mathbf{X}$ выполнено следующее равенство:

$$S(t)f = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(\frac{t}{n}\right)^n f, \quad t \geq 0. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4.1 существует предел

$$w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} F\left(\frac{t}{n}\right)^{[ns/t]} f, \quad s \in [0, l), \quad (5.6)$$

для любого $f \in \mathbf{A}$. Из плотности $\mathbf{A}$ в $\mathbf{X}$ и леммы 5.1 следует существование предела (5.6) для любого $f \in \mathbf{X}$. Положим $G(s)f = w\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} F(t/n)^{[ns/t]} f$, $s \in [0, l)$, $f \in \mathbf{X}$. Из единственности локального решения системы (5.3), (5.4) мы легко заключаем, что для любого $f \in \mathbf{A}$

$$G(s_1)G(s_2)f = G(s_1 + s_2)f, \quad s_1, s_2, s_1 + s_2 \in [0, l). \quad (5.7)$$

Отсюда, пользуясь п. а) леммы 5.1, получаем, что равенство (5.7) выполнено для любого $f \in \mathbf{X}$. Определим функцию $S: [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{X})$ равенством

$$S(s) = \left\{ G\left(\frac{l}{2}\right) \right\}^{[2s/l]} G\left(s - \left[\frac{2s}{l}\right] \frac{l}{2}\right), \quad s \geq 0.$$

Тогда, из пп. а), б) леммы 5.1 и определения функции S заключаем, что функция S является C_0 -полугруппой. Более того, из п. с) леммы 5.1 следует, что $\mathcal{D}(Z) \subset \mathcal{D}(F'(0)) \subset \mathcal{D}(S'(0))$, и из замыкаемости $S'(0)$ получаем, что $\bar{Z}f = S'(0)f$ для каждого $f \in \mathcal{D}(\bar{Z})$. Докажем, что $\mathcal{D}(\bar{Z}) = \mathcal{D}(S'(0))$. Зафиксируем $g \in \mathbf{A}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \frac{s}{n} S\left(k \frac{s}{n}\right) g \in \mathbf{A}$$

и, пользуясь свойствами C_0 -полугрупп, получаем, что существуют следующие пределы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{s}{n} S\left(k \frac{s}{n}\right) g = \int_0^s S(t) g dt,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Z} \sum_{k=1}^n \frac{s}{n} S\left(k \frac{s}{n}\right) g = \int_0^s S(t) \bar{Z} g dt = S(s)g - g, \quad s \in \left[0, \frac{l}{2}\right].$$

Следовательно, в силу замкнутости $\bar{Z}$ имеем $\int_0^s S(t)g dt \in \mathcal{D}(\bar{Z})$ и

$$\bar{Z} \int_0^s S(t)g dt = S(s)g - g.$$

Пусть $f \in \mathbf{X}$. Выберем последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $f_n \in \mathbf{A}$, такую, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. Тогда, пользуясь свойствами C_0 -полугрупп, получаем существование пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^s S(t) f_n dt = \int_0^s S(t) f dt,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Z} \int_0^s S(t) f_n dt = \lim_{n \rightarrow \infty} S(s) f_n - f_n = S(s)f - f, \quad s \in \left[0, \frac{l}{2}\right].$$

Тогда в силу из замкнутости $\bar{Z}$ имеем

$$\int_0^s S(t) f dt \in \mathcal{D}(\bar{Z}), \quad \bar{Z} \int_0^s S(t) f dt = S(s)f - f$$

для $s \in [0, l/2]$. Заметим, что для $f \in \mathcal{D}(S'(0))$ существуют пределы

$$\lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \int_0^s S(t) f dt = f, \quad \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \bar{Z} \int_0^s S(t) f dt = \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} (S(s)f - f) = S'(0)f.$$

Тогда из замкнутости $\bar{Z}$ следует, что $f \in \mathcal{D}(\bar{Z})$. Таким образом, $\bar{Z}$ является генератором C_0 -полугруппы S и, пользуясь теоремой Чернова, мы получаем равенство (5.5). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть Z – плотно определенный линейный оператор в $\mathbf{X}$ и $t > 0$. Тогда Z замыкаем и его замыкание является генератором C_0 -полугруппы только тогда, когда существует функция $F \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$ такая, что выполнены следующие условия:

- i) $\mathcal{D}(F'(0)) \supset \mathcal{D}(Z)$ и $F'(0)f = Zf$, $f \in \mathcal{D}(Z)$;
- ii) $\mathcal{D}(F^{*'}(0))$ *-плотно в X^* ;
- iii) существует плотное линейное подпространство $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{D}(Z)$ такое, что для каждых $f \in \mathbf{A}$ и $s \geq 0$ существует последовательность $\{f_n^s\}_{n=1}^\infty$, $f_n^s \in \mathcal{D}(Z)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F^{[ns]}(t/n)f - f_n^s\| = 0$;
- б) из любой подпоследовательности последовательности $\{f_n^s\}_{n=1}^\infty$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность;

с) из любой подпоследовательности последовательности $\{Zf_n^s\}_{n=1}^\infty$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

Более того, если условия i)–iii) выполнены, то $\exp(s\bar{Z})f = \lim_{n \rightarrow \infty} F(s/n)^n f$, $s > 0$, для любого $f \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\bar{Z}$ является генератором C_0 -полугруппы и $F(s) = \exp(s\bar{Z})$, $s \geq 0$, то легко проверить выполнение условий i)–iii). Действительно, из утверждения 2.1 следует выполнение условий i) и ii). Положим $\mathbf{A} = \mathcal{D}(Z)$. Заметим, что если $f \in \mathbf{A}$, то $\exp(s\bar{Z})f \in \mathcal{D}(\bar{Z})$. Отсюда следует выполнение условия iii). Далее мы будем доказывать, что из выполнения условий i)–iii) следует, что $\bar{Z}$ является генератором C_0 -полугруппы. Пусть $\{s_k\}_{k=1}^\infty$ – последовательность, состоящая из всех неотрицательных рациональных чисел. Зафиксируем $f \in \mathbf{A}$ и строго возрастающую последовательность $\{n_i\}_{i=1}^\infty$, состоящую из натуральных чисел. Пусть последовательность $\{f_n^{s_i}\}_{n=1}^\infty$ для каждого $i \in \mathbb{N}$ удовлетворяет условию iii) для s_i и f . Выберем подпоследовательность $\{n_i^1\}_{i=1}^\infty$ последовательности $\{n_i\}_{i=1}^\infty$ такую, чтобы существовали пределы

$$w\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i^1}^{s_1}, \quad w\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} Zf_{n_i^1}^{s_1}.$$

Тогда из п. а) условия iii) следует существование предела

$$w\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} F^{[n_i^1 s_1]}(t/n_i^1)f.$$

Далее, действуя аналогичным образом, выберем подпоследовательность $\{n_i^2\}$ последовательности $\{n_i^1\}$ такую, чтобы существовали пределы

$$w\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i^2}^{s_2}, \quad w\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} Zf_{n_i^2}^{s_2}, \quad w\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} F^{[n_i^2 s_2]} \left(\frac{t}{n_i^2} \right) f.$$

Таким образом, используя индукцию, можно считать, что для любого натурального $k \geq 3$ выбрана подпоследовательность $\{n_i^k\}_{i=1}^\infty$ последовательности $\{n_i^{k-1}\}_{i=1}^\infty$ такая, что существуют пределы

$$w\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i^k}^{s_k}, \quad w\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} Zf_{n_i^k}^{s_k}, \quad w\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} F^{[n_i^k s_k]} \left(\frac{t}{n_i^k} \right) f.$$

Выберем теперь диагональную последовательность $\{n_i^i\}_{i=1}^\infty$. Тогда будут существовать пределы

$$w\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} f_{n_i^i}^{s_i}, \quad w\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} Zf_{n_i^i}^{s_i}, \quad w\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} F^{[n_i^i s_i]} \left(\frac{t}{n_i^i} \right) f$$

для каждого $k \in \mathbb{N}$. Далее выберем последовательность $\{g_l\}_{l=1}^\infty$, $g_l \in \mathbf{A}$, такую, чтобы существовал предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = F'(0)f.$$

Выберем теперь подпоследовательность d_k последовательности $\{n_k^k\}_{k=1}^\infty$ такую, чтобы существовал предел

$$w\text{-}\lim_{l \rightarrow \infty} F^{[d_l s_k]} \left(\frac{t}{d_l} \right) g_m$$

для каждых $k, m \in \mathbb{N}$. Положим

$$\mathbf{B} = \overline{\text{span} \{ \{f\} \cup \{g_k \mid k \in \mathbb{N}\} \}}.$$

Тогда из леммы 5.1 следует, что существует предел $w\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} F^{[d_i s]}(t/d_i)g$ для любых $s \geq 0$ и $g \in \mathbf{B}$. Определим

$$T_s g = w\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} F^{[d_i s]} \left(\frac{t}{d_i} \right) g, \quad g \in \mathbf{B}.$$

Из совпадения замыкания Z в слабой топологии с замыканием Z в сильной топологии следует, что $T_{s_k} f \in \mathcal{D}(\bar{Z})$ для любого $k \in \mathbb{N}$, поскольку существуют пределы $w\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} f_{d_i}^{s_k}$, $w\text{-}\lim_{i \rightarrow \infty} Z f_{d_i}^{s_k}$. Из п. f) леммы 5.1 и замыкаемости оператора $(F^{*'}(0))^*$ следует, что

$$(T_s f)'_s = \bar{Z} T_s f$$

для любого рационального числа $s \geq 0$. Далее, для произвольного $m > 0$ можно выбрать последовательность $\{m_i\}$, $m_i \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$, такую, что $\lim_{i \rightarrow \infty} m_i = m$. Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_{m_i} f = T_m f, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{Z} T_{m_i} f = \lim_{i \rightarrow \infty} (T_s f)'_{m_i} f = \lim_{i \rightarrow \infty} T_{m_i} Z f = T_m Z f.$$

Таким образом, в силу замыкаемости Z имеем $T_m f \in \mathcal{D}(\bar{Z})$ и для любых $s \geq 0$

$$(T_s f)'_s = \bar{Z} T_s f.$$

Отсюда следует, что $T_s f$ является решением уравнения

$$f'(s) = \bar{Z} f(s)$$

с начальным условием $f(0) = f$. Тогда из теоремы 5.1 получаем, что $\bar{Z}$ является генератором C_0 -полугруппы S , причем для каждого $f \in X$ выполнено равенство

$$S(s)f = \lim_{n \rightarrow \infty} F \left(\frac{s}{n} \right)^n f, \quad s \geq 0.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5.3. *Предположим, что Z – плотно определенный линейный оператор в $\mathbf{X}$ и $t > 0$. Предположим также, что существует функция $F \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$, удовлетворяющая следующим условиям:*

- i) $\mathcal{D}(F'(0)) \supset \mathcal{D}(Z)$ и $F'(0)f = Zf$, $f \in \mathcal{D}(Z)$;
- ii) $\mathcal{D}(F^{*'}(0))$ *-плотно в X^* .

Тогда оператор Z замыкаем и его замыкание является генератором C_0 -полугруппы только тогда, когда существует плотное линейное подпространство $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{D}(Z)$ такое, что для любых $f \in \mathbf{A}$ и $s \geq 0$ существует последовательность $\{f_n^s\}_{n=1}^\infty$, $f_n^s \in \mathcal{D}(Z)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F^{[ns]}(t/n)f - f_n^s\| = 0$;
- b) *из любой подпоследовательности последовательности $\{Z f_n^s\}_{n=1}^\infty$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность;*

- с) из любой подпоследовательности последовательности $\{f_n^s\}_{n=1}^\infty$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Если оператор Z замыкаем и его замыкание является генератором C_0 -полугруппы, то по теореме Чернова достаточно положить $\mathbf{A} = \mathcal{D}(Z)$ и выбрать последовательности $\{f_n^s\}_{n=0}^\infty$, $f_n^s \in \mathbf{A}$, $s \geq 0$, для которых существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^s = \exp(s\bar{Z})f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Zf_n^s = \bar{Z} \exp(s\bar{Z})f.$$

Достаточность. Следует из теоремы 5.2.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть $t > 0$. Предположим, что C и D являются генераторами C_0 -полугрупп $\exp(sC)$ и $\exp(sD)$ в $\mathbf{X}$. Предположим также, что существует множество $\mathbf{B} \subset \mathcal{D}((\exp(sC))^*|_{s=0}) \cap \mathcal{D}((\exp(sD))^*|_{s=0})$ и выполняются следующие условия:

- i) $\mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(D)$ плотно в $\mathbf{X}$;
- ii) $\mathbf{B}^*$ -плотно в $\mathbf{X}^*$;
- iii) существуют $a \in \mathbb{R}$ и $M \geq 1$ такие, что для каждого $n, m \in \mathbb{N}$ и $s > 0$

$$\left\| \left\{ \exp\left(\frac{s}{n}C\right) \exp\left(\frac{s}{n}D\right) \right\}^m \right\| \leq M \exp\left(as\frac{m}{n}\right);$$

- iv) функция $g(s, x) = \exp(sD^*)x$, $s \geq 0$, $x \in \mathbf{X}$, непрерывна в точке $s = 0$ для каждого $x \in (\exp(sC))^*|_{s=0}(\mathbf{B})$.

Тогда сумма операторов C и D является замыкаемым оператором и его замыкание является генератором C_0 -полугруппы только тогда, когда существует плотное линейное подпространство $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(D)$ такое, что для всех $f \in \mathbf{A}$ и $s \geq 0$ существует последовательность $\{f_n^s\}_{n=1}^\infty$, $f_n^s \in \mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(D)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\exp\left(\frac{t}{n}C\right) \exp\left(\frac{t}{n}D\right) \right)^{[ns]} f - f_n^s \right\| = 0$;
- b) из любой подпоследовательности последовательности $\{f_n^s\}_{n=1}^\infty$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность;
- c) из любой подпоследовательности последовательности $\{(C + D)f_n^s\}_{n=1}^\infty$ можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

Более того, если условия а)–с) выполнены, то для каждого $f \in \mathbf{X}$

$$\exp(s(\overline{C+D}))f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \exp\left(\frac{s}{n}C\right) \exp\left(\frac{s}{n}D\right) \right\}^n f, \quad s \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $F(s) = \exp(sC) \exp(sD)$. Поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1}(F(s)f - F(0)f) &= \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1}(\exp(sC) \exp(sD)f - \exp(sC)f) \\ &\quad + \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1}(\exp(sC)f - f) = Cf + Df, \quad f \in \mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(D), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1}(F^*(s) - F(0))f &= \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1}\{(\exp(sD))^*(\exp(sC))^* - (\exp(sD))^*\}f \\ &\quad + \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1}\{(\exp(sD))^*f - f\} = \lim_{t \rightarrow 0} (\exp(tD))^*(\exp(sC)^*)'|_{s=0} f \\ &\quad + (\exp(sD)^*)'|_{s=0} f = (\exp(sC)^*)'|_{s=0} f + (\exp(sD)^*)'|_{s=0} f, \quad f \in \mathbf{B}, \end{aligned}$$

мы заключаем, что $\mathcal{D}(F'(0))$ плотно в X и $\mathcal{D}(F^{*'}(0))$ $*$ -плотно в X^* . Следовательно, применима теорема 5.3 для оператора $Z = C + D$, из которой и следует требуемое утверждение.

ЛЕММА 5.2. Пусть функция $F \in \mathcal{F}_X$. Предположим, что для некоторого $t > 0$ и множества $\Phi \subset X$ существует строго возрастающая последовательность $\{g_k\}_{k=1}^\infty$, состоящая из натуральных чисел, такая, что существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k s]} g \quad (5.8)$$

для любых $g \in \Phi$ и рациональных $s \geq 0$. Тогда предел (5.8) существует для всех $g \in \text{span}\{\Phi\}$ и $s \geq 0$. Более того, семейство операторов $T_s: \text{span}\{\Phi\} \mapsto X$, $s \geq 0$, определенных равенством

$$T_s g = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k s/t]} g,$$

удовлетворяет следующим условиям:

- а) если $T_s f \in \overline{\text{span}\{\Phi\}}$ для некоторого $s \geq 0$, то

$$T_{s+l} f = T_l T_s f, \quad l > 0;$$

- б) если $f \in \overline{\text{span}\{\Phi\}} \cap \mathcal{D}(\overline{F'(0)})$, $\overline{F'(0)}f \in \overline{\text{span}\{\Phi\}}$ и, кроме того, существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $f_n \in \text{span}\{\Phi\} \cap \mathcal{D}(F'(0))$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F'(0)f_n = \overline{F'(0)}f,$$

то существует

$$(T_s f)'_s = T_s \overline{F'(0)}f, \quad s \geq 0;$$

- с) если для некоторого $s \geq 0$

$$T_s f \in \overline{\text{span}\{\Phi\}} \cap \mathcal{D}(\overline{F'(0)}), \quad f \in \overline{\text{span}\{\Phi\}} \cap \mathcal{D}(F'(0)), \\ \overline{F'(0)}T_s f, F'(0)f \in \overline{\text{span}\{\Phi\}}$$

и, кроме того, существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $f_n \in \overline{\text{span}\{\Phi\}} \cap \mathcal{D}(F'(0))$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = T_s f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F'(0)f_n = \overline{F'(0)}T_s f,$$

то существует

$$(T_s f)'_s = \overline{F'(0)}T_s f, \quad s \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство существования предела (5.8) для любых $g \in \text{span}\{\Phi\}$ и $s \geq 0$ аналогично доказательству первой части предложения 3.1.

а) Справедливость утверждения п. (а) вытекает из следующей цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} T_l T_s f &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k l]} T_s f = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k l]} \left(T_s - \left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k s]} \right) f \\ &\quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k l]} \left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k s]} f \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ F\left(\frac{t}{g_k}\right) \right\}^{[g_k l] + [g_k s]} f = T_{l+s} f. \end{aligned}$$

б) Из п. с) леммы 5.1 мы получаем, что

$$T_s f - T_r f = \lim_{n \rightarrow \infty} T_s f_n - T_r f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_r^s T_l F'(0) f_n dl = \int_r^s T_l \overline{F'(0)} f dl$$

для любых $r, s \geq 0$. Отсюда легко следует утверждение п. б).

с) Из п. с) леммы 5.1 и пп. а), б) леммы 5.2 следует, что

$$(T_s f)'_s = T_s F'(0) f = \lim_{l \rightarrow 0} l^{-1} (T_{s+l} f - T_s f) = \lim_{l \rightarrow 0} l^{-1} (T_l - I) T_s f = \overline{F'(0)} T_s f.$$

Следующие два результата являются усилениями следствий 4 и 5 из [13].

ТЕОРЕМА 5.4. *Предположим, что Z – плотно определенный линейный оператор в $\mathbf{X}$ и $t > 0$. Предположим также, что существует функция $F \in \mathcal{F}_{\mathbf{X}}$ такая, что $\mathcal{D}(F'(0)) \supset \mathcal{D}(Z)$ и $F'(0)f = Zf$, $f \in \mathcal{D}(Z)$. Тогда оператор Z замыкаем и его замыкание является генератором C_0 -полугруппы только тогда, когда существует плотное линейное подпространство $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{D}(Z)$ такое, что для любых $f \in \mathbf{A}$ и $s \geq 0$ существует последовательность $\{f_n^s\}_{n=1}^\infty$, $f_n^s \in \mathcal{D}(Z)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

- а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F^{[ns]}(t/n)f - f_n^s\| = 0$;
- б) множества $\{Zf_n^s\}_{n=1}^\infty$ и $\{f_n^s\}_{n=1}^\infty$ предкомпактны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Если оператор Z замыкаем и его замыкание является генератором C_0 -полугруппы, то по теореме Чернова достаточно положить $\mathbf{A} = \mathcal{D}(Z)$ и выбрать последовательности $\{f_n^s\}_{n=0}^\infty$, $f_n^s \in \mathbf{A}$, $s \geq 0$, для которых существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^s = \exp(s\bar{Z})f, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Zf_n^s = \bar{Z} \exp(s\bar{Z})f.$$

Достаточность. Из условия а) следует, что $\{F^{[ns]}(t/n)f\}_{n=1}^\infty$ предкомпактно для каждого $f \in \mathbf{A}$ и $s > 0$. Тогда из плотности $\mathbf{A}$ в $\mathbf{X}$ следует, что $\{F^{[ns]}(t/n)f\}_{n=1}^\infty$ предкомпактно для каждого $f \in \mathbf{X}$ и $s > 0$. Зафиксируем $f \in \mathbf{A}$. Действуя так же, как и в доказательстве теоремы 5.2, мы можем выбрать строго возрастающую последовательность $\{g_n\}_{n=1}^\infty$, для которой существуют пределы

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} F^{[g_n s]} \left(\frac{t}{g_n} \right) f, & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Z f_{g_n}^s, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} F^{[g_n l]} \left(\frac{t}{g_n} \right) f_k^s, & \quad \lim_{n \rightarrow \infty} F^{[g_n l]} \left(\frac{t}{g_n} \right) Z f_k^s \end{aligned}$$

для любых $s, l \in [0, \infty) \cap \mathbb{Q}$ и $k \in \mathbb{N}$. Положим

$$\mathbf{B} = \overline{\text{span}\{\{f\} \cup \{Zf_k^s \mid k \in \mathbb{N}, s \in [0, \infty) \cap \mathbb{Q}\} \cup \{f_k^s \mid k \in \mathbb{N}, s \in [0, \infty) \cap \mathbb{Q}\}\}}.$$

Тогда из леммы 5.2 следует существование предела $\lim_{i \rightarrow \infty} F^{[d_i s]}(t/d_i)g$ для каждого $s \geq 0$ и $g \in \mathbf{B}$. Определим

$$T_s g = \lim_{i \rightarrow \infty} F^{[d_i s]} \left(\frac{t}{d_i} \right) g, \quad g \in \mathbf{B}.$$

Из условия а) следует существование пределов $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{g_n}^s = T_s f$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} Zf_{g_n}^s$ для каждого $s \in [0, \infty) \cap \mathbb{Q}$. Следовательно, в силу замыкаемости Z имеем $T_s f \in \mathcal{D}(\bar{Z}) \cap \mathbf{B}$ и для каждого $s \in [0, \infty) \cap \mathbb{Q}$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} Zf_{g_n}^s = \overline{F'(0)} T_s f \in \mathbf{B}.$$

Далее, из п. с) леммы 5.2 следует, что

$$(T_s f)'_s = \bar{Z} T_s f$$

для каждого рационального $s \geq 0$. Выберем для произвольного $m > 0$ последовательность $\{m_i\}$, $m_i \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$, такую, что $\lim_{i \rightarrow \infty} m_i = m$. Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} T_{m_i} f = T_m f, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{Z} T_{m_i} f = \lim_{i \rightarrow \infty} (T_s f)'_{m_i} f = \lim_{i \rightarrow \infty} T_{m_i} Zf = T_m Zf.$$

Тогда в силу замыкаемости Z имеем $T_m f \in \mathcal{D}(\bar{Z})$ и для каждого $s \geq 0$

$$(T_s f)'_s = \bar{Z} T_s f.$$

Отсюда получаем, что $T_s f$ является решением уравнения

$$f'(s) = \bar{Z} f(s)$$

с начальным условием $f(0) = f$. Тогда из теоремы 5.1 следует, что $\bar{Z}$ является генератором C_0 -полугруппы и по теореме Чернова

$$\exp(s\bar{Z})f = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(\frac{s}{n}\right)^n f, \quad f \in X.$$

Из теоремы 5.4 получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть $t > 0$. Предположим, что C и D являются генераторами C_0 -полугрупп $\exp(sC)$ и $\exp(sD)$. Предположим также, что выполнены следующие условия:

- i) $\mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(D)$ плотно в $\mathbf{X}$;
- ii) существуют $a \in \mathbb{R}$ и $M \geq 1$ такие, что для каждой $n, m \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{R}$

$$\left\| \left\{ \exp\left(\frac{s}{n}C\right) \exp\left(\frac{s}{n}D\right) \right\}^m \right\| \leq M \exp\left(as\frac{m}{n}\right).$$

Тогда сумма операторов C и D является замыкаемым оператором и его замыкание будет генератором C_0 -полугруппы только тогда, когда существует плотное линейное подпространство $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(D)$ такое, что для каждой $f \in \mathbf{A}$ и $s \geq 0$ существует последовательность $\{f_n^s\}_{n=1}^\infty$, $f_n^s \in \mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(D)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\exp\left(\frac{t}{n}C\right) \exp\left(\frac{t}{n}D\right) \right)^{[ns]} f - f_n^s \right\| = 0$;
- b) множества $\{f_n^s\}_{n=1}^\infty$ и $\{(C+D)f_n^s\}_{n=1}^\infty$ предкомпактны.

Более того, если условия а), b) выполнены, то для каждого $f \in X$ выполнено равенство

$$\exp(s(C+D))f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \exp\left(\frac{s}{n}C\right) \exp\left(\frac{s}{n}D\right) \right\}^n f, \quad s > 0.$$

В случае, если X является рефлексивным сепарабельным банаховым пространством или гильбертовым пространством, то формулировки теорем 5.2, 5.3 и следствия 5.1 можно значительно упростить. Используя утверждение 2.2, получаем следующие следствия упомянутых выше результатов.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть $Z: \mathcal{B} \supset \mathcal{D}(Z) \rightarrow \mathcal{B}$ является линейным оператором, $\mathcal{D}(Z)$ плотно в $\mathcal{B}$ и $t > 0$. Тогда оператор Z замыкаем и его замыкание является генератором C_0 -полугруппы только тогда, когда существует функция $F: [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{B})$ удовлетворяющая следующим условиям:

- i) $F(0) = I$ и существуют $a \in \mathbb{R}$ и $M \geq 1$ такие, что $\|F^m(s/n)\| \leq M \exp(asm/n)$ для каждой $n, m \in \mathbb{N}$ и $s \geq 0$;
- ii) $\mathcal{D}(F'(0)) \supset \mathcal{D}(Z)$ и $F'(0)f = Zf$ при $f \in \mathcal{D}(Z)$;
- iii) $\mathcal{D}(F^{*'}(0))$ *-плотно в $\mathcal{B}^*$;
- iv) существует полное линейное подпространство $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{D}(Z)$ такое, что для каждой $f \in \mathbf{A}$ и $s \geq 0$ существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $f_n \in \mathcal{D}(Z)$, для которой, во-первых, существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| F^{[ns]} \left(\frac{t}{n} \right) f - f_n \right\| = 0$$

и, во-вторых, последовательность $\{Zf_n\}_{n=1}^\infty$ является ограниченной.

Более того, если условия i)–iv) выполнены, то для каждого $f \in \mathcal{B}$ выполнено равенство

$$\exp(s\bar{Z})f = \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(\frac{s}{n}\right)^n f, \quad s > 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Пусть $Z: \mathcal{B} \supset \mathcal{D}(Z) \rightarrow \mathcal{B}$ является линейным оператором, $\mathcal{D}(Z)$ плотно в $\mathcal{B}$ и $t > 0$. Предположим, что существует функция $F: [0, \infty) \mapsto \mathcal{L}(\mathcal{B})$, для которой выполнены следующие условия:

- i) $F(0) = I$ и существуют $a \in \mathbb{R}$ и $M \geq 1$ такие, что для любых $n, m \in \mathbb{N}$ и $s \geq 0$

$$\left\| F^m\left(\frac{s}{n}\right) \right\| \leq M \exp\left(as\frac{m}{n}\right);$$

- ii) $\mathcal{D}(F'(0)) \supset \mathcal{D}(Z)$ и $F'(0)f = Zf$, $f \in \mathcal{D}(Z)$;
- iii) $\mathcal{D}(F^{*'}(0))$ *-плотно в $\mathcal{B}^*$.

Тогда оператор Z замыкаем и его замыкание является генератором C_0 -полугруппы только тогда, когда существует плотное линейное подпространство $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{D}(Z)$ такое, что для любых $f \in \mathbf{A}$ и $s \geq 0$ существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $f_n \in \mathcal{D}(Z)$, удовлетворяющая равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| F^{[ns]} \left(\frac{t}{n} \right) f - f_n \right\| = 0,$$

и для которой последовательность $\{F'(0)f_n\}_{n=1}^\infty$ является ограниченной.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. Пусть $t > 0$. Предположим, что операторы C и D являются генераторами C_0 -полугрупп $\exp(sC)$ и $\exp(sD)$ в $\mathcal{B}$ и выполнены следующие условия:

- i) $\mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(D)$ плотно в $\mathcal{B}$;
- ii) $\mathcal{D}(C^*) \cap \mathcal{D}(D^*)$ *-плотно в $\mathcal{B}^*$;
- iii) существуют $a \in \mathbb{R}$ и $M \geq 1$ такие, что для любых $n, m \in \mathbb{N}$ и $s > 0$ выполняется неравенство

$$\left\| \left\{ \exp\left(\frac{s}{n}C\right) \exp\left(\frac{s}{n}D\right) \right\}^m \right\| \leq M \exp\left(as \frac{m}{n}\right).$$

Тогда сумма операторов C и D является замыкаемым оператором и его замыкание является генератором C_0 -полугруппы только тогда, когда существует плотное линейное подпространство $\mathbf{A} \subseteq \mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(D)$ такое, что для любых $f \in \mathbf{A}$ и $s \geq 0$ существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $f_n \in \mathcal{D}(C) \cap \mathcal{D}(D)$, удовлетворяющая следующим условиям:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \left(\exp\left(\frac{t}{n}C\right) \exp\left(\frac{t}{n}D\right) \right)^{[ns]} f - f_n \right\| = 0$;
- b) $\{(C+D)f_n\}_{n=0}^\infty$ – ограниченная последовательность.

Более того, если выполнены условия а), б), то для каждого $f \in \mathcal{B}$ имеет место равенство

$$\exp(s(\overline{C+D}))f = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \exp\left(\frac{s}{n}C\right) \exp\left(\frac{s}{n}D\right) \right\}^n f, \quad s > 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Если операторы iC и iD являются самосопряженными, то условия ii), iii) в следствии 5.5 можно опустить.

Автор выражает благодарность профессору О.Г. Смолянову за внимание к работе.

Список литературы

- [1] P.R. Chernoff, “Note on product formulas for operator semigroups”, *J. Functional Analysis*, **2:2** (1968), 238–242.
- [2] H.F. Trotter, “On the product of semi-groups of operators”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10:4** (1959), 545–551.
- [3] О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе, *Континуальные интегралы*, Изд-во МГУ, М., 1990.

- [4] V. V. Smirnov, “A note on the limiting procedures for path integrals”, *J. Phys. A*, **41**:3 (2008), 035306.
- [5] O. G. Smolyanov, A. G. Tokarev, A. Truman, “Hamiltonian Feynman path integrals via the Chernoff formula”, *J. Math. Phys.*, **43**:10 (2002), 5161–5171.
- [6] O. G. Smolyanov, H. v. Weizsäcker, O. Wittich, “Chernoff’s theorem and discrete time approximations of Brownian motion on manifolds”, *Potential Anal.*, **26**:1 (2007), 1–29.
- [7] O. G. Smolyanov, H. von Weizsäcker, O. Wittich, “Brownian motion on a manifold as limit of stepwise conditioned standard Brownian motions”, *Stochastic processes, physics and geometry: New interplays. II*, Proc. of the conference on infinite dimensional (stochastic) analysis and quantum physics (Leipzig, Germany, 1999), CMS Conf. Proc., **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, 589–602.
- [8] Х. фон Вайцзеккер, О. Г. Смолянов, О. Виттих, “Диффузии на компактном римановом многообразии и поверхностные меры”, *Докл. РАН*, **371**:4 (2000), 442–447; англ. пер.: H. von Weizsäcker, O. G. Smolyanov, O. Wittich, “Diffusion on compact Riemannian manifolds, and surface measures”, *Dokl. Math.*, **61**:2 (2000), 230–234.
- [9] K.-J. Engel, R. Nagel, “One-parameter semigroups for linear evolution equations”, *Grad. Texts in Math.*, **194**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 2000.
- [10] E. B. Davies, *One-parameter semigroups*, London Math. Soc. Monogr., **15**, Academic Press, London–New York, 1980.
- [11] F. Kühnemund, M. Wacker, “The Lie–Trotter product formula does not hold for arbitrary sums of generators”, *Semigroup Forum*, **60**:3 (2000), 478–485.
- [12] А. Г. Токарев, “Контрпримеры к формуле Троттера в локально выпуклых пространствах”, *Матем. заметки*, **59**:6 (1996), 947–950; англ. пер.: A. G. Tokarev, “Counterexamples to the Trotter formula in locally compact spaces”, *Math. Notes*, **59**:6 (1996), 689–692.
- [13] А. Ю. Неклюдов, “Обращение теоремы Чернова”, *Матем. заметки*, **83**:4 (2008), 581–589; англ. пер.: A. Yu. Neklyudov, “Inversion of Chernoff’s theorem”, *Math. Notes*, **83**:3–4 (2008), 530–538.

А. Ю. Неклюдов (A. Yu. Neklyudov)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: neklyudov.alex@gmail.com

Поступила в редакцию

31.03.2008 и 16.12.2008