Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Н. Трушина, Неприводимые конечномерные йордановы супербимодули над простой супералгеброй $B(1, 2)$, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 9, 123–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm510>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 14:34:51

УДК 512.554.7

М. Н. Трушина

Неприводимые конечномерные йордановы супербимодули над простой супералгеброй $B(1, 2)$

Рассматриваются унитарные неприводимые конечномерные йордановы супербимодули над супералгеброй $B(1, 2)$. Получена классификация таких супербимодулей в случае алгебраически замкнутого поля конечной характеристики $p \neq 2$.

Библиография: 7 названий.

Введение

Теория супералгебр применяется для решения различных проблем и построения примеров в классической теории колец. Так, с помощью супералгебр А. Р. Кермер решил проблему Шпехта [1], Е. И. Зельманов и И. П. Шестаков доказали нильпотентность квазирегулярного радикала свободной альтернативной алгебры над полем нулевой характеристики [2]. В работе [3] супералгебры используются для построения контрпримеров. С помощью супералгебры $B(1, 2)$ построен пример i -исключительной йордановой супералгебры [4].

Супералгебры интересны и как самостоятельные объекты. В работе В. Г. Каца [5] дана классификация простых йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики. Полного описания простых конечномерных йордановых супералгебр без ограничений на характеристику не существует в настоящее время. В альтернативном случае ситуация более определенная. Простые альтернативные супералгебры характеристики, не равной 2 и 3, классифицированы в [2], ограничения на характеристику сняты в работе [4].

Задача изучения представлений простых супералгебр в различных многообразиях была сформулирована И. П. Шестаковым в Днестровской тетради [6]. Н. А. Писаренко [7] классифицировал неприводимые конечномерные представления простых альтернативных супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2 и 3.

Супералгебра $B(1, 2)$ из работы [4] определяется так: суперкоммутативная супералгебра (с.а.) $A = A_0 + A_1$ над полем F конечной характеристики $p \neq 2$ называется *супералгеброй типа $B(1, 2)$* , если $A_0 = F \cdot 1$, $A_1 = F \cdot x + F \cdot y$ и $x \cdot y = 1$. Автоморфизм с.а. $B(1, 2)$: $x \rightarrow -y$, $y \rightarrow x$, назовем *стандартным*.

Супералгебра $B(1, 2)$ является простой йордановой, в случае характеристики 3 эта супералгебра альтернативна.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 000100339).

Настоящая работа посвящена изучению конечномерных унитарных йордановых представлений супералгебры $B(1, 2)$ над алгебраически замкнутым полем конечной характеристики $p \neq 2$.

Йордановым superbимодулем над супералгеброй $A = A_0 + A_1$ называется линейное пространство $M = M_0 + M_1$ над полем F такое, что расщепляемое нулевое расширение $M + A$ является йордановой супералгеброй.

Перечислим основные типы йордановых superbимодулей над $B(1, 2)$ ($m \in M_0$, X и Y — операторы правого умножения на x и y соответственно).

Тип I. а) Элементы $my, m, mX, \dots, mX^{2p-2}$ образуют базис модуля,

$$\begin{aligned} myX &= \left(\frac{1}{2} - a\right)m, & mX^{2p-1} &= 0, & mY^2 &= 0, \\ mX^iY &= \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - a + l\right)mX^{i-1}, & i = 2l, \quad l \neq 0, \\ (1 + l)mX^{i-1}, & i = 2l + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(a — параметр, причем a не является целым числом). Модули, соответствующие параметрам a_1 и a_2 , изоморфны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$.

б) В случае $k = 1, 2, 3, \dots, p-1$ элементы $my, m, mX, \dots, mX^{2k-1}$ образуют базис модуля,

$$\begin{aligned} myX &= -km, & mX^{2k} &= 0, & mY^2 &= 0, \\ mX^iY &= \begin{cases} (-k + l)mX^{i-1}, & i = 2l, \quad l \neq 0, \\ (1 + l)mX^{i-1}, & i = 2l + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(При $k = 1$ получается регулярный superbимодуль.)

с) Элементы $m, mX, \dots, mX^{2p-1}$ образуют базис модуля,

$$\begin{aligned} mX^{2p} &= mY = 0, \\ mX^iY &= \begin{cases} lmX^{i-1}, & i = 2l, \quad l \neq 0, \\ \left(a + l + \frac{1}{2}\right)mX^{i-1}, & i = 2l + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

(a — параметр, причем a не является целым числом). Модули, соответствующие параметрам a_1 и a_2 , изоморфны тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$.

д) Если k — натуральное число, не превосходящее p , то элементы $m, mX, \dots, mX^{2k-2}$ образуют базис модуля,

$$\begin{aligned} mX^{2k-1} &= mY = 0, \\ mX^iY &= \begin{cases} lmX^{i-1}, & i = 2l, \quad l \neq 0, \\ (l + 1 - k)mX^{i-1}, & i = 2l + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(При $k = 1$ получается одномерное векторное пространство.)

Тип II. Базис состоит из элементов $m, mX, mX^2, \dots, mX^{2p-1}$:

$$mX^{2p} = \lambda m, \quad my = \lambda^{-1} b mX^{2p-1},$$

$$mX^i Y = \begin{cases} (b+l)mX^{i-1}, & i = 2l, \quad l \neq 0, \\ \left(a+b+l+\frac{1}{2}\right)mX^{i-1}, & i = 2l+1, \end{cases}$$

где $b = 0$ или $b = -a + 1/2$ не является целым ($\lambda \neq 0$, a – параметры). Для различных пар (a, λ) модули неизоморфны. При фиксированных a и λ модули, соответствующие разным b , неизоморфны.

Тип III. Базис состоит из элементов $m, mX, mX^2, \dots, mX^{2p-1}$:

$$mX^{2p} = \gamma m, \quad my = \gamma^{-1} \left(\beta - a - \frac{1}{2} \right) mX^{2p-1},$$

$$mX^i Y = \begin{cases} \left(\beta - a - \frac{1}{2} + l \right) mX^{i-1}, & i = 2l, \quad l \neq 0, \\ (\beta + l)mX^{i-1}, & i = 2l+1, \end{cases}$$

где $\gamma \neq 0$, β и $\beta - a$ не являются целыми числами (a, β, γ – параметры). Причем модули, соответствующие параметрам

$$(\beta_1, \gamma_1, a_1) \quad \text{и} \quad (\beta_2, \gamma_2, a_2),$$

изоморфны тогда и только тогда, когда

$$(\gamma_1 = \gamma_2) \ \& \ (a_1 = a_2) \ \& \ (\beta_1 - \beta_2 \text{ — целое число}).$$

Основным результатом статьи является

ТЕОРЕМА. *Всякий неприводимый конечномерный йорданов супербимодуль над $B(1, 2)$ с точностью до стандартного автоморфизма супералгебры $B(1, 2)$ является либо модулем одного из указанных выше типов, либо одномерным векторным пространством. Модули типов Ia) и Ic) при противоположных значениях параметров изоморфны с заменой градуировки. Модуль типа Ib) при $k = r$ изоморфен с заменой градуировки модулю типа Id) при $k = r+1$ для всех возможных значений r . В остальных случаях модули из разных классов неизоморфны.*

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае характеристики 3 модули типов II и III при $a = 0$ являются альтернативными. Можно доказать, что они, а также регулярный и регулярный с заменой градуировки с точностью до стандартного автоморфизма исчерпывают все неприводимые альтернативные супербимодули над $B(1, 2)$.

1. Операторные соотношения. Все модули предполагаются унитарными, т.е. $m \cdot 1 = m$.

На протяжении всей статьи будут приняты обозначения для операторов, действующих на правом модуле M :

$$X = R(x), \quad Y = R(y),$$

$$\varphi = X^2, \quad \psi = Y^2, \quad \eta = XY,$$

где, как обычно, $R(x)$ обозначает оператор правого умножения на элемент x .

Рассмотрим йорданово супертождество

$$(-1)^{l(i+k)}(a_i a_j, a_k, a_l) + (-1)^{i(j+k)}(a_j a_l, a_k, a_i) + (-1)^{j(l+k)}(a_l a_i, a_k, a_j) = 0$$

(здесь индекс отвечает за четность элемента) и подставим $a_i = m \in M$, $a_j = x$, $a_k = x$, $a_l = y$.

При условии, что модуль M унитарный, получим:

$$\begin{aligned} (-1)^{1(|m|+1)}(mx, x, y) + (-1)^{2|m|}(1, x, m) + (-1)^2(y, m, x, x) &= 0, \\ (-1)^{|m|+1}(mx, x, y) + (y, m, x, x) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

($|m|$ — четность m). Ввиду суперкоммутативности $a_i a_j = (-1)^{ij} a_j a_i$ получаем $y, m = (-1)^{|m|} m, y$. Подставим это в (1) и умножим полученное равенство на $(-1)^{|m|}$:

$$-(mx, x, y) + (m, y, x, x) = 0.$$

Раскрывая ассоциаторы, получаем:

$$mx - ((mx)x)y + ((m, y)x)x = 0,$$

или в операторных обозначениях $X = X^2 Y - Y X^2$, т.е.

$$[X^2, Y] = X \quad \text{или} \quad X \circ [X, Y] = X. \quad (2)$$

Перенесем все слагаемые в одну часть равенства и сгруппируем:

$$\begin{aligned} X \circ [X, Y] - X &= 0, \\ X \left([X, Y] - \frac{1}{2} \right) + \left([X, Y] - \frac{1}{2} \right) X &= 0. \end{aligned}$$

Обозначим $[X, Y] - 1/2 = \mu$, тогда

$$\begin{aligned} X \circ \mu &= 0, \\ [X^2, \mu] &= X^2 \mu - \mu X^2 = -X \mu X - \mu X^2 = \mu X^2 - \mu X^2 = 0. \end{aligned} \quad (2')$$

Применяя (стандартный) автоморфизм с.а. $B(1, 2)$: $x \rightarrow -y$, $y \rightarrow x$, к предположенному равенству, получаем $Y \circ ([X, Y] - 1/2) = 0$, т.е. $Y \circ \mu = 0$ и $[Y^2, \mu] = 0$.

Кроме того, $[XY, \mu] = XY\mu - \mu XY = 0$ и $[YX, \mu] = 0$.

Мы получили, что μ перестановочен с любым оператором, действующим на M_0 . Если модуль конечномерен и основное поле алгебраически замкнуто, то оператор μ имеет на M_0 собственный вектор m_0 , отвечающий собственному значению a . Из перестановочности μ с любым оператором, действующим на M_0 , и неприводимости M_0 следует, что M_0 — пространство собственных векторов для μ , отвечающих значению a . То есть на M_0 $\mu \equiv a$, или

$$[X, Y] = a + \frac{1}{2}, \quad (3)$$

где a — некоторый скаляр.

Приведем основные операторные соотношения, которые будут постоянно использоваться в работе.

ЛЕММА 1. *Справедливы операторные равенства:*

$$[\varphi, \eta] = \varphi, \quad (4)$$

$$[\psi, \eta] = -\psi, \quad (5)$$

$$\text{на } M_0 \text{ выполняется } [\varphi, \psi] = -\frac{1}{2} - a + 2\eta. \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании тождества

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b,$$

выполняющегося в произвольной ассоциативной алгебре, с учетом равенства (2) и получающегося из него с помощью стандартного автоморфизма условия

$$[Y^2, X] = -Y \quad (7)$$

имеем:

$$[\varphi, \eta] = [X^2, XY] = X[X^2, Y] = X^2 = \varphi,$$

$$[\psi, \eta] = [Y^2, XY] = [Y^2, X]Y = -Y^2 = -\psi.$$

Ввиду (3) получаем:

$$[\varphi, \psi] = [X^2, Y^2] = X \circ [X, Y^2] = X \circ Y = 2XY + [Y, X] = -\frac{1}{2} - a + 2\eta.$$

ЛЕММА 2. *Пусть Φ – подалгебра с единицей в алгебре линейных операторов, действующих на M_0 , порожденная операторами φ и ψ . Тогда*

а) $XY, YX \in \Phi$,

б) φ^p – центральный элемент алгебры Φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение немедленно вытекает из операторных равенств (6) и (3). Для доказательства п. б) достаточно проверить, что оператор φ^p перестановочен с операторами φ, ψ . Коммутирование с оператором φ очевидно.

Докажем индукцией по k , что $[\varphi^k, \psi] = k(k - a - 3/2)\varphi^{k-1} + 2k\eta\varphi^{k-1}$.

Для $k = 1$ доказываемое утверждение верно. Предположим, что оно верно для $k = m$, и проверим его для $k = m + 1$; применяя равенства (6) и (4), получаем

$$\begin{aligned} [\varphi^{m+1}, \psi] &= \varphi[\varphi^m, \psi] + [\varphi, \psi]\varphi^m \\ &= \varphi\left(m\left(m - a - \frac{3}{2}\right)\varphi^{m-1} + 2m\eta\varphi^{m-1}\right) + \left(-\frac{1}{2} - a + 2\eta\right)\varphi^m \\ &= m\left(m - a - \frac{3}{2}\right)\varphi^m + 2m([\varphi, \eta] + \eta\varphi)\varphi^{m-1} + \left(-\frac{1}{2} - a + 2\eta\right)\varphi^m \\ &= m\left(m - a - \frac{3}{2}\right)\varphi^m + 2m\varphi^m + 2m\eta\varphi^m + \left(-\frac{1}{2} - a\right)\varphi^m + 2\eta\varphi^m \\ &= (m + 1)\left(m - a - \frac{1}{2}\right)\varphi^m + 2(m + 1)\eta\varphi^m. \end{aligned}$$

Из доказанного равенства следует, что $[\varphi^p, \psi] = 0$.

2. Несколько очевидных замечаний.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Допустим, что одна из компонент модуля μ тривиальна. Пусть для определенности $M_0 = 0$ (второй случай рассматривается аналогично). Тогда $M_1 A_1 + A_1 M_1 \subseteq M_0 = 0$, т.е. $M_1 A$ – одномерное векторное пространство над основным полем.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть $N_0 \subseteq M_0$ замкнуто относительно действия операторов φ, ψ , т.е. N_0 является Φ -подмодулем модуля M_0 . Положим $N_1 = N_0 x + N_0 y$. Тогда $N_0 + N_1$ – подмодуль модуля M .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Множество $L_0 = \{m \in M_0 : m\varphi = m\psi = 0\}$ является Φ -подмодулем.

3. Йордановы неприводимые представления с.а. $B(1, 2)$. Из условия неприводимости модуля M вытекает выполнение одного из условий:

- а) $L_0 = M_0$;
- б) $L_0 = 0$.

Рассмотрим сначала первый случай $L_0 = M_0$. Пусть $m_0 \in M_0$.

В силу равенства (2) получаем

$$m_0 x = -m_0 Y X^2 = m_0 ([X, Y] - XY)X.$$

Из равенства (6) в силу определения L_0 имеем

$$m_0 \left(-\frac{1}{2} - a + 2\eta \right) = 0,$$

откуда

$$m_0 \eta = \left(\frac{1}{4} + \frac{a}{2} \right) m_0. \quad (8)$$

Теперь можно вычислить $m_0 x = m_0 (a + 1/2 - (1/4 + a/2))x = (1/4 + a/2)m_0 x$, тогда $(a/2 - 3/4)m_0 x = 0$. Если $a \neq 3/2$, то $m_0 x = 0$. В силу определения L_0 и равенства (7) получаем, что $m_0 y = 0$.

Из неприводимости M и замечаний 1 и 2 следует, что $M = M_0$ (или $M = M_1$) и M – одномерное векторное пространство над полем F с нулевым умножением на x и y .

Если $a = 3/2$, то положим

$$p_1 = m_0 x, \quad q_1 = m_0 y.$$

Тогда имеем

$$p_1 x = m_0 \varphi = 0, \quad q_1 y = m_0 \psi = 0.$$

Из равенства (8) следует, что $m_0 \eta = m_0$, откуда в силу (3)

$$p_1 y = m_0 \eta = m_0, \quad q_1 x = m_0 Y X = m_0 (-[X, Y] + XY) = m_0 (-2 + \eta) = -m_0.$$

Таким образом, мы получили регулярный модуль.

Начиная с этого момента будем считать, что мы находимся в условиях случая б) $L_0 = 0$.

В силу неприводимости M по лемме 2 выполнено одно из двух условий:

$$M_0\varphi^p = 0 \quad \text{или} \quad M_0\varphi^p = M_0.$$

Заметим, что второе равенство равносильно $M_0\varphi = M_0$. Применяя стандартный автоморфизм, получаем четыре возможных типа:

- 1) $M_0\varphi^p = 0, \quad M_0\psi^p = 0;$
- 2) $M_0\varphi^p = M_0, \quad M_0\psi^p = 0;$
- 3) $M_0\varphi^p = 0, \quad M_0\psi^p = M_0;$
- 4) $M_0\varphi^p = M_0, \quad M_0\psi^p = M_0.$

ЛЕММА 3. Допустим, что M_0 имеет тип 1) или 2). Тогда существует $0 \neq m_0 \in M_0$ такой, что выполнено одно из условий

- а) $m_0\psi = 0, \quad m_0YX = (1/2 - a)m_0, \quad a \neq 1/2,$
- б) $m_0Y = 0.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку модуль имеет тип 1) или 2), то существует $0 \neq m \in M_0$ такой, что $m\psi = 0$. Далее, используя операторные соотношения, получаем

$$\begin{aligned} (YX)^2 + YX &= YXYX + YX = Y[X, Y]X + Y^2X^2 + YX \\ &= ([X, Y^2] - [X, Y]Y)X + Y^2X^2 + YX \\ &= 2YX - [X, Y]YX + Y^2X^2, \end{aligned}$$

значит, $(mYX)YX = mYX - (a + 1/2)mYX = (-a + 1/2)mYX$.

Если $mY \neq 0$, то $mYX \neq 0$ (иначе mY порождает собственный подмодуль), за искомым элемент берем mYX .

Действительно, $(mYX)\psi = m(XY - (a + 1/2))\psi = m\eta\psi = m[\eta, \psi] = m\psi = 0$.

ЛЕММА 4. Если $mYX = bm$ (b — скаляр), причем $m \in M_0$, то для любого натурального i

$$mX^iY = \begin{cases} (b + k)mX^{i-1}, & i = 2k, \quad k \neq 0, \\ \left(a + b + k + \frac{1}{2}\right)mX^{i-1}, & i = 2k + 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по i .

Для $i = 1$ имеем $mXY = m(YX + [X, Y]) = (a + 1/2 + b)m$.

Допустим, что требуемое утверждение верно для любого числа, меньшего $i + 1$, и рассмотрим выражение $mX^{i+1}Y$:

а) если $i = 2k$, $k \neq 0$, то $i + 1 = 2k + 1$ в силу (2):

$$\begin{aligned} mX^{i+1}Y &= mX^{i-1}([X^2, Y] + YX^2) \\ &= \left(1 + \left(\frac{1}{2} + a + b + k - 1\right)\right)mX^i = \left(\frac{1}{2} + a + b + k\right)mX^i; \end{aligned}$$

б) если $i = 2k + 1$, то $i + 1 = 2(k + 1)$ и при $i > 1$

$$mX^{i+1}Y = mX^{i-1}([X^2, Y] + YX^2) = (1 + b + k)mX^i$$

по предположению индукции.

4. Неприводимые модули типа 1). По лемме 3 существует $0 \neq m \in M_0$ такой, что $m\psi = 0$, $mYX = (-a + 1/2)m$, $a \neq 1/2$, либо $mY = 0$.

а) Пусть $m\psi = 0$, $mYX = (-a + 1/2)m$, $a \neq 1/2$. Тогда $m\eta = m([X, Y] + YX) = (a + 1/2 - a + 1/2)m = m$. Так как $M_0\varphi^p = 0$, то $m\varphi^pY = 0$. Но по лемме 4

$$m\varphi^pY = (b + p)mX^{2p-1} = \left(-a + \frac{1}{2}\right)mX^{2p-1}.$$

Так как $a \neq 1/2$, то $mX^{2p-1} = 0$.

ЛЕММА 5. Пусть элемент m удовлетворяет условиям леммы 3 а). Если $mX^k = 0$, $mX^{k-1} \neq 0$, то элементы $my, m, mX, \dots, mX^{k-1}$ образуют базис модуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 4 надо доказывать лишь линейную независимость выбранных элементов. Подействуем на равенство

$$\gamma_0 my + \gamma_1 m + \gamma_2 mX + \dots + \gamma_k mX^{k-1} = 0$$

оператором X . Получим, что $\gamma_0(1/2 - a)m + \gamma_1 mX + \gamma_2 mX^2 + \dots + \gamma_{k-1} mX^{k-1} = 0$.

Применяя $k - 1$ раз оператор X и учитывая, что $a \neq 1/2$, последовательно получаем, что все $\gamma_i = 0$.

Пусть $m\varphi^k = 0$, $m\varphi^{k-1} \neq 0$. По лемме 4 $m\varphi^kY = (b + k)m\varphi^{k-1}X$. Значит, $k = -b$ или $mX^{2k-1} = 0$. Но по той же лемме $mX^{2k-1}Y = (b + a + k - 1/2)mX^{2k-2}$, $b = -a + 1/2$, поэтому $mX^{2k-1} = 0$ лишь при k кратном p .

Рассмотрим сначала случай $k = p$. Так как $b \neq 0$, то из вышесказанного следует, что $mX^{2p-1} = 0$. По лемме 5 элементы $my, m, mX, \dots, mX^{2p-2}$ образуют базис модуля. Чтобы описать действие оператора X , достаточно сказать, что $myX = (1/2 - a)m$, $mX^{2p-1} = 0$. Пользуясь леммой 4, можно описать действие оператора Y на полученный модуль:

$$mX^iY = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} - a + l\right)mX^{i-1}, & i = 2l, \quad l \neq 0, \\ (1 + l)mX^{i-1}, & i = 2l + 1. \end{cases}$$

Напомним, что $mY^2 = 0$.

Легко видеть, что для неприводимости указанного модуля необходимо и достаточно, чтобы $a \neq 1 + 1/2, 2 + 1/2, \dots, p - 1/2$. (Также по предположению $a \neq 1/2$.)

Пусть теперь $k < p$. Заметим, что $k \neq 1$, так как $L_0 = 0$. Тогда, как было сказано выше, $k = -b$ и $mX^{2k-1} \neq 0$. По лемме 5 элементы $my, m, mX, \dots, mX^{2k-1}$ образуют базис модуля. Чтобы описать действие оператора X , достаточно сказать, что $myX = -kt, mX^{2k} = 0$. Пользуясь леммой 4, можно описать действие оператора Y на полученный модуль:

$$mX^i Y = \begin{cases} (-k + l)mX^{i-1}, & i = 2l, \quad l \neq 0, \\ (1 + l)mX^{i-1}, & i = 2l + 1. \end{cases}$$

Напомним, что $mY^2 = 0$. Так как $mX^i Y \neq 0$ для любого $i = 0, 1, 2, \dots, 2k - 1$, то легко понять, что для любого $k = 2, 3, \dots, p - 1$ указанный выше модуль неприводим.

б) Пусть $mY = 0$. Тогда $m\eta = mXY = (a + 1/2)t$ по лемме 4.

По той же лемме (в данном случае $b = 0$):

$$mX^i Y = \begin{cases} lmX^{i-1}, & i = 2l, \quad l \neq 0, \\ \left(a + l + \frac{1}{2}\right)mX^{i-1}, & i = 2l + 1. \end{cases}$$

Пусть $m\varphi^k = 0$, $m\varphi^{k-1} \neq 0$, снова $k > 1$. По лемме 4 $m\varphi^k Y = km\varphi^{k-1}X$. Значит, $k = p$ или $mX^{2k-1} = 0$. Но $mX^{2k-1}Y = (a + k - 1/2)mX^{2k-2}$ по той же лемме; поэтому $mX^{2k-1} = 0$ лишь при $k = 1/2 - a$.

Рассмотрим сначала случай $k = p$.

Если $a = 1/2$, то из вышесказанного вытекает, что $mX^{2p-1} = 0$. Из доказательства леммы 5 следует, что элементы $m, mX, \dots, mX^{2p-2}$ образуют базис модуля. Пользуясь леммой 4, можно описать действие оператора Y на полученный модуль:

$$mX^i Y = \begin{cases} lmX^{i-1}, & i = 2l, \quad l \neq 0, \\ (l + 1)mX^{i-1}, & i = 2l + 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что данный модуль неприводим.

Если $a \neq 1/2$, то из вышесказанного следует, что $mX^{2p-1} \neq 0$. По лемме 5 элементы $m, mX, \dots, mX^{2p-1}$ образуют базис модуля. Пользуясь леммой 4, можно описать действие оператора Y на полученный модуль:

$$mX^i Y = \begin{cases} lmX^{i-1}, & i = 2l, \quad l \neq 0, \\ \left(a + l + \frac{1}{2}\right)mX^{i-1}, & i = 2l + 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что данный модуль неприводим тогда и только тогда, когда $a + 1/2$ не является целым числом (a не является целым).

Пусть теперь $k < p$. Тогда $mX^{2k-1} = 0$ и модуль существует только при $k = 1/2 - a$, причем k — натуральное число, меньшее p . По лемме 5 элементы

$m, mX, \dots, mX^{2k-2}$ образуют базис модуля. Пользуясь леммой 4, можно описать действие оператора Y на полученный модуль:

$$mX^i Y = \begin{cases} lmX^{i-1}, & i = 2l, \quad l \neq 0, \\ (l+1-k)mX^{i-1}, & i = 2l+1. \end{cases}$$

Легко видеть, что данный модуль неприводим.

Все модули типа 1) рассмотрены.

5. Неприводимые модули типа 2). Четная компонента M_0 неприводимого модуля M удовлетворяет условиям:

$$M_0 \varphi = M_0, \quad M_0 \psi^p = 0.$$

Заметим, что в силу конечномерности модуля $\ker \varphi = 0$. Далее, на основании леммы 3 существует $0 \neq m_0 \in M_0$ такой, что $m_0 \psi = 0$, $mYX = (-a + 1/2)m$, $a \neq 1/2$, либо $mY = 0$.

Рассмотрим минимальный многочлен линейного оператора φ , действующего на n -мерном пространстве M_0 : $\mu_\varphi(t) = t^s + \gamma_{s-1}t^{s-1} + \dots + \gamma_0$. Из неприводимости модуля M вытекает, что пространство M_0 не содержит собственных Φ -подмодулей, где Φ — подалгебра с единицей в алгебре линейных операторов, действующих на M_0 , порожденная операторами φ и ψ . Пусть $m_i = m_0 \varphi^i$. Тогда линейная оболочка векторов $m_0, m_1, \dots$ является ненулевым Φ -подмодулем, следовательно, M_0 совпадает с указанной линейной оболочкой. Поскольку минимальный многочлен оператора φ имеет степень s , то линейное пространство M_0 обладает базисом $m_0, m_1, \dots, m_{s-1}$. Итак,

$$n = \dim M_0 = \deg \mu_\varphi(t).$$

ЛЕММА 6. Число n кратно p . Верно равенство $\mu_\varphi(t) = f(t^p)$, где $f(t)$ — нормированный многочлен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим на оператор YX обе части равенства

$$m_0 \varphi^n = - \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i m_0 \varphi^i$$

и воспользуемся леммой 4:

$$(b+n)m_0 \varphi^n = - \sum_{i=0}^{n-1} (b+i)\gamma_i m_0 \varphi^i.$$

Сравнивая $m_0 \varphi^n$ и $(b+n)m_0 \varphi^n$, получаем, что для любого i : $(b+n)\gamma_i = (b+i)\gamma_i$.

Поскольку минимальный многочлен оператора находится однозначно и $\ker \varphi = 0$, то число n кратно p и ненулевыми могут быть только коэффициенты минимального многочлена при степенях переменной t , которые также кратны p . Лемма доказана.

Теперь мы можем описать действие на выбранный базис $m_0, \dots, m_{n-1}$ пространства M_0 операторов φ, ψ, η :

$$m_i \varphi = m_{i+1} \quad (i \leq n-2), \quad m_{n-1} \varphi = - \sum_{i=0}^l \gamma_{pi} m_{pi}, \quad \text{где } l = \left\lfloor \frac{n-1}{p} \right\rfloor; \quad (9)$$

$$m_i \psi = (b+i) \left(a+b+i - \frac{1}{2} \right) m_{i-1}, \quad m_0 \psi = 0, \quad (10)$$

$$m_i \eta = m_0 \varphi^i X Y = \left(a+b+i + \frac{1}{2} \right) m_i. \quad (11)$$

Так как $b = 0$ или $b = -a + 1/2$, то $m_{pk} \psi = 0$ для любого k .

ЛЕММА 7. Если поле F алгебраически замкнуто, то базис M состоит из элементов $m_0, m_0 X, m_0 X^2, \dots, m_0 X^{2p-1}$ (m_0 лежит в M_0) и для некоторого ненулевого параметра λ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} m_0 X^{2p} &= \lambda m_0, & m_0 y &= \lambda^{-1} b m_0 X^{2p-1}, \\ m_0 X^i Y &= \begin{cases} (b+l) m_0 X^{i-1}, & i = 2l, \quad l \neq 0, \\ \left(a+b+l + \frac{1}{2} \right) m_0 X^{i-1}, & i = 2l+1, \end{cases} \end{aligned}$$

где $b = 0$ или $b = -a + 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как φ^p — центральный элемент алгебры Φ , то, как и ранее в п. 2 для оператора μ , можно показать, что на M_0 φ^p есть скаляр.

Следовательно, на основании леммы 6 минимальный многочлен оператора φ имеет вид

$$\mu_\varphi(t) = t^p - \lambda,$$

базисными элементами компоненты M_0 являются $m_0, m_0 \varphi, \dots, m_0 \varphi^{p-1}$.

Применив (2) к $m_0 X^{2p-2}$, получим:

$$m_0 X^{2p-1} = m_0 X^{2p-2} [X^2, Y] = \lambda m_0 y - (b-1) m_0 X^{2p-1},$$

откуда

$$m_0 y = \lambda^{-1} b m_0 X^{2p-1}.$$

Заметим, что соотношения (9)–(11) позволяют вычислять действия элементов с. а. $B(1, 2)$ на модуле M , нечетная компонента которого линейно порождается элементами $m_0 X, m_0 X^3, \dots, m_0 X^{2p-1}$. Докажем, что эти элементы линейно независимы. Пусть $\alpha_1 m_0 X + \alpha_2 m_0 X^3 + \dots + \alpha_p m_0 X^{2p-1} = 0$. Подействуем оператором X на обе части этого равенства:

$$\alpha_1 m_0 \varphi + \alpha_2 m_0 \varphi^2 + \dots + \lambda \alpha_p m_0 = 0.$$

Из линейной независимости векторов $m_0, m_0 \varphi, \dots, m_0 \varphi^{p-1}$ вытекает равенство нулю всех скаляров α .

Остальные равенства, указанные в формулировке леммы, справедливы по лемме 4.

Наконец, покажем, что модуль M неприводим. Допустим, что N — ненулевой подмодуль в M . Тогда N_0 является Φ -подмодулем в M_0 . Поскольку N_0 отличен от нуля, то в силу леммы 6 его размерность должна быть не меньше p , значит,

$$N_0 = M_0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Указанные в лемме неприводимые модули для различных пар значений параметров (a, λ) неизоморфны ввиду равенства (3) и поскольку минимальный многочлен оператора φ на четной компоненте определяется однозначно и имеет вид $t^p - \lambda$. При фиксированных a и λ если $1/2 - a$ — целое, то существует изоморфизм модулей с $b = 0$ и $b = 1/2 - a$, переводящий m_0 в $m_0 X^{-2b}$.

6. Неприводимые модули типа 3). Такие модули не требуют специальных рассмотрений, поскольку они с помощью стандартного автоморфизма с.а. $B(1, 2)$ сводятся к рассмотренным модулям типа 2).

7. Неприводимые модули типа 4). В этом случае операторы φ и ψ обратимы. Следовательно, будут обратимыми также операторы X и Y , а значит, обратимым является и оператор η . Предположим, что основное поле алгебраически замкнуто. Тогда оператор η имеет собственный четный вектор m_0 , отвечающий (ненулевому) собственному значению β . Рассмотрим пространство $V(\beta) = \{m_0 \in M_0 : m_0 \eta = \beta m_0\}$, состоящее из собственных векторов оператора η , действующего на четной компоненте, и нулевого вектора.

Поскольку оператор φ^p перестановочен с любым оператором из алгебры Φ , то пространство $V(\beta)$ инвариантно относительно оператора φ^p . Значит, в пространстве $V(\beta)$ существует ненулевое подпространство $V(\beta, \gamma)$, все векторы которого удовлетворяют равенствам $m_0 \eta = \beta m_0$, $m_0 \varphi^p = \gamma m_0$. Аналогично, существует ненулевое пространство $V(\beta, \gamma, \delta)$ четных элементов m_0 , для которых верны равенства $m_0 \eta = \beta m_0$, $m_0 \varphi^p = \gamma m_0$, $m_0 \psi^p = \delta m_0$.

Проверим теперь, что пространство $V(\beta, \gamma, \delta)$ инвариантно относительно оператора $\varphi\psi$. Это утверждение немедленно вытекает из следующих равенств, для получения которых применяются операторные соотношения (4), (5):

$$\begin{aligned} m_0 \varphi \psi \eta &= m_0 \varphi([\psi, \eta] + \eta \psi) = -m_0 \varphi \psi + m_0 [\varphi, \eta] \psi + m_0 \eta \varphi \psi \\ &= -m_0 \varphi \psi + m_0 \varphi \psi + m_0 \eta \varphi \psi = m_0 \eta \varphi \psi. \end{aligned}$$

Итак, пространство $V(\beta, \gamma, \delta)$ инвариантно относительно оператора $\varphi\psi$, поскольку φ^p и ψ^p перестановочны с любым оператором. Таким образом, существует ненулевое пространство V четных элементов $m_0 \in V(\beta, \gamma, \delta)$, для которых справедливы равенства

$$m_0 \eta = \beta m_0, \quad m_0 \varphi^p = \gamma m_0, \quad m_0 \psi^p = \delta m_0, \quad m_0 \varphi \psi = \varepsilon m_0, \quad (12)$$

при этом все числа $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ отличны от нуля.

ЛЕММА 8. Пусть ненулевой четный элемент m_0 удовлетворяет равенствам (12). Тогда векторы $m_0, m_0\varphi, \dots, m_0\varphi^{p-1}$ образуют базис четной компоненты M_0 неприводимого бимодуля M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (4) следует, что

$$(m_0\varphi)\eta = m_0([\varphi, \eta] + \eta\varphi) = m_0(\varphi + \eta\varphi) = m_0\varphi + \beta m_0\varphi = (\beta + 1)m_0\varphi.$$

Поэтому указанные собственные векторы отвечают различным собственным значениям оператора η : $m_0 \in V(\beta)$, $m_0\varphi \in V(\beta + 1)$, $\dots$, $m_0\varphi^{p-1} \in V(\beta - 1)$, значит, они линейно независимы. Покажем теперь, что линейная оболочка W этих элементов является Φ -подмодулем. Поскольку пространство W инвариантно относительно действия φ , то достаточно проверить его инвариантность относительно действия оператора ψ . Имеем: $\psi = \gamma^{-1}\varphi^{p-1}(\varphi\psi)$, откуда и вытекает инвариантность пространства W относительно действия оператора ψ . Отсюда в силу неприводимости модуля M получаем равенство $M_0 = W$.

ЛЕММА 9. Если M — неприводимый модуль типа 4), то в его четной компоненте M_0 можно выбрать такой базис $E_0 = (m_0, m_0\varphi, \dots, m_0\varphi^{p-1})$, что система векторов $E_1 = (m_0X, m_0X^3, \dots, m_0X^{2p-1})$ образует базис нечетной компоненты M_1 и действия операторов X и Y относительно указанных пар базисов определяются так:

$$\begin{aligned} m_0X^{2p} &= \gamma m_0, & m_0y &= \gamma^{-1}\left(\beta - a - \frac{1}{2}\right)m_0X^{2p-1}, \\ m_0X^iY &= \begin{cases} \left(\beta - a - \frac{1}{2} + l\right)m_0X^{i-1}, & i = 2l, \quad l \neq 0, \\ (\beta + l)m_0X^{i-1}, & i = 2l + 1, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\gamma \neq 0$, $\beta \neq 0, 1, \dots, p-1$; $\beta - a - 1/2$ не является целым числом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предыдущей лемме в качестве базиса E_0 возьмем векторы $m_0, m_0\varphi, \dots, m_0\varphi^{p-1}$. Заметим, что в силу невырожденности оператора X векторы из системы E_1 линейно независимы. Далее, на основании того, что векторы $m_0, m_0\varphi, \dots, m_0\varphi^{p-1}$ являются собственными для оператора η , отвечающими собственным значениям $\beta, \beta + 1, \dots, \beta - 1$ соответственно, нам надо найти лишь разложения векторов $m_0y, m_0X^2Y, \dots, m_0X^{2p-2}Y$ по базису E_1 . Пользуясь тем, что $m_0\varphi^p = \gamma m_0$, и равенством (2), получаем:

$$m_0y = \gamma^{-1}(m_0\varphi^pY) = \gamma^{-1}(m_0\varphi^{p-1})(\varphi Y) = \gamma^{-1}(m_0\varphi^{p-1})(X + Y\varphi),$$

но

$$\begin{aligned} m_0\varphi^{p-1}YX &= m_0\varphi^{p-1}([Y, X] + \eta) \\ &= \left(-\frac{1}{2} - a + \beta - 1\right)m_0\varphi^{p-1} = \left(\beta - a - \frac{3}{2}\right)m_0\varphi^{p-1}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$m_0 y = \gamma^{-1} \left(1 + \beta - a - \frac{3}{2} \right) m_0 \varphi^{p-1} X = \gamma^{-1} \left(\beta - \frac{1}{2} - a \right) m_0 \varphi^{p-1} X.$$

Докажем по индукции, что $m_0 X^{2l} Y = (-1/2 - a + \beta + l) m_0 X^{2l-1}$. Для $l = 1$ имеем:

$$m_0 \varphi Y = m_0 (X + Y X^2) = \left(1 + \beta - a - \frac{1}{2} \right) m_0 x = \left(\frac{1}{2} - a + \beta \right) m_0 x.$$

Пусть нужное равенство верно для $l = i$, докажем его для $l = i + 1$:

$$\begin{aligned} m_0 X^{2(i+1)} Y &= m_0 X^{2i} ([X^2, Y] + Y X^2) = m_0 X^{2i} (X + Y X^2) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} - a + \beta + i \right) m_0 X^{2i+1}. \end{aligned}$$

Приведенные формулы показывают, что операторы X и Y в указанных базисах имеют требуемый вид. В силу невырожденности этих операторов $\gamma \neq 0$, $\beta \neq 0, 1, \dots, p-1$ и $\beta - a - 1/2$ не является целым числом.

Верно и обратное утверждение.

ЛЕММА 10. *Описанный в предыдущей лемме модуль M неприводим и имеет тип 4).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $m_0 \varphi^i$ через m_i . Для проверки неприводимости модуля M достаточно понять, что Φ -подмодуль N_0 , порожденный ненулевым элементом

$$n_0 = t_0 m_0 + t_1 m_1 + \dots + t_{p-1} m_{p-1}, \quad t_i \in F,$$

совпадает с компонентой M_0 . Последнее утверждение, как легко видеть, вытекает из включения $m_0 \in N_0$. Имеем:

$$n_0 \eta = \beta t_0 m_0 + (\beta + 1) t_1 m_1 + \dots + (\beta - 1) t_{p-1} m_{p-1} \in N_0.$$

Тогда

$$n_1 := n_0 \eta - \beta n_0 = t_1 m_1 + 2t_2 m_2 + \dots + (p-1) t_{p-1} m_{p-1} \in N_0.$$

Повторяя эту процедуру нужное число раз, получаем, что $t_k m_k \in N_0$, где t_k — последний ненулевой коэффициент в записи n_0 . Значит, и $m_k \in N_0$.

Наконец,

$$m_k \varphi^{p-k} = \gamma m_0 \in N_0,$$

откуда $m_0 \in N_0$.

ЛЕММА 11. Модули, описанные в лемме 9 и соответствующие параметрам

$$(\beta_1, \gamma_1, a_1) \quad u \quad (\beta_2, \gamma_2, a_2),$$

изоморфны тогда и только тогда, когда $(\gamma_1 = \gamma_2) \ \& \ (a_1 = a_2) \ \& \ (\beta_1 - \beta_2 - \text{целое число})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим от противного, что модули, отвечающие параметрам (β_1, γ_1, a_1) и (β_2, γ_2, a_2) , изоморфны и либо γ_1 отлично от γ_2 , либо a_1 отлично от a_2 , либо $\beta_1 - \beta_2$ не является целым.

Так как минимальный многочлен оператора φ на четной компоненте определяется однозначно и имеет вид $t^p - \gamma$, то $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. На M_0 $[X, Y] = a + 1/2$, поэтому $a_1 = a_2 = a$. Итак, пусть τ — изоморфизм модулей и $\beta_1 - \beta_2$ не является целым. Допустим в соответствии с леммой 9, что в четных частях модулей выбраны базисы $m_0, m_1, \dots, m_{p-1}$ и $e_0, e_1, \dots, e_{p-1}$ и

$$m_0\tau = \delta_0 e_0 + \delta_1 e_1 + \cdots + \delta_{p-1} e_{p-1}.$$

Тогда, расписав обе части равенства $(m_0 y)\tau = (m_0 \tau)y$:

$$\begin{aligned}(m_0 y)\tau &= \left\{ \gamma^{-1} \left(\beta_1 - a - \frac{1}{2} \right) m_{p-1} x \right\} \tau = \gamma^{-1} \left(\beta_1 - a - \frac{1}{2} \right) \{ m_0 \varphi^{p-1} X \} \tau \\ &= \gamma^{-1} \left(\beta_1 - a - \frac{1}{2} \right) m_0 \tau \varphi^{p-1} X \\ &= \gamma^{-1} \left(\beta_1 - a - \frac{1}{2} \right) (\delta_0 e_{p-1} x + \gamma \delta_1 e_0 x + \cdots + \gamma \delta_{p-1} e_{p-2} x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m_0\tau)y &= (\delta_0e_0 + \delta_1e_1 + \cdots + \delta_{p-1}e_{p-1})y = \gamma^{-1}\left(\beta_2 - a - \frac{1}{2}\right)\delta_0e_{p-1}x \\ &\quad + \left(\beta_2 - a + \frac{1}{2}\right)\delta_1e_0x + \cdots + \left(\beta_2 - a - \frac{1}{2} - 1\right)\delta_{p-1}e_{p-2}x, \end{aligned}$$

В силу линейной независимости элементов $e_0, e_1, \dots, e_{p-1}$ имеем

$$\begin{aligned} \gamma^{-1}\left(\beta_1 - a - \frac{1}{2}\right)\delta_0 &= \gamma^{-1}\left(\beta_2 - a - \frac{1}{2}\right)\delta_0, \\ \left(\beta_1 - a - \frac{1}{2}\right)\delta_1 &= \left(\beta_2 - a + \frac{1}{2}\right)\delta_1, \\ \dots\dots\dots \\ \left(\beta_1 - a - \frac{1}{2}\right)\delta_{p-1} &= \left(\beta_2 - a - \frac{1}{2} - 1\right)\delta_{p-1}, \end{aligned}$$

следовательно, все числа δ нулевые. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Сохраняя обозначения, принятые в доказательстве леммы, заметим, что если $\beta_1 = \beta_2 + i, \gamma_1 = \gamma_2, a_1 = a_2$, то существует изоморфизм модулей, переводящий m_0 в e_i .

8. Доказательство теоремы следует из замечания 1, п. 4, леммы 7 (и замечания к ней), а также лемм 9–11.

Модуль типа Ia) порождается элементом tu . Если отобразить этот элемент в порождающий элемент t модуля типа Ic), то при противоположных значениях параметров получим изоморфизм этих представлений. Аналогично получается изоморфизм модулей типа Ib) при $k = r$ и Id) при $k = r + 1$ (r может принимать значения от 1 до $p - 1$) при отображении порождающего элемента tu в порождающий элемент t .

В представлениях типа I операторы X и Y нильпотентны, в представлениях типа II оператор X невырожден, а оператор Y нильпотентен, в представлениях типа III операторы X и Y невырождены. Поэтому модуль типа I не может быть изоморфен модулю типа II или III, модули типа II и III также неизоморфны.

Список литературы

1. Кемер А. Р. Конечная базисуемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. 1987. Т. 26. № 5. С. 597–641.
2. Зельманов Е. И., Шестаков И. П. Первичные альтернативные супералгебры и нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 4. С. 676–693.
3. Шестаков И. П. Супералгебры и контрпримеры // Сиб. матем. журн. 1991. Т. 32. № 6. С. 187–196.
4. Шестаков И. П. Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика. 1997. Т. 36. № 6. С. 675–716.
5. Кас V. G. Classification of simple Z -graded Lie superalgebras and simple Jordan superalgebras // Comm. Algebra. 1977. V. 5. № 13. P. 1375–1400.
6. Днестровская тетрадь. Нерешенные проблемы теории колец и модулей. Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1993.
7. Писаренко Н. А. Структура и представления конечномерных альтернативных супералгебр // Дис. . . . канд. физ.-матем. наук. Новосибирск, 1994.

Московский городской педагогический университет

Поступила в редакцию
12.07.1999