Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Чельцов, О гладкой четырехмерной квинтике, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 9, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm511>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 03:37:10

УДК 513.6

И. А. Чельцов

О гладкой четырехмерной квинтике

Изучается бирациональная геометрия гладкой четырехмерной квинтики с использованием свойств лог-пар. Получено новое доказательство бирациональной жесткости гладкой четырехмерной квинтики и описаны все ее бирациональные перестройки в расслоения, общий слой которых имеет размерность Кодаиры нуль.

В дополнении получены аналогичные результаты для всех гладких гиперповерхностей степени n в $\mathbb{P}^n$ в случае, когда n равно 6, 7 или 8.

Библиография: 11 названий.

Все рассматриваемые многообразия проективны и определены над $\mathbb{C}$. Основные определения, понятия и обозначения содержатся в работах [1] и [2].

Автор благодарен В. А. Исковских, А. Корти, А. В. Пухликову и В. В. Шокурову за полезные идеи и интересные замечания.

Основные результаты в историческом контексте

В 1971 году В. А. Исковских и Ю. И. Манин доказали в работе [3] следующий результат.

ТЕОРЕМА О КВАРТИКЕ. Пусть X — гладкая кватрика в $\mathbb{P}^4$. Тогда

$$\mathrm{Bir} X = \mathrm{Aut} X.$$

Из этого результата следовало отрицательное решение проблемы Люрота в размерности 3. Действительно, теорема о кватрике влечет нерациональность каждой гладкой трехмерной кватрики, хотя некоторые из них унирациональны.

ПРИМЕР. Кватрика

$$x_0^4 + x_0 x_4^3 + x_1^4 - 6x_1^2 x_2^2 + x_2^4 + x_3^4 + x_3^3 x_4 = 0$$

унирациональна (см. [4]).

В 1987 году А. В. Пухликов усилил методы В. А. Исковских и Ю. И. Манина и доказал в работе [5] следующий результат.

Работа написана при частичной поддержке гранта NSF DMS-9800807.

ТЕОРЕМА ПУХЛИКОВА I. *Для каждой гладкой квинтики X в $\mathbb{P}^5$*

$$\mathrm{Bir} X = \mathrm{Aut} X.$$

В частности, все гладкие четырехмерные квинтики нерациональны.

Примерно в это же время было понято, что методы В. А. Исковских и Ю. И. Манина неявно доказывают более сильное утверждение, чем совпадение групп бирациональных и бирегулярных автоморфизмов (см. [4], [6] и [7]). Например, теорема Пухликова I может быть дополнена следующим образом.

ТЕОРЕМА ПУХЛИКОВА II. *Гладкая четырехмерная квинтика X в $\mathbb{P}^5$ бирационально не изоморфна*

- (1) *четырёхмерным многообразиям Мори¹, отличным от квинтики X ,*
- (2) *расслоениям на многообразия с размерностью Кодайры $-\infty$.*

Как, в свою очередь, можно дополнить теоремы Пухликова I и II?

ВОПРОС 1. В какие многообразия Фано с каноническими особенностями и расслоения на многообразия с размерностью Кодайры нуль можно бирационально перестроить гладкую квинтику в $\mathbb{P}^5$?

Заметим, что четырехмерная квинтика может быть перестроена в расслоения на трехмерные многообразия Калаби-Яо.

КОНСТРУКЦИЯ I. Возьмем произвольную гладкую квинтику $X \subset \mathbb{P}^5$. Рассмотрим проекцию $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$ из трехмерного линейного подпространства в $\mathbb{P}^5$. Разрешим неопределенности отображения ψ посредством коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ X & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^1 \end{array}.$$

Несложно показать, что морфизм g является расслоением на трехмерные многообразия Калаби-Яо.

Таким образом, ответ на вопрос 1 не может быть негативным в принципе.

КОНСТРУКЦИЯ II. Выберем в $\mathbb{P}^5$ гладкую квинтику X , содержащую двумерную плоскость P . Пусть $\psi: X \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ — проекция из P и коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & W & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ X & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^2 \end{array}$$

разрешает особенности отображения ψ . Тогда g — расслоение на КЗ поверхности.

ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. Общая квинтика в $\mathbb{P}^5$ не содержит двумерных плоскостей.

Из важного замечания и конструкции II следует, что ответ на вопрос 1 зависит от деформации гладкой четырехмерной квинтики.

¹Многообразиями Мори принято называть многообразия Фано с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями и группой Пикара $\mathbb{Z}$.

СОГЛАШЕНИЕ. Мы будем говорить, что *расслоение задано проекцией в $\mathbb{P}^5$* , если оно бирационально изоморфно (как расслоение) одному из расслоений, которые были получены в конструкциях I и II.

Цель настоящей работы – дать альтернативное доказательство теорем Пухликова I и II и ответить на вопрос 1 следующим образом.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Гладкая квинтика X в $\mathbb{P}^5$ бирационально не изоморфна*

- (1) *многообразиям Фано с каноническими особенностями, отличным от X ,*
- (2) *расслоениям на многообразия с размерностью Кодайры нуль, не заданным проекциями в $\mathbb{P}^5$.*

Дополнение теоремы о квинтике в духе основной теоремы было сделано ранее в работе [2].

ИНТЕРЕСНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. Из основной теоремы следует, что гладкая квинтика в $\mathbb{P}^5$ является первым примером рационально связного четырехмерного многообразия, которое бирационально не эквивалентно расслоению на эллиптические кривые.

§1. Новые объекты и их свойства

В этом параграфе мы введем несколько объектов, которые будем постоянно использовать в дальнейшем.

ОСНОВНОЙ ОБЪЕКТ. Под *подвижной лог-парой*

$$(X, M_X) = \left(X, \sum_{i=1}^n b_i \mathcal{M}_i \right)$$

мы будем подразумевать многообразие X вместе с конечной линейной комбинацией линейных систем $\mathcal{M}_i$ без неподвижных компонент такой, что все $b_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Заметим, что подвижную лог-пару (X, M_X) можно рассматривать также и как обычную лог-пару. Для этого нужно лишь заменить каждую линейную систему $\mathcal{M}_i$ на взвешенную сумму достаточно общих дивизоров из этой линейной системы.

Наблюдение. Прямой образ границы M_X определен естественным образом для любого бирационального отображения многообразия X .

Мы будем считать, что лог-канонические дивизоры всех рассматриваемых лог-пар являются $\mathbb{Q}$ -Картье дивизорами. Следовательно, для подвижной лог-пары имеют место такие классические понятия, как дискрепантности, терминальность, каноничность, лог-терминальность и лог-каноничность.

Легко проверить, что лог-программа минимальных моделей сохраняет каноничность и терминальность подвижных лог-пар.

ЦЕНТР КАНОНИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЕЙ. Собственное неприводимое и приведенное подмногообразие Y многообразия X называется *центром канонических*

особенностей подвижной лог-пары (X, M_X) , если существуют такие бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$ и f -исключительный дивизор $E \subset W$, что

$$a(X, M_X, E) \leq 0 \quad \text{и} \quad f(E) = Y.$$

Через $\text{CS}(X, M_X)$ будем обозначать в дальнейшем *множество всех центров канонических особенностей* подвижной лог-пары (X, M_X) .

Проясним суть введенных объектов на примере.

ПРОСТОЙ ПРИМЕР. Возьмем подвижную лог-пару $(\mathbb{P}^2, bM)$, где M – линейная система прямых на $\mathbb{P}^2$, проходящих через некоторую фиксированную точку O . Тогда

$$\text{CS}(\mathbb{P}^2, bM) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } b < 1, \\ \{O\}, & \text{если } b \geq 1. \end{cases}$$

Этот простой пример иллюстрирует следующее свойство подвижных лог-пар.

Наблюдение. Особенности подвижной лог-пары совпадают с особенностями многообразия вне базисных множеств компонент границы.

Вполне естественно попытаться найти какую-нибудь “выделенную” модель подвижной лог-пары.

КАНОНИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ. Подвижная лог-пара (V, M_V) называется *канонической моделью* подвижной лог-пары (X, M_X) , если существует такое бирациональное отображение $\psi: X \dashrightarrow V$, что

$$(V, M_V) = (V, \psi(M_X)),$$

дивизор $K_V + M_V$ обилеи, а подвижная лог-пара (V, M_V) имеет канонические особенности.

Данное определение канонической модели оправдывается ее следующим важным свойством.

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ. *Каноническая модель единственна, если она существует.*

Для доказательства теоремы единственности достаточно в работе [8] везде заменить “лог-каноничность” на “каноничность”.

Для произвольной подвижной лог-пары (X, M_X) рассмотрим такой бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$, что подвижная лог-пара

$$(W, M_W) = (W, f^{-1}(M_X))$$

имеет канонические особенности.

ОТОБРАЖЕНИЕ ИИТАКИ И РАЗМЕРНОСТЬ КОДАИРЫ. Если линейная система $|n(K_W + M_W)|$ не пуста для $n \gg 0$, то отображение

$$I(X, M_X) = \varphi_{|n(K_W + M_W)|} \circ f^{-1} \quad \text{для } n \gg 0$$

называется *отображением Иитаки* подвижной лог-пары (X, M_X) , а число

$$\kappa(X, M_X) = \dim(I(X, M_X)(X))$$

называется *размерностью Кодайры* подвижной лог-пары (X, M_X) . В противном случае считается, что отображение $I(X, M_X)$ не определено ни в одной точке многообразия X и $\kappa(X, M_X) = -\infty$.

Можно показать следующее.

ТЕОРЕМА КОРРЕКТНОСТИ. *Отображение Иитаки $I(X, M_X)$ и размерность Кодайры $\kappa(X, M_X)$ не зависят от выбора отображения f .*

Заметим, что отображение Иитаки и размерность Кодайры априори зависят от натурального числа $n \gg 0$ в их определении. Можно показать, что размерность Кодайры от этого числа не зависит. Более того, из лог-избыточности (см. [1]) следует, что отображение Иитаки также зависит лишь от свойств подвижной лог-пары. Заметим, однако, что лог-избыточность доказана только в размерности 2 и 3. Тем не менее, апостериори отображения Иитаки всех встречающихся в настоящей статье подвижных лог-пар также не зависят от числа $n \gg 0$.

Мы работаем в основном с подвижными² лог-парами, поэтому будем называть их просто лог-парами.

§ 2. Лог-Калаби-Яо структуры на четырехмерной квинтике

Теперь мы покажем связь между введенными в предыдущем параграфе объектами и основной теоремой.

ОСНОВНОЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. В дальнейшем X будет обозначать гладкую квинтику в $\mathbb{P}^5$.

Из формулы присоединения и теоремы Лефшеца следует, что

$$\text{Pic } X = \mathbb{Z}K_X \quad \text{и} \quad K_X \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(-1)|_X.$$

Зафиксируем некоторую лог-пару (X, M_X) . Выберем $\lambda \in \mathbb{Q}_{>0} \cup \{+\infty\}$ такое, что

$$K_X + \lambda M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0,$$

где $\lambda = +\infty$ для $M_X = \emptyset$.

СОГЛАШЕНИЕ. В случае равенства $\lambda = 1$ мы скажем, что лог-пара (X, M_X) является *лог-Калаби-Яо квинтикой*.

Последнее просто означает, что лог-канонический дивизор $K_X + M_X$ $\mathbb{Q}$ -рационально тривиален.

²За исключением § 5.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА. *Предположим, что (X, M_X) – лог-Калаби-Яо квинтика. Тогда лог-пара (X, M_X) канонична, $\kappa(X, M_X) = 0$ и*

$$\mathrm{CS}(X, M_X) = \begin{cases} \emptyset, \\ \{S\} & \text{для линейного подпространства} \\ & S \subset X \text{ размерности } 2, \\ \{X \cap H\} & \text{для линейного подпространства} \\ & H \subset \mathbb{P}^5 \text{ размерности } 3. \end{cases}$$

Легко заметить схожесть утверждений центральной и основной теорем. В двух следующих параграфах мы выведем основную теорему из центральной теоремы.

К сожалению, центральная теорема ничего не говорит о том, как устроена граница M_X . Тем не менее, основываясь на центральной теореме, можно получить достаточно конкретное описание M_X в случае $\mathrm{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$.

УТОЧНЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ. *В предположениях центральной теоремы*

$$M_X = \psi^{-1}(M_Y),$$

где рациональное отображение $\psi: X \dashrightarrow Y$ – проекция из $\mathrm{CS}(X, M_X)^3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через S объединение всех элементов из $\mathrm{CS}(X, M_X)$. Из центральной теоремы следует, что S – поверхность, содержащаяся в линейном подпространстве $T \in \mathbb{P}^5$ размерности 3.

Рассмотрим линейную систему $\mathcal{H}_T$ гиперплоских сечений квинтики X , содержащих S . Затем выберем такой бирациональный морфизм $f: W \rightarrow X$, что линейная система $f^{-1}(\mathcal{H}_T)$ свободна и многообразие W гладко.

Можно считать, что f – изоморфизм вне S и W содержит ровно один f -исключительный дивизор, лежащий над общей точкой каждой неприводимой компоненты многообразия S . В случае, когда S – линейное подпространство в $\mathbb{P}^5$, мы будем считать, что f является раздутием S .

Пусть

$$g = \varphi_{\mathcal{H}_T} \circ f \text{ и } E = f^{-1}(S).$$

Возьмем достаточно общий дивизор D в линейной системе $f^{-1}(\mathcal{H}_T)$. Тогда

$$D \sim f^*(-K_X) - E - \sum_{i=1}^k a_i F_i,$$

где $a_i \in \mathbb{N}$ и

$$\dim f(F_i) \leq 1.$$

С другой стороны,

$$f^{-1}(M_X)|_D \sim_{\mathbb{Q}} \begin{cases} \alpha D|_D & \text{для } \alpha \in \mathbb{Q}_{>0}, \text{ если } S \text{ – двумерная плоскость в } \mathbb{P}^5, \\ \sum_{i=1}^k c_i F_i|_D & \text{для некоторых } c_i \in \mathbb{Q} \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Из последних соотношений следует, что граница $f^{-1}(M_X)$ содержится в слоях морфизма g . Теперь уже несложно показать, что отображение $g \circ f^{-1}$ является проекцией из $\mathrm{CS}(X, M_X)$.

Продemonстрируем только что доказанное утверждение.

³ Будем считать ψ тождественным в случае $\mathrm{CS}(X, M_X) = \emptyset$.

ПРИМЕР. Пусть $(X, b\mathcal{M})$ – лог-Калаби-Яо квинтика такая, что общий дивизор из линейной системы $\mathcal{M}$ неприводим и $b \in \mathbb{Q}_{>0}$. Предположим, что

$$\text{CS}(X, M_X) = \{X \cap H\}$$

для трехмерного линейного подпространства H в $\mathbb{P}^5$. Тогда из уточнения центральной теоремы следует, что $\mathcal{M}$ является пучком гиперплоских сечений многообразия X , проходящих через H .

Доказательство центральной теоремы содержится в §§ 5 и 6.

§3. Отображения Иитаки и четырехмерная квинтика

В этом параграфе мы будем использовать все обозначения и предположения предыдущего параграфа.

Утверждения центральной теоремы накладывают достаточно жесткие ограничения на структуру лог-пар на квинтике X .

СЛЕДСТВИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ. *Имеются следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} \lambda = 1 &\iff \kappa(X, M_X) = 0, \\ \lambda < 1 &\iff \kappa(X, M_X) > 0, \\ \lambda > 1 &\iff \kappa(X, M_X) = -\infty. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все соотношения легко проверяются. Покажем, например, что $\lambda < 1$ влечет $\kappa(X, M_X) > 0$.

Предположим, что $\lambda < 1$ и $\kappa(X, M_X) \leq 0$. Тогда

$$0 = \kappa(X, \lambda M_X) \leq \kappa(X, M_X) \leq 0.$$

Следовательно, $\kappa(X, \lambda M_X) = \kappa(X, M_X) = 0$. Несложно видеть, что последнее равенство противоречит определению размерности Кодaira и подвижности лог-пары (X, M_X) .

Лог-пары с $\kappa(X, M_X) \in [1, 3]$ могут быть описаны вполне конкретно.

ТЕОРЕМА-ОПИСАНИЕ I. Пусть $\kappa(X, M_X) \in [1, 3]$. Тогда (X, M_X) не канонична и

$$I(X, M_X) = \begin{cases} \text{проекция из двумерного линейного подпространства } S \subset X, \\ \text{проекция из трехмерного линейного подпространства } H \subset \mathbb{P}^5. \end{cases}$$

Более того,

$$M_X = I(X, M_X)^{-1}(M_Y),$$

где $Y = I(X, M_X)(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каноничность лог-пары $(X, \lambda M_X)$ следует из центральной теоремы. Таким образом,

$$\kappa(X, M_X) \geq \kappa(X, \lambda M_X) = 0.$$

Предположим, что лог-пара $(X, \lambda M_X)$ терминальна. Возьмем $\delta \in \mathbb{Q} \cap (\lambda, 1)$ такое, что лог-пара $(X, \delta M_X)$ все еще терминальна. Тогда

$$4 = \kappa(X, \delta M_X) \leq \kappa(X, M_X) < 4.$$

Следовательно,

$$\text{CS}(X, \lambda M_X) \neq \emptyset.$$

Осталось только применить уточнение центральной теоремы.

К сожалению, структура лог-пар с размерностью Кодайры $-\infty$ не может быть описана достаточно подробно.

ТЕОРЕМА-ОПИСАНИЕ II. Пусть $\kappa(X, M_X) = -\infty$. Тогда $\text{CS}(X, M_X) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По центральной теореме лог-пара $(X, \lambda M_X)$ канонична и утверждение следует из неравенства $\lambda > 1$.

Как мы увидим в §4, теоремы Пухликова I и II вытекают из теоремы-описания II.

§4. Бирациональная геометрия четырехмерной квинтики

Пришло время доказать основную теорему и теоремы Пухликова I и II, используя результаты предыдущего параграфа, центральную теорему и ее уточнение.

По основному соглашению X — гладкая квинтика в $\mathbb{P}^5$.

ТЕОРЕМА А. X бирационально не изоморфна расслоению, общий слой которого имеет размерность Кодайры $-\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что существует бирациональное отображение ρ квинтики X в такое расслоение $\tau: Y \rightarrow Z$, что общий слой τ имеет кодаирову размерность $-\infty$.

Например, τ может быть расслоением на коники.

Возьмем “достаточно большой” очень обильный дивизор H на Z . Выберем такое число $\mu \in \mathbb{Q}_{>0}$, что лог-пара

$$(X, M_X) = (X, \mu \rho^{-1}(|\tau^*(H)|))$$

является лог-Калаби-Яо квинтикой.

По построению

$$\kappa(X, M_X) = -\infty,$$

что противоречит центральной теореме.

Заметим, что теорема А покрывает половину теоремы Пухликова II. Следующий результат завершает доказательство теорем Пухликова I и II и частично доказывает основную теорему.

ТЕОРЕМА Б. $\mathrm{Bir} X = \mathrm{Aut} X$ и квинтика X не бирациональна никакому многообразию Фано с каноническими особенностями, отличному от X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы докажем несколько более сильное утверждение. Предположим существование такого бирационального отображения $\rho: X \dashrightarrow Y$, что многообразие Y имеет канонические особенности, а дивизор $-K_Y$ численно эффективен и объемен. Покажем, что ρ — изоморфизм.

Хорошо известно, что для $n \gg 0$ линейная система $|-nK_Y|$ свободна. Рассмотрим лог-пары

$$(Y, M_Y) = \left(Y, \frac{1}{n} |-nK_Y| \right) \quad \text{и} \quad (X, M_X) = (X, \rho^{-1}(M_Y)).$$

Из следствия центральной теоремы вытекает, что лог-пара (X, M_X) — лог-Калаби-Яо квинтика. Уточнение центральной теоремы влечет терминальность (X, M_X) .

Значит, мы можем найти такое $\zeta \in \mathbb{Q}_{>1}$, что обе лог-пары $(X, \zeta M_X)$ и $(Y, \zeta M_Y)$ являются каноническими моделями. Из теоремы единственности следует, что отображение ρ — изоморфизм.

Следующая теорема завершает доказательство основной теоремы.

ТЕОРЕМА В. Все бирационально изоморфные квинтике X расслоения, общий слой которых имеет размерность Кодаиры нуль, индуцированы проекциями в $\mathbb{P}^5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ρ — бирациональная перестройка квинтики X в такое расслоение $\tau: Y \rightarrow Z$, что размерность Кодаиры общего слоя расслоения τ равна нулю.

Возьмем “достаточно большой” очень обильный дивизор H на многообразии Z . Утверждение следует из равенства

$$\kappa(X, \rho^{-1}(|\tau^*(H)|)) = \dim Z$$

и теоремы-описания I.

§ 5. Доказательство центральной теоремы, часть I

В этом параграфе мы докажем половину центральной теоремы. Идеи, которые мы будем использовать, базируются на идеях и результатах статьи А. Корти [9].

Зафиксируем лог-Калаби-Яо квинтику (X, M_X) .

Основной результат этого параграфа заключается в следующей теореме.

ТЕОРЕМА НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ. $\mathrm{CS}(X, M_X)$ не содержит точек.

Мы докажем теорему несуществования за несколько шагов, а пока объясним ее значимость.

ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. В работе [6] показано, что из теоремы несуществования следуют обе теоремы Пухликова I и II.

Для начала обрисуем общую схему доказательства теоремы несуществования.

Глобальная стратегия: 1) предположить существование точки в $\text{CS}(X, M_X)$; 2) заменить лог-пару (X, M_X) новой лог-парой, которая содержит точку в $\text{CS}(X, M_X)$ как центр лог-канонических особенностей (LCS); 3) свести теорему несуществования к трехмерной задаче.

Предположим, что $\text{CS}(X, M_X)$ содержит точку O . Рассмотрим лог-пару

$$(X, B_X) = (X, H_X + M_X),$$

где H_X — достаточно общее гиперплоское сечение квинтики X , проходящее через точку O .

Заметим, что лог-пара (X, B_X) не является подвижной лог-парой, равно как и обычной лог-парой. Тем не менее, мы можем рассматривать ее как обычную лог-пару.

Наблюдение. $O \in \text{LCS}(X, B_X)$.

Пусть $f: W \rightarrow X$ — раздутие точки O и $E = f^{-1}(O)$. Тогда

$$a(X, B_X, E) = a(X, M_X, E) - 1.$$

Заметим, что в принципе f -исключительный дивизор E может реализовывать точку O как центр канонических особенностей лог-пары (X, M_X) и как центр лог-канонических особенностей лог-пары (X, B_X) .

ЛЕММА 5.1. *Имеют место неравенства*

$$a(X, B_X, E) > -1 \quad \text{и} \quad a(X, M_X, E) > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение неверно. Тогда

$$\text{mult}_O(M_X) \geq 3$$

и

$$5 = (-K_X)^2 \cdot M_X^2 \geq \text{mult}_O(M_X^2) \geq \text{mult}_O^2(M_X) \geq 9.$$

Рассмотрим лог-пару

$$(W, B^W) = (W, (\text{mult}_O(M_X) - 2)E + B_W) = (W, (\text{mult}_O(M_X) - 2)E + H_W + M_W),$$

где $H_W = f^{-1}(H_X)$ и $M_W = f^{-1}(M_X)$.

Наблюдение. По построению

$$K_W + B^W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X).$$

Следующая лемма легко вытекает из леммы 5.1.

ЛЕММА 5.2. $\text{LCS}(W, B^W)$ содержит собственное неприводимое подмногообразие дивизора E , которое не содержится в H_W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из эквивалентности

$$(\text{mult}_O(M_X) - 3)E + M_W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + M_X)$$

и леммы 5.1 следует, что

$$S \in \text{CS}(W, (\text{mult}_O(M_X) - 3)E + M_W),$$

где S – собственное неприводимое подмногообразие f -исключительного дивизора E .

Таким образом,

$$S \in \text{LCS}(W, (\text{mult}_O(M_X) - 2)E + M_W)$$

и общность H_X завершает доказательство.

Теперь мы рассмотрим подмногообразие многообразия W , которое будет играть довольно важную роль при доказательстве теоремы несуществования.

НОВЫЙ ОБЪЕКТ. Пусть S – многообразие максимальной размерности среди всех элементов $\text{LCS}(W, B^W)$, которые являются собственными неприводимыми подмногообразиями дивизора E и не содержатся в дивизоре H_W .

Заметим, что S может быть точкой, кривой или поверхностью.

Локальная стратегия: 1) доказать, что S не является поверхностью; 2) вывести из теоремы связности Шокурова, что S не может быть точкой; 3) показать, что S – “прямая” в $E \cong \mathbb{P}^3$.

Нам понадобится один результат А. Корти – теорема 3.1 работы [9].

ЛЕММА КОРТИ. Пусть P – гладкая точка на поверхности H и для некоторых неотрицательных рациональных чисел a_1 и a_2

$$P \in \text{LCS}(H, (1 - a_1)\Delta_1 + (1 - a_2)\Delta_2 + M_H),$$

где граница M_H подвижна, а неприводимые и приведенные кривые Δ_1 и Δ_2 пересекаются нормально в точке P . Тогда

$$\text{mult}_P(M_H^2) \geq \begin{cases} 4a_1a_2, & \text{если } a_1 \leq 1 \text{ или } a_2 \leq 1, \\ 4(a_1 + a_2 - 1), & \text{если } a_1 > 1 \text{ или } a_2 > 1. \end{cases}$$

Заметим, что лемма Корти отличается от своей оригинальной формы, но существенно.

ЛЕММА 5.3. S не может быть поверхностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тот факт, что

$$S \in \text{LCS}(W, (\text{mult}_O(M_X) - 2)E + M_W),$$

позволяет нам применить лемму Корти. Последнее дает неравенство

$$\text{mult}_S(M_W^2) \geq 4(3 - \text{mult}_O(M_X)).$$

Следовательно,

$$\text{mult}_O(M_X^2) \geq \text{mult}_O^2(M_X) + \text{mult}_S(M_W^2) \geq \text{mult}_O^2(M_X) + 4(3 - \text{mult}_O(M_X)).$$

Таким образом,

$$5 = (-K_X)^2 \cdot M_X^2 \geq \text{mult}_O(M_X^2) \geq (\text{mult}_O(M_X) - 2)^2 + 8.$$

Следующий результат, который нам потребуется, есть не что иное, как специальный случай теоремы связности Шокурова (см. [10]).

ТЕОРЕМА СВЯЗНОСТИ. $\text{LCS}(W, B^W)$ *связно в окрестности дивизора E .*

В частности, мы получаем следующий результат.

ЛЕММА 5.4. *S не является точкой.*

Таким образом, S — кривая в E . В следствии 3.6 работы [9] показано, что наша кривая S является “прямой” в $E \cong \mathbb{P}^3$. Тем не менее, мы докажем этот факт в следующей лемме.

ЛЕММА 5.5. *S — “прямая” в $E \cong \mathbb{P}^3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы имеем связность множества

$$\text{LCS}(W, (\text{mult}_O(M_X) - 2)E + H_W + M_W)$$

в окрестности дивизора E и большую свободу в выборе дивизора H_X . Из последнего и формулы присоединения следует, что

$$\text{LCS}(H_W, (\text{mult}_O(M_X) - 2)E|_{H_W} + M_W|_{H_W})$$

содержит только точки и

$$\{S \cap H_W\} \subset \text{LCS}(H_W, (\text{mult}_O(M_X) - 2)E|_{H_W} + M_W|_{H_W}).$$

Применяя теорему связности Шокурова к

$$\text{LCS}(H_W, (\text{mult}_O(M_X) - 2)E|_{H_W} + M_W|_{H_W})$$

и морфизму $f|_{H_W}$, мы получаем связность

$$\text{LCS}(H_W, (\text{mult}_O(M_X) - 2)E|_{H_W} + M_W|_{H_W})$$

в окрестности дивизора $E|_{H_W}$. Следовательно, множество $S \cap H_W$ состоит только из одной точки.

Подведем итог тому, что мы уже показали.

КОМПЕНДИУМ. $\text{LCS}(W, B^W)$ содержит неприводимую кривую $S \not\subset H_W$ такую, что S является “прямой” в $E \cong \mathbb{P}^3$.

Теперь мы спустимся с четырехмерного многообразия на трехмерное.

Локальная стратегия: 1) ограничить “все” на специальное гиперплоское сечение, проходящее через точку O ; 2) использовать результат типа леммы 5.3, чтобы показать существование плоскости на квинтике X , проходящей через точку O .

Заметим, что неявно мы уже показали следующее:

$$O \in \text{LCS}(H_X, M_X|_{H_X}).$$

К сожалению, этого недостаточно для доказательства теоремы несуществования. Нам нужно более сильное утверждение.

Пусть Y – достаточно общее гиперплоское сечение квинтики X , проходящее через точку O , такое, что

$$S \subset f^{-1}(Y).$$

Положим

$$(Y, M_Y) = (Y, M_X|_Y).$$

Предупреждение. Y может иметь особенности, а лог-пара (Y, M_Y) может уже и не быть подвижной!

Тем не менее, мы можем достаточно свободно обращаться с лог-парой (Y, M_Y) в окрестности точки O .

ЗАМЕЧАНИЕ. Точка O гладка на Y и

$$O \in \text{LCS}(Y, M_Y).$$

Пусть $g: V \rightarrow Y$ – раздутие точки O и $F = g^{-1}(O)$. По построению

$$S \subset F, \quad E|_V = F, \quad \text{mult}_O(M_Y) = \text{mult}_O(M_X), \quad g^{-1}(M_Y) = M_W|_V.$$

Рассмотрим лог-пару

$$(V, M^V) = (V, (\text{mult}_O(M_Y) - 2)F + M_V),$$

где $M_V = g^{-1}(M_Y)$. Тогда

$$K_V + M^V \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_Y + M_Y).$$

САМОЕ ВАЖНОЕ СВОЙСТВО МНОГООБРАЗИЯ Y . $S \in \text{LCS}(V, M^V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению $S \subset V$ и

$$S \in \text{LCS}(W, B^W).$$

Как следствие формулы присоединения и теоремы связности Шокурова мы получаем, что лог-пара (V, M^V) не лог-терминальна в окрестности кривой S .

Допустим, что множество $\text{LCS}(V, M^V)$ не содержит S . Тогда $\text{LCS}(V, M^V)$ содержит некоторую точку на кривой S . Более того, вновь применяя теорему связности Шокурова к лог-паре (V, M^V) , мы заключаем, что множество $\text{LCS}(V, M^V)$ содержит ровно одну точку на кривой S .

Пусть $h: U \rightarrow W$ – раздутие кривой S , и положим $G = h^{-1}(S)$. Рассмотрим лог-пару

$$(U, B^U) = (U, h^{-1}(B^W) + (\text{mult}_S(B^W) - 2)G).$$

Тогда

$$K_U + B^U \sim_{\mathbb{Q}} h^*(K_W + B^W).$$

Формула присоединения и теорема связности Шокурова влекут (см. доказательство леммы 5.1) существование такой кривой $\tilde{S} \subset G$, принадлежащей множеству $\text{LCS}(U, B^U)$, что $\tilde{S}$ является сечением морфизма $h|_G$ и либо кривая $\tilde{S}$ содержится в многообразии $h^{-1}(V)$, либо пересечение кривой $\tilde{S}$ и многообразия $h^{-1}(V)$ состоит из одной точки.

Заметим, что сложившаяся ситуация локальна по отношению к многообразию X . Поэтому, применяя теорему Каваматы–Фивега об обращении в нуль (см. [1]) к дивизору $h^{-1}(V) - G$, мы получаем сюръективность

$$H^0(h^{-1}(V)) \rightarrow H^0(h^{-1}(V)|_G) \rightarrow 0.$$

С другой стороны, линейная система $|h^{-1}(V)|_G|$ свободна, и, таким образом, как следствие общности выбора многообразия Y мы получаем, что кривая $\tilde{S}$ не содержится в многообразии $h^{-1}(V)$.

Прямой подсчет показывает, что дивизор $h^{-1}(V)|_G$ численно эффективен и объемен. Более того, его пересечение с любым сечением морфизма $h|_G$ либо тривиально, либо состоит более чем из одной точки. Однако, как мы уже показали ранее, пересечение кривой $\tilde{S}$ с $h^{-1}(V)$ состоит ровно из одной точки.

Как использовать самое важное свойство многообразия Y ?

Наблюдение. Чтобы получить противоречие, нужно применить рассуждения в духе доказательства леммы 5.3 к кривой S и многообразию Y .

Напомним, что лог-пара (Y, M_Y) может и не быть подвижной.

ЛЕММА 5.6. *Лог-пара (Y, M_Y) не является подвижной.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если лог-пара (Y, M_Y) подвижна, то мы можем повторить доказательство леммы 5.3 и получить противоречие.

Было бы неплохо “настроить” доказательство леммы 5.3 таким образом, чтобы применить ее к лог-паре (Y, M_Y) .

Наблюдение. Квинтика X содержит двумерную плоскость P такую, что кривая S содержится в $f^{-1}(P)$, поскольку в противном случае лог-пара (Y, M_Y) подвижна.

Заметим, что кратность плоскости P в границе M_Y равна кратности плоскости P в границе M_X .

Разложение. Имеется разложение

$$M_Y = \text{mult}_P(M_X)P + R_Y,$$

где лог-пара (Y, R_Y) подвижна.

Что делать теперь?

Локальная стратегия: 1) использовать лемму Корти для получения оценки снизу на $\text{mult}_O(R_Y^2)$; 2) использовать свойства вложения Y в $\mathbb{P}^4$ для получения оценки сверху на $\text{mult}_O(R_Y^2)$.

Заметим, что наше доказательство леммы 5.3 основывается на лемме Корти, “работающей” с подвижной границей и двумя дивизорами, которые пересекаются нормально.

Наблюдение. Дивизоры F и $g^{-1}(P)$ пересекаются нормально в S .

Таким образом, мы можем применить лемму Корти к лог-паре

$$(V, M^V) = (V, (\text{mult}_O(R_Y) + \text{mult}_P(M_X) - 2)F + \text{mult}_P(M_X)g^{-1}(P) + R_V),$$

где $R_V = g^{-1}(R_Y)$. Последнее дает неравенство

$$\text{mult}_S(R_V^2) \geq 4(3 - \text{mult}_O(R_Y) - \text{mult}_P(M_X))(1 - \text{mult}_P(M_X)).$$

Учитывая, что

$$\text{mult}_O(R_Y^2) \geq \text{mult}_O^2(R_Y) + \text{mult}_S(R_V^2),$$

мы получаем следующее.

Важное неравенство I:

$$\text{mult}_O(R_Y^2) \geq (\text{mult}_O(R_Y) - 1 + \text{mult}_P(M_X))^2 + 8(1 - \text{mult}_P(M_X)).$$

Теперь ограничим $\text{mult}_O(R_Y^2)$ сверху.

Пусть Z – достаточно общее гиперплоское сечение трехмерной квинтики Y , проходящей через точку O .

Наблюдение. Z – гладкая квинтика в $\mathbb{P}^3$.

С одной стороны,

$$(R_Y|_Z)^2 \geq \text{mult}_O(R_Y^2).$$

С другой стороны,

$$(R_Y|_Z)^2 = ((Z - \text{mult}_P(M_X)P)|_Z)^2 = 5 - 2\text{mult}_P(M_X) - 3\text{mult}_P^2(M_X),$$

откуда мы получаем следующее неравенство.

Важное неравенство II:

$$\text{mult}_O(R_Y^2) \leq 5 - 2\text{mult}_P(M_X) - 3\text{mult}_P^2(M_X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ НЕСУЩЕСТВОВАНИЯ. Из важных неравенств I и II следует, что

$$\text{mult}_P(M_X) = 1 \quad \text{и} \quad \text{mult}_O(R_Y) = 0.$$

Таким образом,

$$\text{mult}_O(M_X) = \text{mult}_O(M_Y) = \text{mult}_P(M_X) + \text{mult}_O(R_Y) = 1.$$

Следовательно,

$$O \notin \text{CS}(X, M_X).$$

§ 6. Доказательство центральной теоремы, часть II

В этом параграфе мы завершим доказательство центральной теоремы.

Пусть, как и в предыдущем параграфе, (X, M_X) — гладкая лог-Калаби-Яо квинтика.

Можно считать, что $\text{CS}(X, M_X) \neq \emptyset$. Следовательно, из теоремы несуществования следует, что найдется такое многообразие S с $\dim S \neq 0$, что

$$S \in \text{CS}(X, M_X).$$

В работе [6] А. В. Пухликов доказал следующий результат.

ЛЕММА ПУХЛИКОВА. *Выполнено равенство*

$$\text{mult}_S(M_X) = 1.$$

Наблюдение. Из теоремы несуществования и леммы Пухликова следует каноничность лог-пары (X, M_X) .

Глобальная стратегия: 1) получить условия на размерность и степень многообразия S ; 2) показать, что многообразие S содержится в трехмерном линейном подпространстве в $\mathbb{P}^5$; 3) использовать свойства вложения многообразия X в $\mathbb{P}^5$ для завершения доказательства центральной теоремы.

Заметим, что S может быть либо поверхностью, либо кривой.

ЛЕММА 6.1. *S — поверхность.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что S — кривая.

Пусть $f: W \rightarrow X$ — раздутие общей точки⁴ кривой S . Имеется соотношение

$$a(X, M_X, E) = 1.$$

Следовательно, существует собственное подмногообразие T дивизора E такое, что

$$T \in \text{CS}(W, f^{-1}(M_X) - E)$$

и морфизм $f|_T: T \rightarrow S$ сюръективен. Таким образом,

$$\text{mult}_S(M_X) \geq \text{mult}_T(g^{-1}(M_X)) > 1.$$

ЛЕММА 6.2. $\deg S \leq 5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение следует из неравенства

$$5 = (-K_X)^2 \cdot M_X^2 \geq \text{mult}_S(M_X^2) \deg S \geq \deg S.$$

ЛЕММА 6.3. *S содержится в трехмерном линейном подпространстве в $\mathbb{P}^5$.*

⁴Мы можем считать, что многообразие W квазипроективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное.

Пересекая X с достаточно общим гиперплоским сечением, мы можем считать, что многообразие X — квинтика в $\mathbb{P}^4$, содержащая кривую S .

Используя метод работы [6], мы покажем, что кривая S содержится в двумерном линейном подпространстве.

Рассмотрим достаточно общий конус R_S над кривой S . Тогда

$$R_S \cap X = S \cup \tilde{S}$$

и $\deg \tilde{S} = 4 \deg S$.

Пусть

$$Z = \text{Supp} \left(\bigcup_{i=1}^n \text{Bs } \mathcal{M}_i \right).$$

Тогда $S \subset Z$, хотя из общности конуса R_S следует, что $\tilde{S} \not\subset Z$.

Как показал А. В. Пухликов в работе [6], из общности конуса R_S следует, что кривые S и $\tilde{S}$ пересекаются трансверсально в $4 \deg S$ различных точках.

С другой стороны,

$$4 \deg S = \deg \tilde{S} = \deg M_X|_{\tilde{S}} \geq 4 \deg S \text{ mult}_S(M_X) = 4 \deg S.$$

Таким образом,

$$\tilde{S} \cap M_X = S \cap \tilde{S}.$$

Заметим, что общая секущая кривой S пересекает квинтику X ровно в 5 точках, поскольку в противном случае она должна содержаться в квинтике X и быть компонентой Z .

Рассмотрим дивизор

$$D = \sum_{i=1}^n b_i M_i,$$

где M_i — достаточно общий дивизор линейной системы $\mathcal{M}_i$. По предположению

$$\text{mult}_S(D) = 1.$$

Возьмем две достаточно общие точки P_S и P_D на кривой S и дивизоре D соответственно. Пусть L — прямая, проходящая через точки P_S и P_D , а P — достаточно общая точка на L . Обозначим через $R_{S,P}$ конус над кривой S с вершиной P и положим

$$R_{S,P} \cap X = S \cup \tilde{S}_P.$$

Как мы уже показали ранее, либо дивизор D содержит кривую $\tilde{S}_P$, либо он пересекает ее только в точках $S \cap \tilde{S}_P$.

По построению

$$P_D \in \tilde{S}_P \cap D \text{ и } P_D \notin S.$$

Значит, $\tilde{S}_P \subset D$ и, в частности,

$$L \cap X \subset D.$$

Последнее условие замкнуто, и мы можем считать, что

$$P_D \in S \setminus P_S.$$

Таким образом, как следствие общности в выборе дивизора D общая секущая кривой S должна пересекать Z ровно в 5 различных точках.

С другой стороны, каждое подмножество A пересечения Z с общим гиперплоским сечением, состоящее из трех коллинеарных точек, должно содержаться в плоской компоненте Z .

Подведем итог тому, что уже показано.

КОМПЕНДИУМ. $\text{CS}(X, M_X)$ содержит поверхность S с $\deg S \in [1, 5]$, содержащуюся в трехмерном линейном подпространстве $T \subset \mathbb{P}^5$.

Заметим, что пока мы нигде не использовали неприводимость поверхности S , хотя было очень удобно так считать.

ВАЖНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. Можно считать, что S – объединение всех элементов множества $\text{CS}(X, M_X)$.

Простое на вид важное замечание приводит к следующему полезному наблюдению.

Наблюдение. Любое из равенств $\deg S = 1$ или $\deg S = 5$ доказывает центральную теорему!

Таким образом, можно считать, что $\deg S \in [2, 4]$.

Пусть $\mathcal{H}_T$ – пучок на квинтике X , высекаемый гиперплоскими сечениями, которые содержат T . Тогда

$$X \cap T = S \cup \sum_{i=1}^r S_i,$$

где S_i – неприводимые поверхности.

Наблюдение. Все поверхности S_i приведены.

Для завершения доказательства центральной теоремы нам нужно показать, что множество $\text{CS}(X, M_X)$ содержит все поверхности S_i .

Редукция. Как и в процессе доказательства леммы 6.3, пересекая X с достаточно общим гиперплоским сечением, мы можем считать, что X – трехмерная квинтика, T – двумерная плоскость, а S и все S_i – кривые.

Что нам делать теперь?

Локальная стратегия: рассмотреть форму пересечения кривых S_i на гиперплоском сечении квинтики X , которое содержит плоскость T .

Возьмем поверхность D из пучка $\mathcal{H}_T$, гладкую в точках пересечения кривой S с кривыми S_i . На D

$$\left(\sum_{i=1}^r S_i \right) \cdot S_j = (D|_D - S) \cdot S_j = \deg S_j - S \cdot S_j.$$

На плоскости T

$$\deg S_j - S \cdot S_j = \deg S_j - \deg S \deg S_j < 0.$$

Таким образом,

$$(S \cdot S_j)_D = (S \cdot S_j)_T,$$

поскольку поверхность D гладкая в точках пересечения кривой S с кривыми S_i . Из работы [11] следует, что форма пересечения кривых S_i на поверхности D отрицательно определена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ. Дивизор

$$M_X|_D - S - \sum_{i=1}^r \text{mult}_{S_i}(M_X)S_i$$

численно эффективен и объемен на поверхности D .

С другой стороны, на поверхности D

$$M_X|_D - S - \sum_{i=1}^r \text{mult}_{S_i}(M_X)S_i \sim_{\mathbb{Q}} \sum_{i=1}^r (1 - \text{mult}_{S_i}(M_X))S_i$$

и

$$\sum_{i=1}^r (1 - \text{mult}_{S_i}(M_X))S_i \cdot S_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, r.$$

Поскольку форма пересечения кривых S_i на поверхности D отрицательно определена, то

$$\text{mult}_{S_i}(M_X) \geq 1$$

для всех S_i .

Дополнение

Зафиксируем гладкую гиперповерхность X степени n в $\mathbb{P}^n$, где $n = 6, 7$ или 8 . В этом параграфе мы обобщим основную теорему следующим образом.

ТЕОРЕМА О ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ. *$\text{Bir } X = \text{Aut } X$ и гиперповерхность X бирационально не изоморфна следующим многообразиям: многообразиям Фано с каноническими особенностями, отличным от X , расслоениям на многообразия кодаировой размерности $-\infty$, расслоениям на многообразия кодаировой размерности нуль, которые не заданы проекцией из $(n-2)$ -мерного линейного подпространства в $\mathbb{P}^n$.*

Зафиксируем такую лог-пару (X, M_X) , что

$$K_X + M_X \sim_{\mathbb{Q}} 0.$$

Как легко следует из доказательства основной теоремы, для обоснования теоремы о гиперповерхностях достаточно установить следующее обобщение центральной теоремы.

ЦЕНТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА I. *Лог-пара (X, M_X) канонична, $\kappa(X, M_X) = 0$ и*

$$\text{CS}(X, M_X) = \begin{cases} \emptyset, \\ \{X \cap H\} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{для линейного пространства} \\ H \subset \mathbb{P}^n \text{ размерности } n-2. \end{array}$$

Более того, доказательство центральной теоремы в свою очередь демонстрирует, что вместо центральной теоремы I нужно обосновать лишь следующий аналог теоремы несуществования.

УТВЕРЖДЕНИЕ. $\text{CS}(X, M_X)$ не содержит точек.

Предположим, что множество $\text{CS}(X, M_X)$ содержит точку O . Рассмотрим лог-пару

$$(X, B_X) = (X, H_X + M_X),$$

где

$$H_X = \sum_{i=1}^{n-4} H_i$$

и дивизоры H_i суть общие гиперплоские сечения гиперповерхности X , проходящие через точку O .

Наблюдение. Лог-пара (X, B_X) неканонична в точке O .

Пусть $f: W \rightarrow X$ – раздутие точки O , и положим $E = f^{-1}(O)$. Тогда

$$a(X, B_X, E) = a(X, M_X, E) - n + 4$$

и из доказательства леммы 5.1 следуют неравенства:

$$a(X, B_X, E) > -1, \quad a(X, M_X, E) > 0.$$

Рассмотрим лог-пару

$$(W, B^W) = (W, (\text{mult}_O(M_X) - 2)E + B_W) = (W, (\text{mult}_O(M_X) - 2)E + H_W + M_W),$$

где $H_W = f^{-1}(H_X)$ и $M_W = f^{-1}(M_X)$. По построению

$$K_W + B^W \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X + B_X).$$

Рассуждая аналогично доказательству леммы 5.2, мы получаем, что множество $\text{LCS}(W, B^W)$ содержит такое собственное неприводимое подмногообразие $S \subset E$, что S не содержится в H_W и лог-пара (W, B^W) не лог-канонична в общей точке многообразия S .

Предположим, что S имеет максимальную размерность среди всех элементов множества $\text{LCS}(W, B^W)$, которые обладают этими свойствами. Из доказательства леммы 5.3 следует, что коразмерность многообразия S больше 2, а из доказательства леммы 5.4 вытекает, что S не является точкой.

Редукция к трехмерному случаю. Пусть $Z = \bigcap_{i=1}^{n-4} H_i$.

Рассмотрим лог-пару

$$(Z, M_Z) = (Z, M_X|_Z).$$

Из общности выбора H_X сразу следует, что трехмерное многообразие Z гладко, а лог-пара (Z, M_Z) подвижна.

Заметим, что формула присоединения влечет

$$K_Z + M_Z \sim_{\mathbb{Q}} (K_X + B_X)|_Z.$$

Какие свойства лог-пара (Z, M_Z) наследует от лог-пары (X, M_X) ?

ЛЕММА. *Лог-пара (Z, M_Z) не лог-канонична в точке O .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из многократного применения формулы присоединения и теоремы связности Шокурова (см. [10]).

Пусть $h: U \rightarrow Z$ – раздутие точки O , и положим $G = h^{-1}(O)$. Тогда по построению

$$E|_U = G, \quad \text{mult}_O(M_Z) = \text{mult}_O(M_X), \quad h^{-1}(M_Z) = M_W|_U.$$

Рассмотрим лог-пару

$$(U, M^U) = (U, (\text{mult}_O(M_Z) - 2)G + M_U),$$

где $M_U = h^{-1}(M_Z)$. Тогда формула присоединения влечет

$$K_U + M^U \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_Z + M_Z) \sim_{\mathbb{Q}} (K_W + B^W)|_U.$$

Наблюдение. Из общности H_X следует, что

$$\text{LCS}(U, M^U) = \text{LCS}(W, (\text{mult}_O(M_X) - 2)E + M_W) \cap U.$$

Следствие 3.6 работы [9] влечет свойство многообразия Z , которое мы докажем непосредственно.

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО МНОГООБРАЗИЯ Z . *Множество $\text{LCS}(U, M^U)$ состоит из одной точки, и лог-пара (U, M^U) не лог-канонична в этой точке.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из последнего наблюдения следует, что $\text{LCS}(U, M^U)$ содержит только точки, из теоремы связности Шокурова (см. [10]) вытекает, что множество $\text{LCS}(U, M^U)$ содержит ровно одну точку, а из леммы получаем, что лог-пара (U, M^U) не лог-канонична в этой точке.

Из основного свойства многообразия Z и последнего наблюдения следует, что многообразие S есть линейное подпространство в $E \cong \mathbb{P}^{n-2}$ размерности $n - 4$.

Рассмотрим достаточно общее гиперплоское сечение Y гиперповерхности X , проходящее через точку O , такое, что

$$S \subset f^{-1}(Y).$$

Положим

$$(Y, M_Y) = (Y, M_X|_Y).$$

Предупреждение. Многообразие Y может быть особым.

Заметим, однако, что мы можем обращаться с лог-парой (Y, M_Y) довольно свободно в окрестности точки O , поскольку точка O – гладкая точка многообразия Y .

Наблюдение. Лог-пара (Y, M_Y) подвижна.

Пусть $g: V \rightarrow Y$ – раздутие точки O , и положим $F = g^{-1}(O)$. По построению

$$S \subset F, \quad E|_V = F, \quad \text{mult}_O(M_Y) = \text{mult}_O(M_X), \quad g^{-1}(M_Y) = M_W|_V.$$

Рассмотрим лог-пару

$$(V, (\text{mult}_O(M_Y) - 2)F + M_V),$$

где $M_V = g^{-1}(M_Y)$.

ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО МНОГООБРАЗИЯ Y . *Лог-пара*

$$(V, (\text{mult}_O(M_Y) - 2)F + M_V)$$

не лог-канонична в общей точке многообразия S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повторно ограничивая “все” на гиперплоское сечение гиперповерхности X , проходящее через точку O , и применяя формулу присоединения, мы можем считать, что многообразие W четырехмерно, многообразие V трехмерно, а S — кривая. Необходимое утверждение следует теперь из аргументов аналогичного ему утверждения § 5.

Следовательно, лемма Корти влечет

$$\text{mult}_S(M_V^2) > 4(3 - \text{mult}_O(M_Y)).$$

Таким образом,

$$\text{mult}_O(M_Y^2) \geq \text{mult}_O^2(M_Y) + \text{mult}_S(M_V^2) > \text{mult}_O^2(M_Y) + 4(3 - \text{mult}_O(M_Y)).$$

И, наконец, мы получаем, что

$$n = (-K_X)^{n-4} \cdot M_Y^2 \geq \text{mult}_O(M_Y^2) > (\text{mult}_O(M_Y) - 2)^2 + 8.$$

Список литературы

1. Kawamata Y., Matsuda K., Matsuki K. Introduction to the minimal model problem // Adv. Stud. Pure Math. 1987. V. 10. P. 283–360.
2. Cheltsov I. A. Log models of birationally rigid varieties // J. Math. Sci. 2000 (to appear).
3. Исковских В. А., Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Матем. сб. 1971. Т. 86 (128). № 1. С. 140–166.
4. Исковских В. А. Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Современные проблемы математики. Т. 12. М.: ВИНТИ, 1978. С. 159–236.
5. Pukhlikov A. V. Birational automorphisms of four-dimensional quintic // Invent. Math. 1987. V. 87. P. 303–329.
6. Пухликов А. В. Замечание о теореме В. А. Исковских и Ю. И. Манина о трехмерной квартике // Труды МИАН. 1995. Т. 208. С. 278–289.
7. Corti A. Factorizing birational maps of threefolds after Sarkisov // J. Algebraic Geom. 1995. V. 4. P. 223–254.
8. Shokurov V. V. 3-fold log models // J. Math. Sci. 1996. V. 81. P. 2667–2699.
9. Corti A. Singularities of linear systems and 3-fold birational geometry // Preprint 11. Warwick, 1999.
10. Shokurov V. V. Semistable 3-fold flips // Russ. Acad. Sci. Izv. Math. 1994. V. 42. № 2. P. 371–425.
11. Artin M. On isolated rational singularities of surfaces // Amer. J. Math. 1966. V. 88. P. 129–136.

Москва
E-mail: cheltsov@yahoo.com

Поступила в редакцию
10.06.1999 и 19.01.2000