Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Р. Данилин, Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 10, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 02:11:18

УДК 517.977

А. Р. Данилин

Аппроксимация сингулярно возмущенной эллиптической задачи оптимального управления

Рассматривается задача оптимального управления решениями эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных в прямоугольнике, две стороны которого параллельны характеристике предельного уравнения. Найдена предельная задача и получены асимптотические оценки для решений задачи, аппроксимирующей исходную.

Библиография: 11 названий.

В работе рассматривается одна задача Ж.-Л. Лионса [1] оптимального управления решениями уравнения эллиптического типа с малым коэффициентом при старшей производной в области с частью границы, параллельной характеристике. Найдена предельная задача и получены асимптотические оценки для решений задачи, аппроксимирующей исходную. Другие сингулярные задачи оптимального управления решениями эллиптических уравнений рассматривались в [2], [3]. Сингулярные задачи для уравнения эллиптического типа с малым коэффициентом при старшей производной в области с частью границы, параллельной характеристике, рассматривались также в [4]–[6].

Примеры оптимальных задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, в частности, эллиптического типа, дают механика сплошной среды, оптимизация элементов конструкций и т. п. [7], что говорит о важности изучения различных аспектов таких задач.

1. Постановка задачи и основные соотношения. В области $\Omega := (0; 1) \times (0; 1) \subset \mathbb{R}^2$ рассматривается следующая задача оптимального управления (см. [1; гл. 2, §2, соотношения (2.8), (2.9)]):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\varepsilon z(x, y) &= f(x, y) - u(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad z \in H_0^1(\Omega), \\ J_\nu(u) &:= \int_\Omega (z^2(x, y) + \nu \cdot u^2(x, y)) \, dx \, dy \rightarrow \inf, \quad u \in \mathcal{U}.\end{aligned}$$

Здесь $\nu > 0$, $H_0^1(\Omega)$ – соболевское пространство функций, равных нулю на границе $\partial\Omega$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\varepsilon z &:= \varepsilon^2 \Delta z - b(x) \frac{\partial z}{\partial y} - a(x, y)z, \\ f, a &\in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad a(x, y) \geq A > 0 \quad \text{при } (x, y) \in \Omega, \\ b &\in C^\infty([0, 1]), \quad b(x) \geq B > 0 \quad \text{при } x \in [0, 1], \\ \mathcal{U} &:= \left\{ u(\cdot) \in L_2(\Omega) : \|u\|^2 := \int_\Omega u^2(x, y) \, dx \, dy \leq R^2 \right\}.\end{aligned}\tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 96-15-96241, 99-01-00139).

В этом случае единственное оптимальное управление $u_\varepsilon(\cdot)$ и соответствующее ему $z_\varepsilon(\cdot)$ находятся как решение следующей задачи (см. [1; гл. 2, §2, соотношения (2.10)], [3]):

$$\mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon + u_\varepsilon = f, \quad \mathcal{L}_\varepsilon^* u_\varepsilon - \lambda_\varepsilon \cdot z_\varepsilon = 0, \quad z_\varepsilon, u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega), \quad (2)$$

$$\|u_\varepsilon\| \leq R, \quad \left(\frac{1}{\nu} - \lambda_\varepsilon\right) \cdot (R - \|u_\varepsilon\|) = 0, \quad 0 < \lambda_\varepsilon \leq \frac{1}{\nu}, \quad (3)$$

где

$$\mathcal{L}_\varepsilon^* u := \varepsilon^2 \Delta u + b(x) \frac{\partial u}{\partial y} - a(x, y) u.$$

Отметим, что в силу (1) $z_\varepsilon, u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Это следует из того, что в силу первого эллиптического уравнения из (2) порядок гладкости z_ε на две единицы больше, чем у u_ε , а в силу второго – наоборот, порядок гладкости u_ε на две единицы больше, чем у z_ε .

2. Предельная задача. Рассмотрим вопрос о поведении $\lambda_\varepsilon, z_\varepsilon$ и u_ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Предельной задачей для (2) будет задача

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 z := -b(x) \frac{\partial z}{\partial y} - a(x, y) z = f - u, & z(x, 0) = 0, \\ \mathcal{L}_0^* u := b(x) \frac{\partial u}{\partial y} - a(x, y) u = \lambda z, & u(x, 1) = 0, \\ \left(\frac{1}{\nu} - \lambda\right) \cdot (R - \|u\|) = 0, & \|u\| \leq R, \quad 0 < \lambda \leq \frac{1}{\nu}. \end{cases} \quad (4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. В классе непрерывных функций задача

$$\mathcal{L}_0 z + u = f, \quad \mathcal{L}_0^* u - \lambda z = g, \quad z(x, 0) = \varphi(x), \quad u(x, 1) = \psi(x) \quad (5)$$

разрешима единственным образом при любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in C(\bar{\Omega})$ и $\varphi, \psi \in C([0, 1])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Задача (5) эквивалентна системе интегральных уравнений с непрерывными ядрами. Поскольку интегральные операторы с непрерывными ядрами на компактах являются вполне непрерывными операторами, то согласно первой альтернативе Фредгольма достаточно проверить единственность решения задачи с $f = g = 0$ и $\varphi = \psi = 0$. Пусть $\mathcal{L}_0 z + u = 0$, $\mathcal{L}_0^* u - \lambda z = 0$, $z(x, 0) = 0$, $u(x, 1) = 0$. Тогда, умножив первое уравнение на u и проинтегрировав его по $[0, 1]$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 u^2(x, y) dy + \int_0^1 \mathcal{L}_0 z(x, y) \cdot u(x, y) dy \\ &= \int_0^1 u^2(x, y) dy + \int_0^1 z(x, y) \cdot \mathcal{L}_0^* u(x, y) dy \\ &= \int_0^1 u^2(x, y) dy + \lambda \cdot \int_0^1 z^2(x, y) dy. \end{aligned}$$

В силу непрерывности функций u и z это означает, что $u = z = 0$.

Отметим также, что

$$\text{если } z(x, 0) \equiv 0 \equiv u(x, 1), \quad \text{то } \int_0^1 \mathcal{L}_0 z \cdot u dy \equiv \int_0^1 z \cdot \mathcal{L}_0^* u dy. \quad (6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $z(\cdot; \lambda)$ и $u(\cdot; \lambda)$ – решение краевой задачи из (4).
Если

$$\mathcal{L}_0^* f = b(x) \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} - a(x, y) \cdot f(x, y) \neq 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (7)$$

то функция $h(\lambda) := \|u(\cdot; \lambda)\|^2$ строго возрастает и $h(0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $h'(\lambda) > 0$ при $\lambda > 0$. Так как

$$h'(\lambda) = 2 \left(u(\cdot; \lambda), \frac{\partial}{\partial \lambda} u(\cdot; \lambda) \right) := \int_{\Omega} u(x, y; \lambda) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} u(x, y; \lambda) dx dy, \quad (8)$$

то рассмотрим подробнее функции $w(\cdot) := \frac{\partial}{\partial \lambda} z(\cdot; \lambda)$ и $v(\cdot) := \frac{\partial}{\partial \lambda} u(\cdot; \lambda)$.

В силу теоремы о дифференцируемости решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений w и v удовлетворяют соотношениям

$$\mathcal{L}_0 w + v = 0, \quad \mathcal{L}_0^* v - \lambda w = z(\cdot; \lambda), \quad w(x, 0) = 0, \quad v(x, 1) = 0. \quad (9)$$

Пусть $\lambda > 0$. Положим $V(x, y) := v(x, y) - \frac{1}{\lambda} u(x, y)$. Тогда $V(x, 1) = 0$, $u(x, y; \lambda) = \lambda \cdot v(x, y) - \lambda \cdot V(x, y)$ и

$$\mathcal{L}_0^* V = \mathcal{L}_0^* v - \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}_0^* u(\cdot; \lambda) = z(\cdot; \lambda) + \lambda w - \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda z(\cdot; \lambda),$$

т.е.

$$\mathcal{L}_0^* V = \lambda \cdot w. \quad (10)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} h'(\lambda) &= 2(u(\cdot; \lambda), v) = (\lambda v - \lambda V, v) \stackrel{(9)}{=} \lambda \|v\|^2 - \lambda(V, -\mathcal{L}_0 w) \\ &\stackrel{(6)}{=} \lambda \|v\|^2 + \lambda(\mathcal{L}_0^* V, w) \stackrel{(10)}{\geq} 0. \end{aligned}$$

Если $h'(\lambda) = 0$, то $v = 0 = w$, что в силу (9) дает $z(\cdot; \lambda) = 0$. Но тогда $f = u(\cdot; \lambda)$ и $\mathcal{L}_0^* f \equiv 0$ в Ω , что противоречит условию (7).

В дальнейшем считается выполненным следующее неравенство

$$h\left(\frac{1}{\nu}\right) > R. \quad (11)$$

Тогда в условиях предложения 2 задача (4) имеет единственное решение z_0 , u_0 , λ_0 , причем

$$0 < \lambda_0 < \frac{1}{\nu}, \quad \|u_0\| = R \quad \text{и} \quad z_0 \neq 0. \quad (12)$$

Вопрос о поведении z_ε , u_ε , и λ_ε решает следующая

ТЕОРЕМА 1. При выполнении условий (7) и (11)

$$\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda_0, \quad z_\varepsilon \xrightarrow{L_2(\Omega)} z_0, \quad u_\varepsilon \xrightarrow{L_2(\Omega)} u_0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где λ_0 , z_0 и u_0 – единственное решение задачи (4) с таким λ_0 , что $\|u_0\| = R$. При этом $\|u_\varepsilon\| = R$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда найдутся последовательность $\{\varepsilon(n)\}$, $\varepsilon(n) \rightarrow 0$, и $\alpha > 0$ такие, что

$$\|z_n - z_0\| + \|u_n - u_0\| + |\lambda_n - \lambda_0| \geq \alpha, \quad (13)$$

где $\lambda_n := \lambda_{\varepsilon(n)}$, $z_n := z_{\varepsilon(n)}$, $u_n := u_{\varepsilon(n)}$. Поскольку последовательность $\{\lambda_n\}$ ограничена, то можно считать, что

$$\lambda_n \rightarrow \bar{\lambda} \in \left[0, \frac{1}{\nu}\right]. \quad (14)$$

Умножая первое равенство в системе (2) на z_n , второе – на u_n , применяя формулу Грина и учитывая, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial y} z_n, z_n\right) &= \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial y} z_n(x, y) \cdot z_n(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 z_n^2(x, y) \Big|_{y=0}^{y=1} dx = 0 = \left(\frac{\partial}{\partial y} u_n, u_n\right), \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \|\sqrt{a} \cdot z_n\|^2 + \|\nabla \varepsilon(n) z_n\|^2 &= (u_n - f, z_n), \\ \|\sqrt{a} \cdot u_n\|^2 + \|\nabla \varepsilon(n) u_n\|^2 &= \lambda_n (z_n, u_n). \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда $A\|z_n\|^2 \leq \|\sqrt{a} \cdot z_n\|^2 \leq \|u_n - f\| \cdot \|z_n\|$, что с учетом ограниченности последовательности $\{u_n\}$ в $L_2(\Omega)$ дает ограниченность последовательности $\{z_n\}$ в $L_2(\Omega)$. Это, в свою очередь, влечет ограниченность $\{\nabla \varepsilon(n) z_n\}$ и $\{\nabla \varepsilon(n) u_n\}$ в $L_2(\Omega)$. Таким образом, последовательности $\{\varepsilon(n) z_n\}$ и $\{\varepsilon(n) u_n\}$ ограничены в $H_0^1(\Omega)$ и можно считать, что $\varepsilon(n) z_n \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} \tilde{z}$ и $\varepsilon(n) u_n \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} \tilde{u}$. В силу компактности вложения $H_0^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ получим: $\varepsilon(n) z_n \xrightarrow{L_2(\Omega)} \tilde{z}$ и $\varepsilon(n) u_n \xrightarrow{L_2(\Omega)} \tilde{u}$, что вместе с ограниченностью последовательностей $\{z_n\}$ и $\{u_n\}$ дает соотношения

$$\varepsilon(n) z_n \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon(n) u_n \xrightarrow{H_0^1(\Omega)} 0. \quad (16)$$

Пусть $\bar{z}$ и $\bar{u}$ – решение краевой задачи из (4) при $\lambda = \bar{\lambda}$, а

$$\bar{z}_m := \bar{z}(x, y) \cdot \sigma_m(x), \quad \bar{u}_m := \bar{u}(x, y) \cdot \sigma_m(x),$$

где $\sigma_m(x)$ – “срезающая” функция такая, что

$$\sigma_m(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{m} < x < 1 - \frac{1}{m}; \\ 0, & x < \frac{1}{2m} \text{ или } x > 1 - \frac{1}{2m}. \end{cases}$$

Тогда

$$\|\bar{z}_m\| \leq \|\bar{z}\|, \quad \|\bar{u}_m\| \leq \|\bar{u}\|, \quad \bar{z}_m \xrightarrow{L_2(\Omega)} \bar{z}, \quad \bar{u}_m \xrightarrow{L_2(\Omega)} \bar{u}. \quad (17)$$

Отметим, что $\bar{z}_m(0, y) = \bar{z}_m(1, y) = \bar{u}_m(0, y) = \bar{u}_m(1, y) = 0$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \bar{z}_m + \bar{u}_m &= f \cdot \sigma_m(x), & \mathcal{L}_0^* \bar{u}_m - \bar{\lambda} \cdot \bar{z}_m &= 0, \\ \bar{z}_m(x, 0) &= 0, & \bar{u}_m(x, 1) &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Пусть $z_{n,m} := z_n - \bar{z}_m$, $u_{n,m} := u_n - \bar{u}_m$, $\lambda_{n,m} := \lambda_n - \bar{\lambda}_m$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n z_{n,m} + u_{n,m} &= \mathcal{L}_n z_n - \varepsilon^2(n) \Delta \bar{z}_m - \mathcal{L}_0 \bar{z}_m + u_n - \bar{u}_m \\ &\stackrel{(2), (18)}{=} f - \varepsilon^2(n) \Delta \bar{z}_m - f \cdot \sigma_m, \\ \mathcal{L}_n^* u_{n,m} - \lambda_n \cdot z_{n,m} &= \mathcal{L}_n^* u_n - \varepsilon^2(n) \Delta \bar{u}_m - \mathcal{L}_0^* \bar{u}_m - \lambda_n \cdot z_n + \lambda_n \cdot \bar{z}_m \\ &= -\varepsilon^2(n) \Delta \bar{u}_m - \bar{\lambda} \cdot \bar{z}_m + \bar{\lambda}_n \cdot \bar{z}_m. \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n z_{n,m} + u_{n,m} &= -\varepsilon^2(n) \Delta \bar{z}_m - f_m, \\ \mathcal{L}_n^* u_{n,m} - \lambda_n \cdot z_{n,m} &= -\varepsilon^2(n) \Delta \bar{u}_m - \bar{\lambda}_n \cdot \bar{z}_m, \end{aligned} \quad (19)$$

где $f_m(x, y) := f(x, y) \cdot (1 - \sigma_m(x)) \xrightarrow{L_2(\Omega)} 0$.

Рассмотрим величину

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_n z_{n,m}, u_{n,m}) - (z_{n,m}, \mathcal{L}_n^* u_{n,m}) &= (\mathcal{L}_n z_n - \varepsilon^2(n) \Delta \bar{z}_m - \mathcal{L}_0 \bar{z}_m, u_n - \bar{u}_m) \\ &\quad - (z_n - \bar{z}_m, \mathcal{L}_n^* u_n - \varepsilon^2(n) \Delta \bar{u}_m - \mathcal{L}_0^* \bar{u}_m) \\ &= (\mathcal{L}_n z_n, u_n) - (\mathcal{L}_n z_n, \bar{u}_m) - \varepsilon^2(n) (\Delta \bar{z}_m, u_n) + \varepsilon^2(n) (\Delta \bar{z}_m, \bar{u}_m) \\ &\quad - (\mathcal{L}_0 \bar{z}_m, u_n) + (\mathcal{L}_0 \bar{z}_m, \bar{u}_m) - (z_n, \mathcal{L}_n^* u_n) + \varepsilon^2(n) (z_n, \Delta \bar{u}_m) \\ &\quad + (z_n, \mathcal{L}_0^* \bar{u}_m) + (\bar{z}_m, \mathcal{L}_n^* u_n) - \varepsilon^2(n) (\bar{z}_m, \Delta \bar{u}_m) - (\bar{z}_m, \mathcal{L}_0^* \bar{u}_m) \\ &= -\varepsilon^2(n) (\Delta z_n, \bar{u}_m) - (\mathcal{L}_0 z_n, \bar{u}_m) - (\mathcal{L}_0 \bar{z}_m, u_n) + (z_n, \mathcal{L}_0^* \bar{u}_m) \\ &\quad + \varepsilon^2(n) (\bar{z}_m, \Delta u_n) + (\bar{z}_m, \mathcal{L}_0^* u_n) + \bar{\gamma}_{n,m} \\ &= \bar{\gamma}_{n,m} - \varepsilon^2(n) (\Delta z_n, \bar{u}_m) + \varepsilon^2(n) (\bar{z}_m, \Delta u_n), \end{aligned}$$

где $\bar{\gamma}_{n,m} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и любом фиксированном m .

Покажем, что $\varepsilon^2(n) (\Delta z_n, \bar{u}_m) \rightarrow 0$ и $\varepsilon^2(n) (\bar{z}_m, \Delta u_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Имеем

$$\varepsilon^2(n) (\Delta z_n, \bar{u}_m) = -\varepsilon^2(n) (\nabla z_n, \nabla u_m) - \varepsilon^2(n) \int_0^1 \bar{u}_m(x, 0) \cdot \frac{\partial}{\partial y} z_n(x, 0) dx. \quad (20)$$

Первое слагаемое в (20) стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ в силу (16). Рассмотрим второе слагаемое.

Поскольку при $v \in H_0^1(\Omega)$ имеет место соотношение

$$\varepsilon^2(n)(\Delta z_n, v) \stackrel{(16)}{=} \varepsilon^2(n)(\nabla z_n, \nabla v) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

то последовательность $\{\varepsilon^2(n)\Delta z_n\}$ поточечно ограничена в $H_0^1(\Omega)$ как последовательность линейных непрерывных функционалов. Поэтому по теореме Банаха–Штейнгауза [8] $\{\varepsilon^2(n)\Delta z_n\}$ ограничена в $H_0^1(\Omega)$ и, следовательно, в $L_2(\Omega)$. Аналогично показывается ограниченность в $L_2(\Omega)$ последовательностей $\{\varepsilon^2(n)\Delta u_n\}$, $\left\{\varepsilon^2(n)\frac{\partial^2}{\partial x^2}z_n\right\}$ и $\left\{\varepsilon^2(n)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_n\right\}$. Таким образом, в силу (2) последовательности $\left\{\frac{\partial}{\partial y}z_n\right\}$ и $\left\{\frac{\partial}{\partial y}u_n\right\}$ ограничены в $L_2(\Omega)$.

Будем рассматривать первое уравнение системы (2) как обыкновенное дифференциальное уравнение, зависящее от параметра x :

$$\varepsilon^2(n)\frac{\partial^2}{\partial y^2}z_n - b(x)\frac{\partial}{\partial y}z_n = g_n(x, y) := a(x, y) - u_n + f,$$

где последовательность $\{g_n\}$ ограничена в $L_2(\Omega)$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial y}z_n = C_n(x) \cdot \exp\left(\frac{b(x) \cdot y}{\varepsilon^2(n)}\right) + \frac{1}{\varepsilon^2(n)} \int_1^y \exp\left(\frac{b(x)(y - \bar{y})}{\varepsilon^2(n)}\right) \cdot g(x, \bar{y}) d\bar{y}. \quad (21)$$

Поэтому последовательность $\{\varepsilon^2(n)C_n(x) \cdot \exp(b(x) \cdot y / \varepsilon^2(n))\}$ ограничена в $L_2(\Omega)$, т. е.

$$\begin{aligned} K &\geq \varepsilon^4(n) \int_0^1 dx \int_0^1 C_n^2(x) \cdot \exp\left(\frac{2b(x) \cdot y}{\varepsilon^2(n)}\right) dy \\ &= \frac{\varepsilon^2(n)}{2} \int_0^1 \frac{C_n^2(x)}{b(x)} \cdot \left(\exp\left(\frac{2b(x)}{\varepsilon^2(n)}\right) - 1\right) dx \\ &\geq \frac{\varepsilon^2(n)}{2} \left(\max_{0 \leq x \leq 1} b(x)\right)^{-1} \cdot \left(\exp\left(\frac{2B}{\varepsilon^2(n)}\right) - 1\right) \cdot \int_0^1 C_n^2(x) dx \\ &= \varepsilon^2(n) \cdot K_2 \cdot \left(\exp\left(\frac{2B}{\varepsilon^2(n)}\right) - 1\right) \cdot \int_0^1 C_n^2(x) dx. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^1 C_n^2(x) dx \leq K_3 \cdot \varepsilon^{-2}(n) \cdot \left(\exp\left(\frac{2B}{\varepsilon^2(n)}\right) - 1\right)^{-1}. \quad (22)$$

Оценим второе слагаемое в (20):

$$\begin{aligned} &\left| \varepsilon^2(n) \int_0^1 u_m(x, 0) \cdot \frac{\partial}{\partial y}z_n(x, 0) dx \right| \stackrel{(21)}{\leq} \varepsilon^2(n) \left| \int_0^1 C_n(x) \cdot u_m(x, 0) dx \right| \\ &+ \left| \int_0^1 u_m(x, 0) \cdot \left(\int_y^1 \exp\left(\frac{b(x)(y - \bar{y})}{\varepsilon^2(n)}\right) \cdot g_n(x, \bar{y}) d\bar{y} \right) dx \right|. \end{aligned} \quad (23)$$

Но

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(n) \left| \int_0^1 C_n(x) \cdot u_m(x, 0) dx \right| &\leq \varepsilon^2(n) \left(\int_0^1 C_n^2(x) dx \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 u_m^2(x, 0) dx \right)^{1/2} \\ &\stackrel{(22)}{\leq} K_4 \cdot \varepsilon(n) \cdot \left(\exp \left(\frac{2B}{\varepsilon^2(n)} - 1 \right) \right)^{-1/2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Аналогично

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 u_m(x, 0) \cdot \left(\int_y^1 \exp \left(\frac{b(x)(y - \bar{y})}{\varepsilon^2(n)} \right) \cdot g(x, \bar{y}) d\bar{y} \right) dx \right| \\ \leq K_5 \cdot \varepsilon(n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу (20) $\varepsilon^2(n) \cdot (\Delta z_n, \bar{u}_m) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Аналогично показывается соотношение $\varepsilon^2(n) \cdot (\bar{z}_m, \Delta u_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Итак,

$$(\mathcal{L}_n z_{n,m}, u_{n,m}) = (z_{n,m}, \mathcal{L}_n^* u_{n,m}) + \bar{\gamma}_{n,m} \quad \text{и} \quad \bar{\gamma}_{n,m} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Умножая скалярно первое равенство в (19) на $u_{n,m}$, учитывая второе равенство этой системы и (24), получим

$$\begin{aligned} (f_m, u_{n,m}) - \varepsilon^2(n) (\Delta \bar{z}_m, u_{n,m}) &= \|u_{n,m}\|^2 + (\mathcal{L}_n z_{n,m}, u_{n,m}) \\ &= \|u_{n,m}\|^2 + (z_{n,m}, \mathcal{L}_n^* u_{n,m}) + \bar{\gamma}_{n,m} \\ &= \|u_{n,m}\|^2 + \lambda_n \cdot \|z_{n,m}\|^2 - \varepsilon^2(n) (\Delta \bar{u}_m, z_{n,m}) + \bar{\lambda}_n \cdot (\bar{z}_m, z_{n,m}), \end{aligned}$$

т.е.

$$\|u_{n,m}\|^2 + \lambda_n \cdot \|z_{n,m}\|^2 = \gamma_{n,m} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Так как $\gamma_{n,m} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и каждом фиксированном m , то найдется последовательность $\{n(m)\}$: $n(m) \rightarrow \infty$, $\gamma_{n(m),m} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Тогда из соотношения (25) следует, что

$$u_{n(m),m} = u_{n(m)} - \bar{u}_m \rightarrow 0, \quad \lambda_{n(m),m} \cdot z_{n(m),m} = \lambda_{n(m),m} \cdot (z_{n(m)} - \bar{z}_m) \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow \infty$ в $L_2(\Omega)$. Это вместе с (14) и (17) дает

$$u_{n(m)} \rightarrow \bar{u} \quad \text{и} \quad \lambda_{n(m),m} \cdot \bar{z}_m \rightarrow \bar{\lambda} \cdot \bar{z} \quad \text{при } m \rightarrow \infty \quad \text{в } L_2(\Omega). \quad (26)$$

Таким образом, $\|u_{n(m),m}\| \rightarrow \|\bar{u}\|$. Перейдем в равенстве

$$\left(\frac{1}{\nu} - \lambda_{n(m)} \right) \cdot (R - \|u_{n(m)}\|) = 0$$

к пределу при $m \rightarrow \infty$. Получим

$$\left(\frac{1}{\nu} - \bar{\lambda} \right) \cdot (R - \|\bar{u}\|) = 0.$$

Если $1/\nu = \bar{\lambda}$, то $R < \|\bar{u}\|$, что противоречит неравенствам $R \geq \|u_{n(m)}\|$. Поэтому $1/\nu > \bar{\lambda} \geq 0$ и $R = \|\bar{u}\|$. Тогда $\|\bar{u}\| \neq 0$ и по предложению 2 выполняется соотношение $\bar{\lambda} \neq 0$, что в силу (26) дает $z_{n(m)} \rightarrow \bar{z}$ в $L_2(\Omega)$. С учетом единственности решения задачи (4) получим, что $\bar{\lambda} = \lambda_0$, $\bar{z} = z_0$, а $\bar{u} = u_0$. Но это противоречит соотношению (13). Итак, $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda_0$, $z_\varepsilon \xrightarrow{L_2(\Omega)} z_0$, $u_\varepsilon \xrightarrow{L_2(\Omega)} u_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом так как $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda_0 < 1/\nu$, то и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство $\lambda_\varepsilon < 1/\nu$ и, следовательно, $\|u_\varepsilon\| = R$.

3. Аппроксимационные свойства исходной задачи. В силу теоремы 1 исходная задача эквивалентна задаче Дирихле для системы, зависящей от параметра λ_ε :

$$\begin{cases} \mathcal{L}z_\varepsilon + u_\varepsilon = f, & \mathcal{L}^*u_\varepsilon - \lambda_\varepsilon y_\varepsilon = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ z_\varepsilon(x, y) = u_\varepsilon(x, y) = 0, & & (x, y) \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (27)$$

с дополнительным условием

$$\|u_\varepsilon\|^2 = \int_{\Omega} u_\varepsilon^2(x, y) dx dy = R^2. \quad (28)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и для некоторого $\alpha > 0$ функции $Z_\varepsilon, U_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$ и Λ_ε удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{cases} \mathcal{L}Z_\varepsilon + U_\varepsilon - f = o(\varepsilon^\alpha), & \mathcal{L}^*U_\varepsilon - \Lambda_\varepsilon Z_\varepsilon = o(\varepsilon^\alpha), & (x, y) \in \Omega, \\ Z_\varepsilon(x, y) = o(\varepsilon^\alpha), & U_\varepsilon(x, y) = o(\varepsilon^\alpha), & (x, y) \in \partial\Omega, \\ \|U_\varepsilon\| = R + o(\varepsilon^\alpha) \end{cases} \quad (29)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ в смысле метрики пространств $C^2(\Omega)$, $C^2(\partial\Omega)$ соответственно, а $\Lambda_\varepsilon - \lambda_0 = o(1)$, $Z_\varepsilon(x) - z_0(x) = o(1)$, $U_\varepsilon(x) - u_0(x) = o(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $L_2(\Omega)$.

Тогда $\Lambda_\varepsilon - \lambda_\varepsilon = o(\varepsilon^\alpha)$, $Z_\varepsilon - z_\varepsilon = o(\varepsilon^{\alpha-1})$, $U_\varepsilon - u_\varepsilon = o(\varepsilon^{\alpha-1})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в $C(\bar{\Omega})$, где z_ε , u_ε и λ_ε — решение задачи (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{z} := Z_\varepsilon - z_\varepsilon$, $\bar{u} := U_\varepsilon - u_\varepsilon$ и $\bar{\lambda} := \lambda_\varepsilon - \lambda_0$. Тогда в силу условий теоремы и соотношений (27)

$$\begin{cases} \mathcal{L}\bar{z} + \bar{u} = o(\varepsilon^\alpha), & \mathcal{L}^*\bar{u} - \Lambda_\varepsilon \bar{z} - \bar{\lambda} Z_\varepsilon = o(\varepsilon^\alpha), & (x, y) \in \Omega, \\ \bar{z} = o(\varepsilon^\alpha), & \bar{u} = o(\varepsilon^\alpha), & (x, y) \in \partial\Omega, \\ (u_\varepsilon, \bar{u}) = -\frac{1}{2}\|\bar{u}\|^2 + o(\varepsilon^\alpha) \end{cases} \quad (30)$$

и по теореме 1 $\bar{z} \xrightarrow{L_2(\Omega)} 0$, $\bar{u} \xrightarrow{L_2(\Omega)} 0$ и $\bar{\lambda}z \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Умножив скалярно первое равенство в (30) на u_ε , получим

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\varepsilon \bar{z}, u_\varepsilon) + (\bar{u}, u_\varepsilon) &\stackrel{\text{ф. Грина}}{=} (\bar{z}, \mathcal{L}_\varepsilon^* u_\varepsilon) + o(\varepsilon^\alpha) + (\bar{u}, u_\varepsilon) \\ &\stackrel{(27)}{=} \lambda_\varepsilon \cdot (\bar{z}, z_\varepsilon) + (\bar{u}, u_\varepsilon) + o(\varepsilon^\alpha) = o(\varepsilon^\alpha), \end{aligned}$$

т. е.

$$\lambda_\varepsilon \cdot (\bar{z}, z_\varepsilon) + (\bar{u}, u_\varepsilon) = o(\varepsilon^\alpha). \quad (31)$$

Аналогично с учетом равенства (31) после умножения на z_ε получим

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\varepsilon^* \bar{u}, z_\varepsilon) - \lambda_\varepsilon (\bar{z}, z_\varepsilon) - \bar{\lambda} (Z_\varepsilon, z_\varepsilon) &\stackrel{\text{ф. Грина}}{=} (\bar{u}, \mathcal{L}_\varepsilon z_\varepsilon) - \lambda_\varepsilon (\bar{z}, z_\varepsilon) - \bar{\lambda} (Z_\varepsilon, z_\varepsilon) + o(\varepsilon^\alpha) \\ &\stackrel{(27)}{=} (\bar{u}, f) - (\bar{u}, u_\varepsilon) - \lambda_\varepsilon (\bar{z}, z_\varepsilon) - \bar{\lambda} (Z_\varepsilon, z_\varepsilon) + o(\varepsilon^\alpha) \\ &\stackrel{(31)}{=} (\bar{u}, f) - \bar{\lambda} (Z_\varepsilon, z_\varepsilon) + o(\varepsilon^\alpha) \stackrel{(30)}{=} o(\varepsilon^\alpha), \end{aligned}$$

или

$$(\bar{u}, f) = \bar{\lambda}(Z_\varepsilon, z_\varepsilon) + o(\varepsilon^\alpha). \quad (32)$$

Наконец, умножив второе равенство в (30) скалярно на $\bar{z}$, получим

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}_\varepsilon^* \bar{u}, \bar{z}) - \lambda_\varepsilon \cdot \|\bar{z}\|^2 - \bar{\lambda}(Z_\varepsilon, \bar{z}) \\ & \stackrel{\text{ф. Грина}}{=} (\bar{u}, \mathcal{L}_\varepsilon \bar{z}) + o(\varepsilon^{2\alpha}) - \lambda_\varepsilon \cdot \|\bar{z}\|^2 - \bar{\lambda}(Z_\varepsilon, \bar{z}) \\ & \stackrel{(30)}{=} -\|\bar{u}\|^2 + o(\varepsilon^\alpha) \cdot \|\bar{u}\| + o(\varepsilon^{2\alpha}) - \lambda_\varepsilon \cdot \|\bar{z}\|^2 - \bar{\lambda}(\|\bar{z}\|^2 + (Z_\varepsilon, \bar{z})) \\ & = -\|\bar{u}\|^2 + o(\varepsilon^\alpha) \cdot \|\bar{u}\| + o(\varepsilon^{2\alpha}) - \lambda_\varepsilon \cdot \|\bar{z}\|^2 - \bar{\lambda} \cdot (Z_\varepsilon, \bar{z}) \\ & \stackrel{(30), (31)}{=} -\|\bar{u}\|^2 + o(\varepsilon^\alpha) \cdot \|\bar{u}\| + o(\varepsilon^{2\alpha}) - \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_\varepsilon} \cdot \left(\frac{1}{2} \|\bar{u}\|^2 + o(\varepsilon^\alpha) \right) + o(\varepsilon^{2\alpha}) \\ & = o(\varepsilon^\alpha) \cdot \|\bar{z}\|. \end{aligned}$$

Но из (32) и того, что $(\bar{z}, z_\varepsilon) \rightarrow \|z_0\|^2 \neq 0$ (см. (12)), следует, что

$$\bar{\lambda} = \|\bar{u}\| \cdot O(1) + o(\varepsilon^\alpha). \quad (33)$$

Поэтому

$$-\|\bar{u}\|^2 \cdot \left(1 + \frac{\bar{\lambda}}{2\lambda_\varepsilon} \right) - \lambda_\varepsilon \cdot \|\bar{z}\|^2 + o(\varepsilon^\alpha) \cdot \|\bar{u}\| - \frac{1}{\lambda_\varepsilon} \|\bar{u}\| \cdot o(\varepsilon^\alpha) + o(\varepsilon^{2\alpha}) = o(\varepsilon^\alpha) \cdot \|\bar{z}\|,$$

или

$$\|\bar{u}\|^2 \cdot \left(1 + \frac{\bar{\lambda}}{2\lambda_\varepsilon} \right) + \lambda_\varepsilon \cdot \|\bar{z}\|^2 = o(\varepsilon^\alpha) \cdot (\|\bar{z}\| + \|\bar{u}\|) + o(\varepsilon^{2\alpha}).$$

Но $\|\bar{z}\| + \|\bar{u}\| \asymp (\|\bar{z}\|^2 + \|\bar{u}\|^2)^{1/2}$, а в силу того, что $\bar{\lambda} \rightarrow 0$, $\lambda_\varepsilon \rightarrow \lambda_0 \neq 0$, справедливо соотношение

$$\|\bar{u}\|^2 \cdot \left(1 + \frac{\bar{\lambda}}{2\lambda_\varepsilon} \right) + \lambda_\varepsilon \cdot \|\bar{z}\|^2 \asymp \|\bar{z}\|^2 + \|\bar{u}\|^2,$$

поэтому $\|\bar{z}\|^2 + \|\bar{u}\|^2 = o(\varepsilon^\alpha) \cdot (\|\bar{z}\|^2 + \|\bar{u}\|^2)^{1/2} + o(\varepsilon^{2\alpha})$. Таким образом, $\|\bar{z}\| + \|\bar{u}\| = o(\varepsilon^\alpha)$ и, тем самым, $\|\bar{z}\| = o(\varepsilon^\alpha)$ и $\|\bar{u}\| = o(\varepsilon^\alpha)$. Формула (33) показывает, что и $\bar{\lambda} = o(\varepsilon^\alpha)$.

Теперь, умножив первое уравнение в (30) на $\bar{z}$, получим

$$(\bar{u}, \bar{z}) + (\mathcal{L}_\varepsilon \bar{z}, \bar{z}) = o(\varepsilon^{2\alpha}) + \varepsilon^2 \cdot \|\nabla \bar{z}\|^2 - (a \cdot \bar{z}, \bar{z}) = o(\varepsilon^\alpha) \cdot \|\bar{z}\|,$$

или $\|\nabla \bar{z}\| = o(\varepsilon^{\alpha-1})$. Аналогично и $\|\nabla \bar{u}\| = o(\varepsilon^{\alpha-1})$. Таким образом, $\|\bar{z}\|_{H^1(\Omega)} = o(\varepsilon^{\alpha-1})$ и $\|\bar{u}\|_{H^1(\Omega)} = o(\varepsilon^{\alpha-1})$. Но $\bar{z}, \bar{u} \in C^2(\Omega)$, поэтому в силу формулы (5.3) из [9]

$$\|\bar{z}\|_{H^2(\Omega)} \leq K \cdot (\|\bar{z}\|_{H^1(\Omega)} + \|\mathcal{L}_\varepsilon \bar{z}\|_{L_2(\Omega)} + \|o(\varepsilon^\alpha) - \bar{z}\|_{H^2(\partial\Omega)}) = o(\varepsilon^{\alpha-1}),$$

что в силу теоремы вложения [10] дает $\|\bar{z}\|_{C(\bar{\Omega})} = o(\varepsilon^{\alpha-1})$. Аналогично и $\|\bar{u}\|_{C(\bar{\Omega})} = o(\varepsilon^{\alpha-1})$.

Теорема 2 показывает, что для построения асимптотики функций z_ε , u_ε и λ_ε достаточно построить функции Z_ε , U_ε и Λ_ε , удовлетворяющие соотношениям (29).

Функции Z_ε , U_ε и Λ_ε можно определить с помощью частичных сумм согласованных асимптотических рядов [11], построенных для различных подобластей исходного квадрата. Такое построение в силу нарастания степенных особенностей у внешнего разложения в окрестностях угловых точек существенно сложнее ситуаций, возникающих для одного эллиптического уравнения или системы, связанной общими граничными условиями [5]–[7].

Построение полного асимптотического разложения, позволяющего аппроксимировать z_ε , u_ε , λ_ε в $\overline{\Omega}$ с точностью до любой степени малого параметра ε , предполагается опубликовать позднее.

Список литературы

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.
2. Данилин А. Р. Асимптотика ограниченных управлений для сингулярной эллиптической задачи в области с малой полостью // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 11. С. 27–60.
3. Капустян В. Е. Асимптотика ограниченных управлений в оптимальных эллиптических задачах // Докл. АН Украины. Сер. математика, естествознание, технические науки. 1992. № 2. С. 70–74.
4. Ильин А. М., Леликова Е. Ф. Асимптотика решений некоторых эллиптических уравнений в неограниченных областях // Матем. сб. 1982. Т. 119 (161). № 3. С. 307–324.
5. Леликова Е. Ф. Метод сращивания асимптотических разложений для уравнения $\varepsilon \Delta u - au_z = f$ в параллелепипеде // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. № 9. С. 1638–1648.
6. Калякин Л. А. Асимптотика решения системы двух линейных уравнений МГД с сингулярным возмущением. I. Стандартная задача в эллиптическом слое // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 10. С. 1724–1738.
7. Литвинов В. Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987.
8. Banach S., Steinhaus H. Sur le principe de la condensation de singularités // Fund. Math. 1927. V. 9. P. 50–61.
9. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
10. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
11. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.