Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Дудов, И. В. Златорунская, Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 10, 13–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm513>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 06:53:27

УДК 517.982.256+519.853.3

С. И. Дудов, И. В. Златорунская

Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы

Рассматривается задача о равномерной оценке (наилучшем приближении) выпуклого компакта шаром произвольной нормы в метрике Хаусдорфа, порожденной используемой нормой.

Задача редуцирована к одной задаче выпуклого программирования, что позволило использовать при ее исследовании средства выпуклого анализа. Получены необходимые и достаточные условия решения задачи и некоторые его свойства. В частности, доказано, что центр хотя бы одного шара наилучшего приближения содержится в оцениваемом компакте, а также получены условия, при которых все множество центров шаров наилучшего приближения содержится в этом компакте, и условие единственности решения.

Библиография: 19 названий.

§ 1. Введение

Получение оценок и аппроксимаций достаточно сложных множеств множествами простой структуры является одним из направлений негладкого анализа. Такие задачи находят обширные приложения в естествознании и прежде всего в самой математике. Можно указать на многочисленные работы, связанные с внешними и внутренними эллипсоидальными оценками множеств и многозначных отображений (см., например, [1]). Наряду с эллипсоидом к числу наиболее простых множеств как в геометрическом смысле, так и по числу задающих параметров относится шар любой нормы.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть D — подлежащий оценке заданный выпуклый компакт из конечномерного действительного пространства $\mathbb{R}^p$, функция $n(x)$ удовлетворяет на $\mathbb{R}^p$ аксиомам нормы, $\rho(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} n(x - y)$ — уклонение множества A от множества B в норме $n(\cdot)$, $h(A, B) = \max\{\rho(A, B); \rho(B, A)\}$ — расстояние Хаусдорфа между множествами A и B в норме $n(\cdot)$, $Bn(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x - y) \leq r\}$ — шар в норме $n(\cdot)$ с центром в точке x и радиусом r . Тогда задачу о наилучшем приближении выпуклого компакта D шаром нормы $n(\cdot)$ в метрике Хаусдорфа, порожденной этой нормой, можно записать в виде

$$h(D, Bn(x, r)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p, r > 0}. \quad (1.1)$$

Задача (1.1) рассматривалась в работе М. С. Никольского и Д. Б. Силина [2] для случая, когда $n(\cdot)$ — евклидова норма. В этой работе доказаны существование и

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00048) и программы “Ведущие научные школы” (грант № 00-15-96123).

единственность решения, получены необходимое условие решения и его свойства. Там же отмечено, что полученные результаты нетрудно перенести на случай более общей “эллипсоидальной” нормы ввиду простой связи решений задач для этих норм.

Цель данной работы – исследование задачи (1.1) для произвольной используемой нормы $n(\cdot)$.

На задачу (1.1) интересно посмотреть в сравнении с задачей о построении шара нормы $n(\cdot)$ с наименьшим радиусом, содержащего компакт D :

$$R(x) \equiv \max_{y \in D} n(x - y) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}, \quad (1.2)$$

и задачей о построении шара наибольшего радиуса, содержащегося в D ,

$$\rho_\Omega(x) \equiv \min_{y \in \Omega} n(x - y) \rightarrow \max_{x \in D}. \quad (1.3)$$

Здесь $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus D}$ – замыкание дополнения множества D до $\mathbb{R}^p$. Задачи (1.2) и (1.3) являются соответственно задачами о внешней и внутренней оценке множества D шаром нормы $n(\cdot)$. С этой точки зрения задачу (1.1) можно назвать задачей о равномерной оценке.

Для случая евклидовой нормы, как доказано в [2], шар наилучшего приближения является единственным, а его центр x_0 содержится в D и является единственным решением задачи

$$R(x) - \rho_\Omega(x) \rightarrow \min_{x \in D}. \quad (1.4)$$

При этом радиус искомого шара есть $r_0 = (R(x_0) + \rho_\Omega(x_0))/2$, а

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p, r > 0} h(D, Bn(x, r)) = (R(x_0) - \rho_\Omega(x_0))/2.$$

Поэтому в данном случае можно говорить об эквивалентности задач (1.1) и (1.4). Последняя с геометрической точки зрения является задачей о построении шарового слоя “наименьшей толщины”, содержащего границу выпуклого компакта D . Как отмечалось в [2], такая задача или близкие к ней рассматривались в [3]–[7] на плоскости, т.е. при $p = 2$, и при произвольном p в [5], [8]–[10], но опять же для евклидовой нормы.

Следует также отметить, что функция $R(x)$ является выпуклой на $\mathbb{R}^p$, а функция $\rho_\Omega(x)$ – вогнутой на D . Поэтому задача (1.4) является задачей выпуклого программирования. Однако для произвольной нормы задачи (1.1) и (1.4) могут быть не эквивалентными. Как показывают примеры, среди шаров наилучшего приближения могут быть такие, центры которых не содержатся в D . К тому же решение задачи может быть не единственным. И все же при любой норме $n(\cdot)$, как будет доказано в §3, задача (1.1) эквивалентна одной задаче выпуклого программирования, которая несколько отличается от (1.4). А именно, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1.1. *Задача (1.1) эквивалентна задаче*

$$\Phi(x) \equiv R(x) + P(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^p}, \quad (1.5)$$

где $P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x)$. Причем если пара (x_0, r_0) является решением задачи (1.1), то точка x_0 является решением задачи (1.5) и $r_0 = (R(x_0) - P(x_0))/2$. И наоборот, если точка x_0 – решение задачи (1.5), то пара (x_0, r_0) , где $r_0 = (R(x_0) - P(x_0))/2$, является решением задачи (1.1). При этом

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p, r > 0} h(D, Bn(x, r)) = (R(x_0) + P(x_0))/2.$$

В §3 будет показано, что функция $P(x)$ является выпуклой на $\mathbb{R}^p$. Поэтому задача (1.5) является задачей выпуклого программирования, а теорема 1.1 дает возможность использовать для исследования задачи (1.1) средства выпуклого анализа. В §4 получены необходимые и достаточные условия решения задачи и некоторые его свойства. В частности, доказано, что центр хотя бы одного из шаров наилучшего приближения содержится в D ; приведены условия, при которых все множество центров шаров наилучшего приближения содержится в D ; получено условие единственности решения задачи.

§2. Вспомогательные функции и их свойства

Поскольку норма $n(x)$ является выпуклой и конечной на $\mathbb{R}^p$ функцией, то она непрерывна и дифференцируема в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$ по любому направлению $g \in \mathbb{R}^p$, а ее субдифференциал $\partial n(\cdot)$ как многозначное отображение (м.о.) является полунепрерывным сверху, причем

$$n'(x, g) \equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1} [n(x + \alpha g) - n(x)] = \max_{v \in \partial n(x)} \langle v, g \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение. Известна формула субдифференциала нормы (см. [11]):

$$\partial n(0_p) = \{v \in \mathbb{R}^p : n^*(v) \leq 1\}, \quad (2.1)$$

$$\partial n(x) = \{v \in \mathbb{R}^p : n^*(v) = 1, n(x) = \langle v, x \rangle\}, \quad x \neq 0_p.$$

Здесь $n^*(\cdot) = \max_{n(v) \leq 1} \langle v, \cdot \rangle$, а $0_p = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Будем говорить, что $n(\cdot)$ – *гладкая норма*, если она непрерывно дифференцируема во всех точках $x \neq 0_p$.

В соответствии с понятием строго квазивыпуклой функции (см., например, [12; §4, п. 6]) дадим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Будем говорить, что норма $n(\cdot)$ является *строго квазивыпуклой*, если

$$n(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \max\{n(x_1); n(x_2)\} \quad \forall x_1 \neq x_2, \quad \alpha \in (0, 1). \quad (2.2)$$

Примером строго квазивыпуклой нормы является евклидова и “эллипсоидальная” норма (т.е. шар которой является эллипсоидом), а также любая калибровочная функция [13], порожденная строго выпуклым [14] или сильно выпуклым [15] компактом, симметричным относительно нулевого элемента. Чебышёвская норма

$n(x) = \max_{i=1, \dots, p} |x^{(i)}|$, где $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}) \in \mathbb{R}^p$, является примером нормы, не удовлетворяющей определению 2.2.

Естественно ожидать, что свойства используемой нормы будут отражаться на свойствах решения задачи (1.1). Они же могут обуславливать и выбор средств исследования. Так, известна простая формула, выражающая расстояние между множествами в метрике Хаусдорфа, порождаемой евклидовой нормой, через опорные функции этих множеств (см., например, [14]). Это, видимо, предопределило систематическое использование аппарата опорных функций в работе [2]. Для нас же в дальнейшем изложении важную роль будут играть следующие вспомогательные функции:

$R(x)$ — функция, выражающая радиус наименьшего шара с центром в точке x , содержащего множество D ;

$\rho_A(x)$ — функция, выражающая расстояние от точки x до множества A ;

$P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x)$, где $\Omega = \mathbb{R}^p \setminus \bar{D}$.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства этих функций, используя следующие обозначения:

$\bar{A}$, $\text{int } A$, $\text{co } A$, ∂A — соответственно замыкание, внутренность, выпуклая оболочка и граница множества A ;

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}; \quad A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\};$$

$$K(A) = \{v \in \mathbb{R}^p : \exists \alpha \geq 0, a \in A : v = \alpha a\};$$

$$K^+ = \{w \in \mathbb{R}^p : \langle v, w \rangle \geq 0 \ \forall v \in K\};$$

$K(x, A)$ — конус возможных направлений множества A в точке x , т.е. $K(x, A) = \overline{\gamma}(x, A)$, где $\gamma(x, A) = \{g \in \mathbb{R}^p : \exists \alpha_g \geq 0 : x + \alpha_g g \in A, \alpha_g \in (0, \alpha_0)\}$;

$$Q^R(x, D) = \{y \in D : n(x - y) = R(x)\};$$

$$Q^\rho(x, A) = \{z \in A : n(x - z) = \rho_A(x)\};$$

$$[x_1, x_2] = \text{co}\{x_1, x_2\} \quad \text{— отрезок, соединяющий точки } x_1 \text{ и } x_2;$$

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^p (x^{(i)})^2 \right)^{1/2} \quad \text{— евклидова норма элемента } x \in \mathbb{R}^p.$$

ТЕОРЕМА 2.1. *Функции $R(x)$ и $\rho_A(x)$ являются глобально липшицевыми на $\mathbb{R}^p$, причем для любых $x, y \in \mathbb{R}^p$ выполняется*

$$|R(x) - R(y)| \leq n(x - y), \quad (2.3)$$

$$|\rho_A(x) - \rho_A(y)| \leq n(x - y). \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя неравенство треугольника, для нормы $n(\cdot)$ получаем

$$\begin{aligned} |R(x) - R(y)| &= \left| \max_{z \in D} n(x - z) - \max_{z \in D} n(y - z) \right| \\ &\leq \max_{z \in D} |n(x - z) - n(y - z)| \leq n(x - y). \end{aligned}$$

Неравенство (2.4) получается так же, как и в [16], [17], для случая евклидовой нормы. Глобальная липшицевость данных функций следует из (2.3), (2.4) в силу эквивалентности норм в $\mathbb{R}^p$.

Используя известные факты из субдифференциального исчисления выпуклых функций (см., например, [16; теорема 3.6]), а также замкнутость множества $Q^R(x, D)$ и полунепрерывность сверху субдифференциала нормы $\partial n(\cdot)$ как м.о., нетрудно доказать, что справедлива

ТЕОРЕМА 2.2. *Функция $R(x)$ является выпуклой на $\mathbb{R}^p$, причем ее субдифференциал можно выразить формулой*

$$\underline{\partial} R(x) = \text{co}\{\partial n(x - z) : z \in Q^R(x, D)\}. \quad (2.5)$$

ЛЕММА 2.1. *Если $n(\cdot)$ – строго квазивыпуклая норма, а элементы $x_1 \neq 0_p$, $x_2 \neq 0_p$ и $x_2 \neq \lambda x_1$ для любого $\lambda > 0$, то*

$$n(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha n(x_1) + (1 - \alpha)n(x_2), \quad \alpha \in (0, 1). \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n(x_1) = n(x_2)$, то (2.6) следует сразу из (2.2). Пусть $n(x_1) \neq n(x_2)$. Возьмем элемент $x_3 = \frac{n(x_2)}{n(x_1)}x_1$. В силу условия леммы $x_3 \neq x_2$ и в то же время $n(x_3) = n(x_2)$. Поэтому в соответствии с определением 2.2 имеем

$$n(\beta x_3 + (1 - \beta)x_2) < n(x_2) \quad \forall \beta \in (0, 1). \quad (2.7)$$

Возьмем произвольное $\alpha \in (0, 1)$ и поставим ему в соответствие числа

$$\beta_0 = \frac{\alpha n(x_1)}{\alpha n(x_1) + (1 - \alpha)n(x_2)}, \quad \lambda_0 = \frac{\alpha n(x_1) + (1 - \alpha)n(x_2)}{n(x_2)}.$$

Легко убедиться, что $\beta_0 \in (0, 1)$ и $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 = \lambda_0(\beta_0 x_3 + (1 - \beta_0)x_2)$. Тогда, используя неравенство (2.7), получаем (2.5):

$$n(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \lambda_0 n(\beta_0 x_3 + (1 - \beta_0)x_2) < \lambda_0 n(x_2) = \alpha n(x_1) + (1 - \alpha)n(x_2).$$

ЛЕММА 2.2. *Если $n(\cdot)$ – строго квазивыпуклая норма, то равенство*

$$n(x_2) = n(x_1) + n(x_1 - x_2) \quad (2.8)$$

для $x_1 \neq 0_p$ выполняется тогда и только тогда, когда существует $\lambda \geq 1$ такое, что $x_2 = \lambda x_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность* очевидна. *Докажем необходимость.* Пусть имеет место равенство (2.8) и $x_1 \neq 0_p$. Если предположить противное утверждению леммы 2.2, то, применяя лемму 2.1, получим неравенство (2.6). Из него и (2.8) следует неравенство

$$n(x_2) - n(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) > \alpha n(x_1 - x_2), \quad \alpha \in (0, 1),$$

противоречащее неравенству треугольника для нормы $n(\cdot)$.

ТЕОРЕМА 2.3. Если точки x_1 и x_2 таковы, что

$$R(x_2) = R(x_1) + n(x_1 - x_2), \quad (2.9)$$

то для всех $\alpha \in [0, 1]$ выполняется равенство

$$R(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha R(x_1) + (1 - \alpha)R(x_2). \quad (2.10)$$

Если же $n(\cdot)$ — строго квазивыпуклая норма и для точек x_1 и x_2 выполняются неравенства

$$R(x_1) \leq R(x_2) < R(x_1) + n(x_1 - x_2), \quad (2.11)$$

то имеет место строгое неравенство

$$R(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha R(x_1) + (1 - \alpha)R(x_2), \quad \alpha \in (0, 1). \quad (2.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть выполняется (2.9), но найдется $\alpha_0 \in (0, 1)$ такое, что выполняется неравенство

$$R(\alpha_0 x_1 + (1 - \alpha_0)x_2) < \alpha_0 R(x_1) + (1 - \alpha_0)R(x_2) = R(x_2) - \alpha_0 n(x_1 - x_2).$$

Однако, применяя теорему 2.1, получаем противоречащее ему неравенство

$$R(x_2) - R(\alpha_0 x_1 + (1 - \alpha_0)x_2) \leq \alpha_0 n(x_1 - x_2),$$

что и доказывает первую часть утверждения теоремы.

б) Пусть теперь $n(\cdot)$ — строго квазивыпуклая норма и выполняется неравенство (2.11). Если предположить, что хотя бы для одного значения $\alpha_0 \in (0, 1)$ неравенство (2.12) не выполняется, то из выпуклости функции $R(x)$ легко следует, что равенство (2.10) выполняется для всех $\alpha \in [0, 1]$ или

$$R(x_1 + (1 - \alpha)(x_2 - x_1)) - R(x_1) = (1 - \alpha)(R(x_2) - R(x_1)).$$

Поделив обе части равенства на $\beta = 1 - \alpha$ и перейдя к пределу при $\beta \downarrow 0$, имеем

$$R'(x_1, x_2 - x_1) \equiv \lim_{\beta \downarrow 0} \beta^{-1} [R(x_1 + \beta(x_2 - x_1)) - R(x_1)] = R(x_2) - R(x_1). \quad (2.13)$$

Полунепрерывность сверху м.о. $\partial n(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$, ограниченность $\partial n(x)$ (см. (2.1)) и замкнутость множества $Q^R(x, D)$ влекут компактность множества $\{\partial n(x - z) : z \in Q^R(x, D)\}$. Тогда, применяя теорему 2.2, получаем, что найдется элемент $z_0 \in Q^R(x_1, D)$ такой, что

$$\begin{aligned} R'(x_1, x_2 - x_1) &= \max_{v \in \partial R(x_1)} \langle v, x_2 - x_1 \rangle = \max_{v \in \{\partial n(x_1 - z) : z \in Q^R(x_1, D)\}} \langle v, x_2 - x_1 \rangle \\ &= \max_{v \in \partial n(x_1 - z_0)} \langle v, x_2 - x_1 \rangle = n'(x_1 - z_0, x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Поскольку $z_0 \in D$ и $R(x_1) = n(x_1 - z_0)$, то, используя правую часть неравенства (2.11), имеем

$$n(x_2 - z_0) \leq R(x_2) < n(x_1 - z_0) + n(x_1 - x_2).$$

Применяя теперь последовательно леммы 2.2 и 2.1, получаем неравенство

$$n(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 - z_0) < \alpha n(x_1 - z_0) + (1 - \alpha)n(x_2 - z_0), \quad \alpha \in (0, 1).$$

Таким образом, выпуклая функция $f(x) = n(x - z_0)$ не является аффинной на отрезке $[x_1, x_2]$ и, следовательно,

$$n(x_2 - z_0) = f(x_2) > f(x_1) + f'(x_1, x_2 - x_1) = n(x_1 - z_0) + n'(x_1 - z_0, x_2 - x_1).$$

Отсюда, используя (2.14) и (2.13), получаем

$$\begin{aligned} R(x_2) &\geq n(x_2 - z_0) > R(x_1) + n'(x_1 - z_0, x_2 - x_1) \\ &= R(x_1) + R'(x_1, x_2 - x_1) = R(x_2) \end{aligned}$$

— противоречие.

В [18] доказаны следующие два факта.

ТЕОРЕМА 2.4. *Функция $\rho_D(x)$ является выпуклой на $\mathbb{R}^p$, причем ее субдифференциал можно выразить формулой*

$$\underline{\partial}\rho_D(x) = \partial n(x - z) \cap -K^+(z, D) \quad \forall z \in Q^\rho(x, D). \quad (2.15)$$

ТЕОРЕМА 2.5. *Функция $\rho_\Omega(x)$ является вогнутой на D , причем ее условный супердифференциал можно выразить формулой*

$$\overline{\rho}_\Omega(x) = \text{co}\{\partial n(x - z) \cap K^+(z, D) : z \in Q^\rho(x, \Omega)\}, \quad x \in \text{int } D. \quad (2.16)$$

В граничных точках множества D функция $\rho_\Omega(x)$ дифференцируема по любому направлению $g \in \mathbb{R}^p$, причем

$$\rho'_\Omega(x, g) \equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1}[\rho_\Omega(x + \alpha g) - \rho_\Omega(x)] = \max\left\{0; \min_{\substack{w \in K^+(x, D) \\ n^*(w) = 1}} \langle w, g \rangle\right\}. \quad (2.17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Нетрудно показать (см. [18]), что $K^+(z, D) \subset K(\partial n(x - z))$ для всех $z \in Q^\rho(x, D)$ при $x \in D$. Поэтому справедлива также формула

$$\overline{\rho}_\Omega(x) = \text{co}\{w \in K^+(z, D) : z \in Q^\rho(x, \Omega), n^*(w) = 1\}, \quad x \in \text{int } D. \quad (2.18)$$

Далее в зависимости от обстоятельств будем использовать обе формулы для $\overline{\rho}_\Omega(x)$.

ЛЕММА 2.3. Пусть функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ определены, выпуклы и конечны соответственно на отрезках $[a, b]$ и $[b, c]$, причем $a < b < c$ и $\psi_1(b) = \psi_2(b)$. Если существует $\alpha \in (0, 1)$ такое, что для функции

$$\psi(t) = \begin{cases} \psi_1(t), & t \in [a, b], \\ \psi_2(t), & t \in [b, c], \end{cases}$$

выполняется неравенство

$$\psi(\alpha a + (1 - \alpha)c) > \alpha\psi(a) + (1 - \alpha)\psi(c), \quad (2.19)$$

то для точки b , представимой в виде

$$b = \beta a + (1 - \beta)c, \quad \beta \in (0, 1), \quad (2.20)$$

выполняется неравенство

$$\psi(b) > \beta\psi(a) + (1 - \beta)\psi(c). \quad (2.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е.

$$\psi(b) \leq \beta\psi(a) + (1 - \beta)\psi(c). \quad (2.22)$$

Рассмотрим случай, когда $\alpha \in (0, \beta)$. Поскольку $\psi(t)$ выпукла на отрезке $[b, c]$, то для $\gamma = \alpha/\beta$ можно записать неравенство

$$\psi(\gamma b + (1 - \gamma)c) \leq \gamma\psi(b) + (1 - \gamma)\psi(c)$$

или, подставляя сюда (2.20) и используя (2.22), получим

$$\psi(\alpha a + (1 - \alpha)c) \leq \alpha\psi(a) + (1 - \alpha)\psi(c),$$

что противоречит (2.19). Аналогично, используя выпуклость $\psi(t)$ на отрезке $[a, b]$, рассматривается случай $\alpha \in (\beta, 1)$.

ТЕОРЕМА 2.6. Функция $P(x)$ является выпуклой и конечной на $\mathbb{R}^p$, причем ее субдифференциал можно записать в виде

$$\underline{\partial}P(x) = \begin{cases} \partial n(x - z) \cap -K^+(z, D) & \forall z \in Q^\rho(x, D), \quad \text{если } x \notin D, \\ \text{co}\{v \in -K^+(z, D) : n^*(v) = 1, z \in Q^\rho(x, \Omega)\}, & \text{если } x \in D. \end{cases} \quad (2.23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что функция $P(x)$ не является выпуклой на $\mathbb{R}^p$, т.е. найдутся точки x_1, x_2 и число $\alpha_0 \in (0, 1)$ такие, что

$$P(\alpha_0 x_1 + (1 - \alpha_0)x_2) > \alpha_0 P(x_1) + (1 - \alpha_0)P(x_2). \quad (2.24)$$

Как следует из теорем 2.2 и 2.5, а также определения функции $P(x)$, нетривиальными для рассмотрения являются только случаи, когда $x_1 \in \text{int } D$ и $x_2 \notin D$ или $x_1, x_2 \notin D$, но $[x_1, x_2] \cap \text{int } D \neq \emptyset$.

а) Пусть $x_1 \in \text{int } D$, $x_2 \notin D$. Обозначим через x_0 граничную точку множества D , принадлежащую отрезку $[x_1, x_2]$. Функция $P(x)$ выпукла на отрезке $[x_1, x_0]$ и на отрезке $[x_0, x_2]$ по теоремам 2.5 и 2.2. Тогда по лемме 2.3 из неравенства (2.24) для точки $x_0 = \beta x_1 + (1 - \beta)x_2$, где $\beta \in (0, 1)$, имеем

$$P(x_0) > \beta P(x_1) + (1 - \beta)P(x_2). \quad (2.25)$$

Покажем, что из (2.25) для $g = \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|}$ выполняется неравенство

$$P'(x_0, g) < -P'(x_0, -g). \quad (2.26)$$

Действительно, непосредственно из (2.25) получаем

$$(1 - \beta)(P(x_2) - P(x_0)) < \beta(P(x_0) - P(x_1)). \quad (2.27)$$

А так как $\frac{\beta}{1 - \beta} = \frac{\|x_2 - x_0\|}{\|x_1 - x_0\|}$, то имеем

$$\frac{P(x_2) - P(x_0)}{\|x_2 - x_0\|} < \frac{P(x_0) - P(x_1)}{\|x_1 - x_0\|}. \quad (2.28)$$

Из выпуклости функции $P(x)$ на отрезках $[x_0, x_2]$ и $[x_1, x_0]$ следуют соответствующие неравенства

$$P'(x_0, g) \leq \frac{P(x_2) - P(x_0)}{\|x_2 - x_0\|}, \quad P'(x_0, -g) \leq \frac{P(x_1) - P(x_0)}{\|x_1 - x_0\|}. \quad (2.29)$$

Из (2.28), (2.29) получаем (2.26).

А теперь покажем, что на самом деле выполняется

$$P'(x_0, g) \geq -P'(x_0, -g). \quad (2.30)$$

Действительно, поскольку x_0 — граничная точка выпуклого множества D , то в соответствии с известным фактом из выпуклого анализа (см., например, [12], [13]) существует опорная гиперплоскость π , которая содержит точку x_0 и отсекает множество D в одно из полупространств, на которые она разбивает все пространство $\mathbb{R}^p$. Тогда из определения функции $P(x)$, свойств опорной гиперплоскости π и выбора точек x_1 и x_2 следует, что при достаточно малых $\alpha \geq 0$

$$\begin{aligned} \rho_\pi(x_0 + \alpha g) &= \rho_\pi(x_0 - \alpha g), & P(x_0 + \alpha g) &= \rho_D(x_0 + \alpha g) \geq \rho_\pi(x_0 + \alpha g), \\ P(x_0 - \alpha g) &= -\rho_\Omega(x_0 - \alpha g) \geq -\rho_\pi(x_0 - \alpha g), & \rho_\pi(x_0) &= P(x_0) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда легко следует

$$\begin{aligned} P'(x_0, g) &\geq \rho'_\pi(x_0, g), \\ P'(x_0, -g) &\geq -\rho'_\pi(x_0, -g), \\ \rho'_\pi(x_0, g) &= \rho'_\pi(x_0, -g). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Из (2.31) получаем (2.30).

Полученное противоречие (2.30) с (2.26) говорит о том, что наше предположение (2.24) в рассматриваемом случае было неверно.

б) Пусть теперь $x_1, x_2 \notin D$, но $[x_1, x_2] \cap \text{int } D \neq \emptyset$. Функция $P(x)$ является непрерывной. Поэтому из ее определения следует существование точки $x_0 \in [x_1, x_2] \cap \text{int } D$, в которой

$$P(x_0) = \min_{x \in [x_1, x_2]} P(x) < 0 < \min\{P(x_1); P(x_2)\}. \quad (2.32)$$

Как было доказано в п. а), функция $P(x)$ выпукла на отрезках $[x_1, x_0]$ и $[x_0, x_2]$. Из предположения (2.24) по лемме 2.3 для точки $x_0 = \beta x_1 + (1 - \beta)x_2$, где $\beta \in (0, 1)$, следует неравенство $P(x_0) > \beta P(x_1) + (1 - \beta)P(x_2)$, которое противоречит (2.32).

в) Нам осталось доказать формулу (2.23). Для случаев, когда $x \notin D$ или $x \in \text{int } D$, она следует непосредственно из теорем 2.4 и 2.5. Поэтому нам осталось доказать ее справедливость для случая, когда x — граничная точка множества D . Используя теоремы 2.4, 2.5 и формулу (2.1), получаем

$$\begin{aligned} P'(x, g) &= \rho'_D(x, g) - \rho'_\Omega(x, g) \\ &= \max_{v \in \partial n(0) \cap -K^+(x, D)} \langle v, g \rangle - \max \left\{ 0; \min_{\substack{w \in K^+(x, D) \\ n^*(w)=1}} \langle w, g \rangle \right\} \\ &= \max \left\{ 0; \max_{\substack{v \in -K^+(x, D) \\ n^*(v)=1}} \langle v, g \rangle \right\} + \min \left\{ 0; \max_{\substack{v \in -K^+(x, D) \\ n^*(v)=1}} \langle v, g \rangle \right\} \\ &= \max_{\substack{v \in -K^+(x, D) \\ n^*(v)=1}} \langle v, g \rangle = \max_{\text{co}\{v \in -K^+(x, D) : n^*(v)=1\}} \langle v, g \rangle \quad \forall g \in \mathbb{R}^p. \end{aligned} \quad (2.33)$$

С другой стороны, для выпуклой конечной функции $P(x)$ имеет место формула производной по направлениям, выраженная с помощью ее субдифференциала $\underline{\partial}P(x)$, который является выпуклым компактом

$$P'(x, g) = \max_{v \in \underline{\partial}P(x)} \langle v, g \rangle \quad \forall g \in \mathbb{R}^p. \quad (2.34)$$

Из (2.33), (2.34) следует $\underline{\partial}P(x) = \text{co}\{v \in -K^+(x, D) : n^*(v) = 1\}$, что соответствует формуле (2.23) для случая $x \in \partial D$.

§ 3. Редукция к задаче выпуклого программирования

Докажем ряд вспомогательных фактов.

ЛЕММА 3.1. *Справедлива формула*

$$\rho(D, Bn(x, r)) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \geq R(x), \\ R(x) - r, & \text{если } 0 \leq r < R(x). \end{cases} \quad (3.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если $r \geq R(x)$, то $D \subset Bn(x, r)$ и, следовательно, $\rho(D, Bn(x, r)) = 0$.

2) Пусть $0 \leq r < R(x)$. Возьмем точку $y_0 \in Q^R(x, D)$, т.е. $y_0 \in D$ и $n(x - y_0) = R(x)$, и точку $x_0 \in [x, y_0]$ такую, что $n(x - x_0) = r$. Ясно, что $x_0 \in Bn(x, r)$ и тогда, поскольку $D \subset Bn(x, R(x))$, получаем

$$R(x) - r = n(y_0 - x_0) \leq \rho(D, Bn(x, r)) \leq \rho(Bn(x, R(x)), Bn(x, r)) = R(x) - r.$$

ЛЕММА 3.2. *Если $x \in D$, то справедлива формула*

$$\rho(Bn(x, r), D) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq r \leq \rho_\Omega(x), \\ r - \rho_\Omega(x), & \text{если } r > \rho_\Omega(x). \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если $0 \leq r \leq \rho_\Omega(x)$, то $Bn(x, r) \subset D$ и, следовательно,

$$\rho(Bn(x, r), D) = 0.$$

2) Пусть $r > \rho_\Omega(x)$. Поскольку $Bn(x, \rho_\Omega(x)) \subset D$, то

$$\rho(Bn(x, r), D) \leq \rho(Bn(x, r), Bn(x, \rho_\Omega(x))) = r - \rho_\Omega(x). \quad (3.2)$$

Возьмем точку $y_0 \in Q^\rho(x, \Omega)$, т.е.

$$y_0 \in \Omega, \quad \rho_\Omega(x) = n(x - y_0), \quad (3.3)$$

и точку z_0 такую, что $n(x - z_0) = r$ и $y_0 \in [x, z_0]$. Докажем, что

$$\rho_D(z_0) \equiv \min_{y \in D} n(z_0 - y) = r - \rho_\Omega(x). \quad (3.4)$$

В соответствии с выбором точек y_0 и z_0 выполняется

$$n(z_0 - y_0) = r - \rho_\Omega(x). \quad (3.5)$$

Покажем, что

$$\rho_D(z_0) = n(z_0 - y_0). \quad (3.6)$$

Действительно, $Bn(x, \rho_\Omega(x)) \subset D$ и, следовательно,

$$K(y_0, Bn(x, \rho_\Omega(x))) \subset K(y_0, D). \quad (3.7)$$

Так как $Bn(x, \rho_\Omega(x)) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(y-x) - \rho_\Omega(x) \leq 0\}$, то, учитывая (3.3) и применяя известную формулу для конуса возможных направлений лебегова множества выпуклой функции через ее субдифференциал (см., например, [12; § 12, п. 2]), имеем

$$K(y_0, Bn(x, \rho_\Omega(x))) = -K^+(\partial n(y_0 - x)).$$

Поэтому из (3.7) получаем $K^+(y_0, D) \subset K(\partial n(x - y_0))$ и, следовательно, $\partial n(x - y_0) \cap K^+(y_0, D) \neq \emptyset$. Поскольку из положительной однородности нормы следует $\partial n(x - y_0) = \partial n(y_0 - z_0)$, то и

$$\partial n(y_0 - z_0) \cap K^+(y_0, D) \neq \emptyset.$$

Это соотношение в соответствии с известным фактом из выпуклого анализа (см. [16; теорема 2.1]) означает, что

$$n(z_0 - y_0) = \min_{y \in D} n(z_0 - y),$$

т.е. выполняется (3.6).

Теперь (3.4) следует из (3.5), (3.6). Поскольку $z_0 \in Bn(x, r)$, то из (3.4) имеем

$$r - \rho_\Omega(x) = \rho_D(z_0) \leq \rho(Bn(x, r), D). \quad (3.8)$$

Из (3.2) и (3.8) получаем требуемое.

ЛЕММА 3.3. *Если $x \notin D$, то*

$$\rho(Bn(x, r), D) = r + \rho_D(x). \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $y_0 \in Q^\rho(x, D)$, т.е.

$$y_0 \in D, \quad \rho_D(x) \equiv \min_{y \in D} n(x - y) = n(x - y_0), \quad (3.10)$$

и точку $z_0 = x + r(n(x - y_0))^{-1}(x - y_0)$. Ясно, что $x \in [y_0, z_0]$ и $n(x - z_0) = r$, т.е. $z_0 \in Bn(x, r)$. В соответствии с [16; теорема 2.1] (3.10) эквивалентно выполнению соотношения

$$\partial n(y_0 - x) \cap K^+(y_0, D) \neq \emptyset.$$

А поскольку из положительной однородности нормы следует

$$\partial n(y_0 - x) = \partial n(y_0 - z_0),$$

то и

$$\partial n(y_0 - z_0) \cap K^+(y_0, D) \neq \emptyset.$$

Это означает, что

$$\rho_D(z_0) \equiv \min_{y \in D} n(z_0 - y) = n(y_0 - z_0).$$

А так как $n(y_0 - z_0) = \rho_D(x) + r$, то получаем

$$\rho_D(z_0) = \rho_D(x) + r. \quad (3.11)$$

Обозначим через $G(z_0) = \{y \in \mathbb{R}^p : \rho_D(y) \leq \rho_D(z_0)\}$. Нетрудно показать (см. [19]), что $G(z_0) = D + B_n(0, \rho_D(z_0))$ и, следовательно, учитывая, что $y_0 \in D$, получаем включение

$$Bn(y_0, \rho_D(z_0)) = y_0 + Bn(0, \rho_D(z_0)) \subset G(x_0). \quad (3.12)$$

Если $y \in Bn(x, r)$, то, учитывая (3.10), (3.11), имеем

$$n(y_0 - y) \leq n(y_0 - x) + n(x - y) \leq \rho_D(x) + r = \rho_D(z_0),$$

т. е. выполняется включение

$$Bn(x, r) \subset Bn(y_0, \rho_D(z_0)). \quad (3.13)$$

Из (3.12), (3.13) следует $Bn(x, r) \subset G(z_0)$ и, значит,

$$\rho(Bn(x, r), D) = \max_{y \in Bn(x, r)} \rho_D(y) \leq \max_{y \in G(x_0)} \rho_D(y) = \rho_D(z_0). \quad (3.14)$$

Но так как $z_0 \in Bn(x, r)$, то

$$\max_{y \in Bn(x, r)} \rho_D(y) \geq \rho_D(z_0). \quad (3.15)$$

Теперь из (3.14), (3.15) и (3.11) получаем (3.9).

ЛЕММА 3.4. *Имеет место равенство*

$$\min_{r \geq 0} h(D, Bn(x, r)) = h(D, Bn(x, r_0)) = (R(x) + P(x))/2, \quad (3.16)$$

где $r_0 = (R(x) - P(x))/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Рассмотрим случай $x \in D$. Из лемм 3.1 и 3.2, учитывая неравенство $\rho_\Omega(x) \leq R(x)$, получаем

$$h(D, Bn(x, r)) = \begin{cases} R(x) - r, & \text{если } 0 \leq r \leq \rho_\Omega(x), \\ r - \rho_\Omega(x), & \text{если } r \geq R(x), \\ \max\{R(x) - r; r - \rho_\Omega(x)\}, & \text{если } \rho_\Omega(x) \leq r \leq R(x). \end{cases} \quad (3.17)$$

Нетрудно убедиться, что

$$\min_{r \geq 0} \max\{R(x) - r; r - \rho_\Omega(x)\} = \max\{R(x) - r_0; r_0 - \rho_\Omega(x)\} = (R(x) - \rho_\Omega(x))/2 \quad (3.18)$$

для $r_0 = (R(x) + \rho_\Omega(x))/2$. Поэтому из (3.17), (3.18) имеем

$$\min_{r \geq 0} h(D, Bn(x, r)) = h(D, Bn(x, r_0)) = (R(x) - \rho_\Omega(x))/2. \quad (3.19)$$

2) Пусть теперь $x \notin D$. Из лемм 3.1 и 3.3 следует

$$h(D, Bn(x, r)) = \max\{R(x) - r; r + \rho_D(x)\}.$$

Отсюда нетрудно получить

$$\min_{r \geq 0} h(D, Bn(x, r)) = h(D, Bn(x, r_0)) = (R(x) + \rho_D(x))/2, \quad (3.20)$$

где $r_0 = (R(x) - \rho_D(x))/2$.

Из (3.19), (3.20) получаем (3.16).

Следствием леммы 3.4 является теорема 1.1. При этом, как следует из теорем 2.2 и 2.6, задача (1.5) является задачей выпуклого программирования.

§4. Некоторые свойства решения

Существование решения задачи (1.5), а следовательно, и задачи (1.1) легко вытекает из ограниченности и замкнутости лебегова множества $\{x \in \mathbb{R}^p : R(x) + P(x) \leq R(y) + P(y)\}$ и непрерывности функции $\Phi(x) = R(x) + P(x)$. Наличие формул субдифференциалов выпуклых функций $R(x)$ и $P(x)$ позволяет получить необходимое и достаточное условие решения задачи (1.1).

ТЕОРЕМА 4.1. *Для того чтобы пара (x_0, r_0) была решением задачи (1.1), необходимо и достаточно, чтобы*

$$0_p \in \underline{\partial}\Phi(x_0) \equiv \underline{\partial}R(x_0) + \underline{\partial}P(x_0),$$

где $\underline{\partial}R(x_0)$ и $\underline{\partial}P(x_0)$ определяются формулами (2.5) и (2.23) соответственно, а $r_0 = (R(x_0) - P(x_0))/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из теорем 2.2 и 2.6, функция $\Phi(x)$ является выпуклой и конечной на $\mathbb{R}^p$. Ее субдифференциал $\underline{\partial}\Phi(x)$ по теореме Моро–Рокафеллара (см. [16; теорема 1.10]) есть алгебраическая сумма $\underline{\partial}R(x)$ и $\underline{\partial}P(x)$. Как известно из выпуклого анализа (см., например, [16; лемма 2.1]), необходимым и достаточным условием решения задачи (1.5) является выполнение включения $0_p \in \underline{\partial}\Phi(x_0)$. Теперь осталось применить теорему 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из теоремы 1.1 следует, что

$$X(D) = \{y \in \mathbb{R}^p : \Phi(y) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \Phi(x)\}$$

есть множество всех центров шаров наилучшего приближения для выпуклого компакта D и в соответствии с теоремой 4.1

$$x_0 \in X(D) \Leftrightarrow 0_p \in \underline{\partial}R(x_0) + \underline{\partial}P(x_0). \quad (4.1)$$

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Если выпуклый компакт D является центрально симметричным относительно точки x_0 , то $x_0 \in X(D)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $x_0 \in D$, а множества $Q^R(x_0, D)$ и $Q^P(x_0, \Omega)$ являются центрально симметричными относительно x_0 . Это обстоятельство, как следует из формул (2.1), (2.5), и (2.23), влечет выполнение включений

$$0_p \in \underline{\partial}R(x_0), \quad 0_p \in \underline{\partial}P(x_0).$$

Поэтому имеет место и (4.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Приведенный далее пример 4.3 показывает, что даже если D обладает центральной симметрией, то множество $X(D)$ может быть не одноточечным.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Если $D = [x_1, x_2]$ — отрезок, соединяющий точки x_1 и x_2 , то шар наилучшего приближения в задаче (1.1) является единственным. При этом его центр есть точка $x_0 = (x_1 + x_2)/2$, а радиус $r_0 = n(x_1 - x_2)/4$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, точка x_0 является точкой минимума функции $R(x)$ на $\mathbb{R}^p$, причем единственной из точек самого отрезка $[x_1, x_2]$. Поскольку $P(x) = 0$ для $x \in [x_1, x_2]$, то x_0 — единственная точка минимума и функции $\Phi(x)$ на отрезке. Кроме того, в соответствии со следствием 4.1 $\Phi(x_0) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \Phi(x)$. Теперь осталось заметить, что для точек $x \notin D$ выполняется $P(x) = \rho_D(x) > 0$ и, значит,

$$\Phi(x) = R(x) + P(x) > R(x_0) = \Phi(x_0) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \Phi(x).$$

В соответствии с теоремой 1.1 подсчитываем радиус шара наилучшего приближения

$$r_0 = \frac{R(x_0) - P(x_0)}{2} = \frac{R(x_0)}{2} = \frac{n(x_1 - x_2)}{4}.$$

ТЕОРЕМА 4.2. *Выполняется соотношение*

$$X(D) \cap D \neq \emptyset, \quad (4.2)$$

причем если $x_0 \in X(D)$ и $x_0 \notin D$, то

$$\text{co}\{x_0, Q^\rho(x_0, D)\} \subset X(D). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_0 \in X(D)$ и $x_0 \notin D$. Возьмем любую точку $z \in Q^\rho(x_0, D)$. Тогда $P(x_0) = \rho_D(x_0) = n(x_0 - z)$, $P(z) = 0$ и, следовательно,

$$R(x_0) + n(x_0 - z) = R(x_0) + P(x_0) = \Phi(x_0) \leq \Phi(z) = R(z). \quad (4.4)$$

С другой стороны, по теореме 2.1 выполняется

$$R(z) - R(x_0) \leq n(x_0 - z). \quad (4.5)$$

Из (4.4), (4.5) получаем $R(z) - R(x_0) = n(x_0 - z)$, а тогда и $\Phi(z) = \Phi(x_0)$, т.е. $z \in X(D)$. Поскольку $\Phi(x)$ — выпуклая функция, то и весь отрезок $[x_0, z] \subset X(D)$. Таким образом, включение (4.3) доказано. Ввиду того, что $X(D) \neq \emptyset$, соотношение (4.2) является следствием вышеприведенных рассуждений.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Обозначим через $\text{Pr}_B A = \{b \in B : \exists a \in A : n(a - b) = \min_{y \in B} n(a - y)\}$ проекцию множества A на множество B . Легко показать, что утверждение теоремы 4.2 эквивалентно справедливости соотношения

$$\text{co}\{X(D), \text{Pr}_D X(D)\} = X(D).$$

Соотношение (4.2) означает, что центр хотя бы одного шара наилучшего приближения содержится в D . Сделаем некоторые выводы для случая, когда центр шара наилучшего приближения принадлежит границе множества D .

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Если $x_0 \in X(D) \cap \partial D$, то*

$$R(x_0) = \min_{x \in D} R(x). \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $x_0 \in X(D)$, то в соответствии с теоремами 1.1 и 4.1 выполняется включение (4.1). Так как для $x_0 \in \partial D$ множество $Q^p(x_0, \Omega) = \{x_0\}$, то, используя формулу (2.23), включение (4.1) можно записать в виде

$$0_p \in \underline{\partial R}(x_0) + \text{co}\{v \in -K^+(x_0, D) : n^*(v) = 1\}.$$

Отсюда непосредственно следует

$$\underline{\partial R}(x_0) \cap K^+(x_0, D) \neq \emptyset.$$

Это соотношение, как известно из выпуклого анализа [16; теорема 2.1], эквивалентно (4.6).

СЛЕДСТВИЕ 4.4. Пусть $\text{int } D = \emptyset$ и $x_0 \in D$. Для того чтобы точка $x_0 \in X(D)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (4.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость вытекает из следствия 4.3. Пусть выполняется соотношение (4.6). Поскольку $\text{int } D = \emptyset$, то $P(x) = 0$ для всех $x \in D$. Поэтому, применяя теорему 4.2, имеем

$$\Phi(x_0) = R(x_0) = \min_{x \in D} R(x) = \min_{x \in D} \Phi(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \Phi(x).$$

Это означает, что $x_0 \in X(D)$.

Обозначим через $Sn(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : n(x - y) = r\}$ сферу в норме $n(\cdot)$ с центром в точке x и радиусом r .

ЛЕММА 4.1. Если $n(\cdot)$ — строго квазивыпуклая норма, то сферы $Sn(x_1, r_1)$ и $Sn(x_2, r_1 + n(x_1 - x_2))$ имеют единственную общую точку

$$y_0 = x_1 + r_1(n(x_1 - x_2))^{-1}(x_1 - x_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $y \in Sn(x_1, r_1) \cap Sn(x_2, r_1 + n(x_1 - x_2))$, то

$$n(x_1 - y) = r_1, \quad n(x_2 - y) = r_1 + n(x_1 - x_2), \quad (4.7)$$

или $n(x_2 - y) = n(x_1 - y) + n(x_1 - x_2)$. Это по лемме 2.2 означает, что $x_2 - y = \lambda(x_1 - y)$, где $\lambda > 1$. Выражая отсюда y и подставляя в (4.7), получаем единственность общей точки и ее явный вид.

ТЕОРЕМА 4.3. Если выполняется хотя бы одно из условий:

- 1) $n(\cdot)$ — гладкая норма,
- 2) $n(\cdot)$ — строго квазивыпуклая норма,
- 3) $p = 2$,

то выполняется включение

$$X(D) \subset D. \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. существует хотя бы одна точка $x_0 \in X(D)$ такая, что $x_0 \notin D$. Тогда в соответствии с (4.1) имеет место включение

$$0_p \in \partial\Phi(x_0) = \underline{\partial}R(x_0) + \underline{\partial}\rho_D(x_0). \quad (4.9)$$

а) Рассмотрим случай, когда $n(\cdot)$ – гладкая норма. По теореме 2.4 имеем

$$\underline{\partial}\rho_D(x_0) = n'(x_0 - z) \quad \forall z \in Q^\rho(x_0, D). \quad (4.10)$$

Покажем, что существует элемент $z^* \in Q^R(x_0, D)$ такой, что

$$n'(x_0 - z) = -n'(x_0 - z^*) \quad \forall z \in Q^\rho(x_0, D). \quad (4.11)$$

Включение (4.9), как следует из (2.5) и (4.10), означает, что существуют натуральное m , элементы $\{z_i\}_{i=1, \dots, m} \subset Q^R(x_0, D)$, числа $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, m$, такие, что $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$ и

$$n'(x_0 - z) = -\sum_{i=1}^m \alpha_i n'(x_0 - z_i), \quad z \in Q^\rho(x_0, D). \quad (4.12)$$

Поскольку $n'(x_0 - z_i) = \partial n(x_0 - z_i)$, то из (2.1) следует

$$n^*(n'(x_0 - z_i)) = 1. \quad (4.13)$$

Поэтому, учитывая также то, что

$$n(x) = \max_{n^*(v) \leq 1} \langle v, x \rangle, \quad (4.14)$$

имеем

$$\langle n'(x_0 - z_i), x_0 - z \rangle \leq n(x_0 - z). \quad (4.15)$$

Кроме того, в соответствии с (2.1) выполняется

$$\langle n'(x_0 - z), x_0 - z \rangle = n(x_0 - z). \quad (4.16)$$

Тогда из (4.12), (4.15), (4.16) следует, что

$$\langle -n'(x_0 - z_i), x_0 - z \rangle = n(x_0 - z), \quad i = 1, \dots, m, \quad z \in Q^\rho(x_0, D). \quad (4.17)$$

Сравнивая (2.1) с (4.13) и (4.17), приходим к выводу

$$-n'(x_0 - z_i) \subset \partial n(x_0 - z) = n'(x_0 - z),$$

т.е. $-n'(x_0 - z_i) = n'(x_0 - z)$, $i = 1, \dots, m$, $z \in Q^\rho(x_0, D)$. Тем самым (4.11) доказано.

Зафиксируем точку $z_0 \in Q^\rho(x_0, D)$. Шар $Bn(x_0, \rho_D(x_0))$ касается выпуклого множества D в точке z_0 . Поэтому через нее проходит гиперплоскость, разделяющая множества $Bn(x_0, \rho_D(x_0))$ и D . Поскольку в рассматриваемом случае шар

имеет гладкую границу и $n'(x_0 - z_0)$ является нормалью к нему в точке z_0 , то эта гиперплоскость имеет вид

$$\pi = \{x \in R^p : \langle x, n'(x_0 - z_0) \rangle = \langle z_0, n'(x_0 - z_0) \rangle\}.$$

При этом выполняется неравенство

$$\langle x, n'(x_0 - z_0) \rangle \leq \langle y, n'(x_0 - z_0) \rangle \quad \forall x \in D, \quad y \in Bn(x_0, \rho_D(x_0)). \quad (4.18)$$

Так как $Q^R(x_0, D) \subset D$, $x_0 \in Bn(x_0, \rho_D(x_0))$, то из (4.18) получаем

$$\langle z - x_0, n'(x_0 - z_0) \rangle \leq 0 \quad \forall z \in Q^R(x_0, D).$$

Теперь, подставляя сюда точку $z^* \in Q^R(x_0, D)$, удовлетворяющую (4.11), и используя (2.1), приходим к противоречию

$$\langle z^* - x_0, -n'(x_0 - z^*) \rangle = n(x_0 - z^*) \leq 0.$$

б) Пусть $n(\cdot)$ — строго квазивыпуклая норма. Возьмем любую точку $z_0 \in Q^R(x_0, D)$. По теореме 4.2 имеем $[x_0, z_0] \subset X(D)$ и, следовательно, $\Phi(x_0) = \Phi(z_0)$. А так как $\Phi(x_0) = R(x_0) + \rho_D(x_0) = R(x_0) + n(x_0 - z_0)$ и $\Phi(z_0) = R(z_0)$, то получаем $R(z_0) = R(x_0) + n(x_0 - z_0)$. Это означает, что $Bn(x_0, R(x_0)) \subset Bn(z_0, R(z_0))$, причем граничные сферы этих шаров $Sn(x_0, R(x_0))$ и $Sn(z_0, R(z_0))$ по лемме 4.1 касаются в единственной точке $y_0 = x_0 + R(x_0)(n(x_0 - z_0))^{-1}(x_0 - z_0)$. Из определения функции $R(\cdot)$ следует, что множество D имеет общие точки с $Sn(x_0, R(x_0))$ и $Sn(z_0, R(z_0))$. Поэтому приходим к выводу, что $y_0 \in D$.

Выпуклые компакты D и $Bn(x_0, \rho_D(x_0))$ не имеют общих внутренних точек. Следовательно, по теореме о разделяющей гиперплоскости найдется элемент $g_0 \in R^p$, $g_0 \neq 0_p$, такой, что (см., например, [12; теорема 1.3])

$$\langle x, g_0 \rangle \leq \langle z_0, g_0 \rangle \leq \langle y, g_0 \rangle \quad \forall x \in Bn(x_0, \rho_D(x_0)), \quad y \in D. \quad (4.19)$$

Так как $x_0 \in \text{int } Bn(x_0, \rho_D(x_0))$, то $\langle x_0, g_0 \rangle < \langle z_0, g_0 \rangle$. Поэтому, учитывая $y_0 \in D$, получаем

$$\langle y_0, g_0 \rangle = \langle x_0, g_0 \rangle + \frac{R(x_0)}{n(x_0 - z_0)} \langle x_0 - z_0, g_0 \rangle < \langle z_0, g_0 \rangle.$$

Это противоречит правой части неравенства (4.19).

в) Пусть размерность пространства $p = 2$. Из (4.9) следует существование элемента $v_0 \in \partial R(x_0) \cap -\partial \rho_D(x_0)$.

Включение $v_0 \in -\partial \rho_D(x_0)$ в соответствии с формулами (2.15) и (2.1) означает выполнение для любого $z_0 \in Q^R(x_0, D)$ соотношений

$$n^*(v_0) = 1, \quad (4.20)$$

$$v_0 \in K^+(z_0, D), \quad (4.21)$$

$$\langle v_0, z_0 - x_0 \rangle = n(x_0 - z_0). \quad (4.22)$$

Теперь покажем, что при $p = 2$ из включения $v_0 \in \partial R(x_0)$ и (4.20) следует существование элементов $z_1, z_2 \in Q^R(x_0, D)$ и соответствующих им $v_1 \in \partial n(x_0 - z_1)$, $v_2 \in \partial n(x_0 - z_2)$ и $\alpha \in [0, 1]$ таких, что

$$v_0 = \alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2. \quad (4.23)$$

Действительно, из (2.5) по теореме Каратеодори (см., например, [12; теорема 1.1]) следует существование элементов $\{z_i\}_{i=1,2,3} \subset Q^R(x_0, D)$, не обязательно разных, и соответствующих элементов $v_i \in \partial n(x_0 - z_i)$, $i = 1, 2, 3$, различных друг от друга, и чисел $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$, $\sum_{i=1}^3 \alpha_i = 1$, таких, что $v_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$. При этом в силу (2.1) $n^*(v_i) = 1$, $i = 1, 2, 3$. Если бы элементы $\{v_i\}_{i=1,2,3}$ не лежали на одной прямой и все $\alpha_i > 0$, то это влекло бы $v_0 \in \text{int co}\{v_1, v_2, v_3\}$, а следовательно, и $n^*(v_0) < 1$, что противоречило бы (4.20). Поэтому без ограничения общности можно считать $\alpha_3 = 0$, что приводит к возможности представления элемента v_0 в виде (4.23).

Из (4.21) следует, что

$$\langle v_0, x - z_0 \rangle \geq 0 \quad \forall x \in D$$

и, значит, $\langle v_0, z_i - x_0 \rangle + \langle v_0, x_0 - z_0 \rangle \geq 0$, $i = 1, 2$. Ввиду (4.22) последнее эквивалентно тому, что

$$\langle v_0, z_i - x_0 \rangle \geq n(x_0 - z_0), \quad i = 1, 2. \quad (4.24)$$

Для $v_i \in \partial n(x_0 - z_i)$ в соответствии с (2.1) имеем

$$\langle v_i, z_i - x_0 \rangle = -n(z_i - x_0), \quad n^*(v_i) = 1, \quad i = 1, 2. \quad (4.25)$$

Тогда, подставляя (4.23) в (4.24) и используя (4.25), получаем

$$-\alpha n(z_1 - x_0) + (1 - \alpha)\langle v_2, z_1 - x_0 \rangle \geq n(x_0 - z_0), \quad (4.26)$$

$$\alpha \langle v_1, z_2 - x_0 \rangle - (1 - \alpha)n(z_2 - x_0) \geq n(x_0 - z_0). \quad (4.27)$$

Но поскольку $n^*(v_i) = 1$, $i = 1, 2$, то в силу (4.14)

$$\langle v_2, z_1 - x_0 \rangle \leq n(z_1 - x_0), \quad \langle v_2, z_2 - x_0 \rangle \leq n(z_2 - x_0).$$

Отсюда следует, что при $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ неравенство (4.26) становится противоречивым. При $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ противоречивым становится неравенство (4.27). Теорема доказана полностью.

Приведем пример, когда $X(D) \not\subset D$.

ПРИМЕР 4.1. Пусть $p = 3$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \in \mathbb{R}^3$, $n(x) = \max_{i=1,2,3} |x^{(i)}|$, $D = \text{co}\{z_1, z_2, z_3\}$, где $z_1 = (1, 1, 1)$, $z_2 = (1, -1, -1)$, $z_3 = (-1, -1, 1)$. Очевидно, $x_0 = (0, 0, 0) \notin D$ и $Q^\rho(x_0, D) = \{z_0\}$, где $z_0 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Используя формулу (2.1), нетрудно получить

$$\begin{aligned} \partial n(x_0 - z_0) &= \text{co}\{(-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -1)\}, \\ \partial n(x_0 - z_1) &= \text{co}\{(-1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, -1)\}, \\ \partial n(x_0 - z_2) &= \text{co}\{(-1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}, \\ \partial n(x_0 - z_3) &= \text{co}\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -1)\}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Поскольку $\{z_1, z_2, z_3\} \subset Q^R(x_0, D)$, то в силу формулы (2.5) $\text{co}\{\partial n(x_0 - z_i) : i = 1, 2, 3\} \subset \underline{\partial R}(x_0)$. Поэтому, подставляя сюда (4.28), имеем

$$\text{co}\{(1, 0, 0), (0, -1, 0), (0, 0, 1)\} \subset \underline{\partial R}(x_0). \quad (4.29)$$

Нетрудно подсчитать, что $K^+(z_0, D) = \{x = (\lambda, -\lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in \mathbb{R}^1\}$. Тогда $-\partial \rho_D(x_0) = \partial n(z_0 - x_0) \cap K^+(z_0, D) = \{y_0\}$, где $y_0 = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Так как эту точку можно представить в виде

$$y_0 = \frac{1}{3}(1, 0, 0) + \frac{1}{3}(0, -1, 0) + \frac{1}{3}(0, 0, 1),$$

то, учитывая (4.29), мы приходим к выводу, что $y_0 \in \underline{\partial R}(x_0) \cap -\partial \rho_D(x_0)$ или $0_3 \in \underline{\partial R}(x_0) + \underline{\partial \rho}_D(x_0)$. Следовательно, в соответствии с (4.1) точка $x_0 \in X(D)$, а также по теореме 4.2 и весь отрезок $[x_0, z_0] \subset X(D)$. Но так как $x_0 \notin D$, то $X(D) \not\subset D$.

Рассмотренный пример одновременно показывает, что решение задачи (1.1) может быть не единственным. Приведем условие, при котором решение является единственным.

Нетрудно увидеть справедливость следующего факта.

ЛЕММА 4.2. Если $x_1, x_2 \in X(D)$, то выпуклые функции $R(x)$ и $P(x)$ являются аффинными на $[x_1, x_2]$.

ТЕОРЕМА 4.4. Если $n(\cdot)$ — строго квазивыпуклая норма, то задача (1.1) имеет единственное решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что решение не единственно и существует по крайней мере два шара наилучшего приближения с центрами $x_1, x_2 \in X(D)$. По теореме 4.3 выполняется включение $X(D) \subset D$ и так как $[x_1, x_2] \subset X(D)$, то

$$\Phi(x) = R(x) - \rho_\Omega(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \Phi(x) = \Phi(x_1) \quad \forall x \in [x_1, x_2]. \quad (4.30)$$

Будем для определенности считать, что $R(x_2) \geq R(x_1)$. Так как функция $R(x)$ ведет себя на отрезке $[x_1, x_2]$ по лемме 4.2 как аффинная функция, то в силу теоремы 2.3

$$R(x_2) = R(x_1) + n(x_1 - x_2). \quad (4.31)$$

Из (4.30), (4.31) получаем, что и

$$\rho_{\Omega}(x_2) = \rho_{\Omega}(x_1) + n(x_1 - x_2). \quad (4.32)$$

Теперь из (4.32) следует

$$R(x_1) > \rho_{\Omega}(x_1). \quad (4.33)$$

Действительно, предположим, что $R(x_1) = \rho_{\Omega}(x_1)$. Тогда из включений

$$Bn(x_1, \rho_{\Omega}(x_1)) \subset D \subset Bn(x_1, R(x_1))$$

получаем $D = Bn(x_1, \rho_{\Omega}(x_1))$ и, следовательно, $\rho_{\Omega}(x_1) = \max_{x \in D} \rho_{\Omega}(x)$. Это противоречит (4.32).

Из (4.31) и леммы 4.1 получаем, что граничные сферы вложенных шаров $Bn(x_1, R(x_1))$ и $Bn(x_2, R(x_2))$ касаются в единственной точке

$$y_0 = x_1 + \frac{x_1 - x_2}{n(x_1 - x_2)} R(x_1). \quad (4.34)$$

При этом поскольку выполняются включения

$$D \subset Bn(x_1, R(x_1)) \subset Bn(x_2, R(x_2))$$

и шар $Bn(x_2, R(x_2))$ должен иметь общую точку с D , то $y_0 \in D$. А так как в силу (4.32) точка $x_2 \in \text{int } D$, то

$$\alpha x_2 + (1 - \alpha)y_0 \in \text{int } D \quad \forall \alpha \in (0, 1). \quad (4.35)$$

С другой стороны, из (4.32) и леммы 4.1 получаем, что граничные сферы вложенных шаров $Bn(x_1, \rho_{\Omega}(x_1))$ и $Bn(x_2, \rho_{\Omega}(x_2))$ касаются в единственной точке

$$y_1 = x_1 + \frac{x_1 - x_2}{n(x_1 - x_2)} \rho_{\Omega}(x_1). \quad (4.36)$$

При этом поскольку выполняются включения

$$Bn(x_1, \rho_{\Omega}(x_1)) \subset Bn(x_2, \rho_{\Omega}(x_2)) \subset D$$

и шар $Bn(x_1, \rho_{\Omega}(x_1))$ имеет общую точку с множеством Ω , то

$$y_1 \in \Omega. \quad (4.37)$$

Из (4.33), (4.34) и (4.36) следует, что существует $\alpha_0 \in (0, 1)$ такое, что $y_1 = \alpha_0 x_2 + (1 - \alpha_0)y_0$. Это с учетом (4.35) противоречит (4.37).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Строгая квазивыпуклость нормы означает строгую выпуклость ее шаров. Как мы доказали, наилучшее приближение выпуклого компакта шаром такой нормы имеет единственное решение. А будет ли всегда единственным решение задачи о наилучшем приближении строго выпуклого компакта шаром нормы, которая не является строго квазивыпуклой? Следующий пример дает отрицательный ответ на этот вопрос.

ПРИМЕР 4.2. Пусть $p = 2$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$, $n(x) = \max\{|x^{(1)}|; |x^{(2)}|\}$, $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x^{(1)} + 1)^2 + (x^{(2)} - 1)^2 \leq 4, (x^{(1)} - 2)^2 + (x^{(2)} + 2)^2 \leq 10\}$ — строго выпуклый компакт, $x_0 = (0, 0)$, $x_1 = ((1 + \sqrt{2} - \sqrt{5})/2, (\sqrt{5} - \sqrt{2} - 1)/2)$.

а) Нетрудно проверить, что $Q^R(x_0, D) = \{z_1; z_2\}$, где $z_1 = (-1, -1)$, $z_2 = (1, 1)$, и $Q^\rho(x_0, \Omega) = \{z_0\}$, где $z_0 = (2 - \sqrt{5}, \sqrt{5} - 2)$. Учитывая, что $n^*(x) = |x^{(1)}| + |x^{(2)}|$, и используя (2.1), имеем

$$\begin{aligned}\partial n(x_0 - z_0) &= \text{co}\{(1, 0), (0, -1)\}, & \partial n(x_0 - z_1) &= \text{co}\{(1, 0), (0, 1)\}, \\ \partial n(x_0 - z_2) &= \text{co}\{(-1, 0), (0, -1)\}, \\ K^+(z_0, D) &= \{x \in \mathbb{R}^2 : x^{(1)} = -x^{(2)}, x^{(1)} \geq 0\}.\end{aligned}$$

Используя формулы (2.5) и (2.16), получаем

$$\begin{aligned}\underline{\partial R}(x_0) &= \text{co}\{\partial n(x_0 - z_1), \partial n(x_0 - z_2)\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x^{(1)}| + |x^{(2)}| \leq 1\}, \\ \overline{\partial \rho_\Omega}(x_0) &= \left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}.\end{aligned}\tag{4.38}$$

Так как $x_0 \in \text{int } D$, то $\underline{\partial P}(x_0) = -\overline{\partial \rho_\Omega}(x_0)$. Поэтому из (4.38) имеем $0_2 \in \underline{\partial R}(x_0) + \underline{\partial P}(x_0) \equiv \underline{\partial \Phi}(x_0)$, что означает, что $x_0 \in X(D)$, т.е. x_0 — центр шара наилучшего приближения.

б) Также проверяем, что $Q^R(x_1, D) = \{z_1; z_2\}$ и $Q^\rho(x_1, \Omega) = \{z_0; z_3\}$, где $z_3 = (\sqrt{2} - 1, 1 - \sqrt{2})$. При этом

$$\begin{aligned}\partial n(x_1 - z_0) &= \text{co}\{(1, 0), (0, -1)\}, & \partial n(x_1 - z_3) &= \text{co}\{(-1, 0), (0, -1)\}, \\ \partial n(x_1 - z_1) &= \{(1, 0)\}, & \partial n(x_1 - z_2) &= \{(0, -1)\},\end{aligned}$$

$$K^+(z_3, D) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x^{(1)} = -x^{(2)}, x^{(1)} \leq 0\}.$$

Теперь, используя (2.5) и (2.16), получаем

$$\begin{aligned}\underline{\partial R}(x_1) &= \text{co}\{\partial n(x_1 - z_1), \partial n(x_1 - z_2)\} = \text{co}\{(1, 0); (0, -1)\}, \\ \overline{\partial \rho_\Omega}(x_1) &= \text{co}\{v \in K^+(z_0, D) \cup K^+(z_3, D) : n^*(v) = 1\} \\ &= \text{co}\left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right); \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \right\}.\end{aligned}$$

Далее, как и в п. а), приходим к выводу, что $0_2 \in \underline{\partial \Phi}(x_1)$, т.е. точка x_1 также является центром шара наилучшего приближения.

Таким образом, решение задачи в данном примере не единственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. Примеры показывают, что гладкость нормы не гарантирует единственность решения задачи.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Для случая евклидовой нормы в [2] доказано, что решение задачи (1.1) единственно и центр шара наилучшего приближения содержится в D , т.е. $X(D) = \{x_0\}$, $x_0 \in D$. Поскольку евклидова норма является строго квазивыпуклой, то эти факты мы можем истолковать как следствия из теорем 4.3 и 4.4. В [2], кроме того, доказано, что если $\text{int } D \neq \emptyset$, то $x_0 \in \text{int } D$. Этот факт нетрудно также получить непосредственно из условия оптимальности (4.1). В целом, применяя теорему 4.1 и учитывая, что для евклидовой нормы $n'(x) = x\|x\|^{-1}$ при $x \neq 0_p$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть $\text{int } D \neq \emptyset$, а $n(\cdot) = \|\cdot\|$ — евклидова норма. Для того чтобы точка x_0 была центром шара наилучшего приближения, необходимо и достаточно, чтобы $x_0 \in \text{int } D$ и выполнялось соотношение

$$0_p \in \text{co}\left\{\frac{x_0 - y}{\|x_0 - y\|} : y \in Q^R(x_0, D)\right\} - \text{co}\left\{\frac{x_0 - z}{\|x_0 - z\|} : z \in Q^\rho(x_0, \Omega)\right\}. \quad (4.39)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Если $\text{int } D \neq \emptyset$, то необходимое условие решения задачи (1.1), полученное в [2; теорема 19] для евклидовой нормы, в наших обозначениях принимает вид

$$0_p \in \text{co}(\{y - x_0 : y \in Q^R(x_0, D)\} \cup \{x_0 - z : z \in Q^\rho(x_0, \Omega)\}). \quad (4.40)$$

Легко видеть, что соотношение (4.40) вытекает из (4.39). Однако эти соотношения не эквивалентны. Действительно, предположим, что точка x_0 является центром наименьшего шара, содержащего D , или центром наибольшего шара, содержащегося в D . Поскольку в силу (2.5) и (2.16)

$$\begin{aligned} \underline{\partial R}(x) &= \text{co}\left\{\frac{x - y}{\|x - y\|} : y \in Q^R(x, D)\right\}, \\ \overline{\partial \rho_\Omega}(x) &= \text{co}\left\{\frac{x - z}{\|x - z\|} : z \in Q^\rho(x_0, \Omega)\right\}, \end{aligned}$$

то точка x_0 удовлетворяет в этих случаях соответственно включениям

$$0_p \in \text{co}\{x_0 - y : y \in Q^R(x_0, D)\}, \quad 0_p \in \text{co}\{x_0 - z : z \in Q^\rho(x_0, \Omega)\}.$$

Следовательно, точка x_0 будет в этих случаях удовлетворять соотношению (4.40). Однако легко привести пример, когда такая точка не является центром шара наилучшего приближения. Это говорит о том, что соотношение (4.40) достаточным условием решения задачи (1.1) не является.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.8. Пусть $p = 2$, D – треугольник, а $n(\cdot)$ – евклидова норма. Пользуясь соотношением (4.39), нетрудно доказать, что точка x_0 , являющаяся центром шара (круга) наилучшего приближения, есть пересечение перпендикуляра к наибольшей стороне треугольника, проведенного в ее середине, и биссектрисы прилежащего к этой стороне наименьшего угла. Радиус искомого круга есть $r_0 = (R(x_0) + \rho_\Omega(x_0))/2$.

Обозначим через $Kv(\mathbb{R}^p)$ пространство всех непустых выпуклых компактов из $\mathbb{R}^p$. Нетрудно убедиться, что расстояние Хаусдорфа $h(A, B)$, индуцированное любой нормой $n(\cdot)$, является метрикой в $Kv(\mathbb{R}^p)$. Обобщая соответствующие результаты из [2], рассмотрим некоторые свойства функции

$$h_0(D) = \min_{x \in \mathbb{R}^p, r \geq 0} h(D, Bn(x, r)): Kv(\mathbb{R}^p) \rightarrow \mathbb{R}^1$$

и многозначного отображения $X(D): Kv(\mathbb{R}^p) \rightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$.

ТЕОРЕМА 4.5. *Функция $h_0(D)$ является липшицевой на $Kv(\mathbb{R}^p)$ с константой, равной единице, т.е.*

$$|h_0(D_1) - h_0(D_2)| \leq h(D_1, D_2) \quad \forall D_1, D_2 \in Kv(\mathbb{R}^p). \quad (4.41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть шар $Bn(x_1, r_1)$ является шаром наилучшего приближения для D_1 , а шар $Bn(x_2, r_2)$ для D_2 . Тогда, используя свойства метрики, имеем

$$\begin{aligned} h_0(D_1) &= h(D_1, Bn(x_1, r_1)) \leq h(D_1, Bn(x_2, r_2)) \\ &\leq h(D_1, D_2) + h(D_2, Bn(x_2, r_2)) = h(D_1, D_2) + h_0(D_2). \end{aligned}$$

То есть получаем неравенство

$$h_0(D_1) - h_0(D_2) \leq h(D_1, D_2). \quad (4.42)$$

Аналогично получаем и неравенство

$$h_0(D_2) - h_0(D_1) \leq h(D_1, D_2). \quad (4.43)$$

Из (4.42), (4.43) следует (4.41).

ТЕОРЕМА 4.6. *Многозначное отображение $X(D): Kv(\mathbb{R}^p) \rightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$ непрерывно сверху.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $D_0 \in Kv(\mathbb{R}^p)$ и обозначим через K множество элементов $D \in Kv(\mathbb{R}^p)$, удовлетворяющих неравенству $h(D, D_0) \leq 1$. Нетрудно видеть, что существует конечное число λ такое, что

$$\|x\| + r < \lambda \quad \forall x \in X(D), \quad r = (R(x) - P(x))/2, \quad D \in K. \quad (4.44)$$

Возьмем произвольную последовательность $\{D_i\} \subset Kv(\mathbb{R}^p)$, $i = 1, 2, \dots$, такую, что $h(D_i, D_0) \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$. В силу (4.44) можно выбрать последовательности

$x_i \in X(D_i)$, $r_i = (R(x_i) - P(x_i))/2$ такие, что $x_i \rightarrow x^*$, $r_i \rightarrow r^*$, $i \rightarrow \infty$. Покажем, что $x^* \in X(D_0)$.

Предположим противное, т.е.

$$h(D_0, Bn(x^*, r^*)) - h_0(D_0) = \delta > 0.$$

Отсюда следует, что при достаточно больших i

$$h(D_i, Bn(x_i, r_i)) - h(D_i, Bn(x_0, r_0)) \geq \frac{\delta}{2} > 0, \quad (4.45)$$

где $x_0 \in X(D_0)$, $r_0 = (R(x_0) - P(x_0))/2$, т.е. $Bn(x_0, r_0)$ — один из шаров наилучшего приближения для D_0 . Но (4.45) противоречит тому, что $Bn(x_i, r_i)$ — шар наилучшего приближения для D_i .

СЛЕДСТВИЕ 4.6. Если $n(\cdot)$ — строго квазивыпуклая норма, то отображение $X(D)$ является однозначным и непрерывным на $Kv(\mathbb{R}^p)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.9. Нижеследующий пример показывает, что м.о. $X(D): Kv(\mathbb{R}^p) \rightarrow 2^{\mathbb{R}^p}$ может не являться полунепрерывным снизу.

ПРИМЕР 4.3. Пусть $p = 3$, $x = (x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) \in \mathbb{R}^3$,

$$n(x) = \max\{|x^{(1)}|; |x^{(2)}|; |x^{(3)}|\},$$

$$D_0 = \text{co}\left\{\left(0, 1, \frac{1}{2}\right), \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right), \left(0, -1, \frac{1}{2}\right), \left(0, -1, -\frac{1}{2}\right)\right\}.$$

Поскольку $\text{int } D_0 = \emptyset$ и компакт D_0 обладает центральной симметрией относительно точки $x_0 = (0, 0, 0)$, то в соответствии со следствием 4.1 шар $Bn\left(0_3, \frac{1}{2}\right)$ является шаром наилучшего приближения для D_0 и

$$h_0(D_0) = h\left(D_0, Bn\left(0_3, \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}.$$

Однако легко увидеть, что для $x \in \text{co}\left\{\left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)\right\}$ выполняется

$$h\left(D_0, Bn\left(x, \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2},$$

т.е. шары $Bn\left(x, \frac{1}{2}\right)$ также являются шарами наилучшего приближения. Следовательно,

$$\text{co}\left\{\left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, 0, -\frac{1}{2}\right)\right\} \subset X(D_0).$$

Возьмем в качестве $D_i = \text{co}\left\{D_0, \left(\frac{1}{i}, 0, 0\right), \left(-\frac{1}{i}, 0, 0\right)\right\}$. Очевидно, что $h(D_0, D_i) \rightarrow 0$, $i \rightarrow \infty$, и компакты D_i обладают центральной симметрией относительно

той же точки $x_0 = (0, 0, 0)$. Следовательно, $x_0 \in X(D_i)$. Но при этом x_0 является центром шара наименьшего радиуса, содержащего множество D_i и, главное, x_0 — единственная точка максимума функции $\rho_{\Omega_i}(x)$ на $\Omega_i = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D_i}$. Поэтому $X(D_i) = \{x_0\}$. Это означает, что элементы из $X(D_0)$, отличные от точки x_0 , не могут быть предельными точками элементов из $X(D_i)$. Таким образом, в данном случае полунепрерывности снизу м.о. $X(D)$ нет.

Авторы выражают глубокую признательность М. С. Никольскому за полезное обсуждение результатов работы.

Список литературы

1. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем: метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988.
2. Никольский М. С., Силин Д. Б. О наилучшем приближении выпуклого компакта элементами аддиала // Труды МИРАН. 1995. Т. 211. С. 338–354.
3. D'Ocagne M. Sur certaine figures minimales // Bull. Soc. Math. France. 1884. V. 12. P. 168–177.
4. Lebesgue H. Sur quelques questions de minimum, relatives and courbes orbiformes, et sur leurs rapports avec le calcul des variations // J. Math. Pures Appl. 1921. V. 4. P. 67–96.
5. Bonnesen T., Fenchel W. Theory der konvexen Körper. Berlin: Springer-Verlag, 1934.
6. Vincze St. Über den Minimalkreisring einer Eiline // Acta Sci. Math. (Szeged). 1947. V. 11. № 3. P. 133–138.
7. Vincze I. Über Kreisringe, die eine Eiline einschliessen // Studia Sci. Math. Hungar. 1974. V. 9. № 1/2. P. 155–159.
8. Kritikos N. Über konvexe Flächen und einschliessende Kugeln // Math. Ann. 1927. V. 96. P. 583–586.
9. Barany I. On the minimal ring containing the boundary of convex body // Acta Sci. Math. (Szeged). 1988. V. 52. № 1/2. P. 93–100.
10. Zucco A. Minimal shell of a typical convex body // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 109. № 3. P. 797–802.
11. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
12. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.
13. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
14. Лейтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
15. Половинкин Е. С. Сильно выпуклый анализ // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 2. С. 102–130.
16. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982.
17. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
18. Дудов С. И. Субдифференцируемость и супердифференцируемость функции расстояния // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 4. С. 530–542.
19. Дудов С. И. Дифференцируемость по направлениям функции расстояния // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 3. С. 29–52.

Саратовский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского;
Саратовский социально-экономический
государственный университет

E-mail: DudovSI@info.sgu.ru, Zlato@fort.ssea.runnet.ru

Поступила в редакцию
26.07.1999