Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. В. Емельянов, А. В. Цыгвинцев, Показатели Ковалевской систем с экспоненциальным взаимодействием, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 10, 39–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:34:29

УДК 517.9

К. В. Емельянов, А. В. Цыгвинцев

Показатели Ковалевской систем с экспоненциальным взаимодействием

Вычислены показатели Ковалевской обобщений цепочек Тоды – систем с экспоненциальным взаимодействием. Показано, что существующие случаи алгебраической интегрируемости не переносятся непосредственно на системы в пространстве с псевдоевклидовой метрикой, так как полнопараметрические разложения общего решения содержат комплексные степени независимой переменной.

Библиография: 15 названий.

§ 1. Понятие систем с экспоненциальным взаимодействием

Системой с экспоненциальным взаимодействием будем называть гамильтонову систему с гамильтонианом следующего вида:

$$H = \frac{1}{2}(p, Ap) + \sum_{i=1}^N \nu_i \exp(a_i, q). \quad (1)$$

Здесь $p, q, a_i \in \mathbb{R}^n$, $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – симметрический оператор. Набор векторов $\Delta = \{a_1, \dots, a_N\}$ назовем *спектром* системы. Мы следуем терминологии и обозначениям, принятым в [1].

Пусть $\langle \zeta, \xi \rangle \equiv (\zeta, A\xi)$. Введем в рассмотрение $(N \times N)$ -матрицу M с компонентами $M_{ik} = \langle a_i, a_k \rangle$. Уравнения движения

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \quad (2)$$

с помощью замены

$$x_i = -\nu_i \exp(a_i, q), \quad y_i = \langle a_i, p \rangle$$

преобразуем в систему $2N$ дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями:

$$\dot{x}_k = x_k y_k, \quad \dot{y}_k = \sum_{i=1}^N M_{ki} x_i, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (3)$$

Уравнения (3) допускают тривиальные первые интегралы

$$F = \sum_{i=1}^N \alpha_i y_i, \quad \Phi = \sum_{i=1}^N x_i^{\alpha_i}, \quad (4)$$

если существуют такие постоянные α_i , что $\sum_{i=1}^N \alpha_i a_i = 0$. При $N > n$ такие интегралы всегда существуют. Для движений, соответствующих исходной гамильтоновой системе, $F = 0$, $\Phi = 1$; при этом система (3) обладает интегралом энергии.

Гамильтоновы системы вида (1) впервые возникли в работе Тоды [2] при изучении межатомных взаимодействий. Позднее появились дальнейшие приложения этих уравнений, в частности, в космологии [3].

Механической моделью, описываемой системой (1), является цепочка взаимодействующих друг с другом экспоненциальным образом частиц единичной массы.

В работе [4] была установлена тесная связь между корневыми системами векторов алгебр Ли и некоторыми вполне интегрируемыми цепочками Тоды (1). Выяснилось, что возникающие при этом уравнения допускают естественное построение пары Лакса со спектральным параметром и, следовательно, могут быть проинтегрированы методами обратной задачи теории рассеяния [5].

Однако были найдены лишь некоторые случаи интегрируемости и вопрос их полной классификации оставался открытым. В работе [6] к анализу системы (2) был применен метод Ковалевской, впервые использованный в динамике твердого тела [7]. Были найдены случаи, когда уравнения допускают максимально возможное число полнопараметрических мероморфных решений, названное В. В. Козловым *числом Ковалевской*.

В работе [8] был исследован вопрос интегрируемости системы (2) по Биркгофу. Рассматривались случаи, при которых эти уравнения обладают n полиномиальными по импульсам первыми интегралами с коэффициентами вида

$$\sum_k f_k \exp(c_k, q),$$

где $f_k \in \mathbb{R}$, $c_k \in \mathbb{R}^n$.

Полученные при этом ограничения на векторы спектра Δ выделяют уже найденные в работах [9], [6] случаи интегрируемости, а также предсказывают ряд новых, неизвестных ранее.

В настоящей работе мы находим все наборы показателей Ковалевской, соответствующие всевозможным решениям типа “квазиоднородного луча”. Это открывает возможность исследования комплексно-аналитических свойств общего решения, в частности, получения необходимых условий его однозначности и мероморфности. Зная наборы показателей Ковалевской, можно делать предположения о виде первых интегралов, что может облегчить поиск интегрируемых систем. Возможно также рассмотреть вопрос обобщения известных результатов об интегрируемости на псевдоевклидов случай. К сожалению, ответ отрицательный. Существующие классы интегрируемых цепочек Тоды и их обобщений нельзя непосредственно перенести на псевдоевклидов случай.

§ 2. Квазиоднородные системы ОДУ. Показатели Ковалевской

Дадим определение квазиоднородной системы ОДУ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Систему уравнений

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_N), \quad 1 \leq i \leq N, \quad (5)$$

назовем *квазиоднородной*, если она инвариантна относительно преобразований

$$x_i \rightarrow \alpha^{g_i} x_i, \quad t \rightarrow \alpha^{-1} t$$

при произвольном $\alpha \neq 0$.

Постоянные $g_i \in \mathbb{Q}$ назовем весами квазиоднородности переменных x_i . Очевидно, что для квазиоднородности необходимо и достаточно, чтобы правые части уравнений удовлетворяли условиям

$$f_i(\alpha^{g_1} x_1, \dots, \alpha^{g_N} x_N) = \alpha^{g_i+1} f_i(x_1, \dots, x_N).$$

Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$-g_i c_i = f_i(c_1, \dots, c_N), \quad 1 \leq i \leq N. \quad (6)$$

Если эти уравнения имеют ненулевые решения (возможно комплексные), то система (5) имеет однопараметрическое семейство мероморфных решений

$$x_i = \frac{c_i}{(t - t_0)^{g_i}}, \quad t_0 = \text{const}. \quad (7)$$

Следуя работе [10], определим матрицу Ковалевской и показатели Ковалевской (КЕ).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Матрица K с компонентами

$$K_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(c) + g_i \delta_{ij} \quad (8)$$

называется *матрицей Ковалевской* системы уравнений (5), вычисленной на векторе $c = (c_1, \dots, c_N)^T$, соответствующем частным решениям (7). В формуле (8) δ_{ij} — дельта-символ Кронекера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Собственные числа матрицы Ковалевской называются *показателями Ковалевской*.

Напомним, что функция $F(x_1, \dots, x_N)$ называется *квазиоднородной* степени m , если для произвольного α справедливо:

$$F(\alpha^{g_1} x_1, \dots, \alpha^{g_N} x_N) = \alpha^m F(x_1, \dots, x_N).$$

Векторное поле v с компонентами v_i называется *полем симметрий* системы (5), если линейные дифференциальные операторы

$$\sum_{i=1}^N v_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \sum_{i=1}^N f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

коммутируют. При этом поле симметрий квазиоднородное степени m , если функции v_i/x_i квазиоднородны степени m каждая.

Матрица Ковалевской и показатели Ковалевской были введены в работе [10]. Их связь с тензорными инвариантами системы обсуждалась в [11]. Приведем две теоремы о квазиоднородных интегралах и полях симметрий уравнений (5).

ТЕОРЕМА 1 [10]. Если система уравнений (5) имеет k первых интегралов степени однородности m , градиенты которых линейно независимы и не обращаются в нуль или бесконечность на решении системы (6), то m – показатель Ковалевской кратности k в наборе показателей, вычисленном для данного решения.

ТЕОРЕМА 2 [11]. Если система уравнений (5) имеет k однородных полей симметрий степени однородности m , линейно независимых и не обращающихся в нуль или бесконечность на решении системы (6), то $-m$ – показатель Ковалевской кратности k в наборе показателей, вычисленном для данного решения.

СЛЕДСТВИЕ 1. В каждом наборе показателей содержится -1 . Если система гамильтонова, то в каждом наборе содержится степень однородности гамильтониана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для гамильтоновых систем показатели Ковалевской разбиваются на пары, сумма которых равна степени однородности гамильтониана минус 1.

Показатели Ковалевской – степени независимой переменной t в формальном полнопараметрическом разложении общего решения системы уравнений (5). К примеру, если ρ – показатель Ковалевской, то уравнения имеют частное решение

$$x_i = \frac{1}{t^{g_i}}(c_i + c_{i1}t^\rho + c_{i2}t^{2\rho} + \dots), \quad i = 1, \dots, n, \quad c_{ki} \in \mathbb{C}.$$

Подробное изложение связанных с этим вопросов можно найти в [12].

Если общее решение уравнений (5) однозначно на комплексной плоскости времени, то все показатели должны быть целыми числами. Наличие, к примеру, комплексных или иррациональных чисел в наборах показателей Ковалевской указывает на сложное строение римановой поверхности решения. Это замечание было использовано еще С. В. Ковалевской в ее работе [7], в которой она искала условия, при которых система дифференциальных уравнений Эйлера–Пуассона имеет общее решение, выраженное в мероморфных функциях времени. В работе [13] М. Адлер и П. ван Мербеке положили эту идею в основание определения алгебраической интегрируемости. Согласно М. Адлеру и П. ван Мербеке гамильтонова система

$$\dot{z} = \{z, H\}, \quad z \in \mathbb{R}^N,$$

с полиномиальным гамильтонианом H и скобкой Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$, вообще говоря, вырожденной, алгебраически интегрируема, если выполнены следующие условия.

1. Ограничение скобки на совместный уровень k функций Казимира, коммутирующих со всеми z_i , невырождено.
2. Кроме функций Казимира $\Phi_1, \dots, \Phi_k$ имеется $(N - k)/2$ полиномиальных интегралов $\Phi_{k+1}, \dots, \Phi_{k+n} = H$, множество их совместного уровня почти всегда компактно.

3. Для почти всех комплексных значений первых интегралов можно найти многообразие $T_{\mathbb{C}}^{2n} \setminus S$, где $T_{\mathbb{C}}^{2n} = \mathbb{C}^{2n}/\Gamma$, Γ – решетка в $\mathbb{C}^{2n}$, S – объединение нескольких подмногообразий коразмерности один. Существуют N абелевых функций, параметризующих комплексные инвариантные многообразия системы $\Lambda_c = \{z \in \mathbb{C}^N : \Phi_i = c_i, 1 \leq i \leq n+k\}$. На $T_{\mathbb{C}}^{2n}$ можно выбрать естественные координаты $\zeta_1, \dots, \zeta_n$, в которых фазовый поток на Λ_c задается как $\dot{\zeta} = \text{const}$. Отображение $T_{\mathbb{C}}^{2n} \setminus S \rightarrow \Lambda_c$ взаимно однозначно.

В нашем случае для уравнений (3) в переменных x, y скобки Пуассона следующие:

$$\{y_i, x_j\} = \langle a_i, a_j \rangle x_j, \quad \{x_i, x_j\} = 0, \quad \{y_i, y_j\} = 0.$$

Интегралы (4) являются функциями Казимира. Примером алгебраически интегрируемых систем с экспоненциальным взаимодействием служат замкнутые цепочки Тоды:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^n \exp(q_i - q_{i+1}), \quad q_{n+1} = q_1.$$

§ 3. Показатели Ковалевской систем с экспоненциальным взаимодействием

Показателями Ковалевской систем с экспоненциальным взаимодействием назовем показатели Ковалевской соответствующих уравнений (3). Рассматриваемая система квазиоднородна с весами 2 и 1 по переменным x и y соответственно. Для нахождения частных решений вида (7) решим систему алгебраических уравнений

$$-2c_k = c_k d_k, \quad -d_k = \sum_{i=1}^N M_{ik} c_i, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (9)$$

Полагая все c_k , кроме одного, скажем c_i , равными нулю, находим решения:

$$c_k = 0, \quad c_i = \frac{2}{M_{ii}}, \quad d_k = -\frac{M_{ki}}{M_{ii}}, \quad d_i = 0. \quad (10)$$

Аналогично, оставляя среди компонент вектора $c = (c_1, \dots, c_N)^T$ m ненулевых компонент, получаем всевозможные решения вида

$$\begin{aligned} c_j = 0, \quad \left\| \begin{pmatrix} c_{i_1} \\ \vdots \\ c_{i_m} \end{pmatrix} \right\| &= (M^{(m)})^{-1} \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ \vdots \\ 2 \end{pmatrix} \right\|, \\ d_{i_1} = \dots = d_{i_m} &= -2, \quad d_j = \sum_{k \in \{i_1, \dots, i_m\}} M_{jk} c_k, \\ j &\notin \{i_1, \dots, i_m\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $M^{(m)}$ – соответствующая диагональная подматрица матрицы M с элементами M_{ij} , $i, j \in \{i_1, \dots, i_m\}$. Далее обозначим $c^{(m)} = (c_{i_1}, \dots, c_{i_m})^T$,

$C^{(m)} = \text{diag}(c_{i_1}, \dots, c_{i_m})$. Отметим также, что $M^{(m)}$ – матрица Грама системы векторов $\{a_{i_1}, \dots, a_{i_m}\}$. При $m = 1$ получаем решение (10).

Матрица Ковалевской для решения (11) имеет блочный вид (для определенности пусть последние m компонент $c = (c_1, \dots, c_N)^T$ ненулевые):

$$\begin{aligned} K &= \begin{pmatrix} U & C \\ M & E \end{pmatrix}, \\ U &= \text{diag}(2 + d_1, \dots, 2 + d_{N-m}, 0, \dots, 0), \\ C &= \text{diag}(0, \dots, 0, c_{N-m+1}, \dots, c_N), \\ E &= \text{diag}(1, \dots, 1). \end{aligned} \tag{12}$$

Легко заметить, что имеются $N - m$ показателей Ковалевской, равных 1, и $N - m$ показателей $2 + d_j$. Последние назовем *тривиальными* и примем для них обозначение $\rho_j = 2 + d_j$. Оставшиеся $2m$ нетривиальных показателей обозначим λ .

ЛЕММА 1. *Нетривиальные показатели разбиваются на пары λ^+ , λ^- , являющиеся корнями уравнений вида $\lambda^2 - \lambda - \beta = 0$, одно из них $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, β – собственное значение задачи*

$$M^{(m)}\phi = \beta(C^{(m)})^{-1}\phi. \tag{13}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (12) для нетривиальных показателей имеем

$$M^{(m)}\phi + \varphi = \lambda\varphi, \quad C^{(m)}\phi = \lambda\phi,$$

где векторы $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)^T$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)^T$ составлены из компонент собственного вектора матрицы Ковалевской $(0, \dots, 0, \phi_1, \dots, \phi_m, \dots, \varphi_1, \dots, \varphi_m)^T$, отвечающего собственному значению λ . Поэтому для нетривиальных показателей имеем следующую задачу на собственные значения:

$$C^{(m)}M^{(m)}\phi = \beta\phi, \quad \beta = \lambda(\lambda - 1). \tag{14}$$

Одно из решений $\phi = c^{(m)}$, $\beta = 2$. Ему отвечают показатели $\lambda^+ = 2$ и $\lambda^- = -1$.

Отметим, что в наборах показателей, соответствующих решениям вида (10), тривиальными являются все, кроме $\lambda^+ = 2$, $\lambda^- = -1$. Этот набор был получен ранее в работе [1]. Там же поставлен вопрос, является ли равенство какого-либо показателя ρ целому положительному числу достаточным условием существования у системы (3) полиномиального интеграла соответствующей степени однородности. Мы видим, что ответ на этот вопрос отрицателен: необходимо наложить дополнительные условия на “высшие” наборы показателей Ковалевской, соответствующие решениям системы уравнений (11) с двумя и более ненулевыми c_k .

Итак, мы можем классифицировать наборы показателей в соответствии с числом m ненулевых компонент вектора c .

ТАБЛИЦА 1.

Наборы показателей Ковалевской систем с экспоненциальным взаимодействием

m	Показатели Ковалевской
1	$\{1, \dots, 1, \rho_1, \dots, \rho_{N-1}, -1, 2\}$
2	$\{1, \dots, 1, \rho_1, \dots, \rho_{N-2}, -1, 2, \lambda_1^+, \lambda_1^-\}$
$\dots$	$\dots$
n	$\{1, \dots, 1, \rho_1, \dots, \rho_{N-n}, -1, 2, \lambda_1^+, \lambda_1^-, \dots, \lambda_{n-1}^+, \lambda_{n-1}^-\}$

В общем случае количество различных наборов показателей в i -й строке табл. 1 равно количеству различных линейно независимых подсистем i векторов из $\{a_1, \dots, a_N\}$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \exp(q_i - q_{i+1}) + \exp(-q_1 - q_2) + \exp(q_n) + \exp(2q_n), \quad n \geq 4. \quad (15)$$

В работе [1] выдвинуто предположение об интегрируемости соответствующих гамильтоновых уравнений. Вычисленные наборы показателей Ковалевской (табл. 2) содержат целые числа, при этом в каждом наборе не менее $n + 1$ положительных, каждый из которых превосходит или равен 2. Принимая во внимание теоремы 1 и 2, можно сказать, что проведенные авторами вычисления не опровергают предположения об интегрируемости системы с гамильтонианом (15). Предполагаемые степени однородности дополнительных первых интегралов $-4, 6$ и 8 .

ЛЕММА 2. Компоненты каждого вектора $c^{(m)}$ из (11) следующим образом связаны с показателями, вычисленными для векторов $c^{(m-1)}$:

$$c_i^{(m)} = \rho_i^{(m-1)} \frac{D^{(m-1)}}{D^{(m)}}, \quad (16)$$

где $\rho_i^{(m-1)}$ – тривиальный показатель одной из серий для $c^{(m-1)}$, $D^{(m-1)} = \det M^{(m-1)}$, $D^{(m)} = \det M^{(m)}$.

Формула (16) справедлива, если показатели для $c^{(m-1)}$ существуют, т.е. в отсутствие вырождения $D^{(m)} \neq 0$.

Способом, приведенным выше в данном параграфе, вычисляются все наборы показателей Ковалевской. Как уже отмечалось, наборы, соответствующие векторам $c = (c_1, \dots, c_N)^T$ с одной ненулевой компонентой, были получены ранее в [1]. Равенство тривиальных показателей в таких наборах целым числам эквивалентно условию

$$k \langle a_i, a_i \rangle + 2 \langle a_i, a_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad k \in \mathbb{Z},$$

и необходимо для однозначности общего решения. Получив все оставшиеся наборы показателей и потребовав их целочисленности, мы существенно усиливаем эти необходимые условия. Для доказательства достаточности требуется дополнительный анализ, однако не исключено, что при полученных условиях решение дейст-

ТАБЛИЦА 2.

Наборы показателей Ковалевской системы с гамильтонианом (15) при $n = 4$

Набор КЕ	Вектор c	Набор КЕ	Вектор c
$\{1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2\}$	$(0, 0, 0, 0, 0, 0)$	$\{-1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3\}$	$(0, 0, 0, 0, 0, 1)$
$\{-2, -1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4\}$	$(0, 0, 0, 0, 1, 0)$	$\{-1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4\}$	$(0, 0, 0, 1, 0, 0)$
$\{-3, -1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 5\}$	$(0, 0, 0, 3, 0, 4)$	$\{-3, -2, -1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 6\}$	$(0, 0, 0, 4, 3, 0)$
$\{-1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3\}$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)$	$\{-1, -1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3\}$	$(0, 0, 1, 0, 0, 1)$
$\{-2, -1, -1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4\}$	$(0, 0, 1, 0, 1, 0)$	$\{-1, -1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4\}$	$(0, 0, 1, 1, 0, 0)$
$\{-3, -1, -1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 6\}$	$(0, 0, 1, 3, 0, 4)$	$\{-3, -2, -1, -1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 7\}$	$(0, 0, 1, 4, 3, 0)$
$\{-1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3\}$	$(0, 1, 0, 0, 0, 0)$	$\{-1, -1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4\}$	$(0, 1, 0, 0, 0, 1)$
$\{-2, -1, -1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 5\}$	$(0, 1, 0, 0, 1, 0)$	$\{-2, -1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 6\}$	$(0, 2, 0, 2, 0, 0)$
$\{-2, -1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4\}$	$(0, 2, 2, 0, 0, 0)$	$\{-2, -1, -1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5\}$	$(0, 2, 2, 0, 0, 1)$
$\{-2, -2, -1, -1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 6\}$	$(0, 2, 2, 0, 1, 0)$	$\{-3, -2, -1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$	$(0, 4, 3, 3, 0, 0)$
$\{-5, -3, -1, 1, 1, 1, 2, 4, 6, 7, 7\}$	$(0, 5, 0, 8, 0, 9)$	$\{-5, -3, -2, -1, 1, 1, 2, 4, 6, 8, 8\}$	$(0, 6, 0, 10, 6, 0)$
$\{-7, -5, -3, -1, 1, 1, 2, 4, 6, 8, 14\}$	$(0, 12, 7, 15, 0, 16)$	$\{-7, -5, -3, -2, -1, 1, 1, 2, 4, 6, 8, 16\}$	$(0, 14, 8, 18, 10, 0)$
$\{-1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3\}$	$(1, 0, 0, 0, 0, 0)$	$\{-1, -1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3\}$	$(1, 0, 0, 0, 0, 1)$
$\{-2, -1, -1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4\}$	$(1, 0, 0, 0, 1, 0)$	$\{-1, -1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4\}$	$(1, 0, 0, 1, 0, 0)$
$\{-3, -1, -1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 6\}$	$(1, 0, 0, 3, 0, 4)$	$\{-3, -2, -1, -1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 7\}$	$(1, 0, 0, 4, 3, 0)$
$\{-1, -1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 4\}$	$(1, 0, 1, 0, 0, 0)$	$\{-1, -1, -1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4\}$	$(1, 0, 1, 0, 0, 1)$
$\{-2, -1, -1, -1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4\}$	$(1, 0, 1, 0, 1, 0)$	$\{-1, -1, -1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 5\}$	$(1, 0, 1, 1, 0, 0)$
$\{-3, -1, -1, -1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 7\}$	$(1, 0, 1, 3, 0, 4)$	$\{-3, -2, -1, -1, 1, 2, 2, 2, 4, 8\}$	$(1, 0, 1, 4, 3, 0)$
$\{-2, -1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4\}$	$(2, 2, 0, 0, 0, 0)$	$\{-2, -1, -1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5\}$	$(2, 2, 0, 0, 0, 1)$
$\{-2, -2, -1, -1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 6\}$	$(2, 2, 0, 0, 1, 0)$	$\{-3, -2, -1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$	$(3, 4, 0, 3, 0, 0)$
$\{-3, -2, -1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 6\}$	$(3, 4, 3, 0, 0, 0)$	$\{-3, -2, -1, -1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 7\}$	$(3, 4, 3, 0, 0, 1)$
$\{-3, -2, -2, -1, -1, 1, 2, 2, 3, 4, 8\}$	$(3, 4, 3, 0, 1, 0)$	$\{-5, -3, -3, -1, 1, 2, 4, 4, 6, 8, 14\}$	$(6, 10, 6, 6, 0, 0)$
$\{-7, -5, -3, -1, 1, 1, 2, 4, 6, 8, 14\}$	$(7, 12, 0, 15, 0, 16)$	$\{-7, -5, -3, -2, -1, 1, 2, 4, 6, 8, 16\}$	$(8, 14, 0, 18, 10, 0)$

вительно однозначно. Неясно также, обеспечивает ли равенство тривиальных показателей ρ и нетривиальных λ^+ неотрицательным целым числам мероморфность общего решения и алгебраическую интегрируемость уравнений (3).

§ 4. Алгебраическая неинтегрируемость псевдоевклидовых систем

Пусть теперь матрица A в гамильтониане (1) задает псевдоевклидову метрику

$$\langle \zeta, \xi \rangle = - \sum_{i=1}^{\tau} \zeta_i \xi_i + \sum_{i=\tau}^n \zeta_i \xi_i, \quad 1 \leq \tau \leq n-1, \quad (17)$$

т.е. мы рассматриваем псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}_\tau^n$. Следуя общепринятой терминологии, в зависимости от знака квадрата вектора мы называем векторы *пространственноподобными* ($\langle a, a \rangle > 0$), *изотропными* ($\langle a, a \rangle = 0$) и *временноподобными*.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть в гамильтониане (1) спектр $\Delta = \{a_1, \dots, a_N\}$ таков, что найдется подсистема $\Delta_- \subset \Delta$ временноподобных векторов, линейная оболочка которых содержит пространственноподобный вектор или,

наоборот, некоторая линейная оболочка пространственноподобных векторов $\Delta_+ \subset \Delta$ содержит времениподобный вектор. Тогда если для любых $a_i, a_j \in \Delta_\pm$ справедливо условие

$$k\langle a_i, a_i \rangle + 2\langle a_i, a_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (18)$$

то существует набор показателей Ковалевской, содержащий комплексно-сопряженные числа с ненулевой мнимой частью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что имеется несколько пространственноподобных векторов таких, что натянутое на них линейное пространство содержит времениподобные векторы.

Пусть $\Delta_+ = \{a_1, \dots, a_m\}$, $\Delta_+ \subset \Delta$, – минимальный набор, удовлетворяющий условиям теоремы. Рассмотрим матрицу Грама $\|M_{ij}^{(m)}\| = \|\langle a_i, a_j \rangle\|$ для набора Δ_+ . По условию теоремы такая матрица знаконеопределена. Учитывая лемму 1, для доказательства необходимо показать, что все числа c_j , являющиеся решением линейных алгебраических уравнений

$$M_{ij}^{(m)} c_j = 2, \quad i, j = 1, \dots, m,$$

имеют один знак, т.е. матрица $C^{(m)} = \text{diag}(c_1, \dots, c_m)$ знакоопределена. Доказательство состоит в прямом вычислении компонент c_i . Применяя правило Крамера и разлагая соответствующие определители по i -й строке, приходим к тому, что из условий (18) следует отрицательность всех c_i , что доказывает существование отрицательного собственного значения β задачи (13). То, что существует $\beta < -\frac{1}{4}$, следует из известных теорем алгебры об инвариантах квадратичных форм. Для доказательства в случае Δ_- достаточно рассмотреть гамильтониан $-H$.

В работе [8] показано, что несоблюдение условий (18) для евклидовой метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$ приводит к несуществованию у гамильтоновой системы (1) в случае $n = N$ достаточного количества первых интегралов, полиномиальных по импульсам с коэффициентами вида:

$$\sum_k f_k \exp(c_k, q), \quad f_k \in \mathbb{R}, \quad c_k \in \mathbb{R}^n.$$

В [4] рассматривались системы с экспоненциальным взаимодействием в евклидовой метрике при $N = n + 1$ в предположении, что в наборе векторов $\{a_1, \dots, a_N\}$ любые n линейно независимы. Показано, что для таких систем условия (18) являются критерием алгебраической интегрируемости. Обобщение этого результата можно найти в [1]. Утверждение теоремы 3 означает, в частности, что полученные для евклидовой метрики результаты не переносятся непосредственно на псевдоевклидов случай. Заметим, что если $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидова метрика, то справедливо обратное доказанной теореме: из условий (18) следует действительность показателей Ковалевской.

С использованием теоремы 3 легко доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть в гамильтониане (1) $N = n$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – псевдоевклидова метрика (17). Если множество векторов $\{a_1, \dots, a_n\}$ образует базис и среди них содержится $\tau + 1$ времениподобный или $n - \tau + 1$ пространственноподобный, то соответствующие уравнения (3) не имеют полного набора полиномиальных интегралов, градиенты которых линейно независимы и не обращаются в нуль или бесконечность на решениях (10), т.е. удовлетворяют условиям теоремы 1 для наборов показателей в первой строке табл. 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из линейной независимости векторов $a_1, \dots, a_n$ следует несуществование интегралов первой степени однородности (все они имеют вид F из (4)). Степени однородности отличных от гамильтониана интегралов содержатся среди тривиальных показателей Ковалевской из первой строки табл. 1. Отсюда следует справедливость условий (18) и существование комплексно-сопряженных показателей, что несовместимо с алгебраической интегрируемостью и существованием полного набора полиномиальных интегралов.

Рассмотрим гамильтонову систему (1) в пространстве Минковского $\mathbb{R}_1^n$, положив $N = n$:

$$H = \frac{1}{2} \langle p, p \rangle + \sum_{i=1}^n \nu_i \exp(a_i, q). \quad (19)$$

Поставим вопрос о существовании у этой системы полного набора полиномиальных по $p, \nu_k \exp(a_k, q)$ интегралов, удовлетворяющих условиям теоремы 1 для первой серии показателей из табл. 1. Для таких интегралов $H = I_1, I_2, \dots, I_n$:

$$\begin{aligned} dI_k &\neq 0, \infty \text{ на решениях (10),} \\ dI_1, dI_2, \dots, dI_n &\text{ линейно независимы на решениях (10).} \end{aligned} \quad (20)$$

По теореме 1 степень однородности полиномов $I_1, I_2, \dots, I_n$ содержится среди показателей Ковалевской, интегралов вида (3) не существует, поскольку мы предполагаем линейную независимость векторов спектра, следовательно, тривиальные показатели – положительные целые числа, превосходящие 1. Это эквивалентно условию (18).

Исключим из рассмотрения случаи, когда уравнения Гамильтона разбиваются на l замкнутых гамильтоновых систем с функциями Гамильтона H_i , т.е. будем рассматривать неприводимые системы.

Спектр Δ системы (19) всегда можно представить в виде объединения $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_- \cup \Delta_0$, где Δ_+ , Δ_- , Δ_0 – множества пространственноподобных, времениподобных и изотропных векторов соответственно. Применяя доказанные теоремы, мы приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 5. Спектр неприводимой интегрируемой в смысле условий (20) системы (19), не содержащей изотропных векторов, совпадает с одним из множеств Δ_+ , Δ_- .

Мы исключили из рассмотрения изотропные векторы спектра, поскольку наш анализ базируется на условии (18), являющемся условием положительности тривиальных показателей Ковалевской в наборах первой серии (первая строка табл. 1). В случае, если имеется изотропный вектор: $\langle a, a \rangle = 0$, соответствующего

набора показателей просто не существует, условие (18) неприменимо и необходимо рассматривать “высшие” наборы.

Отметим, что наличие комплексно-сопряженных показателей Ковалевской в некоторых конкретных псевдоевклидовых системах с экспоненциальным взаимодействием ранее отмечалось в литературе при исследовании космологических моделей [14].

§ 5. Заключение

Исследование показателей Ковалевской, предложенное Х. Иошидой в работе [10], явилось весьма эффективным методом исследования квазиоднородных систем. По сути, в этом случае мы имеем возможность легко провести так называемый тест Ковалевской–Пенлеве на однозначность и мероморфность общего решения. В последнее время появилось много работ, обобщающих и развивающих эту методику. Используя арифметические свойства показателей, В. В. Козлов и С. Д. Фурта в [12] доказали ряд теорем о неинтегрируемости целого класса “полуквазиоднородных” систем. Ранее сильный результат о неинтегрируемости гамильтоновых квазиоднородных систем был получен тем же Х. Иошидой [15]. Немаловажно также, что вычисленные показатели Ковалевской содержат в себе информацию о степенях квазиоднородности дополнительных первых интегралов и полей симметрий, что делает этот метод очень привлекательным не только для доказательства неинтегрируемости, но и при поиске интегрируемых случаев. Данная работа, как мы надеемся, иллюстрирует это: мы получили результаты о неинтегрируемости псевдоевклидовых систем и высказали предположение о степенях однородности дополнительных интегралов системы (15).

Авторы благодарят Д. В. Трещева, В. В. Козлова за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во УдГУ, 1995.
2. Toda М. Теория нелинейных решеток. М.: Мир, 1984.
3. Боголюбский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. М.: Наука, 1980.
4. Adler M., van Moerbeke P. Kowalewski's asymptotic method, Kac-Moody Lie algebras and regularization // Comm. Math. Phys. 1982. V. 83. P. 83–106.
5. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985.
6. Козлов В. В., Трещев Д. В. Числа Ковалевской обобщенных цепочек Тоды // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 5. С. 17–28.
7. Ковалевская С. В. Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки // Ковалевская С. В. Научные работы. М.: Изд-во АН СССР, 1948. С. 153–220.
8. Козлов В. В., Трещев Д. В. Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 51. № 3. С. 537–556.
9. Adler M., van Moerbeke P. The Toda lattice, Dynkin diagrams, singularities and Abelian varieties // Invent. Math. 1991. V. 103. P. 223–278.
10. Yoshida H. Necessary condition for the existence of algebraic first integrals // Celestial Mech. 1983. V. 31. P. 363–399.

11. *Козлов В. В.* Тензорные инварианты квазиоднородных систем дифференциальных уравнений и асимптотический метод Ковалевской–Ляпунова // Матем. заметки. 1992. Т. 51. № 2. С. 46–52.
12. *Козлов В. В., Фурта С. Д.* Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений. М.: Изд-во МГУ, 1996.
13. *Adler M., van Moerbeke P.* A systematic approach towards solving integrable systems // Perspectives in Mathematics. New York: Academic Press, 1987.
14. *Pavlov A. E.* The mixmaster cosmological model as a pseudo-Euclidean generalized Toda chain // Regular and Chaotic Dynamics. 1996. № 1. P. 111–118.
15. *Yoshida H.* A criterion for the non-existence of an additional analytic integral in Hamiltonian systems with n degrees of freedom // Phys. Lett. A. 1989. V. 141. № 3–4. P. 108–112.

Удмуртский государственный университет;

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: ke@uni.udm.ru, tsygvin@nw.math.msu.su

Поступила в редакцию

15.11.1999