Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Колмыков, Преобразование Кокстера и число “ -1 ”, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 10, 51–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 18:06:14

УДК 512.543.14+512.643.5+512.817.73

В. А. Колмыков

Преобразование Кокстера и число “−1”

Рассматриваются преобразования Кокстера, связанные с деревьями. Число “−1” играет особую роль по отношению к спектрам деревьев. Исследуются множества всех деревьев, содержащих и не содержащих “−1” в спектре: определяются их плотности, находятся системы образующих элементов и операций, изучаются свойства ребер деревьев из этих множеств.

Библиография: 9 названий.

Преобразование Кокстера – это суперпозиция операторов, являющихся отражениями относительно некоторого набора гиперплоскостей.

При таком общем подходе, однако, не удастся достаточно далеко продвинуться. В настоящее время наиболее хорошо изучена следующая ситуация. Пусть T – дерево. Всякая вещественная функция, определенная на множестве его вершин, называется *взвешиванием*. Взвешивания естественно образуют $|T|$ -мерное пространство. С каждой вершиной u свяжем преобразование σ_u этого пространства: σ_u не меняет весов вершин, отличных от u , а вес вершины u заменяет на противоположный плюс сумма весов всех вершин, смежных с u . Операторы σ_u являются отражениями (в смысле [1; гл. 5, § 2]). *Преобразованием Кокстера* называется суперпозиция всех отражений σ_u , взятых по одному (порядок произвольный). Итак, с каждым деревом связано, вообще говоря, несколько преобразований Кокстера, однако все они сопряжены (см. [2]) и имеют одинаковый характеристический многочлен, обозначаемый $T(\lambda)$, и одинаковый спектр, обозначаемый $\text{Spec } T$.

Удивительно (и с этого начинается настоящая статья), что число “−1” играет особую роль по отношению к спектрам деревьев. Аргументы в пользу этого приводятся в п. 1. Затем исследуются множества $\mathcal{T}_-$ и $\mathcal{T}_+$ деревьев, содержащих и не содержащих “−1” в спектре: определяются их плотности, находятся системы образующих элементов и операций, изучаются свойства ребер деревьев из этих множеств.

Основными результатами являются теоремы 1–4.

Автор благодарен Ю. И. Сапронову за советы.

1. Роль числа “−1” в объединении спектров деревьев. Множество всех деревьев обозначается $\mathcal{T}$, а объединение спектров всех деревьев обозначается $\text{Spec } \mathcal{T}$.

1) Существует единственное отрицательное число, которое может принадлежать спектру некоторого дерева, а именно – минус единица: $\mathbb{R}_- \cap \text{Spec } \mathcal{T} = \{-1\}$ (вообще $\text{Spec } \mathcal{T} \subset \mathbb{R}_+ \cup S^1$, где S^1 – стандартная единичная окружность в $\mathbb{C}$, см. [3]).

2) Этот результат сильно оттеняется утверждением М. В. Сумина о том, что объединение множеств положительных собственных значений деревьев всюду плотно в $\mathbb{R}_+$ (точнее: $\overline{\text{Spec } \mathcal{T}} = [0; +\infty) \cup S^1$, см. [4]).

3) $-1 \in \text{Spec } T$ тогда и только тогда, когда 0 принадлежит спектру матрицы смежности дерева T (так как функция $f(x) = x^2/2 - 1 \pm x\sqrt{x^2/4 - 1}$ переводит спектр матрицы смежности дерева в спектр преобразования Кокстера того же дерева, а функция $g(z) = z^{1/2} + z^{-1/2}$ — наоборот, см. [5]) Наличие же нуля в спектре матрицы смежности дерева означает, что соответствующая молекула углеводорода неустойчива [6; § 8.1, п. 1].

4) Минус единица тесно связана с операциями над графами (см. леммы 2, 3 и комментарии к ним).

Прежде чем сформулировать и доказать леммы 1–3, отметим, что иногда удобно работать не с деревом, а с лесом. Лес — это конечное объединение нескольких деревьев; преобразованием Кокстера леса называется прямая сумма преобразований Кокстера его деревьев. Для пустого леса Emr удобно положить $\text{Emr}(\lambda) \equiv 1$, $\text{Spec } \text{Emr} = \emptyset$.

ЛЕММА 1. *Если число вершин леса нечетно, то в спектре преобразования Кокстера этого леса есть “−1”.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае лес — двудольный граф с неравномошными долями, поэтому в спектре его матрицы смежности есть 0 [6; § 8.1, следствие теоремы 8.2], а это, как уже отмечалось выше, равносильно наличию “−1” в спектре преобразования Кокстера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пунктированным деревом* называется дерево, в котором отмечена одна вершина. Если T и F — пунктированные деревья, то $T \oplus F$ означает пунктированное дерево, получающееся из T и F отождествлением отмеченных вершин (это прямая сумма в категории пунктированных деревьев), $T \ominus F$ означает дерево, получающееся из T и F соединением отмеченных вершин ребром; наконец, $\tilde{T}$ означает граф, получающийся из T удалением отмеченной вершины.

Имеют место соотношения:

$$T \oplus F(\lambda) = \tilde{T}(\lambda)F(\lambda) + T(\lambda)\tilde{F}(\lambda) - (\lambda + 1)\tilde{T}(\lambda)\tilde{F}(\lambda), \quad (1)$$

$$T \ominus F(\lambda) = T(\lambda)F(\lambda) - \lambda\tilde{T}(\lambda)\tilde{F}(\lambda). \quad (2)$$

В частности,

$$T \oplus F(-1) = \tilde{T}(-1)F(-1) + T(-1)\tilde{F}(-1), \quad (1')$$

$$T \ominus F(-1) = T(-1)F(-1) + \tilde{T}(-1)\tilde{F}(-1). \quad (2')$$

Формулы (1) и (2) впервые получены соответственно в [7] и [8].

ЛЕММА 2. *Если $-1 \in \text{Spec } T \cap \text{Spec } F$, то $-1 \in \text{Spec } T \oplus F$.*

Доказательство следует из (1').

ЗАМЕЧАНИЕ. Этим “−1” характеризуется: существует единственное $\alpha \in \text{Spes } \mathcal{T}$ такое, что $\alpha \in \text{Spes } T \cap \text{Spes } F \Rightarrow \alpha \in \text{Spes } T \oplus F$, а именно $\alpha = -1$. Действительно, если $\alpha = -1$, то условие, очевидно, выполнено. Докажем обратное. Пусть условие выполнено для любых T и F . Существует пунктированное дерево H такое, что $H(\alpha) = 0$ и $\check{H}(\alpha) \neq 0$ (в противном случае, начиная с некоторого дерева S , для которого $S(\alpha) = 0$, последовательным удалением концевых вершин получили бы $\alpha \in \text{Spes } \text{Emr} = \emptyset$). Подставляя H в (1) вместо T и F , получаем $\alpha = -1$.

ЛЕММА 3. Если $-1 \notin \text{Spes } T \cup \text{Spes } F$, то $-1 \notin \text{Spes } T \oplus F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 число вершин в T четно; отсюда число вершин в $\check{T}$ нечетно. По лемме 1 имеем $\check{T}(-1) = 0$. В таком случае формула (2') принимает вид $T \oplus F(-1) = T(-1)F(-1)$. Значит, $T \oplus F(-1) \neq 0$.

ПРОБЛЕМА. Найти все значения $\alpha \in \text{Spes } \mathcal{T}$ такие, что $\alpha \notin \text{Spes } T \cup \text{Spes } F \Rightarrow \alpha \notin \text{Spes } T \oplus F \quad \forall T, F$.

2. Разбиение множеств деревьев. Если $\mathcal{G}$ – некоторое множество деревьев, то оно естественно разбивается на два подмножества $\mathcal{G}_+ \sqcup \mathcal{G}_-$. Первое состоит из деревьев, вещественные собственные значения которых положительны (т.е. в спектре нет “−1”). Второе – из тех деревьев, среди собственных значений которых имеются отрицательные числа (т.е. в спектре есть “−1”).

ПРИМЕР. Звезда Z_n ($n \geq 0$) – это $(n+1)$ -вершинное дерево, имеющее вершину степени n . Так, $Z_0 = A_1$, $Z_1 = A_2$, $Z_2 = A_3$, $Z_3 = D_4$ (графы Дынкина [1; гл. 6, § 4]). Известно, что $Z_0(\lambda) = \lambda + 1$, $Z_1(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$. С помощью (2) в [8] доказано, что $Z_k(\lambda) = (\lambda + 1)^{k-1}(\lambda^2 + (2-k)\lambda + 1)$ при $k \geq 2$. Положим $\mathcal{Z} = \{Z_n\}_{n=0}^3$. Тогда $\mathcal{Z}_+ = \{Z_1\}$, $\mathcal{Z}_- = \{Z_0, Z_2, Z_3\}$.

ЛЕММА 4. Пусть F – пунктированное дерево. Отметим в Z_k вершину степени k .

1. Если $k = 0$, то $F \oplus Z_k(-1) = F(-1)$, $F \ominus Z_k(-1) = \check{F}(-1)$.
2. Если $k = 1$, то $F \oplus Z_k(-1) = \check{F}(-1)$, $F \ominus Z_k(-1) = F(-1)$.
3. Если $k \geq 2$, то $F \oplus Z_k(-1) = 0$, $F \ominus Z_k(-1) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО тривиально следует из (1), (2) и формулы для $Z_k(\lambda)$.

3. Операции на $\mathcal{T}$. На множестве $\mathcal{T}$ определим две многозначные операции: склейка двух деревьев по вершине и соединение двух деревьев ребром. (Эти операции можно ввести при помощи введенных ранее $\oplus$ и $\ominus$, используя отображение “забывания отмеченной вершины”, многозначность возникает из-за неинъективности этого отображения.) Новые операции обозначим также $\oplus$ и $\ominus$ (путаницы не возникнет, так как всегда будет ясно, к чему они применены).

ЛЕММА 2'. Множество деревьев $\mathcal{T}_-$ замкнуто относительно $\oplus$.

ЛЕММА 3'. Множество деревьев $\mathcal{T}_+$ замкнуто относительно $\ominus$.

4. Конструктор и формализация понятия “основная теорема”. Под основной теоремой некоторой теории часто понимают такую теорему, которая указывает элементарные объекты теории, операцию теории и доказывает, что любой объект теории может быть представлен с помощью указанных элементов посредством указанной операции.

ПРИМЕРЫ. 1) Основная теорема арифметики. *Объекты теории* – натуральные числа, *элементы теории* – простые числа (включая 1), *операция теории* – умножение натуральных чисел.

2) Основная теорема алгебры многочленов. *Объекты теории* – многочлены с комплексными коэффициентами, *элементы теории* – двучлены $x - \alpha$ и комплексные числа (рассматриваемые как многочлены степени 0), *операция теории* – умножение многочленов.

3) Основная теорема о конечных абелевых группах. *Объекты теории* – конечные абелевы группы, *элементы теории* – примарные циклические группы (т.е. циклические группы порядка p^k), *операция теории* – прямая сумма групп.

Для формализации вышесказанного можно воспользоваться понятием *конструктора*.

Пусть $\mathcal{M}$ – множество, $\mathcal{P}$ – его подмножество, $\mathcal{R}$ – набор операций (возможно, многозначных), позволяющих из элементов $\mathcal{P}$ строить какие-то элементы $\mathcal{M}$, а из полученных – другие и т.д. Если в результате такого конструирования из $\mathcal{P}$ посредством $\mathcal{R}$ получается все $\mathcal{M}$, то пару $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$ назовем конструктором множества $\mathcal{M}$; обозначается $\mathcal{M} = \langle \mathcal{P} \mid \mathcal{R} \rangle$.

ПРИМЕР. Имеем: $\mathcal{T} = \langle Z_1 \mid \oplus \rangle = \langle \mathcal{Z}_+ \mid \oplus \rangle$, кроме того, $\mathcal{T} = \langle Z_0 \mid \ominus \rangle$, тем более, $\mathcal{T} = \langle \mathcal{Z}_- \mid \ominus \rangle$.

Итак, $\mathcal{T} = \langle \mathcal{Z}_+ \mid \oplus \rangle = \langle \mathcal{Z}_- \mid \ominus \rangle$.

5. Конструкторы для $\mathcal{T}_+$ и $\mathcal{T}_-$.

ТЕОРЕМА 1. $\mathcal{T}_+ = \langle \mathcal{Z}_+ \mid \ominus \rangle$.

ТЕОРЕМА 2. $\mathcal{T}_- = \langle \mathcal{Z}_- \mid \oplus \rangle$.

Напомним, что эти теоремы относятся *не* к пунктированным деревьям. Однако в процессе доказательства мы иногда будем пунктировать деревья или менять пунктирование, не оговаривая этого, причем всегда будет ясно, какую вершину нам удобно отметить.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. $\supseteq$: см. лемму 3'.

$\subseteq$: пусть $H \in \mathcal{T}_+$ и $H \neq Z_1$. В H не может быть двух концевых (т.е. степени 1) вершин, инцидентных некоторой третьей вершине (см. п. 3 леммы 4). Поэтому в H найдется предконцевая (т.е. инцидентная концевой и не более чем одной неконцевой) вершина степени 2. Поэтому существует дерево F такое, что $H = F \ominus Z_1$, тогда $H(-1) = F(-1)$ (см. п. 2 леммы 4), значит, $F \in \mathcal{T}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. $\supseteq$: см. лемму 2'.

$\subseteq$: пусть $H \in \mathcal{T}_-$.

Случай 1. $H = Z_k$ ($k \geq 2$). Тогда $H = Z_2^n \oplus Z_3^m$ ($2n + 3m = k$).

Случай 2. $H \neq Z_k$. Пусть α – предконцевая вершина дерева H ; удалим все концевые, инцидентные α , получим дерево F , отметим в нем вершину α . Если $\check{F} \in \mathcal{T}_-$, то $H = \check{F} \oplus Z_2^n \oplus Z_3^m$ ($2n + 3m = \deg \alpha$). Если $\check{F} \in \mathcal{T}_+$, то $\deg \alpha \geq 3$ (иначе бы $H = \check{F} \ominus Z_1$, откуда по лемме 3' $H \in \mathcal{T}_+$). Так как $\check{F} \in \mathcal{T}_+$, то $F \in \mathcal{T}_-$. С другой стороны, $H = F \oplus Z_2^n \oplus Z_3^m$ ($2n + 3m = \deg \alpha - 1$).

6. Плотность $\mathcal{T}_+$ и $\mathcal{T}_-$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}$ — множества графов, $\mathcal{M}_n$ и $\mathcal{L}_n$ — множества всех n -вершинных графов из $\mathcal{M}$ и $\mathcal{L}$. Говорят, что $\mathcal{M}$ *всюду плотно* (нигде не плотно) в $\mathcal{L}$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{M}_n|/|\mathcal{L}_n| = 1$ (соответственно = 0).

ТЕОРЕМА 3.

- 1) $\mathcal{T}_+$ *нигде не плотно* в $\mathcal{T}$;
- 2) $\mathcal{T}_-$ *всюду плотно* в $\mathcal{T}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем 2). Пунктированное дерево R называется частью дерева T , если существуют такое пунктированное дерево F и такое пунктирование дерева T , что $T = F \oplus R$. Фундаментальное утверждение Швенка [9] гласит, что для любого пунктированного дерева R множество деревьев, имеющих часть R , всюду плотно в $\mathcal{T}$. Значит, множество $\mathcal{S}$ деревьев, имеющих частью Z_2 (см. лемму 4), всюду плотно в $\mathcal{T}$. Но $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_- \subset \mathcal{T}$ (см. лемму 4).

Утверждение 1) очевидно вытекает из 2).

7. Свойства ребер. Пусть в n -вершинном графе H отмечено ребро; через $\check{H}$ обозначим n -вершинный граф, получающийся из H удалением этого ребра, а через $\hat{H}$ обозначим $(n - 2)$ -вершинный граф, получающийся из H удалением концов отмеченного ребра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Отмеченное ребро дерева H имеет тип $(-)$, если $\check{H}(-1) = \hat{H}(-1) = 0$, в противном случае — тип $(+)$.

ТЕОРЕМА 4.

- 1) Если $T \in \mathcal{T}_+$, то все ребра T типа $(+)$;
- 2) Если $T \in \mathcal{T}_-$, то все ребра T типа $(-)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде заметим, что формулу (2') можно переписать в виде $H(-1) = \check{H}(-1) + \hat{H}(-1)$.

1) Предположим противное. Тогда $T(-1) = \check{T}(-1) + \hat{T}(-1) = 0$. То есть $T \in \mathcal{T}_-$ — противоречие.

2) Хотя бы одна из двух компонент леса $\check{T}$ принадлежит $\mathcal{T}_-$ (иначе по лемме 3' имели бы $T \in \mathcal{T}_+$). Отсюда $\check{T}(-1) = 0$.

Хотя бы одна из компонент леса $\hat{T}$ принадлежит $\mathcal{T}_-$ (иначе, используя эти компоненты и граф Z_1 , с помощью операции $\ominus$ можно было бы построить граф T , и тогда по лемме 3' дерево T принадлежало бы $\mathcal{T}_+$). Отсюда $\hat{T}(-1) = 0$.

Список литературы

1. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Группы Кокстера и системы Титса. Группы, порожденные отражениями. Системы корней. М.: Мир, 1972.
2. Бернштейн И. Н., Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Функторы Кокстера и теорема Габриеля // УМН. 1973. Т. 28. №2. С. 19–33.
3. Субботин В. Ф., Стекольников Р. Б. Спектр преобразования Кокстера и регулярность представлений графов // Труды матем. ф-та Воронежского гос. ун-та. Сб. статей по нелинейным операторным уравнениям и их приложениям. №16. Воронеж, 1975. С. 62–65.
4. Сумин М. В. Связь спектров деревьев и их плотность. Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 1983. Деп. в ВИНТИ 25.12.84, № 8314-84. 15 с.

5. Колмыков В. А., Субботин В. Ф. Спектры графов и коспектральность. Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 1983. Деп. в ВИНТИ 12.12.83, № 6708-83. 23 с.
6. Цветкович Д., Дуб М., Зас Х. Спектры графов. Теория и применение. Киев: Наукова Думка, 1984.
7. Колмыков В. А., Меньших В. В., Субботин В. Ф., Сумин М. В. Некоторые свойства ациклических графов и связанных с ними многочленов. Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 1983. Деп. в ВИНТИ 12.12.83, № 6707-83. 21 с.
8. Субботин В. Ф., Сумин М. В. Исследование многочленов, связанных с представлениями графов. Воронеж: Воронежский гос. ун-т, 1982. Деп. в ВИНТИ 30.12.82, № 6480-82. 37 с.
9. Schwenk A. J. Almost all trees are cospectral // New directions in The theory of graphs / ed. F. Harary. New York: Academic press, 1973. P. 275–307.

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию
12.07.1999