Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Лазарева, А.М. Шелехов, О триангуляциях плоскости пучками коник. II, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 6, 93–134

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm5153>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:34:53

УДК 514.763.7

В. Б. Лазарева, А. М. Шелехов

О триангуляциях плоскости пучками коник. II

Настоящая работа является продолжением предыдущей нашей статьи, где перечислены все возможные триангуляции плоскости с помощью трех пучков окружностей. В этой статье мы находим все проективно различные триангуляции плоскости пучками коник, которые получаются проектированием регулярных три-тканей, высекаемых на невырожденной кубической поверхности тремя пучками плоскостей, оси которых лежат на этой поверхности.

Библиография: 6 названий.

Ключевые слова: криволинейная три-ткань, регулярная три-ткань, ткань Бурау, специальная три-ткань Бурау.

DOI: 10.4213/sm5153

Введение

Напомним, что криволинейной k -тканью W называют k семейств гладких кривых на плоскости, или, более общо, на двумерном гладком многообразии. Областью D определения ткани называют область, в каждой точке которой линии ткани трансверсальны. Ткани – один из наиболее популярных объектов изучения в классической дифференциальной геометрии. Имеется много работ, посвященных евклидовой, аффинной и проективной теории тканей. В 20-е гг. прошлого века В. Бляшке и участники его семинара начали рассматривать ткани с точностью до локальных диффеоморфизмов, т.е. относительно самого широкого отношения эквивалентности в локальной дифференциальной геометрии. Такую теорию тканей теперь называют дифференциально-топологической, хотя сам Бляшке называл ее топологической. В топологической теории два-ткани не представляют интереса, поскольку подходящим локальным диффеоморфизмом два семейства линий можно отобразить (локально!) на декартову сеть. Но три-ткани уже имеют нетривиальный топологический инвариант – кривизну. Пусть D – произвольная точка области определения некоторой три-ткани W (см. рис. 1). Через нее проходят три линии ткани, по одной из каждого семейства. Будем называть линии первого, второго и третьего семейств соответственно вертикальными, горизонтальными и наклонными. Возьмем на горизонтальной линии точку B , достаточно близкую к точке D , и проведем через нее вертикальную и наклонную линии ткани. Они пересекут уже имеющиеся линии ткани в точках E и C . Через последние проведем горизонтальные линии ткани и получим точки F и G . Далее аналогично строим точку H . Вообще говоря, точки G и H не лежат на одной линии третьего семейства ткани W . В этом случае главная часть “зазора” между наклонными линиями ткани W ,

проходящими через точки G и H , определяется некоторым относительным инвариантом $b(D)$, который называется кривизной ткани W . Если точки G и H лежат на одной линии третьего семейства, то говорят, что шестиугольная фигура $GEBCFH$ замыкается. Легко проверяется, что на простейшей ткани, образованной семействами параллельных прямых на аффинной плоскости (она называется параллельной и обозначается PW), все шестиугольные фигуры замыкаются. Следовательно, такие фигуры замыкаются и на всякой ткани, которая эквивалентна параллельной. Такие ткани называются регулярными или параллелизуемыми, а также шестиугольными, поскольку верна теорема Томсена: если на некоторой три-ткани замыкаются все шестиугольные фигуры, то она является регулярной, см. [1], [2]. Этот результат дает основание говорить, что регулярная три-ткань триангулирует свою область определения.

Рис. 1

Регулярные ткани представляют особый интерес еще и потому, что часто возникают в различных приложениях. Например, Е. Фералонтов (см. написанное им приложение в [3]) рассматривает условие регулярности для три-ткани из характеристик на решениях системы уравнений гидродинамического типа. Условие регулярности здесь означает, что система является слабо нелинейной и полугамильтоновой. В [4] рассматривается регулярная три-ткань из прямых, возникающая в окрестности особой точки гладкого отображения. В [5] эти же авторы доказывают, что всякое непрерывное отображение, переводящее гладкую три-ткань в гладкую, является гладким.

Уравнение ткани $z = f(x, y)$, связывающее параметры линий ткани, проходящих через одну точку, можно рассматривать как бинарную операцию в гладкой локальной квазигруппе, что дает возможность использовать результаты теории тканей в теории квазигрупп и луп. В частности, подклассу регулярных тканей соответствует подкласс луп, изотопных абелевой группе $z = x + y$ (см. [3]).

В связи с вышесказанным, задача о нахождении подкласса регулярных тканей в заданном классе тканей является актуальной. Однако эта задача является весьма непростой. Например, если три-ткань на плоскости образована тремя семействами прямых (не обязательно параллельных!), то условие регулярности следующее: прямые ткани должны принадлежать одному кубическому семейству ([2; гл. I, § 4]). В частности, регулярными будут ткани, образованные тремя пучками прямых (они обозначаются W_0).

В классе три-тканей, образованных алгебраическими кривыми, следующий по сложности (за прямолинейными тканями) класс образуют круговые ткани, образованные пучками окружностей. Такие ткани не являются, вообще говоря, регулярными. В [1], [6] мы решили проблему Бляшке – описали все проективно различные регулярные круговые три-ткани. В настоящей статье мы расширяем задачу Бляшке, рассматривая некоторый класс регулярных три-тканей, образованных пучками коник (кривых второго порядка).

Пусть V – кубическая поверхность (кубика) в трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$; ℓ_i , $i = 1, 2, 3$, – три вещественные прямые, лежащие на V . Обозначим через L_i пучки плоскостей с осями ℓ_i , λ_i – семейства коник, высекаемых плоскостями пучков L_i на V , через W – три-ткань, образованную семействами λ_i . При проектировании ткани W на плоскость получается три-ткань $\widetilde{W}$, образованная также семействами коник, *перспективно эквивалентная* три-ткани W . Если одна из тканей $\widetilde{W}$ или W будет регулярной, то таковой будет и другая. Это следует из того, что при проектировании замкнутые шестиугольные фигуры переходят в замкнутые.

Столь, казалось бы, экзотический способ получения три-ткани из коник на плоскости предопределяется тем обстоятельством, что три-ткань W является регулярной, если прямые ℓ_i находятся в общем положении, т.е. попарно скрещиваются. Этот факт первым установил, по-видимому, В. Бурау (см. об этом в [2; гл. III, § 47]; простое доказательство будет приведено в § 2). Поэтому будем называть три-ткани, высекаемые на кубических поверхностях описанным выше образом, *тканями Бурау*.

Но три-ткань Бурау не будет, вообще говоря, регулярной, если прямые ℓ_i находятся в специальном расположении. Соответствующие три-ткани будем называть *специальными тканями Бурау*. В настоящей работе рассматриваются все специальные случаи расположения прямых ℓ_i на кубической поверхности: две из прямых ℓ_i пересекаются; одна из прямых пересекает две остальные; все три прямые лежат в одной плоскости. В каждом из этих случаев выделены регулярные ткани. Последние разделены на основные классы, для каждого из которых соответствующая кубическая поверхность охарактеризована соотношениями на коэффициенты и в терминах сингулярностей (теоремы 3.1, 4.1, 5.1, 5.2).

Далее мы проектируем полученные регулярные три-ткани с кубической поверхности на плоскость из особой точки поверхности V . В этом и только в этом случае в результате проектирования получается ткань из пучков коник. (Как будет видно из приведенных доказательств, кубика, допускающая специальную регулярную три-ткань Бурау, имеет по крайней мере одну особую точку.) Перебирая все возможные варианты проектирования, мы приходим к основному результату, сформулированному в теореме 6.1: в случае, если кубика не распадается на плоскость и квадрику, существует 38 проективно различных типов тканей, образованных на плоскости пучками коник и перспективно эквивалентных регулярным специальным тканям Бурау.

В настоящей работе вводится следующая проективная классификация пучков коник. Произвольный пучок определяется двумя базисными кониками,

которые пересекаются в четырех точках, общих всем коникам пучка. Они называются *вершинами пучка*. Пучок назовем *эллиптическим (Е-пучок)*, если все его вершины различные (т.е. *простые* или *однократные*) и вещественные; *гиперболическим (Н-пучок)*, если вершины попарно комплексно сопряженные и различные; *полуэллиптическим (НЕ-пучок)*, если две вершины различные и вещественные, а две мнимые. Если две вершины совпадают, то все коники пучка касаются друг друга в двойной вершине. Такой пучок будем называть *параболическим пучком (Р-пучок) эллиптического или гиперболического типа (РЕ-пучок или РН-пучок)* в зависимости от того, являются ли простые вершины вещественными или мнимыми. Если вершины попарно совпадают, то пучок назовем *дважды параболическим (WP-пучок)*. Если три вершины пучка совпадают, то все коники пучка будут иметь в тройной (трехкратной) вершине касание второго порядка. Такой пучок назовем *сильнопараболическим (SP-пучок)*. Наконец, если все 4 вершины совпадают, то все коники пучка будут иметь в этой вершине касание третьего порядка. Такой пучок назовем *сверхпараболическим (UP-пучок)*.

Непосредственным вычислением доказывается следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 0.1. *РЕ-пучок (РН-пучок) коник однозначно определяется своими вершинами и общей касательной в двойной вершине. WP-пучок коник однозначно определяется своими вершинами и общими касательными коник пучка в этих вершинах.*

Существует ∞^1 SP-пучков (SP-связка) коник, имеющих заданные вершины и общую касательную в тройной вершине.

Существует ∞^2 UP-пучков (UP-гиперсвязка) коник, имеющих заданную четырехкратную вершину и общую касательную в ней.

Произвольный SP-пучок имеет вид $Q + \lambda T\ell = 0$, где $Q = 0$ – произвольная коника, $T = 0$ – касательная к Q , $\ell = 0$ – прямая, проходящая через точку касания, λ – параметр пучка. В некоторых проективных координатах уравнение SP-связки имеет вид $x^1x^3 + a(x^2)^2 + \lambda x^2x^3 = 0$, здесь тройная вершина – A_1 , простая вершина – A_3 , общая касательная – A_1A_2 .

Произвольный UP-пучок имеет вид $Q + \lambda T^2 = 0$, где обозначения те же. Уравнение UP-гиперсвязки может быть записано в виде $x^1x^3 + a(x^2)^2 + bx^2x^3 + \lambda(x^3)^2 = 0$, где вершина A_1 – четырехкратная.

§ 1. Условия регулярности криволинейной три-ткани

Для описания регулярных круговых тканей в [1] мы использовали теорему о границах, согласно которой границы области определения регулярной ткани являются линиями этой ткани. В этой работе мы используем другое условие регулярности, наиболее удобное для тканей, заданных алгебраическим уравнением.

Семейства λ_i линий, образующие произвольную криволинейную три-ткань W , в наиболее общем виде задаются уравнениями

$$F_1(x, y, u_1) = 0, \quad F_2(x, y, u_2) = 0, \quad F_3(x, y, u_3) = 0, \quad (1.1)$$

где F_i , $i = 1, 2, 3$, – гладкие функции, u_i – параметры семейств. Исключив из уравнений (1.1) переменные x и y , получим уравнение ткани W

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0. \quad (1.2)$$

Функция F называется функцией ткани. Заметим, что все переменные входят в F существенно.

Уравнение (1.2) определяет образ исходной три-ткани W в пространстве параметров. Например, сузив область изменения параметра u_3 , уравнение ткани (1.2) можно записать в виде

$$u_3 = f(u_1, u_2). \quad (1.3)$$

На двумерном многообразии с локальными координатами u_1 и u_2 уравнение (1.3) определяет три-ткань W' , эквивалентную исходной три-ткани W . Слоения ткани W' задаются уравнениями $u_1 = \text{const}$, $u_2 = \text{const}$, $u_3 = f(u_1, u_2) = \text{const}$. При этом уравнения (1.2) и (1.3) определены не однозначно, а с точностью до замены параметров вида

$$u_1 \rightarrow \alpha(u_1), \quad u_2 \rightarrow \beta(u_2), \quad u_3 \rightarrow \gamma(u_3), \quad (1.4)$$

где α , β , γ – локальные диффеоморфизмы.

Известно (см., например, [2]), что если уравнение ткани (1.2) является полилинейным, то эта ткань регулярная. Поэтому условие регулярности произвольной ткани W можно сформулировать так: ткань W является регулярной тогда и только тогда, когда ее уравнение (1.2) может быть приведено к виду

$$Au_1u_2u_3 + B_1u_2u_3 + B_2u_1u_3 + B_3u_1u_2 + C_1u_1 + C_2u_2 + C_3u_3 + D = 0$$

преобразованиями вида (1.4). В этом случае будем говорить, что преобразование $u_i \rightarrow \alpha(u_i)$ линеаризует уравнение (1.2) по переменной u_i .

ТЕОРЕМА 1.1. *Уравнение (1.2) может быть линеаризовано по переменной u_1 преобразованием вида $u_1 = \alpha(\tilde{u}_1)$ тогда и только тогда, когда F есть композиция:*

$$F(u_1, u_2, u_3) = F(u_1, \varphi(u_2, u_3)). \quad (1.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть подстановка $u_1 = \alpha(\tilde{u}_1)$ линеаризует уравнение (1.2), т.е. уравнение $F(\alpha(\tilde{u}_1), u_2, u_3) = 0$ линейно относительно $\tilde{u}_1$. Из него находим $\tilde{u}_1 = \varphi(u_2, u_3)$, откуда $u_1 = \alpha(\varphi(u_2, u_3))$. Это означает, что верно (1.5). Обратно, если верно (1.5), то из равенства $F = 0$ находим $\varphi(u_2, u_3) = \tilde{\alpha}(u_1) \equiv \tilde{u}_1$.

В дальнейшем мы будем рассматривать ткани, для которых F – многочлен. Тогда уравнение (1.2) запишем в виде

$$u_1^n P_0 + u_1^{n-1} P_1 + \dots + P_n = 0, \quad (1.6)$$

где P_i – многочлены от переменных u_2 и u_3 . Многочлены P_i определены с точностью до общего множителя – дробно-рациональной функции λ от переменных u_2 и u_3 . В силу теоремы 1.1 условие линеаризации по переменной u_1

означает, что с точностью до множителя многочлены P_i являются многочленами от некоторой дробно-рациональной функции $\varphi = U/V$ от переменных u_2 и u_3 : $\lambda P_i = a_{i0}(U/V)^k + a_{i1}(U/V)^{k-1} + \dots + a_{ik}$, откуда

$$P_i = a_{i0}(U)^k + a_{i1}(U)^{k-1}V + \dots + a_{ik}V^k. \quad (1.7)$$

Обратно: если многочлены P_i имеют вид (1.7), то уравнение (1.6) разрешается относительно $\varphi = U/V$: $U/V = \tilde{\alpha}(u_1) \equiv \tilde{u}_1$. Доказана

ТЕОРЕМА 1.2. *Алгебраическое уравнение (1.6) линеаризуемо по переменной u_1 подстановкой $u_1 = \alpha(\tilde{u}_1)$ тогда и только тогда, когда многочлены P_i имеют вид (1.7).*

В пространстве переменных u_2 и u_3 ткань W' , определяемая уравнением (1.6) при условиях (1.7), состоит из декартовой сети $u_2 = \text{const}$, $u_3 = \text{const}$ и семейства алгебраических кривых, определяемых уравнением (1.6), где u_1 – параметр семейства. Базисные кривые семейства определяются уравнениями $P_i = 0$. Левая часть равенства (1.6) раскладывается (над полем $\mathbb{R}$) в произведение линейных сомножителей вида $aU + bV$ и квадратичных вида $aU^2 + bUV + cV^2$, так что каждая из базисных кривых есть объединение алгебраических кривых вида $aU + bV = 0$, принадлежащих одному пучку с базисом $U = 0$ и $V = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если P_i – многочлены второй степени, то возможны два варианта линеаризации уравнения (1.6).*

А) *Первое условие линеаризации: U и V – многочлены второй степени, тогда многочлены P_i являются их линейными комбинациями, т.е. принадлежат пучку с базисом U , V . В этом случае уравнение (1.6) линеаризуемо по переменной u_1 .*

Б) *Второе условие линеаризации: U и V – многочлены первой степени, тогда каждая из кривых второго порядка $P_i = 0$ распадается на пару прямых, принадлежащих одному пучку. В этом случае уравнение (1.6) приводится к виду $U/V = \tilde{u}_1$. Это уравнение полилинейное относительно переменных $\tilde{u}_1$, u_2 , u_3 , следовательно, определяемая им ткань является регулярной.*

§ 2. Конструкции на кубической поверхности, связанные с три-тканями Бурау

2.1. Укажем несколько простых свойств кубических поверхностей в проективном пространстве, которые понадобятся в дальнейшем. Напомним, что трехмерное проективное пространство $\mathbb{P}^3$ есть четырехмерное векторное пространство L^4 с отношением эквивалентности $\vec{a} \sim \lambda \vec{a}$. Базисным векторам $\vec{e}_\alpha$ из L^4 в $\mathbb{P}^3$ соответствуют точки проективного репера, которые обозначаются A_α , $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Произвольная точка M проективного пространства может быть записана в виде $M = x^\alpha A_\alpha$, причем проективные однородные координаты x^α определены с точностью до ненулевого множителя.

Уравнение произвольной кубики V в некотором проективном базисе A_α будем записывать в виде

$$a_{\alpha\beta\gamma}x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, \quad (2.1)$$

где x^α – проективные координаты, $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4$. Легко проверяется

СВОЙСТВО 1. *Вершина проективного репера A_α лежит на кубике V тогда и только тогда, когда $a_{\alpha\alpha\alpha} = 0$, и является особой точкой кубики V тогда и только тогда, когда $a_{\alpha\alpha\beta} = 0$, $\beta = 1, 2, 3, 4$.*

В дальнейшем прямые, лежащие на V , будем называть ее образующими. Последние могут быть как вещественными, так и мнимыми.

СВОЙСТВО 2. *Пусть ℓ_1 и ℓ_2 – две скрещивающиеся образующие кубики V . Тогда на V существует 5 образующих, пересекающих ℓ_1 и ℓ_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поместим на ℓ_1 вершины репера A_1 и A_2 , на ℓ_2 – вершины A_3 и A_4 . Если эти прямые лежат на V , то

$$a_{111} = a_{112} = a_{122} = a_{222} = 0, \quad a_{333} = a_{334} = a_{344} = a_{444} = 0. \quad (2.2)$$

Рассмотрим прямую $\ell_3 = A_1 + aA_2, A_3 + bA_4$, пересекающую ℓ_1 и ℓ_2 . Потребуем, чтобы любая точка $M = A_1 + aA_2 + t(A_3 + bA_4)$ этой прямой принадлежала V . Тогда с учетом соотношений (2.2) получим тождество относительно t

$$\begin{aligned} a_{113} + a_{114}b + a_{133}t + a_{233}at + a_{223}a^2 + a_{224}a^2b + a_{144}b^2t \\ + a_{244}ab^2t + 2a_{123}a + 2a_{124}ab + 2a_{134}bt + 2a_{234}abt \equiv 0, \end{aligned}$$

откуда следуют соотношения

$$\begin{aligned} a_{113} + a_{114}b + a_{223}a^2 + a_{224}a^2b + 2a_{123}a + 2a_{124}ab &= 0, \\ a_{133} + a_{233}a + a_{144}b^2 + a_{244}ab^2 + 2a_{134}b + 2a_{234}ab &= 0. \end{aligned}$$

Исключив b , получим уравнение пятой степени на a .

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если ℓ_1 и ℓ_2 – две скрещивающиеся образующие кубики V , то на V имеется по крайней мере одна вещественная образующая, пересекающая ℓ_1 и ℓ_2 .*

Непосредственно доказывается

СВОЙСТВО 3. *Если через точку M кубики V проходят три некомпланарные образующие, то точка M – особая.*

СВОЙСТВО 4. *Пусть M – особая точка кубики V , тогда*

а) *через M проходит шесть (не обязательно вещественных) образующих этой кубики, принадлежащих конусу касательных к кубике V в точке M ;*

б) *если на V имеется еще одна образующая, не проходящая через M , то она пересекает какие-либо две из указанных шести образующих.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поместим в особую точку M вершину репера A_1 . Тогда в силу свойства 1 $a_{11\alpha} = 0$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, и уравнение кубики становится линейным относительно координаты x^1 :

$$\Phi_3(A_1) + x^1 \Phi_2(A_1) = 0, \quad (2.3)$$

где $\Phi_3(A_1)$ и $\Phi_2(A_1)$ суть соответственно кубическая и квадратичная формы, зависящие от переменных x^2, x^3, x^4 . Уравнения $\Phi_3(A_1) = 0$ и $\Phi_2(A_1) = 0$ определяют конусы соответственно третьего и второго порядка с вершиной A_1 . Указанные конусы пересекаются по шести прямым, каждая из которых, очевидно, лежит на поверхности V .

Непосредственно проверяется, что конус $\Phi_2(A_1) = 0$ (иногда мы будем писать короче: конус $\Phi_2(A_1)$) образован касательными в точке A_1 к кривым, лежащим на V . Если этот конус невырожденный, то особая точка A_1 называется коническим узлом; если он распадается на пару плоскостей, то особая точка A_1 называется бипланарным узлом; если эти плоскости совпадают – унипланарным узлом.

Докажем пункт б). Пусть прямая A_2A_3 лежит на V , тогда $a_{222} = a_{223} = a_{233} = a_{333} = 0$. В силу этих соотношений $\Phi_3(A_1) = x^4 \tilde{\Phi}_2(A_1)$, т.е. конус третьего порядка $\Phi_3(A_1)$ распадается на плоскость и конус второго порядка. Уравнение кубики V примет вид

$$x^4 \tilde{\Phi}_2(A_1) + x^1 \Phi_2(A_1) = 0.$$

Плоскость $x^4 = 0$, содержащая особую точку A_1 и образующую A_2A_3 , пересекает кубiku V по линии $x^4 = 0, \Phi_2(A_1) = 0$, или

$$x^4 = 0, \quad a_{122}(x^2)^2 + 2a_{123}x^2x^3 + a_{133}(x^3)^2 = 0.$$

Эта система определяет две прямые (не обязательно вещественные).

Заметим, что если дискриминант последнего уравнения – нуль, то конусы $\Phi_3(A_1)$ и $\Phi_2(A_1)$ касаются вдоль образующей. В этом случае через особую точку A_1 проходит всего 5 образующих (одна из них двойная).

СВОЙСТВО 5. Если A и B – особые точки кубики V , то прямая AB лежит на V и будет двукратной общей образующей конусов касательных $\Phi_2(A)$ и $\Phi_2(B)$. Через каждую из особых точек A и B проходит по пять образующих кубики V , включая общую двойную образующую AB .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_1 и A_2 – сингулярные точки на V . В силу свойства 1 уравнение кубики имеет вид

$$\begin{aligned} &6a_{123}x^1x^2x^3 + 6a_{124}x^1x^2x^4 + 6a_{134}x^1x^3x^4 + 6a_{234}x^2x^3x^4 \\ &+ 3a_{133}x^1(x^3)^2 + 3a_{233}x^2(x^3)^2 + 3a_{144}x^1(x^4)^2 + 3a_{244}x^2(x^4)^2 \\ &+ 3a_{334}x^4(x^3)^2 + 3a_{344}x^3(x^4)^2 + a_{333}(x^3)^3 + a_{444}(x^4)^3 = 0. \end{aligned}$$

Как видно, уравнения $x^3 = x^4 = 0$ прямой A_1A_2 удовлетворяют уравнению кубики.

Далее, записав уравнение кубики V в виде (2.3), найдем, что конусы касательных $\Phi_2(A_1)$ и $\Phi_2(A_2)$ в точках A_1 и A_2 задаются соответственно уравнениями

$$\begin{aligned} 2a_{123}x^2x^3 + 2a_{124}x^2x^4 + 2a_{134}x^3x^4 + a_{133}(x^3)^2 + a_{144}(x^4)^2 &= 0, \\ 2a_{123}x^1x^3 + 2a_{124}x^1x^4 + 2a_{234}x^3x^4 + a_{233}(x^3)^2 + a_{244}(x^4)^2 &= 0. \end{aligned}$$

В произвольной точке общей образующей A_1A_2 градиенты этих конусов пропорциональны направлению $(0, 0, a_{123}, a_{124})$. Следовательно, общая образующая A_1A_2 является двукратной, и, если конусы не распадаются, это означает, что они касаются вдоль A_1A_2 .

Наконец, найдем пересечение кубических конусов $\Phi_3(A_1)$ и $\Phi_3(A_2)$ с общей касательной плоскостью $a_{123}x^3 + a_{124}x^4 = 0$ квадратичных конусов. Решая соответствующие системы, в обоих случаях придем к кратному решению $x^3 = x^4 = 0$. Это означает, что в обоих случаях прямая A_1A_2 будет двукратным пересечением кубического и квадратичного конусов, т.е. среди шести образующих, проходящих через точку A_1 или A_2 , будет одна двойная.

Непосредственно доказываемся

СВОЙСТВО 6. Пусть ℓ_1 , ℓ_2 и ℓ_3 – образующие кубики V , причем ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются, а ℓ_3 не пересекает ℓ_1 и ℓ_2 . Тогда третья образующая, лежащая в плоскости прямых ℓ_1 и ℓ_2 , пересекает ℓ_3 .

СВОЙСТВО 7. Пусть S – особая точка кубики V и ℓ – ее образующая, не проходящая через S . Образующие кубики V , проходящие через S , обозначим $t_1, t_2, \dots, t_6$ (см. свойство 4), причем t_5 и t_6 пусть будут те образующие, которые в силу свойства 4 пересекают образующую ℓ . Тогда коники, высекаемые на V плоскостями пучка с осью ℓ , при проектировании на плоскость из точки S переходят в пучок коник, проходящих через четыре точки $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3, \tilde{m}_4$ – образы прямых t_1, t_2, t_3, t_4 . Этот пучок содержит, в частности, две коники: одна из них определяется конусом касательных $\Phi_2(S)$, другая – конусом $\tilde{\Phi}_2(S)$ (свойство 4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образующие $t_1, t_2, \dots, t_6$ пересекают все плоскости пучка с осью ℓ , причем первые четыре из них пересекают все коники, высекаемые этими плоскостями на V . При проектировании из точки S все точки пересечения, лежащие на одной образующей, проектируются в одну и ту же точку. Поэтому образы всех коник будут проходить через точки $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3, \tilde{m}_4$.

В силу свойства 4 кубический конус $\Phi_3(S)$ распадается на плоскость и конус второго порядка $\tilde{\Phi}_2(S)$, который также содержит образующие $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3$ и $\tilde{m}_4$. Поэтому его образ также проходит через эти точки.

2.2. В заключение параграфа вернемся к три-ткани Бурау W , порожденной тремя попарно скрещивающимися образующими ℓ_i кубики V . Покажем, что ткань W является регулярной.

Поместим на образующую ℓ_1 вершины проективного репера A_1 и A_2 и проведем через них прямые t_1 и t_2 , пересекающие ℓ_2 и ℓ_3 . В точки пересечения прямых t_1 и t_2 с образующей ℓ_2 поместим соответственно вершины репера A_3 и A_4 .

Кроме того, репер нормируем так, чтобы точки пересечения прямых t_1 и t_2 с образующей ℓ_3 приняли вид $A_1 + A_3$ и $A_2 + A_4$ соответственно. Требуя принадлежности кубике прямых $\ell_1 = A_1A_2$, $\ell_2 = A_3A_4$, $\ell_3 = A_1 + A_3, A_2 + A_4$, получим уравнение кубики V в виде

$$\begin{aligned} & a_{113}x^1x^3(x^1 - x^3) + a_{114}(x^1)^2x^4 + 2a_{123}x^1x^2x^3 + 2a_{124}x^1x^2x^4 \\ & + 2a_{134}x^1x^3x^4 + a_{144}x^1(x^4)^2 - (a_{144} + 2a_{124} + 2a_{234})(x^2)^2x^3 \\ & + a_{224}x^2x^4(x^2 - x^4) - (a_{114} + 2a_{123} + 2a_{134})x^2(x^3)^2 + 2a_{234}x^2x^3x^4 = 0. \end{aligned}$$

Пучки плоскостей L_i с осями ℓ_i зададим уравнениями

$$L_1: x^3 = \lambda x^4, \quad L_2: x^1 = \mu x^2, \quad L_3: x^1 - x^2 = \nu(x^3 - x^4),$$

где λ, μ и ν – параметры пучков. Эти параметры являются также параметрами коник, высекаемых плоскостями пучков на кубической поверхности. Исключая переменные x^α из уравнения кубики, после несложных преобразований получим уравнение рассматриваемой три-ткани Бурау:

$$\begin{aligned} & a_{114}(-\lambda\mu + \nu\mu + \nu\lambda) + 2a_{123}\lambda\nu - 2a_{134}\lambda(\mu - \nu) - 2a_{124}(\lambda - \nu) \\ & + a_{144}(\nu - \lambda - \nu) - 2a_{234}\lambda - a_{113}\lambda\nu + a_{224} = 0. \end{aligned}$$

Как видно, это уравнение является полилинейным относительно всех параметров. Следовательно, ткань является регулярной.

В дальнейшем мы будем ссылаться на перечисленные в этом параграфе свойства кубической поверхности без указания параграфа.

§ 3. Регулярные специальные три-ткани Бурау вида W_1 и перспективно эквивалентные им ткани вида $\widetilde{W}_1$. Случай 1: две из образующих ℓ_i имеют общую точку

3.1. Основные ткани вида W_1 . Предположим, что образующие ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке A_4 и лежат в плоскости π . Выберем репер следующим образом: $\ell_1 = A_1A_4$, $\ell_2 = A_2A_4$, $\ell_3 = A_3, A_1 + A_2$. Заметим, что прямая ℓ_3 пересекает плоскость π в точке $A_1 + A_2$. Специальные ткани Бурау при указанном расположении прямых ℓ_i будем обозначать символом W_1 .

В выбранном репере уравнение кубической поверхности имеет вид

$$\begin{aligned} & (x^1 - x^2)(a_{112}x^1x^2 + a_{113}x^1x^3 - a_{223}x^2x^3 + a_{133}(x^3)^2) + 2a_{124}x^1x^2x^4 \\ & + 2a_{134}x^1x^3x^4 + 2a_{234}x^2x^3x^4 + a_{334}(x^3)^2x^4 + a_{344}x^3x^4^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Пучки плоскостей L_i зададим уравнениями

$$L_1: x^2 = \lambda x^3, \quad L_2: x^1 = \mu x^3, \quad L_3: x^4 = \nu(x^1 - x^2). \quad (3.2)$$

Исключая переменные x^α из уравнений (3.1) и (3.2), получим уравнение рассматриваемой три-ткани W_1

$$\begin{aligned} & a_{344}\nu^2(\mu - \lambda) + 2a_{124}\lambda\mu\nu + a_{112}\lambda\mu + 2a_{134}\mu\nu + 2a_{234}\lambda\nu \\ & + a_{113}\mu - a_{223}\lambda + a_{334}\nu + a_{133} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Уравнение (3.1) линейно относительно параметров λ и μ . Перепишем это уравнение в виде $\nu^2 P + \nu Q + R = 0$, где

$$\begin{aligned} P &\equiv a_{344}(\mu - \lambda), & Q &\equiv 2a_{124}\lambda\mu + a_{134}\mu + 2a_{234}\lambda + a_{334}, \\ R &\equiv a_{112}\lambda\mu + a_{113}\mu - a_{223}\lambda + a_{133}. \end{aligned}$$

Согласно первому условию линеаризации (следствие 1), рассматриваемая трикань является регулярной, если многочлены P , Q , R принадлежат одному пучку, т.е.

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & a_{344} & -a_{344} & 0 \\ 2a_{124} & 2a_{134} & 2a_{234} & a_{334} \\ a_{112} & a_{114} & -a_{223} & a_{133} \end{pmatrix} = 2.$$

Имеем 2 варианта: либо

$$a_{344} = 0, \quad (3.4)$$

либо

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 2a_{124} & 2a_{134} + 2a_{234} & a_{334} \\ a_{112} & a_{114} - a_{223} & a_{133} \end{pmatrix} = 1. \quad (3.5)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Для того чтобы точка A_4 пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_2 была особой точкой кубики V , необходимо и достаточно выполнения соотношения (3.4). Для того чтобы на прямой ℓ_3 существовали две особые точки, необходимо и достаточно выполнения условия (3.5).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Первая половина утверждения непосредственно вытекает из свойства 1. Обозначим ткани, определяемые соотношением (3.4), через W_{11} .

2) Особые точки поверхности V определяются системой

$$\begin{aligned} &a_{112}x^2(2x^1 - x^2) + a_{113}x^3(2x^1 - x^2) - a_{223}x^2x^3 + a_{133}(x^3)^2 \\ &\quad + 2a_{124}x^2x^4 + 2a_{134}x^3x^4 = 0, \\ &a_{112}x^1(x^1 - 2x^2) - a_{113}x^1x^3 + a_{223}x^3(2x^2 - x^1) - a_{133}(x^3)^2 \\ &\quad + 2a_{124}x^1x^4 + 2a_{234}x^3x^4 = 0, \\ &(x^1 - x^2)(a_{113}x^1 - a_{223}x^2 + 2a_{133}x^3) + 2a_{134}x^1x^4 + 2a_{234}x^2x^4 \\ &\quad + 2a_{334}x^3x^4 + a_{344}(x^4)^2 = 0, \\ &2a_{124}x^1x^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{234}x^2x^3 + a_{334}(x^3)^2 + 2a_{344}x^3x^4 = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставляя сюда уравнения $x^1 = x^2$, $x^4 = 0$ прямой $\ell_3 = A_3, A_1 + A_2$, получим всего 2 уравнения

$$\begin{aligned} &a_{112}(x^1)^2 + (a_{113} - a_{223})x^1x^3 + a_{133}(x^3)^2 = 0, \\ &2a_{124}(x^1)^2 + 2(a_{134} + a_{234})x^1x^3 + a_{334}(x^3)^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В силу условия (3.5) эти уравнения совпадают.

Рассмотрим второй случай более подробно. Прежде всего заметим, что по крайней мере одна из особых точек, определяемых системой (3.7), не лежит

в плоскости π , иначе кубика V распадается на плоскость и квадрику. Поэтому в одну из особых точек можно поместить вершину репера A_3 , тогда (см. свойство 1) будут выполняться соотношения

$$a_{133} = a_{334} = 0. \quad (3.8)$$

Далее рассмотрим отдельно два геометрически различных подслучая.

Подслучай 1: образующая $\tilde{\ell}$ кубики V $a_{112}(x^1 - x^2) + 2a_{124}x^4 = 0$, пересекающая все прямые ℓ_i и лежащая в плоскости π (см. свойство 6), не проходит через точку A_4 . Тогда на нее можно поместить вершины репера A_1 и A_2 , что дает соотношение

$$a_{112} = 0. \quad (3.9)$$

Условие регулярности (3.5) в этом случае дает соотношение $a_{124}(a_{113} - a_{223}) = 0$. Если $a_{124} = 0$, то кубика V распадается. Поэтому получаем соотношение

$$a_{113} - a_{223} = 0. \quad (3.10)$$

Обозначим регулярные ткани, определяемые соотношениями (3.8)–(3.10), через W_{12} .

Подслучай 2: образующая $\tilde{\ell}$ проходит через точку A_4 . Тогда выполняется соотношение

$$a_{124} = 0 \quad (3.11)$$

и уравнение прямой $\tilde{\ell}$ принимает вид $x^1 - x^2 = 0$, т.е. это прямая $A_4, A_1 + A_2$. Таким образом, в рассматриваемом случае через точку A_4 проходят три образующие коники V , лежащие в одной плоскости π . Из условия регулярности (3.5) получаем соотношение

$$a_{134} + a_{234} = 0. \quad (3.12)$$

Обозначим ткани, определяемые соотношениями (3.8), (3.11), (3.12), через W_{13} .

Уравнение (3.3) ткани W_{13} в силу указанных соотношений имеет вид

$$a_{344}\nu^2(\mu - \lambda) + 2\nu a_{134}(\mu - \lambda) + a_{112}\lambda\mu + a_{113}\mu - a_{223}\lambda = 0. \quad (3.13)$$

Это уравнение можно упростить, если выбрать точки A_1 и A_2 (они пока не фиксированы) полярно сопряженными точке A_4 относительно конуса касательных $\Phi_2(A_3)$ к поверхности V в особой точке A_3 . Тогда будет выполняться соотношение

$$a_{134} = 0. \quad (3.14)$$

Ткани W_{12} , для которых выполняется также условие (3.4), обозначим через W'_{12} . Таким образом, ткань W'_{12} определяется соотношениями (3.4), (3.8)–(3.10). Эти ткани характеризуются тем, что на кубике V имеется всего три особые точки: A_4 и две на прямой $\ell_3 - A_3$ и $M(a_{134} + a_{234}, a_{134} + a_{234}, -a_{124}, 0)$. Через W'_{12} обозначим ткани W''_{12} , для которых выполняется еще соотношение (3.12). В этом случае $A_3 \equiv M$ и на прямой ℓ_3 имеется одна двукратная особая точка.

Покажем, что второе условие линеаризации (см. следствие 1) не приводит к новым классам тканей. В самом деле, в этом случае многочлены Q и R (см. выше) должны распадаться на пары прямых с общей точкой пересечения.

Но они могут распадаться только на прямые вида $\lambda = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$, следовательно, если у них центры совпадают, то и прямые совпадают. Отсюда следует, что многочлены Q и R пропорциональны, так что все многочлены P , Q , R принадлежат одному пучку, и мы приходим к рассмотренному случаю (3.5).

Рассмотрим второе условие линеаризации, переписав уравнение (3.3) по степеням переменной μ : $\mu P + Q = 0$, где

$$P = \mu(a_{344}\nu^2 + 2a_{124}\lambda\nu + 2a_{134}\nu + a_{113}),$$

$$Q = -a_{344}\lambda\nu^2 + 2a_{234}\lambda\nu - a_{223}\lambda + a_{334}\nu + a_{133}.$$

Элементарные рассуждения показывают, что эти многочлены могут быть записаны в виде (1.7) только в случае, если $a_{344} = 0$. Пусть далее, в соответствии с условием линеаризации, кривые $P = 0$ и $Q = 0$ распадаются. В силу строения многочленов P и Q , каждый из них будет иметь тогда компоненту вида $a\lambda + b$. Но поскольку у распавшихся кривых должен быть общий центр, то указанные компоненты будут пропорциональны. Отсюда вытекает, что уравнение ткани (3.3), а следовательно, и уравнение кубики V разлагается в произведение двух множителей, и кубика V распадается. То же самое мы получим, записав уравнение ткани (3.3) по степеням λ .

Результаты обобщает следующая

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть V – кубическая поверхность, заданная уравнением (2.1), не распадающаяся на плоскость и квадрику; ℓ_i – 3 прямые на V , причем ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются, а ℓ_3 не пересекает ℓ_1 и ℓ_2 ; W_1 – специальная три-ткань Бурау, определяемая этими прямыми. Выберем проективный репер так, чтобы $\ell_1 = A_1A_4$, $\ell_2 = A_2A_4$, $\ell_3 = A_3$, $A_1 + A_2$, тогда уравнение кубики V примет вид (3.1), а уравнение три-ткани W_1 – вид (3.3). Существует 5 классов регулярных три-тканей вида W_1 : W_{11} , W_{12} , W_{13} , W'_{12} и W''_{12} , выделяемых в выбранном репере соответственно соотношениями (3.4); (3.8)–(3.10); (3.8), (3.11), (3.12) и (3.14); (3.4), (3.8)–(3.10); (3.4), (3.8)–(3.10) и (3.12).

При этом кубика V , несущая ткань W_{11} , характеризуется тем, что точка A_4 пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_2 является особой точкой кубики V ; кубика V , несущая ткань W_{12} или W_{13} , характеризуется тем, что на прямой ℓ_3 существуют 2 особые точки, причем в случае тканей W_{13} через точку пересечения образующих ℓ_1 и ℓ_2 проходит еще одна образующая кубики V , лежащая в той же плоскости, что и прямые ℓ_1 и ℓ_2 ; кубика V , несущая ткань W'_{12} , характеризуется тем, что на ней имеется всего 3 особые точки: A_4 и 2 на прямой ℓ_3 ; кубика V , несущая ткань W''_{12} , характеризуется тем, что на ней имеется всего 2 особые точки: A_4 и двукратная A_3 .

Заметим, что если на ткани W_{12} одна из особых точек, лежащих на прямой ℓ_3 , есть точка $A_1 + A_2 = \ell_3 \cap \pi$, то $a_{124} = 0$ и кубика V распадается.

Найденные 5 классов регулярных специальных три-тканей Бурау вида W_1 , а также перспективно эквивалентные им ткани вида $\widetilde{W}_1$ (см. ниже) будем называть основными классами вида W_1 или соответственно вида $\widetilde{W}_1$. Детальная проективная классификация тканей $\widetilde{W}_1$ будет дана в § 6. В следующих параграфах мы будем придерживаться аналогичных определений и обозначений.

3.2. Основные ткани вида $\widetilde{W}_1$.

2-1. Ткань $\widetilde{W}_{11}$ получается проектированием ткани W_{11} из особой точки A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$. Плоскости, проходящие через прямые $\ell_1 = A_1A_4$ и $\ell_2 = A_2A_4$, спроектируются в пучки прямых с вершинами A_1 и A_2 (семейства $\widetilde{\lambda}_1$ и $\widetilde{\lambda}_2$ соответственно). Уравнение кубики V в рассматриваемом случае имеет вид $(x^1 - x^2)\widetilde{\Phi}_2(A_4) + x^4\Phi_2(A_4) = 0$, или

$$(x^1 - x^2)(a_{112}x^1x^2 + a_{113}x^1x^3 - a_{223}x^2x^3 + a_{133}(x^3)^2) + x^4(2a_{124}x^1x^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{234}x^2x^3 + a_{334}(x^3)^2) = 0. \quad (3.15)$$

Уравнение третьего семейства ткани $\widetilde{W}_{11}$ получим, исключая переменную x^4 из уравнения (3.15) и третьего уравнения (3.2):

$$a_{112}x^1x^2 + a_{113}x^1x^3 - a_{223}x^2x^3 + a_{133}(x^3)^2 + \nu(2a_{124}x^1x^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{234}x^2x^3 + a_{334}(x^3)^2) = 0.$$

Как видно, семейство $\widetilde{\lambda}_3$ ткани $\widetilde{W}_{11}$ есть пучок коник с базисными кониками $\widetilde{\Phi}_2(A_4) = 0$ и $\Phi_2(A_4) = 0$, которые пересекаются в точках A_1 , A_2 , $\widetilde{m}_3$ и $\widetilde{m}_4$, соответствующих общим образующим конусов $\widetilde{\Phi}_2(A_4)$ и $\Phi_2(A_4)$ (см. свойство 7). Таким образом, ткань $\widetilde{W}_{11}$ образована пучком коник, имеющих по крайней мере 2 вещественные вершины A_1 и A_2 , и двумя пучками прямых с вершинами в этих точках.

2-2. Ткань $\widetilde{W}_{12}$ получим проектированием ткани W_{12} из особой точки A_3 на плоскость $\pi = A_1A_2A_4$. В силу соотношений (3.8)–(3.10) уравнение (3.1) кубики V примет вид $x^3\Phi_2(A_3) + \Phi_3(A_3) = 0$, или

$$x^3(a_{113}(x^1 - x^2)^2 + 2a_{134}x^1x^4 + 2a_{234}x^2x^4 + a_{344}(x^4)^2) + 2a_{124}x^1x^2x^4 = 0. \quad (3.16)$$

Исключая отсюда переменную x^3 с помощью первого или второго уравнений (3.2), найдем уравнения первых двух семейств ткани $\widetilde{W}_{12}$:

$$\lambda_1: \Phi_2(A_3) + 2\lambda a_{124}x^2x^4 = 0, \quad \lambda_2: \Phi_2(A_3) + 2\mu a_{124}x^1x^4 = 0. \quad (3.17)$$

Семейство $\widetilde{\lambda}_3$ получается проектированием пучка плоскостей, проходящих через прямую $A_3, A_1 + A_2$, из точки A_3 на плоскость, содержащую точку $A_1 + A_2$. Следовательно, $\widetilde{\lambda}_3$ есть пучок прямых с вершиной $A_1 + A_2$.

Как видно, первое семейство есть пучок коник с базисом $\Phi_2(A_3) = 0$ и $x^2x^4 = 0$, второе – пучок коник с базисом $\Phi_2(A_3) = 0$ и $x^1x^4 = 0$. Вершины первого пучка: $A_1 + A_2$ (двукратная) и точки пересечения коники $\Phi_2(A_3) = 0$ с прямой $x^2 = 0$, обозначим их $\widetilde{m}_3$, $\widetilde{m}_4$. Следовательно, семейство $\widetilde{\lambda}_1$ есть параболический пучок коник (P -пучок) с вершинами $\widetilde{m}_3$, $\widetilde{m}_4$ и двукратной вершиной $A_1 + A_2$.

Аналогично получаем, что семейство $\widetilde{\lambda}_2$ линий ткани $\widetilde{W}_{12}$ есть также P -пучок коник с двукратной вершиной $A_1 + A_2$ и простыми вершинами $\widetilde{m}_1$, $\widetilde{m}_2$. Коники обоих пучков имеют в точке $A_1 + A_2$ общую касательную A_1A_2 (рис. 2).

Легко проверяется, что уравнение $\Phi_2(A_3) = 0$ задает произвольную конику плоскости, проходящую через точку $A_1 + A_2$ и касающуюся в этой точке

Рис. 2

прямой A_1A_2 . Таким образом, описанные выше свойства полностью характеризуют ткань $\widetilde{W}_{12}$.

Замечание: на прямой ℓ_3 есть еще одна, помимо A_3 , особая точка S , координаты которой (с учетом соотношения (3.4)) находим из второго уравнения (3.7): $S(a_{134} + a_{234}, a_{134} + a_{234}, -a_{124}, 0)$. Можно показать, что три-ткань, полученная проектированием ткани W_{12} из особой точки S , будет проективно эквивалентна ткани $\widetilde{W}_{12}$.

2-3. Обозначим через $\widetilde{W}'_{12}$ три-ткань, которая получается проектированием ткани W'_{12} из особой точки A_3 на плоскость $A_1A_2A_4$. Семейства линий этой ткани будут такими же, как в предыдущем пункте, но с учетом соотношения (3.4). В силу последнего коники обоих пучков λ_1 и λ_2 проходят через точку A_4 . Это свойство характеризует ткань $\widetilde{W}'_{12}$.

2-4. При проектировании ткани W'_{12} из особой точки A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$ получится ткань $\widetilde{W}_{11}$, образованная пучком коник, имеющих по крайней мере 2 вещественные вершины A_1 и A_2 , и двумя пучками прямых с вершинами в этих точках.

2-5. Рассмотрим ткань $\widetilde{W}$, которая получается проектированием W'_{12} из особой точки $M(a_{134} + a_{234}, a_{134} + a_{234}, -a_{124}, 0)$ на плоскость $A_1A_2A_4$. Перейдем к новому проективному реперу $\{A_1, A_2, \tilde{A}_3 \equiv M, A_4\}$, тогда координаты преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} x^1 &= \tilde{x}^1 + (a_{134} + a_{234})\tilde{x}^3, & x^2 &= \tilde{x}^2 + (a_{134} + a_{234})\tilde{x}^3, \\ x^3 &= -a_{124}\tilde{x}^3, & x^4 &= \tilde{x}^4. \end{aligned}$$

В новых координатах уравнения первых двух семейств ткани $\widetilde{W}$ имеют вид

$$\begin{aligned} a_{113}(\tilde{x}^1 - \tilde{x}^2)^2 + 2a_{134}\tilde{x}^4(\tilde{x}^1 - \tilde{x}^2) + 2\lambda a_{124}\tilde{x}^1\tilde{x}^4 &= 0, \\ a_{113}(\tilde{x}^1 - \tilde{x}^2)^2 + 2a_{234}\tilde{x}^4(\tilde{x}^2 - \tilde{x}^1) + 2\mu a_{124}\tilde{x}^2\tilde{x}^4 &= 0, \end{aligned}$$

а семейство $\tilde{\lambda}_3$ есть пучок прямых с вершиной $A_1 + A_2$.

Как и в случае 2-4, первые два семейства линий ткани $\widetilde{W}$ есть параболические пучки коник с общей двукратной вершиной $A_1 + A_2$ и коники обоих пучков проходят через точку A_4 . Следовательно, $\widetilde{W} \equiv \widetilde{W}'_{12}$.

Отметим, что для тканей $\widetilde{W}''_{12}$ (добавляется условие (3.12)) получаются те же типы тканей $\widetilde{W}_1$, что и для тканей $\widetilde{W}'_{12}$.

2-6. Ткань $\widetilde{W}_{13}$ получается проектированием ткани W_{13} из особой точки A_3 на плоскость $A_1A_2A_4$. В силу соотношений (3.8), (3.11) и (3.12) уравнение (3.1) кубики V примет вид

$$x^3\widetilde{\Phi}_2(A_3) + a_{112}x^1x^2(x^1 - x^2) = 0, \quad (3.18)$$

где конус $\widetilde{\Phi}_2(A_3)$ определяется уравнением

$$(x^1 - x^2)(a_{113}x^1 - a_{223}x^2 + 2a_{134}x^4) + a_{344}(x^4)^2 = 0. \quad (3.19)$$

Конус $\widetilde{\Phi}_2(A_3)$ – произвольный конус с вершиной A_3 , который содержит прямую $\ell_3 = A_3, A_1 + A_2$, и касательная плоскость к нему вдоль этой образующей проходит через точку A_4 . Ткань $\widetilde{W}_{13}$, как и ткань $\widetilde{W}_{12}$, состоит из двух параболических пучков коник с общей касательной $A_1 + A_2, A_4$ в общей двукратной вершине $A_1 + A_2$ и пучка прямых с вершиной в этой точке. Пучки коник имеют общую базисную конику $\widetilde{\Phi}_2(A_3)$. Отличие от тканей $\widetilde{W}_{12}$ в том, что прямые $\ell_1 = A_1A_4$ и $\ell_2 = A_2A_4$ пересекаются с общей касательной коник пучков в точке A_4 .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если проектировать три-ткань W_{13} из особой точки S , то снова получим ткань типа $\widetilde{W}_{13}$.

Итак, всего имеется 4 основных класса регулярных тканей вида $\widetilde{W}_1$: это ткани $\widetilde{W}_{11}, \widetilde{W}_{12}, \widetilde{W}'_{12}$ и $\widetilde{W}_{13}$.

§ 4. Регулярные специальные три-ткани Бурау вида W_2 и перспективно эквивалентные им ткани вида $\widetilde{W}_2$.

Случай 2: образующая ℓ_2 пересекает ℓ_1 и ℓ_3

4.1. Основные ткани вида W_2 . Выберем репер следующим образом: $\ell_1 = A_3A_1$, $\ell_2 = A_1A_2$, $\ell_3 = A_2A_4$. Уравнение (2.1) кубики V , на которой лежат прямые ℓ_i , имеет вид

$$\begin{aligned} & a_{114}(x^1)^2x^4 + 2a_{123}x^1x^2x^3 + 2a_{124}x^1x^2x^4 \\ & + 2a_{134}x^1x^3x^4 + a_{144}x^1(x^4)^2 + a_{223}(x^2)^2x^3 \\ & + a_{233}x^2(x^3)^2 + 2a_{234}x^2x^3x^4 + a_{334}(x^3)^2x^4 + a_{344}x^3(x^4)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Пучки плоскостей L_i зададим уравнениями

$$L_1 : x^2 = \lambda x^4; \quad L_2 : x^3 = \mu x^4; \quad L_3 : x^1 = \nu x^3.$$

Исключая переменные x^α из уравнений кубики и пучков плоскостей L_i , найдем уравнение ткани Бурау W_2

$$\begin{aligned} & a_{114}\mu\nu^2 + \nu(2a_{123}\lambda\mu + 2a_{124}\lambda + 2a_{134}\mu + a_{144}) \\ & + a_{223}\lambda^2 + a_{233}\lambda\mu + 2a_{234}\lambda + a_{334}\mu + a_{344} = 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Это уравнение линейно относительно μ . Первое условие линеаризации по ν (см. следствие из теоремы 1.2) дает условие

$$\text{rank} \begin{pmatrix} a_{223} & a_{233} & 2a_{234} & a_{334} & a_{344} \\ 0 & 2a_{123} & 2a_{124} & 2a_{134} & a_{144} \\ 0 & 0 & 0 & a_{114} & 0 \end{pmatrix} = 2. \quad (4.3)$$

Переписав уравнение (4.2) в виде $\lambda^2 P + \lambda Q + R = 0$, найдем аналогичное условие линеаризации по λ

$$\text{rank} \begin{pmatrix} a_{114} & 2a_{134} & a_{334} & a_{144} & a_{344} \\ 0 & 2a_{123} & a_{233} & 2a_{124} & 2a_{234} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{223} \end{pmatrix} = 2. \quad (4.4)$$

Отсюда, исключая случаи распада кубики V , находим условия регулярности.

1) Ткань W_{21} :

$$a_{223} = a_{114} = 0. \quad (4.5)$$

2) Пусть, например,

$$a_{223} = 0, \quad a_{114} \neq 0. \quad (4.6)$$

(В симметричном случае $a_{223} \neq 0$, $a_{114} = 0$ геометрия аналогична, поэтому он не рассматривается.)

В силу (4.6) условие (4.4) выполняется, а условие (4.3) дает следующие варианты:

2.1) ткань W_{22} :

$$\frac{a_{234}}{a_{124}} = \frac{a_{344}}{a_{144}} = \frac{a_{233}}{2a_{123}} \equiv s; \quad (4.7)$$

2.2) ткань W_{25} :

$$a_{124} = a_{144} = a_{123} = 0; \quad (4.8)$$

2.3) ткань W_{26} :

$$a_{124} = a_{234} = 0, \quad \frac{a_{344}}{a_{144}} = \frac{a_{233}}{2a_{123}} \equiv s; \quad (4.9)$$

2.4) ткань W_{27} :

$$a_{124} = a_{234} = 0, \quad a_{144} = a_{123} = 0; \quad (4.10)$$

2.5) ткань W_{28} :

$$a_{144} = a_{344} = 0, \quad \frac{a_{234}}{a_{124}} = \frac{a_{233}}{2a_{123}} \equiv s; \quad (4.11)$$

2.6) ткань W_{29} :

$$a_{144} = a_{344} = 0, \quad a_{123} = a_{124} = 0. \quad (4.12)$$

3) Пусть теперь

$$a_{223} \neq 0, \quad a_{114} \neq 0. \quad (4.13)$$

Тогда условия (4.3) и (4.4) дадут соотношения

$$a_{123} = 0, \quad a_{233} = 0, \quad a_{124} = 0, \quad a_{144} = 0. \quad (4.14)$$

Обозначим соответствующую регулярную ткань через W_{23} .

Теперь используем второе условие линеаризации (см. следствие 1) для нахождения классов регулярных тканей. Пусть уравнение ткани записано в виде (4.2). Согласно указанному условию, ткань является регулярной, если уравнения $P \equiv a_{114}\mu = 0$, $Q \equiv 2a_{123}\lambda\mu + 2a_{124}\lambda + 2a_{134}\mu + a_{144} = 0$, $R \equiv a_{223}\lambda^2 + a_{233}\lambda\mu + 2a_{234}\lambda + a_{334}\mu + a_{344} = 0$ определяют три вырожденные кривые второго порядка с общим центром. Если $a_{114} \neq 0$, то кривая $P = 0$ распадается на прямые $\mu = 0$ и ℓ_∞ . Следовательно, центр кривой лежит на ℓ_∞ и две другие кривые $Q = 0$ и $R = 0$ должны распадаться только на линии вида $\mu = \text{const}$. Это дает $a_{123} = 0$, $a_{124} = 0$, $a_{223} = 0$, $a_{233} = 0$, $a_{234} = 0$, и тогда кубика (4.1) распадается.

Если $a_{114} = 0$, то каждая из кривых $Q = 0$ и $R = 0$ в случае распадаения содержит множитель вида $a\lambda + b = 0$. Но поскольку центры этих кривых должны совпадать, то такие множители должны быть пропорциональны. Отсюда вытекает, что левая часть уравнения (4.2), а следовательно, и уравнения (4.1), разлагается на множители, и кубика V распадается.

Теперь перепишем уравнение (4.2) по степеням λ :

$$\begin{aligned} a_{223}\lambda^2 + \lambda(2a_{123}\mu\nu + 2a_{124}\nu + a_{233}\mu + 2a_{234}) \\ + a_{114}\mu\nu^2 + 2a_{134}\mu\nu + a_{144}\nu + a_{334}\mu + a_{344} = 0, \end{aligned}$$

и снова применим второе условие линеаризации. Здесь $P = a_{223}$ – многочлен нулевой степени, пусть это U (см. (1.7)), а $Q = 2a_{123}\mu\nu + 2a_{124}\nu + a_{233}\mu + 2a_{234}$ – многочлен второй степени, пусть это V . Тогда многочлен $R = a_{114}\mu\nu^2 + 2a_{134}\mu\nu + a_{144}\nu + a_{334}\mu + a_{344}$ должен выражаться через U и V по формуле (1.7), что возможно только в случае, если $a_{114} = 0$ и многочлены Q и R принадлежат одному пучку. Но тогда мы приходим к первому условию линеаризации.

Наконец, перепишем уравнение (4.2) в виде $\mu Q + R = 0$, где

$$\begin{aligned} Q &\equiv a_{114}\nu^2 + 2a_{123}\lambda\nu + 2a_{134}\nu + a_{233}\lambda + a_{334} = 0, \\ R &\equiv a_{223}\lambda^2 + 2a_{124}\lambda\nu + 2a_{234}\lambda + a_{144}\nu + a_{344} = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Согласно второму условию линеаризации ткань будет регулярной, если коники $Q = 0$ и $R = 0$ представляют собой пары прямых с общей точкой пересечения. Это приводит к следующим условиям:

$$\begin{aligned} a_{233} &= -2aa_{123}, & a_{144} &= -2ba_{124}, \\ a_{134} &= -aa_{114} - ba_{123}, & a_{234} &= -ba_{223} - aa_{124}, \\ a_{334} &= a^2a_{114} + 2aba_{123}, & a_{344} &= b^2a_{223} + 2aba_{124}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Обозначим соответствующую регулярную ткань через W_{24} .

4.2. Характеристика кубик, несущих регулярные ткани вида W_2 , в терминах сингулярностей.

2-1. Кубические поверхности, несущие ткань W_{21} , характеризуются тем, что точки A_1 и A_2 , в которых пересекаются прямые ℓ_i , являются особыми. Легко проверить, что эти особые точки являются, вообще говоря, коническими узлами.

2-2. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Кубика V , несущая ткань W_{22} , имеет две особые точки на прямой ℓ_3 , одна из которых – точка A_2 – является бипланарным узлом. Касательные плоскости π_1 и π_2 , на которые распадается конус касательных в точке A_2 , обладают следующим свойством: одна из них содержит прямую ℓ_2 , другая – прямую ℓ_3 . Указанные свойства в совокупности являются характеристическими.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точка A_2 является особой в силу соотношения (4.6) и свойства 1. Чтобы найти остальные особые точки, рассмотрим систему, определяющую особые точки кубики (4.1):

$$\begin{aligned} 2a_{114}x^1x^4 + 2a_{123}x^2x^3 + 2a_{124}x^2x^4 + 2a_{134}x^3x^4 + a_{144}(x^4)^2 &= 0, \\ 2a_{123}x^1x^3 + 2a_{124}x^1x^4 + 2a_{223}x^2x^3 + a_{233}(x^3)^2 + 2a_{234}x^3x^4 &= 0, \\ 2a_{123}x^1x^2 + 2a_{134}x^1x^4 + a_{223}(x^2)^2 + 2a_{233}x^2x^3 + 2a_{234}x^2x^4 & \\ + 2a_{334}x^3x^4 + a_{344}(x^4)^2 &= 0, \\ a_{114}(x^1)^2 + 2a_{124}x^1x^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{144}x^1x^4 + 2a_{234}x^2x^3 & \\ + a_{334}(x^3)^2 + 2a_{344}x^3x^4 &= 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Полагая $x^1 = x^3 = 0$, получим уравнения на координаты особых точек, лежащих на прямой $\ell_3 = A_2A_4$. С учетом (4.6) и (4.7) получим единственное уравнение $2a_{124}x^2x^4 + a_{144}(x^4)^2 = 0$. Если $x^4 = 0$, то получаем точку A_2 ; в случае $2a_{124}x^2 + a_{144}x^4 = 0$ получаем еще одну особую точку. Заметим, что $a_{124} \neq 0$, иначе из (4.7) получается $a_{234} = 0$ и мы приходим к тканям W_{26} . Следовательно, вторая особая точка отлична от A_2 . Поместив в нее вершину репера A_4 , в силу свойства 1 получим $a_{144} = a_{344} = 0$, и соотношения (4.7) перейдут в соотношения (4.11), определяющие ткани W_{28} . Таким образом, ткань W_{28} геометрически эквивалентна ткани W_{22} , они различаются аналитически из-за различного положения точки A_3 .

В результате проведенной канонизации уравнение кубики V примет вид $\Phi_3(A_4) + x^2\Phi_2(A_2) = 0$, где

$$\begin{aligned} \Phi_2(A_2) &= 2(x^1 + sx^3)(a_{123}x^3 + a_{124}x^4), \\ \Phi_3(A_4) &= x^4(a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + a_{334}(x^3)^2). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Как видно, конус касательных $\Phi_2(A_2)$ распадается на две плоскости: π_1 ($x^1 + sx^3 = 0$) и π_2 ($a_{123}x^3 + a_{124}x^4 = 0$). Первая из них содержит прямую ℓ_3 , вторая – ℓ_2 .

Осталось показать, что других особых точек на кубике V нет. Прежде проведем дальнейшую специализацию репера: поместим вершину репера A_3 в точку

пересечения прямой ℓ_1 с плоскостью π_1 . Тогда $s = 0$ и соотношения (4.6) и (4.7), определяющие рассматриваемую ткань W_{22} , принимают следующий простой вид:

$$a_{223} = a_{144} = a_{233} = a_{234} = a_{344} = 0. \quad (4.7')$$

Теперь легко проверить, что других особых точек, кроме найденных A_2 и A_4 на кубике V нет.

Обратно, пусть поверхность V задана уравнением (4.1), и на прямой ℓ_3 имеются две вещественные особые точки, причем одна из них – точка A_2 – является бипланарным узлом. Поместим во вторую точку вершину A_4 репера, тогда по свойству 1 получим $a_{223} = a_{144} = a_{344} = 0$. При этих условиях

$$\Phi_2(A_2) = 2a_{123}x^1x^3 + 2a_{124}x^1x^4 + a_{233}(x^3)^2 + 2a_{234}x^3x^4.$$

Пусть особая точка A_2 является бипланарным узлом, тогда конус $\Phi_2(A_2)$ распадается, что дает соотношение

$$a_{124}(a_{124}a_{233} - 2a_{123}a_{234}) = 0.$$

Если $a_{124} = 0$, то конус Φ_2 распадается на две плоскости, одна из которых ($x^3 = 0$) содержит прямую ℓ_2 , а другая не содержит, вообще говоря, прямых ℓ_2 и ℓ_3 .

Если равен нулю второй сомножитель, то получаем соотношение (4.6), а конус $\Phi_2(A_2)$ распадается на две плоскости, одна из которых содержит прямую ℓ_2 , другая – прямую ℓ_3 .

2-3. В силу соотношений (4.14), характеризующих ткани W_{23} , система (4.17), определяющая особые точки кубики V , примет вид

$$\begin{aligned} (a_{114}x^1 + a_{134}x^3)x^4 &= 0, & (a_{223}x^2 + a_{234}x^4)x^3 &= 0, \\ a_{134}x^1x^4 + a_{223}(x^2)^2 + 2a_{234}x^2x^4 + 2a_{334}x^3x^4 + a_{344}(x^4)^2 &= 0, \\ a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{234}x^2x^3 + a_{334}(x^3)^2 + 2a_{344}x^3x^4 &= 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет 4 решения: две особые точки на ℓ_3 , определяемые уравнением $a_{223}(x^2)^2 + 2a_{234}x^2x^4 + a_{344}(x^4)^2 = 0$, и две особые точки на прямой ℓ_1 , определяемые уравнением $a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + a_{334}(x^3)^2 = 0$. При этом в силу неравенств (4.17) ни одна из этих точек не совпадает с точками A_1 и A_2 . Простыми вычислениями проверяется, что это свойство характеризует рассматриваемый случай.

Поместив вершины репера A_3 и A_4 в особые точки, получим соотношения $a_{334} = a_{344} = 0$. Таким образом, в построенном каноническом репере ткань W_{23} выделяется соотношениями

$$a_{123} = a_{124} = a_{144} = a_{233} = a_{334} = a_{344} = 0. \quad (4.14')$$

2-4. В силу соотношений (4.16), характеризующих ткани W_{24} , уравнение кубики V примет вид

$$a_{114}x^4(x^1 - ax^3)^2 + a_{223}x^3(x^2 - bx^4)^2 + 2(a_{123}x^3 + a_{124}x^4)(x^1 - ax^3)(x^2 - bx^4) = 0. \quad (4.19)$$

Как видно, прямая $x^1 - ax^3 = 0$, $x^2 - bx^4 = 0$ лежит на кубике V и все ее точки являются особыми. Она пересекает прямые ℓ_1 и ℓ_3 , но не проходит через точки A_1 и A_2 . Поэтому на нее можно поместить вершины A_3 и A_4 репера. Тогда ее уравнения примут вид $x^1 = x^2 = 0$, т.е. получаем $a = b = 0$, в результате чего соотношения (4.16) принимают простой вид

$$a_{134} = 0, \quad a_{233} = 0, \quad a_{334} = 0, \quad a_{234} = 0, \quad a_{144} = 0, \quad a_{344} = 0. \quad (4.16')$$

Обратно, пусть на кубике V существует прямая m из особых точек, пересекающая прямые ℓ_1 и ℓ_3 , но не содержащая точки A_1 и A_2 . Положим $A_3 \equiv \ell_1 \cap m$, $A_4 \equiv \ell_3 \cap m$, тогда уравнения $x^1 = x^2 = 0$ должны обращать в тождества все равенства системы (4.17), определяющей особые точки. Полагая в (4.17) $x^1 = x^2 = 0$, получим тождества $2a_{134}x^3x^4 + a_{144}(x^4)^2 \equiv 0$, $a_{233}(x^3)^2 + 2a_{234}x^3x^4 \equiv 0$, $a_{334}x^3x^4 \equiv 0$, $a_{334}(x^3)^2 \equiv 0$, откуда и следуют равенства (4.16').

Таким образом существование прямой из особых точек является характеристическим свойством поверхности V , несущей специальную ткань Бурау W_{24} .

2-5. Анализируя систему (4.17) при условиях (4.6) и (4.8), определяющих ткани W_{25} , найдем, что на V имеются две особые точки: $B(0, a_{344}, 0, -2a_{124})$ и A_2 , лежащие на ℓ_3 . В этом случае конус касательных в точке A_2 имеет вид $\Phi_2(A_2) = x^3(a_{233}x^3 + 2a_{234}x^4)$, т.е. точка A_2 – бипланарный узел. При этом, в отличие от тканей W_{22} , плоскость π_1 ($x^3 = 0$) содержит прямые ℓ_2 и ℓ_3 , а плоскость π_2 ($a_{233}x^3 + 2a_{234}x^4 = 0$) содержит прямую ℓ_2 .

Так же, как в п. 2-2, проверяется, что последние свойства являются характеристическими.

Поместив в особую точку B вершину A_4 репера, получим $a_{344} = 0$. В таком репере ткань W_{25} будет определяться соотношениями

$$a_{223} = a_{124} = a_{144} = a_{123} = a_{344} = 0. \quad (4.8')$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (4.12), следовательно классы W_{25} и W_{29} совпадают.

Выделим некоторые специальные случаи.

2-5-1. Ткани W_{25}^1 : к условиям (4.8') добавляется соотношение

$$a_{234} = 0. \quad (4.20)$$

Оно означает, что особая точка A_2 является унипланарным узлом.

2-5-2. Ткани W_{25}^2 : к условиям (4.8') добавляется соотношение

$$a_{114}a_{334} - a_{134}^2 = 0. \quad (4.21)$$

Оно означает, что кубика V имеет еще одну сингулярную точку $P(2a_{134}a_{234}, 0, -2a_{114}a_{234}, a_{114}a_{233})$.

2-5-3. Ткани W_{25}^3 : к условиям (4.8') добавляются соотношения (4.20) и (4.21).

2-6. При условиях (4.6) и (4.9), определяющих ткани W_{26} , система (4.17) принимает вид

$$\begin{aligned} 2a_{114}x^1x^4 + 2a_{123}x^2x^3 + 2a_{134}x^3x^4 + a_{144}(x^4)^2 &= 0, \\ 2a_{123}x^1x^3 + 2sa_{123}(x^3)^2 &= 0, \\ 2a_{123}x^1x^2 + 2a_{134}x^1x^4 + 2sa_{123}x^2x^3 + 2a_{334}x^3x^4 + sa_{144}(x^4)^2 &= 0, \\ a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{144}x^1x^4 + a_{334}(x^3)^2 + 2sa_{144}x^3x^4 &= 0. \end{aligned}$$

Так как $a_{123} \neq 0$, то из второго уравнения следует, что либо $x^3 = 0$, либо $x^1 + sx^3 = 0$. Если $x^3 = 0$, то из первого и последнего уравнений находим

$$(2a_{114}x^1 + a_{144}x^4)x^4 = 0, \quad (a_{114}x^1 + 2a_{144}x^4)x^1 = 0.$$

Так как $a_{114}a_{144} \neq 0$, то отсюда следует $x^1 = x^4 = 0$, т.е. получаем точку A_2 .

Если $x^1 + sx^3 = 0$, но $x^3 \neq 0$, то из последнего уравнения системы получаем соотношение $a_{114}s^2 - 2a_{134}s + a_{334} = 0$. В силу последнего соотношения кубика V распадается на плоскость $x^1 + sx^3 = 0$ и квадрику. Следовательно, других особых точек, кроме точки A_2 , нет.

В рассматриваемом случае конус касательных в особой точке A_2 имеет вид $\Phi_2(A_2) = 2a_{123}x^3(x^1 + sx^3)$, т.е. точка A_2 – бипланарный узел. Плоскость π_1 ($x^3 = 0$) содержит прямые ℓ_2 и ℓ_3 , а плоскость π_2 ($x^1 + sx^3 = 0$) содержит прямую ℓ_3 . Непосредственно проверяется, что перечисленные свойства являются характеристическими.

В случае тканей W_{26} репер можно специализировать, положив $A_3 = \pi_2 \cap \ell_1$. Тогда $s = 0$ и соотношения, выделяющие ткани W_{26} , примут вид

$$a_{223} = a_{124} = a_{234} = a_{233} = a_{344} = 0. \quad (4.9')$$

2-7. Анализируя систему (4.17) при условиях (4.6) и (4.10), определяющих ткани W_{27} , находим, что поверхность V в этом случае имеет только одну особую точку A_2 . Так как $\Phi_2(A_2) = a_{233}(x^3)^2$, то точка A_2 – унипланарный узел, причем $\pi_1 \equiv \pi_2 \ni \ell_2, \ell_3$.

Обратно, пусть кубика, определяемая уравнением (4.1), имеет унипланарный узел A_2 и $\pi_1 \equiv \pi_2 \ni \ell_2, \ell_3$. Тогда $\Phi_2(A_2) = a_{233}(x^3)^2$, что дает соотношения $a_{223} = a_{123} = a_{124} = a_{234} = 0$. В силу этих соотношений уравнение ткани (4.2) после замены параметра $1/\mu \rightarrow \mu$ принимает вид

$$a_{114}(\nu)^2 + 2a_{134}\nu + a_{233}\lambda + a_{334} + \mu(a_{144}\nu + a_{344}) = 0.$$

Используя условия линеаризации, находим условие регулярности: $a_{144} = 0$, что вместе с полученными выше соотношениями дает условия (4.10), определяющие ткани W_{27} .

Доказана

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть V – кубическая поверхность, не распадающаяся на плоскость и квадрику, на которой лежат прямые $\ell_1 = A_3A_1$, $\ell_2 = A_1A_2$, $\ell_3 = A_2A_4$. Специальная три-ткань Бурау W_2 , определяемая прямыми ℓ_i , будет регулярной тогда и только тогда (с точностью до геометрически симметричных случаев), когда кубика V имеет следующие особенности:

- точки A_1 и A_2 являются особыми точками кубики V (основной класс W_{21});
- на прямой ℓ_3 имеется две особые точки, причем одна из них – A_2 – является бипланарным узлом со следующим свойством: одна из плоскостей, на которые распадается конус касательных в A_2 , содержит прямую ℓ_2 , а другая – прямую ℓ_3 (основной класс W_{22});
- на каждой из прямых ℓ_1 и ℓ_3 имеется две особые точки, не совпадающие с точками A_1 и A_2 (основной класс W_{23});
- на V существует прямая из особых точек, пересекающая прямые ℓ_1 и ℓ_3 , но не проходящая через точки A_1 и A_2 (основной класс W_{24});
- на прямой ℓ_3 имеется две особые точки, причем точка A_2 является планарным узлом; кроме того, одна из плоскостей, на которые распадается конус касательных в A_2 , содержит прямые ℓ_2 и ℓ_3 , а другая – прямую ℓ_2 (основной класс W_{25});
- на прямой ℓ_3 имеется один бипланарный узел A_2 , причем одна из плоскостей, на которые распадается конус касательных в A_2 , содержит прямые ℓ_2 и ℓ_3 , а другая – прямую ℓ_3 (основной класс W_{26});
- на прямой ℓ_3 имеется один унипланарный узел A_2 , который содержит прямые ℓ_2 и ℓ_3 (основной класс W_{27}).

4.3. Основные ткани вида $\widetilde{W}_2$.

3-1. Ткань $\widetilde{W}_{21}$ получается проектированием ткани W_{21} из одной из сингулярных точек A_1 или A_2 . Оба случая геометрически эквивалентны. Непосредственно проверяется, что ткань $\widetilde{W}_{21}$ совпадает с тканью $\widetilde{W}_{11}$, рассмотренной в предыдущем параграфе.

3-2. Ткань $\widetilde{W}'_{22}$ получается проектированием ткани W_{22} из бипланарного узла A_2 на плоскость $\pi = A_1A_3A_4$. Пусть соотношения, выделяющие три-ткань W_{22} , записаны в виде (4.7'). Тогда (см. (4.18))

$$\begin{aligned}\Phi_2(A_2) &= 2x^1(a_{123}x^3 + a_{124}x^4) \equiv 2x^1T_1, \\ \Phi_3(A_2) &= x^4(a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + a_{334}(x^3)^2) \equiv x^4\widetilde{\Phi}_2(A_2).\end{aligned}\tag{4.18'}$$

Пучок $\widetilde{\lambda}_1$ задается уравнением

$$2\lambda T_1x^1 + \widetilde{\Phi}_2(A_2) = 0.\tag{4.22}$$

В него входят две вырожденные коники: $T_1x^1 = 0$ и $\widetilde{\Phi}_2(A_2) = 0$, которые пересекаются в двойной точке A_4 и точках $\widetilde{m}_1$ и $\widetilde{m}_2$ ($T_1 = 0$, $\widetilde{\Phi}_2(A_2) = 0$). Таким образом, $\widetilde{\lambda}_1$ есть P -пучок коник с простыми вершинами $\widetilde{m}_1$, $\widetilde{m}_2$ и двукратной вершиной A_4 . Так как точка A_4 – двойная, то все коники пучка имеют в этой точке общую касательную A_3A_4 ($x^1 = 0$). Семейство $\widetilde{\lambda}_2$ линий ткани $\widetilde{W}'_{22}$ представляет собой пучок прямых с вершиной A_1 , семейство $\widetilde{\lambda}_3$ – пучок прямых с вершиной A_4 .

Рис. 3

Рис. 4

3-3. Ткань $\widetilde{W}_{22}''$ получается проектированием ткани W_{22} из конического узла A_4 на плоскость $\pi = A_1A_2A_3$. Запишем уравнение кубики V (с учетом соотношений (4.7')) в виде $\Phi_3(A_4) + x^4\Phi_2(A_4) = 0$, где

$$\Phi_2(A_4) = a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + a_{334}(x^3)^2 + 2a_{124}x^1x^2, \quad \Phi_3(A_4) = 2a_{123}x^1x^2x^3. \quad (4.23)$$

Уравнение пучка $\widetilde{\lambda}_1$ имеет вид

$$\Phi_2(A_4) + 2\lambda a_{123}x^1x^3 = 0. \quad (4.24)$$

Прямая A_2A_3 ($x^1 = 0$) касается коники $\Phi_2(A_4)$ в точке A_2 ; прямая $x^3 = 0$ пересекают конику $\Phi_2(A_4)$ в точках A_2 и $\widetilde{m}_3$ ($x^3 = 0$, $a_{114}x^1 + 2a_{124}x^2 = 0$). Так как точка A_2 – тройная, то $\widetilde{\lambda}_1$ – SP -пучок коник с тройной вершиной A_2 и простой вершиной $\widetilde{m}_3$. Все коники этого пучка имеют в точке A_2 общую касательную A_2A_3 (рис. 3).

Уравнение пучка $\tilde{\lambda}_2$ имеет вид

$$\Phi_2(A_4) + 2\mu a_{123}x^1x^2 = 0. \quad (4.25)$$

Все коники этого пучка также проходят через точку A_2 и имеют в ней общую касательную A_2A_3 . Кроме того, они проходят через точки $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ ($x^2 = 0$, $\Phi_2(A_4) = 0$). Следовательно, $\tilde{\lambda}_2$ – P -пучок коник с простыми вершинами $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ и двукратной вершиной A_2 .

Семейство $\tilde{\lambda}_3$ ткани $\tilde{W}_{22}''$ есть пучок прямых с вершиной A_2 .

3-4. В случае тканей W_{23} все 4 особые точки кубики V равноправны. Обозначим через $\tilde{W}_{23}$ ткань, которая получается проектированием ткани W_{23} , например, из конического узла A_4 на плоскость $\pi = A_1A_2A_3$. Запишем уравнение (4.1) кубики V в виде $\Phi_3(A_4) + x^4\Phi_2(A_4) = 0$, где в силу соотношений (4.14')

$$\Phi_2(A_4) = a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{234}x^2x^3, \quad \Phi_3(A_4) = a_{223}(x^2)^2x^3.$$

Семейство $\tilde{\lambda}_1$ задается уравнением $\Phi_2(A_4) + \lambda a_{223}x^2x^3 = 0$ и состоит из коник, проходящих через точки A_2 , A_3 и $\tilde{m}_2$, причем в точке A_2 у них общая касательная $\ell_2 = A_2A_1$. Следовательно, $\tilde{\lambda}_1$ – PE -пучок коник с двойной вершиной A_2 (рис. 4).

Семейство $\tilde{\lambda}_2$ задается уравнением $\Phi_2(A_4) + \mu a_{223}(x^2)^2 = 0$ и состоит из коник, проходящих через точки A_3 и $\tilde{m}_2$, причем в этих точках у них общие касательные (обозначим их t_1 и t_2). Следовательно, $\tilde{\lambda}_2$ – WP -пучок коник. Третье семейство линий ткани $\tilde{W}_{23}$ есть пучок прямых с вершиной A_2 .

3-5. Пусть три-ткань W_{24} задана соотношениями (4.16'), тогда каждая точка прямой A_3A_4 является коническим узлом. Обозначим через $\tilde{W}_{24}$ проекцию ткани W_{24} , например, из точки A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$. Уравнение кубики V в силу соотношений (4.16') запишется в виде $\Phi_3(A_4) + x^4\Phi_2(A_4) = 0$, где $\Phi_2(A_4) = x^1T_1$, $\Phi_3(A_4) = x^2x^3T_2$, $T_1 = a_{114}x^1 + 2a_{124}x^2$, $T_2 = 2a_{123}x^1 + 2a_{223}x^2$.

Первое семейство $\tilde{\lambda}_1$ линий ткани $\tilde{W}_{24}$ определяется уравнением $x^1T_1 + \lambda x^3T_2 = 0$ и состоит из коник, проходящих через точки A_2 , $\tilde{m}_1$ и двукратную точку A_3 . Следовательно, $\tilde{\lambda}_1$ – PE -пучок коник. Все коники пучка имеют в кратной вершине A_3 общую касательную $T_2 = 0$.

Семейство $\tilde{\lambda}_2$ определяется уравнением $x^1T_1 + \mu x^2T_2 = 0$ и представляет собой семейство пар прямых с общей вершиной A_3 .

Третье семейство линий ткани $\tilde{W}_{24}$ есть пучок прямых с вершиной A_2 .

3-6. Обозначим через $\tilde{W}_{24}'$ три-ткань, полученную проектированием ткани W_{24} из произвольной точки $P = A_4 + pA_3$ прямой особых точек A_3A_4 . Непосредственным вычислением можно показать, что первое и третье семейства линий ткани $\tilde{W}_{24}'$ задаются уравнениями

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1: \Phi_2(P) + \lambda x^3(2a_{123}x^1 + a_{223}x^2) &= 0, \\ \tilde{\lambda}_3: \Phi_2(P) - \nu x^3(a_{114}x^1 + 2a_{124}x^2) &= 0, \end{aligned}$$

где $\Phi_2(P) = a_{114}(x^1)^2 + 2x^1x^2(pa_{123} + a_{124}) + pa_{223}(x^2)^2$, а второе семейство есть пучок прямых с вершиной A_3 . Семейства $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_3$ есть P -пучки с общей

Рис. 5

двойной вершиной A_3 и общими простыми вершинами $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$, определяемыми на прямой A_1A_2 уравнением $\Phi_2(P) = 0$. Как видно из написанных выше уравнений пучков, коники пучка $\tilde{\lambda}_1$ имеют в вершине A_3 общую касательную $\ell_1 \equiv 2a_{123}x^1 + a_{223}x^2 = 0$, а коники пучка $\tilde{\lambda}_3$ – общую касательную $\ell_3 \equiv a_{114}x^1 + 2a_{124}x^2 = 0$ (рис. 5).

3-7. Обозначим через $\tilde{W}'_{25}$ проекцию ткани W_{25} из бипланарного узла A_2 на плоскость $A_1A_3A_4$. Уравнение кубики V в силу соотношений (4.8') запишется в виде $x^4\tilde{\Phi}_2(A_2) + x^2\Phi_2(A_2) = 0$, где

$$\Phi_2(A_2) = x^3(a_{233}x^3 + 2a_{234}x^4), \quad \tilde{\Phi}_2(A_2) = a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + a_{334}(x^3)^2.$$

Первое семейство определяется уравнением $\tilde{\Phi}_2(A_2) + \lambda\Phi_2(A_2) = 0$. Это P -пучок коник с кратной вершиной A_4 и с общей касательной в ней $x^3 = 0$. Однократные вершины пучка (обозначим их $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$) есть точки пересечения прямой $a_{233}x^3 + 2a_{234}x^4 = 0$ с парой прямых $\tilde{\Phi}_2(A_2) = 0$. Семейства $\tilde{\lambda}_2$ и $\tilde{\lambda}_3$ есть пучки прямых с вершинами A_1 и A_4 .

Отметим, что рассматриваемая ткань отличается от ткани $\tilde{W}'_{22}$ тем, что вершина A_1 пучка прямых (семейство λ_2) лежит на касательной к пучку коник λ_1 в двойной точке A_4 .

В случае $a_{234} = 0$ (ткани W_{25}^1 , см. (4.20)) семейство λ_1 становится пучком прямых с вершиной A_4 , следовательно, $\lambda_1 \equiv \lambda_3$ и ткань $\tilde{W}'_{25}$ в этом случае не существует.

В случае $a_{114}a_{334} - a_{134}^2 = 0$ (ткани W_{25}^2 , см. (4.21)) однократные вершины пучка λ_1 совпадают и он становится параболическим (WP) пучком.

3-8. Обозначим через $\tilde{W}''_{25}$ проекцию ткани W_{25} из конического узла A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$. Уравнение кубики V в силу соотношений (4.8') запишется в виде $\Phi_3(A_4) + x^4\Phi_2(A_4) = 0$, где

$$\Phi_2(A_4) = a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{234}x^2x^3 + a_{334}(x^3)^2, \quad \Phi_3(A_4) = a_{233}x^2(x^3)^2.$$

Прямая $x^3 = 0$ касается коники $\Phi_2(A_4)$ в точке A_2 ; прямая $x^2 = 0$ пересекает ее в точках $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$, определяемых уравнением $a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + a_{334}(x^3)^2 = 0$.

Семейство $\tilde{\lambda}_1$ задается уравнением $\Phi_2(A_4) + a_{233}\lambda(x^3)^2 = 0$. Это UP -пучок коник с четырехкратной вершиной A_2 . В этой вершине все коники пучка имеют общую касательную $x^3 = 0$.

Семейство $\tilde{\lambda}_2$ задается уравнением $\Phi_2(A_4) + a_{233}\mu x^2 x^3 = 0$. Это P -пучок коник с двукратной вершиной A_2 , простыми вершинами $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ и общей касательной $x^3 = 0$.

Третье семейство линий ткани $\tilde{W}_{25}''$ есть пучок прямых с вершиной A_2 .

В случае $a_{234} = 0$ (ткани W_{25}^1) семейство λ_1 становится пучком прямых с вершиной A_4 и ткань $\tilde{W}_{25}'$ в этом случае не существует. В случае $a_{114}a_{334} - a_{134}^2 = 0$ (ткани W_{25}^2) однократные вершины пучка λ_1 совпадают и он становится параболическим (WP) пучком.

3-9. Обозначим через $\tilde{W}_{25}'''$ проекцию ткани W_{25}^2 из особой точки $P(2a_{134}a_{234}, 0, -2a_{114}a_{234}, a_{114}a_{233})$ на плоскость $A_1A_2A_4$ (см. п. 2-5-2). Перейдем к новому реперу, передвинув вершину A_3 в точку P . Тогда координаты преобразуются следующим образом:

$$px^1 + x^3 = \tilde{x}^1, \quad a_{233}x^3 + 2a_{234}x^4 = \tilde{x}^4, \quad x^2 = \tilde{x}^2, \quad x^3 = \tilde{x}^3. \quad (4.26)$$

В новых координатах уравнение кубики V с учетом соотношений (4.8') примет следующий вид ("волну" над новыми координатами опускаем):

$$a_{334}(x^1)^2 x^4 - a_{334}a_{233}(x^1)^2 x^3 + 2a_{234}x^2 x^3 x^4 = 0, \quad (4.27)$$

а уравнения пучков L_i плоскостей, высекающих ткань Бурау (см. п. 3.1), запишутся соответственно так:

$$2a_{234}x^2 = \lambda(x^4 - a_{233}x^3), \quad 2a_{234}x^3 = \mu(x^4 - a_{233}x^3), \quad x^1 = \nu(p+1)x^3.$$

Напомним, что уравнение семейства $\tilde{\lambda}_i$ ткани $\tilde{W}_{25}'''$ получается исключением переменной x^3 из уравнения (4.27) и уравнения семейства L_i . Проделав вычисления, получим соответственно

$$\begin{aligned} a_{334}a_{233}(x^1)^2 - 2x^2 x^4 + \lambda(x^4)^2 &= 0, & a_{334}(x^1)^2 + \mu x^2 x^4 &= 0, \\ a_{334}(p\nu + 1)x^1 x^4 - a_{334}a_{233}(x^1)^2 + 2a_{234}x^2 x^4 &= 0. \end{aligned}$$

Первое семейство представляет собой UP -пучок с базисными кониками $(x^4)^2 = 0$ и $a_{334}a_{233}(x^1)^2 - 2x^2 x^4 = 0$, четверная вершина пучка находится в точке A_2 , прямая $x^4 = 0$ есть общая касательная к коникам пучка. Все коники пучка проходят через точку A_4 . Второе семейство есть WP -пучок коник с общими кратными вершинами A_2 и A_4 и касательными в них $x^4 = 0$ и $x^2 = 0$ соответственно. Третье семейство есть SP -пучок с базисными кониками $a_{334}a_{233}(x^1)^2 - 2x^2 x^4 = 0$ и $x^1 x^4 = 0$, с тройной вершиной A_2 и простой вершиной A_4 , прямая $x^4 = 0$ есть общая касательная к коникам пучка.

3-10. Обозначим через $\tilde{W}_{26}$ проекцию ткани W_{26} из планарного узла A_2 на плоскость $A_1A_3A_4$. Уравнение кубики V в силу соотношений (4.9') запишется в виде $2a_{123}x^1 x^2 x^3 + x^4 \tilde{\Phi}_2(A_2) = 0$, где

$$\tilde{\Phi}_2(A_2) = a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1 x^3 + a_{144}x^1 x^4 + a_{334}(x^3)^2.$$

Семейство $\tilde{\lambda}_1$ задается уравнением $2a_{123}\lambda x^1 x^3 + \tilde{\Phi}_2(A_2) = 0$. Это SP -пучок коник с трехкратной вершиной A_4 и простой вершиной $\tilde{m}_1$, определяемой уравнениями $x^3 = 0$, $\tilde{\Phi}_2(A_2) = 0$. В этой вершине все коники пучка имеют общую касательную $x^1 = 0$.

Второе семейство линий ткани $\tilde{W}_{24}$ есть пучок прямых с вершиной A_1 , третье – пучок прямых с вершиной A_4 .

3-11. Обозначим через $\tilde{W}_{27}$ проекцию ткани W_{27} из планарного узла A_2 на плоскость $A_1 A_3 A_4$. Уравнение кубики V в силу соотношений (4.6) и (4.10) запишется в виде $a_{233}x^2(x^3)^2 + x^4\tilde{\Phi}_2(A_2) = 0$, где

$$\tilde{\Phi}_2(A_2) = a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1 x^3 + a_{334}(x^3)^2 + a_{344}x^3 x^4.$$

Семейство $\tilde{\lambda}_1$ задается уравнением $a_{233}\lambda(x^3)^2 + \tilde{\Phi}_2(A_2) = 0$. Это UP -пучок коник с четырехкратной вершиной A_4 . В ней все коники пучка имеют общую касательную $x^3 = 0$.

Семейство $\tilde{\lambda}_2$ есть пучок прямых с вершиной A_1 , $\tilde{\lambda}_3$ – пучок прямых с вершиной A_4 .

Итак, всего имеется 10 основных классов регулярных тканей вида $\tilde{W}_2$, отличных от основных классов вида $\tilde{W}_1$, – это ткани $\tilde{W}'_{22}$, $\tilde{W}''_{22}$, $\tilde{W}_{23}$, $\tilde{W}_{24}$, $\tilde{W}'_{24}$, $\tilde{W}'_{25}$, $\tilde{W}''_{25}$, $\tilde{W}'''_{25}$, $\tilde{W}_{26}$ и $\tilde{W}_{27}$.

§ 5. Регулярные специальные три-ткани Бурау вида W_3 и перспективно эквивалентные им ткани вида $\tilde{W}_3$.

Случай 3: все 3 образующие ℓ_i лежат в одной плоскости

5.1. Основные ткани вида W_3 . Обозначим плоскость, в которой лежат образующие ℓ_i , через π и выберем репер следующим образом: $\ell_1 = A_2 A_3$, $\ell_2 = A_1 A_3$, $\ell_3 = A_1 A_2$. Кроме того, поместим вершину проективного репера A_4 на кубик V . Тогда ее уравнение примет вид

$$\begin{aligned} & a_{114}(x^1)^2 x^4 + a_{144}x^1(x^4)^2 + a_{224}(x^2)^2 x^4 + a_{244}x^2(x^4)^2 \\ & + a_{334}(x^3)^2 x^4 + a_{344}x^3(x^4)^2 + 2a_{123}x^1 x^2 x^3 + 2a_{124}x^1 x^2 x^4 \\ & + 2a_{134}x^1 x^3 x^4 + 2a_{234}x^2 x^3 x^4 = 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Очевидно, что кубик V распадается на квадрику и плоскость π , содержащую прямые ℓ_i , тогда и только тогда, когда $a_{123} = 0$. В этом параграфе будем полагать $a_{123} \neq 0$.

Пучки плоскостей L_i зададим уравнениями

$$x^1 = \lambda x^4, \quad x^2 = \mu x^4, \quad x^3 = \nu x^4. \quad (5.2)$$

Исключая переменные x^α из (5.1) и (5.2), получим уравнение рассматриваемой ткани W_3

$$\begin{aligned} & 2a_{123}\lambda\mu\nu + a_{114}\lambda^2 + a_{224}\mu^2 + a_{334}\nu^2 + 2a_{124}\lambda\mu + 2a_{134}\lambda\nu \\ & + 2a_{234}\mu\nu + a_{144}\lambda + a_{244}\mu + a_{344}\nu = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Случай I. Пусть все точки A_i особые. Тогда выполняются соотношения

$$a_{114} = 0, \quad a_{224} = 0, \quad a_{334} = 0, \quad (5.4)$$

уравнение (5.3) становится полилинейным, следовательно, ткань является регулярной. Обозначим ее W_{31} .

Случай II. Только две из точек A_i особые, пусть это A_1 и A_3 . Тогда

$$a_{114} = 0, \quad a_{334} = 0, \quad a_{224} \neq 0, \quad (5.5)$$

и уравнение ткани (5.3) принимает вид

$$a_{224}\mu^2 + \mu(2a_{123}\lambda\nu + 2a_{124}\lambda + 2a_{234} + a_{244}) + 2a_{134}\lambda\nu + a_{144}\lambda + a_{344}\nu = 0. \quad (5.6)$$

Используя первое условие линеаризации, придем к условию регулярности

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{224} \\ 2a_{123} & 2a_{124} & 2a_{234} & a_{244} \\ 2a_{134} & a_{144} & a_{344} & 0 \end{pmatrix} = 2. \quad (5.7)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Для того чтобы особые точки A_1 и A_3 были бипланарными узлами, необходимо и достаточно выполнения условия (5.7).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие (5.7) эквивалентно соотношениям

$$\frac{a_{134}}{a_{123}} = \frac{a_{144}}{2a_{124}} = \frac{a_{344}}{2a_{234}} \equiv p. \quad (5.8)$$

В силу (5.8) уравнение (5.1) кубики V запишется следующим образом:

$$a_{224}(x^2)^2x^4 + a_{244}x^2(x^4)^2 + 2(px^4 + x^2)(a_{124}x^1x^4 + a_{234}x^3x^4 + a_{123}x^1x^3) = 0. \quad (5.9)$$

Как видно из этого уравнения, конус касательных в точке A_1 распадается на плоскости $px^4 + x^2 = 0$ и $a_{124}x^4 + a_{123}x^3 = 0$, а в точке A_3 – на плоскости $px^4 + x^2 = 0$ и $a_{234}x^4 + a_{123}x^1 = 0$.

Обратно: если потребовать, чтобы точки A_1 и A_3 , лежащие на поверхности (5.1), были бипланарными узлами, то придем к условию (5.8).

Поместим вершину A_4 репера на пересечение плоскостей $a_{124}x^4 + a_{123}x^3 = 0$ и $a_{234}x^4 + a_{123}x^1 = 0$, тогда будут выполняться соотношения $a_{124} = a_{234} = 0$ и условие регулярности (5.7) сведется к соотношениям

$$a_{124} = a_{234} = a_{144} = a_{344} = 0. \quad (5.10)$$

Анализируя систему для определения особых точек поверхности V в случае (5.10), найдем, что помимо A_1 и A_3 может быть еще сингулярная точка A_4 при условии

$$a_{244} = 0. \quad (5.11)$$

Обозначим регулярную три-ткань, определяемую условиями (5.5) и (5.10), через W_{32} , а условиями (5.5), (5.10) и (5.11) – через W'_{32} .

Таковыми же рассуждениями, как в предыдущих случаях, можно показать, что второе условие линеаризации не приводит к новым классам регулярных тканей.

Случай III. Только одна из точек A_i особая, пусть A_1 . Тогда выполняются соотношения

$$a_{114} = 0, \quad a_{224} \neq 0, \quad a_{334} \neq 0. \quad (5.12)$$

Записав в этом случае уравнение ткани (5.3) по степеням переменных μ или ν и применив первое условие линеаризации, мы приходим к условию $a_{123} = 0$, при котором кубика V распадается.

Запишем уравнение (5.3) в виде $\lambda Q + R = 0$:

$$\lambda(2a_{123}\mu\nu + 2a_{124}\mu + 2a_{134}\nu + a_{144}) + a_{224}\mu^2 + a_{334}\nu^2 + 2a_{234}\mu\nu + a_{244}\mu + a_{344}\nu = 0 \quad (5.13)$$

и применим второе условие линеаризации. Напомним, что оно означает: распадение коник $Q = 0$ и $R = 0$ и совпадение их центров. Эти коники могут распадаться только следующим образом: $2a_{123}(\mu+a)(\nu+b) = 0$ и $(A\mu+B\nu+C)(A_1\mu+B_1\nu) = 0$ соответственно. Поскольку центры этих коник совпадают, то точка $\mu = -a$, $\nu = -b$ лежит на каждой из прямых, на которые распадается R . С учетом этого обстоятельства уравнение (5.13) примет вид

$$2a_{123}\lambda(\mu+a)(\nu+b) + p(A(\mu+a) + B(\nu+b))(b\mu - a\nu) = 0, \quad (5.14)$$

если a и b не равны одновременно нулю, или

$$2a_{123}\lambda\mu\nu + (A\mu + B\nu)(A_1\mu + B_1\nu) = 0, \quad (5.14')$$

если $a = b = 0$. Заменяя в (5.14) переменные λ, μ, ν по формулам (5.2), получим уравнение кубики V

$$2a_{123}x^1(x^2+ax^4)(x^3+bx^4) + p(A(x^2+ax^4) + B(x^3+bx^4))(bx^2 - ax^3)x^4 = 0. \quad (5.15)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Уравнение кубики (5.1) приводится к виду (5.15) тогда и только тогда, когда на ней имеется прямая из особых точек, проходящая через A_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверяется, что прямая m , определяемая уравнениями

$$x^2 + ax^4 = x^3 + bx^4 = 0, \quad (5.16)$$

лежит на кубике (5.15) и все ее точки являются особыми.

Прежде, чем доказывать обратное, специализируем репер: поместим на m вершину репера A_4 , тогда $m \equiv A_1A_4$, $a = b = 0$ и уравнение ткани примет вид (5.14'). Сравнивая это уравнение с (5.1), находим, что

$$a_{114} = 0, \quad a_{124} = 0, \quad a_{134} = 0, \quad a_{144} = a_{244} = a_{344} = 0. \quad (5.17)$$

Теперь закончим доказательство предложения 5.2. Предположим, что кубика (5.1) имеет прямую особых точек, проходящую через A_1 . Поместим на нее точку A_4 . Тогда система, определяющая особые точки кубики (5.1), должна выполняться при $x^2 = x^3 = 0$ и произвольных x^1 и x^4 . Это приводит в точности к соотношениям (5.17). Заметим, что других особых точек на кубике (5.17) нет.

Обозначим регулярную ткань, определяемую соотношениями (5.17), через W_{33} .

Перепишем теперь уравнение (5.3) в виде $P\mu^2 + Q\mu + R = 0$, где

$$\begin{aligned} P &= a_{224}, & Q &= (2a_{123}\mu\lambda + 2a_{124}\lambda + 2a_{234}\nu + a_{244}), \\ R &= a_{334}\nu^2 + 2a_{134}\lambda\nu + a_{144}\lambda + a_{344}\nu, \end{aligned}$$

и применим второе условие линеаризации. Сравнивая с (1.7), видим, что возможен единственный вариант: один из многочленов U , V должен быть нулевой степени, а другой – степени 2. Отсюда получается, что P , Q , R принадлежат одному пучку, т.е. приходим к первому условию линеаризации. Аналогичный вывод получим, если (5.3) запишем по степеням ν .

Случай IV.

$$a_{114} \neq 0, \quad a_{224} \neq 0, \quad a_{334} \neq 0.$$

Применяя, как в предыдущих случаях, первое условие линеаризации к уравнению (5.3), мы приходим к матрице, в которой имеются отличные от нуля миноры третьего порядка, равные $2a_{114}a_{224}a_{123}$ и т.п. Поэтому регулярных тканей на этом пути не получится.

Второе условие линеаризации также ничего не даст – доказательство такое же, как и в предыдущих случаях.

Полученные результаты объединяет следующая

ТЕОРЕМА 5.1. *Предположим, что прямые $\ell_3 = A_1A_2$, $\ell_1 = A_2A_3$ и $\ell_2 = A_3A_1$ расположены на кубической поверхности V . Тогда уравнение поверхности V имеет вид (5.1), а уравнение специальной три-ткани Бурау W_3 , определяемой прямыми ℓ_i , имеет вид (5.3). Три-ткань W_3 является регулярной тогда и только тогда, когда выполняется одна из следующих серий соотношений: (5.4) (основной класс W_{31}); (5.5) и (5.10) (основной класс W_{32}); (5.5), (5.10) и (5.11) (основной класс W'_{32}); (5.16) (основной класс W_{33}). В каждом из этих случаев кубика V характеризуется соответственно следующими геометрическими условиями: точки A_i пересечения прямых ℓ_i являются особыми точками кубики V ; две из этих точек являются бипланарными узлами; две из этих точек являются бипланарными узлами и существует еще одна особая точка на V ; существует прямая из особых точек, проходящая через одну из точек A_i .*

5.2. Основные ткани вида $\widetilde{W}_3$.

2-1. Пусть $\widetilde{W}_{31}$ – проекция ткани W_{31} на плоскость $A_2A_3A_4$ из особой точки A_1 . В силу соотношений (5.6) уравнение (5.1) кубики V запишется в виде $\Phi_3(A_1) + x^1\Phi_2(A_1) = 0$, где

$$\begin{aligned} \Phi_2(A_1) &= a_{144}(x^4)^2 + 2a_{123}x^2x^3 + 2a_{124}x^2x^4 + 2a_{134}x^3x^4, \\ \Phi_3(A_1) &= x^4(a_{244}x^2x^4 + a_{344}x^3x^4 + 2a_{234}x^2x^3) = x^4\widetilde{\Phi}_2(A_1). \end{aligned}$$

Семейство $\widetilde{\lambda}_1$ определяется уравнением $\lambda\Phi_2(A_1) + \widetilde{\Phi}_2(A_1) = 0$ и представляет собой пучок коник, проходящих через точки A_2 , A_3 , $\widetilde{m}_1$ и $\widetilde{m}_2$. Семейства $\widetilde{\lambda}_2$ и $\widetilde{\lambda}_3$ – пучки прямых с вершинами A_2 и A_3 . Очевидно, три-ткань $\widetilde{W}_{31}$ совпадает с три-тканью $\widetilde{W}_{11}$.

2-2. Пусть $\widetilde{W}_{32}$ – проекция ткани W_{32} на плоскость $A_2A_3A_4$ из особой точки A_1 . В силу соотношений (5.7) и (5.9) уравнение (5.1) кубики V в этом случае запишется в виде $\Phi_3(A_1) + x^1\Phi_2(A_1) = 0$, где $\Phi_2(A_1) = 2T_1T_2$, $T_1 = x^2 + px^4$, $T_2 = a_{123}x^3 + a_{124}x^4$,

$$\Phi_3(A_1) = x^4(x^2(a_{224}x^2 + a_{244}x^4) + 2a_{234}x^3T_1) \equiv x^4\widetilde{\Phi}_2(A_1).$$

Семейство $\widetilde{\lambda}_1$ определяется уравнением $\lambda\Phi_2(A_1) + \widetilde{\Phi}_2(A_1) = 0$. Это параболический пучок коник с двойной вершиной A_3 и простыми вершинами $\widetilde{m}_1$ и $\widetilde{m}_2$ ($T_2 = 0$, $\widetilde{\Phi}_2(A_1) = 0$). Все коники пучка $\widetilde{\lambda}_1$ имеют в вершине A_3 общую касательную $T_2 = 0$.

Семейства $\widetilde{\lambda}_2$ и $\widetilde{\lambda}_3$ есть пучки прямых с вершинами A_2 и A_3 . Как видно из этого описания, ткань $\widetilde{W}_{32}$ совпадает тканью $\widetilde{W}'_{22}$.

2-3. Пусть $\widetilde{W}'_{32}$ – проекция ткани W'_{32} на плоскость $A_2A_3A_4$ из особой точки A_1 . В силу соотношений (5.5), (5.10) и (5.11) уравнение (5.1) кубики V в этом случае запишется в виде

$$a_{224}(x^2)^2x^4 + 2a_{123}x^1x^2x^3 + 2a_{134}x^1x^3x^4 = 0.$$

Уравнением семейства $\widetilde{\lambda}_1$ будет

$$a_{224}(x^2)^2 + 2\lambda x^3(a_{123}x^2 + a_{134}x^4) = 0,$$

а семейства $\widetilde{\lambda}_2$ и $\widetilde{\lambda}_3$ – пучки прямых с вершинами A_2 и A_4 соответственно. Семейство $\widetilde{\lambda}_1$ представляет собой WP -пучок коник с двойными вершинами A_4 и A_3 и касательными в них $x^3 = 0$, $a_{123}x^2 + a_{134}x^4 = 0$ соответственно.

2-4. Пусть $\widetilde{W}''_{32}$ – проекция ткани W''_{32} на плоскость $A_1A_2A_3$ из особой точки A_4 . Уравнение кубики V будет то же, что и предыдущем случае, а уравнения семейств запишутся в виде

$$\widetilde{\lambda}_1 : a_{224}(x^2)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2\lambda a_{123}x^2x^3 = 0,$$

$$\widetilde{\lambda}_2 : a_{224}(x^2)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2\mu a_{123}x^1x^3 = 0,$$

$$\widetilde{\lambda}_3 : a_{224}(x^2)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2\nu a_{123}x^1x^2 = 0.$$

Здесь $\widetilde{\lambda}_1$ – SP -пучок коник с вершинами A_1 (тройная) и A_3 , причем общая касательная к коникам пучка в A_1 – прямая $x_3 = 0$; $\widetilde{\lambda}_2$ – WP -пучок коник с двойными вершинами A_1 и A_3 и касательными в них $x^3 = 0$, $x^1 = 0$ соответственно; $\widetilde{\lambda}_3$ – SP -пучок коник с вершинами A_1 и A_3 (тройная), причем общая касательная к коникам пучка в A_3 – прямая $x_1 = 0$. Все 3 пучка содержат базисную конику $a_{224}(x^2)^2 + 2a_{134}x^1x^3 = 0$.

2-5. Пусть $\widetilde{W}_{33}$ – проекция ткани W_{33} на плоскость $A_1A_2A_3$ из особой точки A_4 . В силу (5.17) уравнение (5.1) кубики V в этом случае имеет вид

$$a_{224}(x^2)^2x^4 + a_{334}(x^3)^2x^4 + 2a_{123}x^1x^2x^3 + 2a_{234}x^2x^3x^4 = 0. \quad (5.18)$$

Исключая переменную x^4 из уравнений пучков (5.2) и уравнения кубики (5.18), найдем, что семейство $\widetilde{\lambda}_1$ представляет собой пучок вырожденных

коник – пар прямых с общей вершиной A_1 ; семейство $\tilde{\lambda}_2$ есть параболический пучок коник с общей касательной $\ell_3 = A_1A_2$ в двойной вершине A_1 и простыми вершинами $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ (лежащими на прямой $\ell_1 = A_2A_3$); семейство $\tilde{\lambda}_3$ есть параболический пучок коник с общей касательной $\ell_2 = A_1A_3$ в двойной вершине A_1 и с простыми вершинами $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$. Сравнивая с результатом § 4, п. 3-6, убедимся, что ткань $\tilde{W}_{33}$ совпадает с тканью $\tilde{W}_{24}$.

2-6. Проектируя ткань W_{33} из особой точки A_1 на плоскость $A_2A_3A_4$, получим ткань W_0 , состоящую из трех пучков прямых с вершинами A_2 , A_3 и A_4 .

Итак, имеется всего 3 основных класса регулярных тканей вида $\tilde{W}_3$, отличных от тканей вида $\tilde{W}_1$ и $\tilde{W}_2$: это ткани $\tilde{W}'_{32}$, $\tilde{W}''_{32}$ и W_0 .

Результаты §§ 3–5 объединяет следующая

ТЕОРЕМА 5.2. *Существует всего 17 основных классов регулярных тканей, перспективно эквивалентных специальным регулярным три-тканям Бурау на невырожденных кубических поверхностях, – это ткани $\tilde{W}_{11}$, $\tilde{W}_{12}$, $\tilde{W}'_{12}$, $\tilde{W}_{13}$, $\tilde{W}'_{22}$, $\tilde{W}''_{22}$, $\tilde{W}_{23}$, $\tilde{W}_{24}$, $\tilde{W}'_{24}$, $\tilde{W}'_{25}$, $\tilde{W}''_{25}$, $\tilde{W}'''_{25}$, $\tilde{W}_{26}$, $\tilde{W}_{27}$, $\tilde{W}'_{32}$, $\tilde{W}''_{32}$ и W_0 .*

§ 6. Проективная классификация регулярных три-тканей, перспективно эквивалентных специальным регулярным три-тканям Бурау

Проективная классификация проводится с точностью до проективных преобразований. Напомним, что проективное (дробно-линейное) преобразование плоскости однозначно задается восемью параметрами или четырьмя парами соответствующих точек, а сложное отношение четырех точек прямой или четырех прямых пучка является проективным инвариантом. Пусть K – некоторая конфигурация на плоскости. Будем обозначать через p , i и a число параметров, задающих эту конфигурацию, число ее проективных инвариантов и размерность максимальной группы проективных автоморфизмов конфигурации K соответственно. Очевидно, что $a = 8 - p$, и если имеются две одинаковые по форме конфигурации с равными инвариантами, зависящие от $p < 9$ параметров, то такие конфигурации проективно эквивалентны.

6.1. Проективная классификация три-тканей $\tilde{W}_1$.

1-1. Проективная классификация три-тканей $\tilde{W}_{11}$.

Согласно § 3, п. 2-1, семейство $\tilde{\lambda}_3$ три-ткани $\tilde{W}_{11}$ есть пучок коник с базисом $\tilde{\Phi}_2(A_4)$ и $\Phi_2(A_4)$ и вершинами A_1 , A_2 , $\tilde{m}_3$ и $\tilde{m}_4$. Семейства $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ – пучки прямых с вершинами A_1 и A_2 . Обозначим через $\tilde{W}_{11.1}$ и $\tilde{W}_{11.2}$ ткани, у которых точки $\tilde{m}_3$ и $\tilde{m}_4$ являются соответственно вещественными и различными или мнимыми. Через $\tilde{W}_{11.3}$ обозначим ткани, у которых точки $\tilde{m}_3$ и $\tilde{m}_4$ совпадают. В этом случае семейство $\tilde{\lambda}_3$ есть PE -пучок с простыми вершинами A_1 и A_2 и двукратной вершиной $m \equiv \tilde{m}_3 \equiv \tilde{m}_4$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Любые две ткани одного и того же типа $\tilde{W}_{11.k}$, $k = 1, 2, 3$, проективно эквивалентны. Три-ткань $\tilde{W}_{11.3}$ допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ткани $\widetilde{W}_{11.1}$ и $\widetilde{W}_{11.2}$ вполне определяются конфигурацией K из вершин $A_1, A_2, \tilde{m}_3$ и $\tilde{m}_4$, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Здесь $p = 8$ – параметрами являются координаты вершин. Следовательно, $a = 0$. Так как существует единственное проективное преобразование, переводящее такую четверку точек в аналогичную, то любые две ткани рассматриваемого типа эквивалентны. Конструкция K не имеет проективных инвариантов ($i = 0$), поскольку в ней нет четверок точек, лежащих на одной прямой, и четверок прямых, принадлежащих одному пучку.

Ткань типа $\widetilde{W}_{11.3}$ вполне определяется точками A_1, A_2, m и общей касательной коник пучка $\tilde{\lambda}_3$ в точке m (см. предложение 0.1). Эта конструкция K задается семью параметрами ($p = 7$) – координатами точек и параметром касательной в пучке прямых с вершиной m . Следовательно, $a = 8 - 7 = 1$ и найдется проективное преобразование, которое переведет конструкцию K в любую другую, ей аналогичную.

Рассмотрим метрическую модель ткани $\widetilde{W}_{11.2}$. Удалим прямую $\tilde{m}_3\tilde{m}_4$ в бесконечность и возьмем комплексно-сопряженные точки $\tilde{m}_3$ и $\tilde{m}_4$ в качестве точек Лагерра. Тогда коники станут окружностями. Следовательно, рассматриваемая три-ткань $\widetilde{W}_{11}$ проективно эквивалентна круговой ткани, образованной эллиптическим пучком окружностей и двумя пучками прямых с вершинами в вершинах пучка окружностей (класс 4 по классификации круговых тканей В. Б. Лазаревой, см. [1]).

Через $\widetilde{W}_{11.4}$ обозначим ткани, у которых точка $\tilde{m}_3$ совпадает с точкой A_1 . Они характеризуются соотношением $a_{112}a_{134} = a_{113}a_{124}$. В этом случае $\tilde{\lambda}_3$ будет PE -пучком с простыми вершинами $A_2, \tilde{m}_4$ и двукратной вершиной A_1 . Через $\widetilde{W}_{11.5}$ обозначим ткани, у которых точка $\tilde{m}_3$ совпадает с точкой A_1 , а точка $\tilde{m}_4$ совпадает с точкой A_2 . В этом случае $\tilde{\lambda}_3$ будет WP -пучком с вершинами A_1 и A_2 . Такие ткани характеризуются соотношениями $a_{112}a_{134} = a_{113}a_{124}$ и $2a_{112}a_{234} = -a_{223}a_{124}$.

Аналогично предложению 6.1 доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Любые две ткани одного и того же типа $\widetilde{W}_{11.4}$ или $\widetilde{W}_{11.5}$ проективно эквивалентны. Три-ткань $\widetilde{W}_{11.4}$ допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов. Три-ткань $\widetilde{W}_{11.5}$ допускает двухпараметрическую группу проективных автоморфизмов.

Через $\widetilde{W}_{11.6}$ обозначим ткани, у которых точки $\tilde{m}_3$ и $\tilde{m}_4$ совпадают с точкой A_1 . Соотношения, характеризующие такие ткани, можно записать в виде

$$a_{124} = ra_{112}, \quad a_{134} = ra_{113}, \quad a_{234} = qa_{112} - ra_{223}, \quad a_{334} = 2qa_{113} + 2ra_{133}.$$

В этом случае $\tilde{\lambda}_3$ есть SP -пучок с простой вершиной A_2 и трехкратной вершиной A_1 . Базис пучка образуют коника $\Phi_2(A_4)$ (см. (3.15)) и вырожденная коника $A_1A_2 \cup t$, где t_1 – касательная к конике $\Phi_2(A_4)$ в точке A_1 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. Любые две ткани типа $\widetilde{W}_{11.6}$ проективно эквивалентны. Три-ткань $\widetilde{W}_{11.6}$ допускает двухпараметрическую группу проективных автоморфизмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 0.1 существует ∞^1 SP -пучков (SP -связка) коник, имеющих заданные вершины и общую касательную в тройной вершине. Чтобы выделить в связке пучок, надо фиксировать параметр пучка в связке. Таким образом, вся конструкция определяется шестью параметрами: координатами вершин A_1 и A_2 , параметром касательной в пучке с вершиной A_1 и параметром пучка в связке.

1-2. Проективная классификация три-тканей $\widetilde{W}_{12}$.

Напомним, что три-ткань $\widetilde{W}_{12}$ задается в плоскости $A_1A_2A_4$ общей базисной коникой $\Phi_2(A_3)$ двух P -пучков с общей вершиной $A_1 + A_2$ на ней и прямыми $\ell_1 = A_1A_4$ и $\ell_2 = A_2A_4$, пересекающими конику $\Phi_2(A_3)$ в точках $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$, $\tilde{m}_3$ и $\tilde{m}_4$ соответственно. При этом прямая A_1A_2 касается коники $\Phi_2(A_3)$ в точке $A_1 + A_2$ (рис. 2). В зависимости от расположения прямых относительно коники получаются следующие проективно различные классы тканей.

Три-ткани $\widetilde{W}_{12.1}$: точки $\tilde{m}_1$, $\tilde{m}_2$, $\tilde{m}_3$ и $\tilde{m}_4$ являются вещественными и различными. Тогда семейство $\tilde{\lambda}_1$ ($\tilde{\lambda}_2$) есть PE -пучок коник с простыми вершинами $\tilde{m}_3$, $\tilde{m}_4$ ($\tilde{m}_1$, $\tilde{m}_2$) и двукратной вершиной $A_1 + A_2$. Семейство $\tilde{\lambda}_3$ есть пучок прямых с вершиной $A_1 + A_2$.

Три-ткани $\widetilde{W}'_{12.1}$: это такие три-ткани $\widetilde{W}_{12.1}$, у которых параболические пучки коник $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ имеют общую вершину $m \equiv \tilde{m}_1 = \tilde{m}_3 = A_4$. Эти ткани выделяются дополнительным соотношением $a_{344} = 0$ и есть в точности ткани $\widetilde{W}'_{12}$, но мы оставим за ними обозначение $\widetilde{W}'_{12.1}$ для единообразия.

Ткани $\widetilde{W}_{12.2}$: пары точек $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$, $\tilde{m}_3$ и $\tilde{m}_4$ являются комплексно-сопряженными. В этом случае семейства $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ есть RH -пучки коник.

Ткани $\widetilde{W}_{12.3}$: точки $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ вещественные, а $\tilde{m}_3$ и $\tilde{m}_4$ являются комплексно-сопряженными (или наоборот).

Ткани $\widetilde{W}_{12.4}$: одна из прямых, например ℓ_1 , касается коники $\Phi_2(A_3)$ в точке $m \equiv \tilde{m}_1 = \tilde{m}_2$, а другая прямая пересекает эту конику в двух вещественных точках. В этом случае $\tilde{\lambda}_1$ есть WP -пучок коник с двукратными вершинами m и $A_1 + A_2$, а семейство $\tilde{\lambda}_2$ есть PE -пучок коник. Рассматриваемый случай характеризуется соотношением $a_{113}a_{344} = (a_{134})^2$.

Ткани $\widetilde{W}_{12.5}$: одна из прямых, например ℓ_1 , касается коники $\Phi_2(A_3)$, другая пересекает эту конику в двух комплексно-сопряженных точках.

Ткани $\widetilde{W}_{12.6}$: ℓ_1 и ℓ_2 касаются коники $\Phi_2(A_3)$. Соотношения, характеризующие такие ткани, можно записать в виде

$$a_{113} = a^2, \quad a_{344} = b^2, \quad a_{134} = a_{234} = ab.$$

В этом случае семейства $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ являются WP -пучками коник с вершинами $m \equiv \tilde{m}_1 = \tilde{m}_2$ и $A_1 + A_2$, $n \equiv \tilde{m}_3 = \tilde{m}_4$ и $A_1 + A_2$ соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. 1) Существует ∞^2 проективно различных тканей типа $\widetilde{W}_{12.k}$, где $k = 1, 2, 3$.

2) Существует ∞^1 проективно различных тканей типа $\widetilde{W}'_{12.1}$ и $\widetilde{W}_{12.k}$, где $k = 4, 5$.

3) Любые две ткани типа $\widetilde{W}_{12.6}$ проективно эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Сложные отношения точек $I_1 = (A_1, A_4, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$ и $I_2 = (A_2, A_4, \tilde{m}_3, \tilde{m}_4)$ являются проективными инвариантами ткани W типа $\widetilde{W}_{12,k}$, где $k = 1, 2, 3$. Ясно, что если две ткани эквивалентны, то соответствующие сложные отношения совпадают. Покажем обратное. Пусть W' – другая три-ткань этого же типа, и пусть P – проективное преобразование, переводящее 4 точки $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3$ и $\tilde{m}_4$, связанные с три-тканью W , в соответствующие 4 точки со штрихами, связанные с три-тканью W' . Тогда (см. рис. 2) $P(A_4) = A'_4$, а так как $I_1 = I'_1$ и $I_2 = I'_2$, то $P(A_1) = A'_1$ и $P(A_2) = A'_2$. Теперь заметим, что общая базисная коника $\Phi_2(A_3)$ пучков $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ касается прямой A_1A_2 . Этим свойством она однозначно определяется в пучке коник с вершинами $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3$ и $\tilde{m}_4$. Аналогично однозначно находится и коника $\Phi'_2(A_3)$ для ткани W' . А поскольку при проективных преобразованиях сохраняется инцидентность, то получаем, что $P(\Phi_2(A_3)) = \Phi'_2(A_3)$ и, следовательно, $P(A_1 + A_2) = A'_1 + A'_2$, а значит, и $P(W) = W'$.

2) Ткань $\widetilde{W}'_{12,1}$ имеет единственный инвариант I – сложное отношение четырех прямых, проходящих через точку $A_1 + A_2$:

$$A_2A_1; A_1 + A_2, m; A_1 + A_2, \tilde{m}_2; A_1 + A_2, \tilde{m}_4.$$

Покажем, что если у двух тканей W и W' типа $\widetilde{W}'_{12,1}$ инварианты совпадают, то эти ткани проективно эквивалентны. Пусть P – (единственное) проективное преобразование, переводящее 4 точки $A_1 + A_2, \tilde{m}_1 \equiv \tilde{m}_3, \tilde{m}_2, \tilde{m}_4$ в соответствующие точки со штрихами. Так как $I = I'$, то $P(A_1A_2) = A'_1A'_2$, т.е. общая касательная пучков коник переходит в общую касательную. Согласно предложению 0.1 по касательной и вершинам P -пучки восстанавливаются однозначно, откуда следует, что $P(W) = W'$.

Три-ткани $\widetilde{W}'_{12,4}$ и $\widetilde{W}_{12,5}$ имеют единственный проективный инвариант I – сложное отношение четырех прямых $A_2A_1; A_1 + A_2, m; A_1 + A_2, \tilde{m}_3; A_1 + A_2, \tilde{m}_4$. Точно так же, как и для тканей типа $\widetilde{W}'_{12,1}$, доказывается, что две ткани типа $\widetilde{W}'_{12,4}$ (или $\widetilde{W}_{12,5}$) проективно эквивалентны, если их инварианты совпадают.

3) Три-ткань $\widetilde{W}_{12,6}$ вполне определяется заданием коники $\Phi_2(A_3)$ с тремя фиксированными точками m, n и $A_1 + A_2$ на ней. Коника $\Phi_2(A_3)$, в свою очередь, однозначно определяется заданием трех точек m, n и $A_1 + A_2$ и двух касательных ℓ_1 и ℓ_2 в точках m и n соответственно. Действительно, согласно предложению 0.1 по кратным вершинам m, n и общим касательным ℓ_1 и ℓ_2 однозначно восстанавливается WP -пучок коник, которому принадлежит и коника $\Phi_2(A_3)$. Последняя однозначно находится из условия, что она проходит через точку $A_1 + A_2$.

Из этих рассуждений вытекает, что ткань $\widetilde{W}_{12,6}$ однозначно определяется четверкой точек $m, n, A_1 + A_2$ и $A_4 = \ell_1 \cap \ell_2$. А отсюда следует, что две ткани типа $\widetilde{W}_{12,6}$ проективно эквивалентны, поскольку всегда найдется проективное преобразование, переводящее указанную четверку точек в аналогичную четверку точек со штрихами.

Отметим, что ткань $\widetilde{W}_{12}$ не эквивалентна никакой круговой ткани, поскольку не существует пары комплексно-сопряженных точек, через которые проходили бы коники обоих пучков $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$.

1-3. Проективная классификация три-тканей $\widetilde{W}_{13}$.

Напомним еще раз различие между тканями $\widetilde{W}_{12}$ и $\widetilde{W}_{13}$: у последних прямые ℓ_1 , ℓ_2 и общая касательная A_1A_2 к коникам пучков $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ в точке $A_1 + A_2$ пересекаются в одной точке – A_4 . Поэтому в проективной классификации тканей $\widetilde{W}_{13}$ получаются такие же 5 типов тканей, как и в предыдущем случае, кроме случаев $\widetilde{W}'_{12.1}$ и $\widetilde{W}_{12.6}$ – они невозможны, так как прямые ℓ_1 , ℓ_2 и A_4 , $A_1 + A_2$ различны. Аналогично предложению 6.4 доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.5. 1) *Существует ∞^1 проективно различных тканей типа $\widetilde{W}_{13.k}$, где $k = 1, 2, 3$.*

2) *Любые две ткани типа $\widetilde{W}_{13.4}$ или типа $\widetilde{W}_{13.5}$ проективно эквивалентны.*

6.2. Проективная классификация три-тканей $\widetilde{W}_2$. Как отмечено в § 4, п. 3-1, ткань $\widetilde{W}_{21}$ совпадает с тканью $\widetilde{W}_{11}$.

2-1. Проективная классификация три-тканей $\widetilde{W}'_{22}$.

Напомним (§ 4, п. 3-2), что первое семейство $\tilde{\lambda}_1$ линий ткани $\widetilde{W}'_{22}$ задается уравнением (4.22). Это P -пучок коник с простыми вершинами $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ и двукратной вершиной A_4 , причем все коники пучка имеют в A_4 общую касательную A_4A_3 . Семейства $\tilde{\lambda}_2$ и $\tilde{\lambda}_3$ есть пучки прямых с вершинами A_1 и A_4 соответственно, причем $A_1 \in \tilde{m}_1\tilde{m}_2$. Ткань, у которой вершины $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ вещественные и различные, обозначим $\widetilde{W}'_{22.1}$; ткани, у которых эти вершины мнимые или совпадают, обозначим соответственно $\widetilde{W}'_{22.2}$ и $\widetilde{W}'_{22.3}$.

Если одна из точек $\tilde{m}_1$ или $\tilde{m}_2$ совпадает с точкой A_1 , то (см. (4.18')) получаем $a_{114} = 0$, что противоречит условию (4.6).

Если одна из точек $\tilde{m}_1$ или $\tilde{m}_2$ совпадает с точкой A_4 , из (4.18') получаем $a_{334} = 0$ и кубика V распадается. Таким образом, существует всего три указанных выше типа тканей $\widetilde{W}'_{22}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6. 1) *Существует ∞^1 проективно различных тканей $\widetilde{W}'_{22.1}$ и $\widetilde{W}'_{22.2}$, причем любая ткань этих типов допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов.*

2) *Любые две ткани типа $\widetilde{W}'_{22.3}$ проективно эквивалентны, и любая ткань этого типа допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) У тканей $\widetilde{W}'_{22.1}$ через двукратную вершину A_4 пучка $\tilde{\lambda}_1$ проходят 4 прямые: A_4A_1 , касательная A_4A_3 , $A_4\tilde{m}_1$ и $A_4\tilde{m}_2$, сложное отношение которых (обозначим его I) есть инвариант ткани.

Далее заметим, что ткань W типа $\widetilde{W}'_{22.1}$ однозначно определяется точками A_4 , $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$, общей касательной $x^1 = 0$ коник пучка $\tilde{\lambda}_1$ в точке A_4 (всего 7 параметров) и инвариантом I . Так как $p = 7$, то $a = 8 - 7 = 1$. Для тканей $\widetilde{W}'_{22.2}$ доказательство аналогично.

2) У тканей $\widetilde{W}'_{22.3}$ пучок $\tilde{\lambda}_1$ является дважды параболическим с двукратными вершинами A_4 и $m \equiv \tilde{m}_1 \equiv \tilde{m}_2$. Обозначим точку пересечения общих касательных к коникам пучка в двойных вершинах через T . Ткань вполне определяется четверкой точек A_1 , A_4 , m и T .

С другой стороны, существует ∞^1 проективных преобразований, которые одну такую четверку точек переводят в аналогичную. Отсюда вытекает, во-первых, что любые две ткани типа $\widetilde{W}'_{22.3}$ проективно эквивалентны, и во-вторых, что ткань $\widetilde{W}'_{22.3}$ допускает однопараметрическое семейство проективных автоморфизмов.

Метрическая модель ткани $\widetilde{W}'_{22.2}$ получается удалением прямой $\tilde{m}_1\tilde{m}_2$ в бесконечность. Если считать комплексно сопряженные точки $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ точками Лагерра, то PH -пучок коник $\tilde{\lambda}_1$ становится параболическим пучком окружностей, и ткань $\widetilde{W}'_{22.2}$ становится круговой три-тканью. Это класс 6.1 по классификации Лазаревой, см. [1].

2-2. Проективная классификация три-тканей $\widetilde{W}''_{22}$.

Обозначим $\widetilde{W}''_{22.1}$ ткани $\widetilde{W}''_{22}$, у которых точки $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ вещественные, $\widetilde{W}''_{22.2}$ – если точки $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ мнимые, $\widetilde{W}''_{22.3}$, если $\tilde{m}_1 = \tilde{m}_2 \equiv t$. Если, например, $\tilde{m}_1 = \tilde{m}_3$, то получаем $a_{114} = 0$, что противоречит (4.6). Таким образом, существует всего три типа тканей $\widetilde{W}''_{22}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.7. 1) *Существует ∞^1 проективно различных тканей типа $\widetilde{W}''_{22.1}$ и $\widetilde{W}''_{22.2}$.*

2) *Любые две ткани типа $\widetilde{W}''_{22.3}$ проективно эквивалентны.*

3) *Ткань $\widetilde{W}''_{22.3}$ допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) У тканей $\widetilde{W}''_{22.1}$ и $\widetilde{W}''_{22.2}$ есть один инвариант – сложное отношение точек $A_1, A_3, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2$ на прямой A_1A_3 (обозначим его I). Отсюда вытекает первая часть предложения 6.7.

Чтобы задать ткань $\widetilde{W}''_{22.1}$, надо задать координаты точек $A_2, A_3, \tilde{m}_3$ (6 параметров), параметр прямой A_1A_3 в пучке прямых с вершиной A_3 и координату одной из вершин PE -пучка, например, $\tilde{m}_1$ – всего 8 параметров. Тогда точка A_1 определится как пересечение прямых $A_2\tilde{m}_3$ и $A_3\tilde{m}_1$, а вторая вершина $\tilde{m}_2$ PE -пучка найдется с помощью сложного отношения.

Аналогичные рассуждения проводятся и для ткани $\widetilde{W}''_{22.2}$.

Ткань $\widetilde{W}''_{22.3}$ определится заданием точек $A_2, A_3, \tilde{m}_3$ и параметром базисной коники $\Phi_2(A_4)$ в SP -пучке $\tilde{\lambda}_1$ (сам пучок определен тройной вершиной A_2 , касательной A_2A_3 в ней, и простой вершиной $\tilde{m}_3$). Итак, всего 7 параметров, откуда $a = 8 - 7 = 1$.

2-3. Проективная классификация три-тканей $\widetilde{W}_{23}$.

Произвольная три-ткань $\widetilde{W}_{23}$ образована PE -пучком коник $\tilde{\lambda}_1$ с двукратной вершиной A_2 и простыми вершинами A_3 и $\tilde{m}_2$, WP -пучком коник $\tilde{\lambda}_2$ с кратными вершинами A_3 и $\tilde{m}_2$, и пучком прямых с вершиной A_2 (см. § 4, п. 3-4 и рис. 4). Пучки $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ имеют общую базисную конику $\Phi_2(A_4)$. Если точки A_3 и $\tilde{m}_2$ различны, то соответствующую три-ткань обозначим $\widetilde{W}_{23.1}$. Если эти точки совпадают, то $\tilde{\lambda}_1$ становится WP -пучком с кратными вершинами A_2 и A_3 , а $\tilde{\lambda}_2$ – UP -пучком с четырехкратной вершиной A_3 . Коники обоих пучков имеют в вершине A_3 общую касательную A_1A_3 . Обозначим такие ткани $\widetilde{W}_{23.2}$.

Ткани $\widetilde{W}_{23.1}$ и $\widetilde{W}_{23.2}$ имеют проективный инвариант I – сложное отношение точек A_1, A_2, T_1, T_2 на касательной A_1A_2 , где T_1 и T_2 – точки на касательных t_1 и t_2 к коникам WP -пучка в кратных вершинах A_3 и $\tilde{m}_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.8. Любые две ткани типа $\widetilde{W}_{23.1}$ ($\widetilde{W}_{23.2}$) с одинаковым инвариантом проективно эквивалентны. Ткань $\widetilde{W}_{23.2}$ допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ткань $\widetilde{W}_{23.1}$ однозначно определяется восемью параметрами: координатами точек A_1, A_3 , координатой точки $\tilde{m}_2$ на прямой A_1A_3 и параметрами касательных A_1A_2, t_1 и t_2 . Вершина A_2 P -пучка на A_1A_2 определяется инвариантом I .

Ткань $\widetilde{W}_{23.2}$ определяется семью параметрами: координатами точек A_1, A_2, A_3 и параметром базисной коники $\Phi_2(A_4)$ в WP -пучке $\tilde{\lambda}_1$.

Ткань $\widetilde{W}_{24}$ совпадает с тканью $\widetilde{W}_{11.4}$, а ткань $\widetilde{W}'_{24}$ – с тканью $\widetilde{W}_{33}$, которую мы рассмотрим ниже.

2-4. Проективная классификация три-тканей $\widetilde{W}'_{25}$.

Согласно § 4 ткани $\widetilde{W}'_{25}$ могут быть трех типов: вершины $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ P -пучка $\tilde{\lambda}_2$

- а) вещественные и различные (ткани $\widetilde{W}'_{25.1}$);
- б) мнимые (ткани $\widetilde{W}'_{25.2}$);
- в) совпадают (ткани $\widetilde{W}'_{25.3}$).

В первых двух случаях семейства ткани задаются четверкой точек $A_4, A_1, \tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$, причем три последних лежат на одной прямой. Эта конструкция задается семью параметрами. А в случае, если точки $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ совпадают (ткани $\widetilde{W}'_{25.3}$), – шестью параметрами. Отсюда вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.9. Любые две ткани типа $\widetilde{W}'_{25.i}$, $i = 1, 2, 3$, проективно эквивалентны. Всякая ткань этого типа $\widetilde{W}'_{25.1}$ или $\widetilde{W}'_{25.2}$ допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов. Ткань типа $\widetilde{W}'_{25.3}$ допускает двухпараметрическую группу проективных автоморфизмов.

Ткань $\widetilde{W}'_{25.2}$ эквивалентна круговой ткани, образованной двумя параболическими пучками окружностей и эллиптическим пучком, вершины которого совпадают с вершинами параболических пучков, при этом все пучки имеют общую окружность (класс 6.2 по классификации Лазаревой).

2-5. Проективная классификация три-тканей $\widetilde{W}''_{25}$.

Согласно § 4 ткани $\widetilde{W}''_{25}$ могут быть трех типов: вершины $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ P -пучка $\tilde{\lambda}_2$

- а) вещественные и различные (ткани $\widetilde{W}''_{25.1}$);
- б) мнимые (ткани $\widetilde{W}''_{25.2}$);
- в) совпадают.

В последнем случае получается ткань $\widetilde{W}_{23.2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.10. Любые две ткани типа $\widetilde{W}''_{25.1}$ или типа $\widetilde{W}''_{25.2}$ проективно эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ткань $W''_{25.1}$ вполне определяется заданием пары точек A_1 и A_2 (4 параметра), параметром прямой $\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2$ в пучке прямых с вершиной A_1 , параметрами точек $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ на прямой $\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2$ и параметром базисной коники $\Phi_2(A_4)$ в P -пучке $\tilde{\lambda}_2$ – всего 8 параметров. Для тканей типа $W''_{25.2}$ рассуждения аналогичны.

2-6. Проективная классификация три-тканей $\widetilde{W}'''_{25}$.

В соответствии с § 4, п. 3-9, второе и третье семейства ткани $\widetilde{W}'''_{25}$ вполне определяются тройкой точек A_1 , A_2 и A_4 . Однако первое семейство (UP -пучок коник) своей четверной вершиной A_2 и касательной в ней $x^4 = 0$ задается неоднозначно (см. предложение 0.1). Чтобы задать этот пучок, надо фиксировать его базисную конику $\lambda = 0$, которая входит во второе семейство – WP -пучок. Таким образом, ткань вполне определяется семью параметрами: координатами точек A_1 , A_2 , A_4 и параметром коники в WP -пучке. Поэтому верно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.11. Любые две ткани типа $\widetilde{W}'''_{25}$ проективно эквивалентны; ткань $\widetilde{W}'''_{25}$ допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов.

2-7. Проективная классификация три-тканей $\widetilde{W}_{26}$ и $\widetilde{W}_{27}$.

Как видно из § 4, пп. 3-10, 3-11, ткани $\widetilde{W}_{26}$ и $\widetilde{W}_{27}$ не допускают проективно различных типов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.12. 1) Любые две ткани типа $\widetilde{W}_{26}$ проективно эквивалентны; ткань $\widetilde{W}_{26}$ допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов.

2) Любые две ткани типа $\widetilde{W}_{27}$ проективно эквивалентны; ткань $\widetilde{W}_{27}$ допускает двухпараметрическую группу проективных автоморфизмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Три-ткань $\widetilde{W}_{26}$ образована SP -пучком коник $\tilde{\lambda}_1$ с тройной вершиной A_4 и простой вершиной $\tilde{m}_1$ и двумя пучками прямых с вершинами A_1 и A_4 , причем $\tilde{m}_1 \in A_1A_4$ и прямая A_3A_4 есть общая касательная коник пучка $\tilde{\lambda}_1$ в вершине A_4 , см. § 4, п. 3-10. Эта конструкция зависит от шести параметров: координат точек A_1 и A_4 , координаты точки $\tilde{m}_1$ на прямой A_1A_4 и параметра касательной A_3A_4 в пучке с вершиной A_4 .

Согласно § 4, п. 3-11, ткань $\widetilde{W}_{27}$ образована UP -пучком коник $\tilde{\lambda}_1$ с четырехкратной вершиной A_4 и двумя пучками прямых с вершинами A_1 и A_4 , причем A_1A_4 – общая касательная коник пучка $\tilde{\lambda}_1$ в вершине A_4 . Эта конструкция определяется шестью параметрами: координатами точек A_1 , A_4 и двумя параметрами пучка UP -пучка $\tilde{\lambda}_1$ в гиперсвязке коник, определяемой четырехкратной вершиной A_4 и общей касательной A_1A_4 (см. предложение 0.1).

6.3. Проективная классификация три-тканей $\widetilde{W}_3$. Ткань $\widetilde{W}'_{32}$ (см. § 5, п. 5.2) совпадает с тканью $\widetilde{W}''_{22.3}$.

3-1. Ткань $\widetilde{W}''_{32}$ (см. § 5, п. 5.2) вполне определяется тройкой точек A_i , $i = 1, 2, 3$, (шесть параметров) и выбором базисной коники $a_{224}(x^2)^2 + 2a_{134}x^1x^3 = 0$ в WP -пучке (один параметр), т.е. семью параметрами.

Три-ткань $\widetilde{W}_{33}$ (см. § 5, п. 2-5) вполне определяется двумя прямыми $\ell_2 = A_3A_1$ и $\ell_3 = A_1A_2$, проходящими через точку A_1 , и двумя точками $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$, лежащими на прямой $\ell_1 = A_2A_3$. Ткани, у которых точки $\tilde{m}_1$ и $\tilde{m}_2$ вещественные и различные, обозначим $\widetilde{W}_{33,1}$, комплексно-сопряженные – $\widetilde{W}_{33,2}$, совпавшие – $\widetilde{W}_{33,3}$ (эта ткань выделяется соотношением $(a_{234})^2 = a_{224}a_{334}$ на коэффициенты кубики (5.18)). У тканей $\widetilde{W}_{33,1}$ и $\widetilde{W}_{33,2}$ сложное отношение прямых ℓ_2 , ℓ_3 , $\tilde{m}_1$ и $A_1\tilde{m}_2$ является инвариантом ткани.

Таким образом, верно

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.13. 1) Любые две ткани типа $\widetilde{W}_{32}''$ проективно эквивалентны; ткань $\widetilde{W}_{32}''$ допускает однопараметрическое семейство проективных автоморфизмов.

2) Существует ∞^1 проективно различных тканей $\widetilde{W}_{33,1}$ и $\widetilde{W}_{33,2}$, причем любая ткань этих типов допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов.

3) Любые две ткани типа $\widetilde{W}_{33,3}$ проективно эквивалентны; ткань $\widetilde{W}_{33,3}$ допускает двухпараметрическую группу проективных автоморфизмов.

Поскольку все коники ткани $\widetilde{W}_{33,2}$ проходят через пару комплексно-сопряженных точек, то ткань $\widetilde{W}_{33,2}$ проективно эквивалентна круговой ткани. Последняя образована двумя параболическими пучками окружностей с общей вершиной A_1 и эллиптическим пучком окружностей, одна из вершин которого совпадает с A_1 . Следовательно, все 3 пучка принадлежат одной параболической связке окружностей, и мы получаем класс 0 по классификации Лазаревой.

Результаты этого параграфа объединяет

ТЕОРЕМА 6.1. Существует 38 проективно различных типов триангуляций плоскости пучками коник, соответствующих проективно различным типам тканей $\widetilde{W}$, перспективно эквивалентных регулярным специальным тканям Бурау на невырожденных кубических поверхностях. Это ткани: $\widetilde{W}_{11,k}$, $k = 1, \dots, 6$; $\widetilde{W}_{12,1}'$; $\widetilde{W}_{12,k}$, $k = 1, \dots, 6$; $\widetilde{W}_{13,k}$, $k = 1, \dots, 5$; $\widetilde{W}_{22,k}'$, $k = 1, 2, 3$; $\widetilde{W}_{22,k}''$, $k = 1, 2, 3$; $\widetilde{W}_{23,1}$, $\widetilde{W}_{23,2}$; $\widetilde{W}_{25,k}'$, $k = 1, 2, 3$; $\widetilde{W}_{25,k}''$, $k = 1, 2$; $\widetilde{W}_{26}$; $\widetilde{W}_{27}$; $\widetilde{W}_{32}''$, $\widetilde{W}_{33,k}$, $k = 1, 2, 3$; W_0 .

Из них ткани $\widetilde{W}_{12,1}'$, $\widetilde{W}_{12,4}$, $\widetilde{W}_{12,5}$, $\widetilde{W}_{13,k}$ ($k = 1, 2, 3$), $\widetilde{W}_{22,1}'$, $\widetilde{W}_{22,2}'$, $\widetilde{W}_{22,1}''$, $\widetilde{W}_{22,2}''$, $\widetilde{W}_{23,1}$, $\widetilde{W}_{33,1}$, $\widetilde{W}_{33,2}$ имеют один проективный инвариант, т.е. каждый из этих типов содержит ∞^1 проективно различных тканей; ткани $\widetilde{W}_{12,k}$, $k = 1, 2, 3$, имеют два проективных инварианта.

Ткани $\widetilde{W}_{11,3}$, $\widetilde{W}_{11,4}$, $\widetilde{W}_{22,i}'$, $i = 1, 2, 3$, $\widetilde{W}_{22,3}''$, $\widetilde{W}_{23,2}$, $\widetilde{W}_{25,1}'$, $\widetilde{W}_{25,2}'$, $\widetilde{W}_{32}''$, $\widetilde{W}_{33,i}$, $i = 1, 2, 3$, допускают однопараметрическую группу проективных автоморфизмов; ткани $\widetilde{W}_{11,5}$, $\widetilde{W}_{11,6}$, $\widetilde{W}_{25,3}'$, $\widetilde{W}_{26}$, $\widetilde{W}_{27}$, W_0 допускают двухпараметрическую группу проективных автоморфизмов.

Ткани $\widetilde{W}_{11,2}$, $\widetilde{W}_{22,2}'$, $\widetilde{W}_{33,2}$ и $\widetilde{W}_{25,2}'$ проективно эквивалентны круговым тканям (классы 4, 6.1, 0 и 6.2 соответственно в классификации Лазаревой).

ЗАМЕЧАНИЕ. 1. Проективную классификацию тканей, обладающих инвариантами, можно детализировать.

2. Мы указывали максимальные группы автоморфизмов, строение которых также можно детализировать. Кроме того, некоторые ткани допускают дискретные группы автоморфизмов.

3. Рамки статьи не позволили описать строение кубических поверхностей, несущих специальные регулярные ткани Бурау, и привести рисунки для всех классов тканей.

Список литературы

- [1] В. Б. Лазарева, А. М. Шелехов, “О триангуляциях плоскости пучками коник”, *Матем. сб.*, **198**:11 (2007), 107–134; англ. пер.: V. B. Lazareva, A. M. Shelekhov, “On triangulations of the plane by pencils of conics”, *Sb. Math.*, **198**:11 (2007), 1637–1663.
- [2] В. Бляшке, *Введение в геометрию тканей*, Физматгиз, М., 1959; пер. с нем.: W. Blaschke, *Einführung in die Geometrie der Waben*, Birkhäuser, Berlin, 1955.
- [3] М. А. Акивис, А. М. Шелехов, *Geometry and algebra of multidimensional three-webs*, *Math. Appl. (Soviet Ser.)*, **82**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1992.
- [4] J.-P. Dufour, “Familles de courbes planes différentiables”, *Topology*, **22**:4 (1983), 449–474.
- [5] J.-P. Dufour, P. Jean, “Rigidity of webs and families of hypersurfaces”, *Singularities and dynamical systems* (Iraklion, 1983), North-Holland Math. Stud., **103**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1985, 271–283.
- [6] В. Б. Лазарева, “Классификация регулярных круговых три-тканей с точностью до круговых преобразований”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **16**:1 (2010), 95–107; англ. пер.: V. B. Lazareva, “Classification of regular circle three-webs up to circular transformations”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **177**:4 (2011), 579–588.

В. Б. Лазарева (V. B. Lazareva)
Тверской государственный университет
E-mail: amsholekhov@rambler.ru

Поступила в редакцию
03.04.2008 и 05.02.2013

А. М. Шелехов (A. M. Shelekhov)
Тверской государственный университет
E-mail: amsholekhov@rambler.ru