Общероссийский математический портал

И. Х. Мусин, О преобразовании Фурье–Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 10, 57–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 02:17:38

УДК 517.982.3

И. Х. Мусин

О преобразовании Фурье–Лапласа функционалов на весовом пространстве бесконечно дифференцируемых функций

В работе с помощью преобразования Фурье–Лапласа описано сопряженное пространство к весовому пространству G бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой. Полученный результат используется при исследовании сюръективности в G линейного дифференциального оператора бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

Библиография: 20 названий.

§ 1. Введение

Всюду далее $M_0 = 1, M_1, M_2, \dots$ – возрастающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям:

- (i) $M_k^2 \leq M_{k-1}M_{k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}$;
- (ii) существуют постоянные $H_1 > 0, H_2 > 1$ такие, что

$$M_{k+n} \leq H_1 H_2^{k+n} M_k M_n \quad \forall k, n \in \mathbb{Z}_+;$$

- (iii) существуют положительные числа Q_1, Q_2 такие, что

$$M_k \geq Q_1 Q_2^k k! \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+.$$

Полагая $M_k = (k!)^s$ или $M_k = k^{ks}, k \in \mathbb{N}$, получим при $s \geq 1$ важные примеры таких последовательностей.

Положим

$$w(r) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^k}{M_k}, \quad r > 0, \quad w(0) = 0.$$

Функция w непрерывна на неотрицательной полуоси [1; гл. 1, п. 8]. Из того, что $w(r) = 0$ для $r \in [0, M_1]$, и условия (iii) следует, что найдется положительное число A_w такое, что

$$w(r) \leq A_w r, \quad r \geq 0. \tag{1}$$

Очевидно, $w(|z|), z \in \mathbb{C}$, – субгармоническая функция в комплексной плоскости.

Обозначим через $D(z, t)$ ($\overline{D}(z, t)$), $z \in \mathbb{C}, t > 0$, открытый (замкнутый) круг радиуса t с центром в точке z , через $\partial D(z, t)$ – его границу.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00655).

Всюду далее $\alpha > 1$ – фиксированное число, $\psi: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ – выпуклая функция, удовлетворяющая условиям:

1) существует постоянная $A_\psi > 0$ такая, что для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$|\psi(x_1) - \psi(x_2)| \leq A_\psi(1 + |x_1| + |x_2|)^{\alpha-1}|x_1 - x_2|; \quad (2)$$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x)}{|x|} = +\infty$;

Пусть для выпуклой функции g на вещественной прямой такой, что $\frac{g(x)}{|x|} \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \infty$, $g^*(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} (xy - g(y))$, $x \in \mathbb{R}$, – преобразование Юнга функции g . Известно [2], что g^* – выпуклая функция, $\frac{g^*(x)}{|x|} \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \infty$ и справедлива формула обращения преобразования Юнга: $(g^*)^* = g$.

Положим $\varphi = \psi^*$. Из неравенства (2) следует, что при некоторых положительных A_φ, B_φ

$$\varphi(x) > A_\varphi|x|^{\alpha/(\alpha-1)} - B_\varphi, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Как обычно, $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций на вещественной прямой с топологией компактной сходимости всех производных, $C(\mathbb{R})$ – пространство непрерывных функций на вещественной прямой. Пусть для произвольной области Ω в $\mathbb{C}$ $\mathcal{D}(\Omega)$ – пространство всех бесконечно дифференцируемых функций, финитных в Ω , с обычной топологией [3]. Через $H(\mathbb{C})$ обозначим пространство целых функций с топологией равномерной сходимости на компактах комплексной плоскости. Для произвольного локально выпуклого пространства X через X^* обозначим сильное сопряженное пространство.

Для краткости положим $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(x) - \varepsilon^{-1} \ln(1 + |x|)$, $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

С помощью нормированных пространств

$$G(\varphi_\varepsilon) = \left\{ f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) : \|f\|_{\varphi_\varepsilon} = \sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|f^{(k)}(x)|}{\varepsilon^k M_k \exp(\varphi_\varepsilon(x))} < \infty \right\}, \quad \varepsilon > 0,$$

построим пространство $G = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{pr}_\varepsilon G(\varphi_\varepsilon)$.

Введем в рассмотрение пространство P целых функций как индуктивный предел нормированных пространств

$$P(\varepsilon) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : p_\varepsilon(f) = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(\psi(\text{Im } z) + w(\varepsilon^{-1}|z|))} < \infty \right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Преобразование Фурье–Лапласа $\hat{T}$ функционала $T \in G^*$ определяется формулой

$$\hat{T}(z) = T(e^{-ixz}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 1. *Преобразование Фурье–Лапласа устанавливает топологический изоморфизм между пространствами G^* и P .*

Отметим, что пространства G и P могут быть описаны следующим образом. Пусть всюду далее $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ – строго убывающая к нулю последовательность положительных чисел. Обозначим $\exp(\varphi_{\varepsilon_m})$ через θ_m , $m \in \mathbb{N}$. Пусть

$$G_m = \left\{ f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) : \|f\|_{G,m} = \sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|f^{(k)}(x)|}{\varepsilon_m^k M_k \theta_m(x)} < \infty \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, $G = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{proj } G_m$.

Положим $w_m(|z|) = w(\varepsilon_m^{-1}|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть

$$P_m = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \|f\|_m = \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(\psi(\text{Im } z) + w_m(|z|))} < \infty \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что $P = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{ind } P_m$.

Доказательство теоремы 1 дано в § 4. В § 2 доказываются вспомогательные утверждения; некоторые из них используются на протяжении всей работы. В связи с доказательством инъективности преобразования Фурье–Лапласа в теореме 1 возникла необходимость в введении еще одного весового пространства и изучении преобразования Фурье–Лапласа линейных непрерывных функционалов над этим пространством. Этому и посвящен § 3. В § 5 дается применение теоремы 1 к разрешимости в G линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что пространство G несколько отличается от пространств типа S и W , изученных в [4] (например, в G не для всех элементов определено преобразование Фурье). Приведем пример пространства, наиболее близкого к G . Оно среди других в классе “пространств, определяемых оператором свертки” было введено в [5; п. 4] и определяется (ограничимся случаем одной переменной) как проективный предел нормированных пространств

$$G(\Gamma_m) = \left\{ f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) : \|f\|_{\Gamma_m} = \sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|f^{(k)}(x)|}{\varepsilon_m^k M_k \exp(\gamma_m(x))} < \infty \right\},$$

где $\Gamma = \{\gamma_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ – семейство неотрицательных выпуклых функций таких, что для любого $m \in \mathbb{N}$:

$$(Г1) \quad \gamma_{m+1}(x) < \gamma_m(x), x \in \mathbb{R};$$

$$(Г2) \quad \frac{\gamma_m(x)}{|x|} \rightarrow +\infty \text{ при } |x| \rightarrow +\infty;$$

$$(Г3) \quad \text{существуют } \eta > 0 \text{ и } n \in \mathbb{N} \text{ такие, что } \sup_{|y| \leq 1} \gamma_n(x+y) + \eta|x| \leq \gamma_m(x).$$

В работе [5] получено описание сопряженного к “пространствам, определяемым оператором свертки”. Однако для применения метода, использованного там, условие (Г3) существенно. В нашей задаче условие типа (Г3) не выполняется. Поэтому для ее решения используется другой способ. Для случая одного переменного (а также в некоторых частных случаях и для многих переменных) он работает и для “пространств, определяемых оператором свертки”.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Сюръективность преобразования Фурье–Лапласа устанавливается с помощью представления целых функций из пространства P в виде ряда Лагранжа. Идея воспользоваться таким приемом взята из работы [6]. Для реализации этой идеи строится специальная целая функция. При этом используются результаты Р. С. Юлмухаметова [7] и М. И. Соломеша [8]–[10]. Опишем кратко один частный случай из результатов, полученных М. И. Соломешем (см. [8; гл. 2, § 3], [9]).

Пусть f – произвольная целая функция с нулями $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ соответствующих кратностей $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$. Разложение Вейерштрасса функции f имеет вид (см. [11]):

$$f(\lambda) = g(\lambda) \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right)^{m_j} \exp\left(P_j\left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)\right), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где g – целая функция, не имеющая нулей, P_j – специальным образом подобранные полиномы, $j \in \mathbb{N}$. Пусть последовательность $t = \{t_j\}_{j=1}^{\infty}$ комплексных чисел такова, что $\lambda_j + t_j \neq 0$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Функции f сопоставляется произведение

$$f_t(\lambda) = g(\lambda) \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j + t_j}\right)^{m_j} \exp\left(P_j\left(\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)\right), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

В этих предположениях результат М. И. Соломеша формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА S. Пусть $\lambda_j + t_j$ лежат в непересекающихся кружках $D(\lambda_j, r_j)$, $r_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, и $\sum_{j=1}^{\infty} m_j |t_j|/r_j < \infty$.

Тогда f_t – целая функция, причем для λ вне $\bigcup_{j=1}^{\infty} D(\lambda_j, r_j)$

$$|\ln |f_t(\lambda)| - \ln |f(\lambda)|| \leq C,$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Всюду далее для определенности $\varepsilon_m = H_2^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$.

§ 2. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. Для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ справедливо неравенство

$$|w(|z_2|) - w(|z_1|)| \leq A_w e |z_2 - z_1|. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N(r) = \min\{k \in \mathbb{Z}_+ : w(r) = \ln(r^k/M_k)\}$, $r > 0$. Пользуясь неравенством из [6; лемма 1.2]: $w(r) - w(1) \geq N(r/e)$, $r > 1$, и оценкой (1), получаем

$$N(r) \leq A_w e r, \quad r > e^{-1}. \quad (5)$$

Из равенства (см. [1; гл. 1, п. 8], [6; лемма 1.2])

$$w(r) - w(1) = \int_1^r \frac{N(x)}{x} dx, \quad r > 1,$$

и оценки (5) выводим, что:

$$w(r_2) - w(r_1) \leq A_w e (r_2 - r_1), \quad r_2 > r_1 > 1;$$

$$w(r_2) - w(r_1) = w(r_2) - w(1) \leq A_w e (r_2 - 1) \leq A_w e (r_2 - r_1), \quad r_2 > 1, \quad r_1 \in [0, 1].$$

Из того, что $w(r) = 0$ для $r \in [0, M_1]$, и из двух последних неравенств следует утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В лемме 1 утверждается то же самое, что и в [6; лемма 1.2, п. 2б], но при меньших ограничениях на последовательность $\{M_k\}_{k=0}^\infty$.

ЛЕММА 2. Для любых $A > 0, m \in \mathbb{N}$ существует положительная постоянная Q такая, что

$$w_m(|z|) + A \ln(1 + |z|) \leq w_{m+1}(|z|) + Q, \quad z \in \mathbb{C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N = [A] + 1$. Пользуясь условием (ii), имеем при $r > 1$

$$\begin{aligned} w_m(r) + N \ln r &= \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^k}{\varepsilon_m^k M_k} + \ln r^N = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{r^{k+N}}{\varepsilon_m^k M_k} \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{(rH_2)^{k+N} H_1 M_N}{\varepsilon_m^k M_{k+N}} \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \ln \frac{(rH_2)^n}{\varepsilon_m^n M_n} + \ln(\varepsilon_m^N H_1 M_N). \end{aligned}$$

В силу специального выбора последовательности $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ (см. замечание 3) имеем при $r > 1$

$$w_m(r) + N \ln r \leq w_{m+1}(r) + \ln(\varepsilon_m^N H_1 M_N).$$

Отсюда легко следует утверждение леммы.

Следующие две леммы показывают, что пространства G и P принадлежат специальным классам локально выпуклых пространств, изученным в [12].

ЛЕММА 3. Пространство G – пространство (M^*) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению пространства (M^*) надо показать, что вложения $i_{m+1,m} : G_{m+1} \rightarrow G_m$ вполне непрерывны для каждого $m \in \mathbb{N}$, т.е. образ шара $\mathcal{B}_r = \{f \in G_{m+1} : \|f\|_{G,m+1} \leq r\}$, $r > 0$, в G_m при отображении $i_{m+1,m}$ относительно компактен в G_m .

Легко видеть, что множество $\mathcal{B}_r$ относительно компактно в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, т.е. можно найти последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}_r$, сходящуюся в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ к некоторому $f_0 \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ при $n \rightarrow \infty$. Отметим, что $\|f_0\|_{G,m+1} \leq r$.

Покажем, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится в G_m к f_0 при $n \rightarrow \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Выберем $a > 0$ и натуральное p так, что $\frac{\theta_{m+1}(x)}{\theta_m(x)} < \frac{\varepsilon}{2r}$

для $|x| > a$, $\left(\frac{\varepsilon_{m+1}}{\varepsilon_m}\right)^p < \frac{\varepsilon}{2r}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{|x| > a, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|f_n^{(k)}(x) - f_0^{(k)}(x)|}{\varepsilon_m^k M_k \theta_m(x)} &\leq 2r \sup_{|x| > a, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\varepsilon_{m+1}^k \theta_{m+1}(x)}{\varepsilon_m^k \theta_m(x)} \\ &< 2r \sup_{|x| > a} \frac{\theta_{m+1}(x)}{\theta_m(x)} < \varepsilon; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \sup_{|x| \leq a, k > p} \frac{|f_n^{(k)}(x) - f_0^{(k)}(x)|}{\varepsilon_m^k M_k \theta_m(x)} &\leq 2r \sup_{|x| \leq a, k > p} \frac{\varepsilon_{m+1}^k \theta_{m+1}(x)}{\varepsilon_m^k \theta_m(x)} \\ &< 2r \sup_{k > p} \frac{\varepsilon_{m+1}^k}{\varepsilon_m^k} < \varepsilon. \end{aligned} \quad (7)$$

Так как $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится в $\mathcal{E}(\mathbb{R})$ к f_0 при $n \rightarrow \infty$, то найдется натуральное $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$

$$\sup_{|x| \leq a, 0 \leq k \leq p} \frac{|f_n^{(k)}(x) - f_0^{(k)}(x)|}{\varepsilon_m^k M_k \theta_m(x)} < \varepsilon. \quad (8)$$

Из оценок (6)–(8) следует, что $\|f_n - f_0\|_{G,m} < \varepsilon$ для всех $n > N(\varepsilon)$. Таким образом, из шара $\mathcal{B}_r$ в G_{m+1} удалось выделить последовательность, сходящуюся в G_m . Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 и [12; теорема 5] имеем

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пространство G^* – пространство (LN^*) .*

ЛЕММА 4. *Пространство P – пространство (LN^*) .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо показать, что вложения $\gamma_{m,m+1}: P_m \rightarrow P_{m+1}$ вполне непрерывны при любом натуральном m , т.е. образ шара $U_r = \{f \in P_m : \|f\|_m \leq r\}$, $r > 0$, в P_m при отображении $\gamma_{m,m+1}$ относительно компактен в P_{m+1} .

По теореме Монтеля выделим последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset U_r$, сходящуюся в $H(\mathbb{C})$ к некоторому $f_0 \in H(\mathbb{C})$ при $n \rightarrow \infty$. Отметим, что $\|f_0\|_m \leq r$. Покажем, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ сходится в P_{m+1} к f_0 при $n \rightarrow \infty$. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Для любого $a > 0$

$$\sup_{|z| > a} \frac{|f_n(z) - f_0(z)|}{\exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|z|))} \leq 2r \sup_{|z| > a} \exp(w_m(|z|) - w_{m+1}(|z|)). \quad (9)$$

Учитывая лемму 2, выберем a настолько большим, что правая часть последнего неравенства станет меньше ε . Далее, в силу равномерной сходимости на компактах последовательности $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ к f_0 при $n \rightarrow \infty$ существует натуральное $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N(\varepsilon)$

$$\sup_{|z| \leq a} \frac{|f_n(z) - f_0(z)|}{\exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|z|))} < \varepsilon. \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что $\|f_n - f_0\|_{m+1} < \varepsilon$ для всех $n > N(\varepsilon)$. Таким образом, из шара U_r в P_m удалось выделить последовательность, сходящуюся в P_{m+1} . Это означает, что множество $\gamma_{m,m+1}(U_r)$ относительно компактно в P_{m+1} . Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. *Пусть $T \in G^*$; скажем, при некоторых $m_0 \in \mathbb{N}$, $c > 0$*

$$|T(f)| \leq c \|f\|_{G,m_0}, \quad f \in G.$$

Тогда T представляется в виде

$$T(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_{m_0}^k M_k} \int_{\mathbb{R}} \frac{f^{(k)}(x)}{\theta_{m_0}(x)} d\mu_k(x), \quad f \in G,$$

где μ_k – комплексные ограниченные меры в $\mathbb{R}$, причем $\int_{\mathbb{R}} d|\mu_k|(x) \leq c$ для всех $k \in \mathbb{Z}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$E = \left\{ \underline{f} = (f_0, f_1, \dots, f_k, \dots) \ (f_k \in C(\mathbb{R})) : \right. \\ \left. \|\underline{f}\|_{m,E} = \sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|f_k(x)|}{\varepsilon_m^k M_k \theta_m(x)} < \infty \ \forall m \in \mathbb{N} \right\}$$

— пространство последовательностей, наделенное топологией, определяемой системой норм $\|\cdot\|_{m,E}$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть $\tilde{G} = \{\tilde{f} = (f, f', \dots, f^{(k)}, \dots) : f \in G\}$. Очевидно, множество $\tilde{G}$ является векторным подпространством в E . Если наделить $\tilde{G}$ топологией, индуцированной из E , то оно будет замкнутым подпространством в E .

Определим функционал $\tilde{T}$ на $\tilde{G}$ по формуле $\tilde{T}(\tilde{f}) = T(f)$, $f \in G$. Тогда $\tilde{T}$ — линейный непрерывный функционал на $\tilde{G}$. По теореме Хана–Банаха продолжим $\tilde{T}$ до линейного непрерывного функционала $\underline{T}$ на E . Тогда

$$|\underline{T}(\underline{f})| \leq c \|\underline{f}\|_{m_0,E}, \quad \underline{f} \in E. \quad (11)$$

Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ функционал $\underline{T}$ порождает линейный непрерывный функционал T_k на пространстве

$$W_k = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) : \|f\|_m^{(k)} = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\varepsilon_m^k M_k \theta_m(x)} < \infty \ \forall m \in \mathbb{N} \right\}$$

по правилу $T_k(f) = \underline{T}(i_k(f))$, $f \in W_k$, где $i_k(f)$ — последовательность, $(k+1)$ -й член которой есть f , а все остальные компоненты — нули. В силу (11)

$$|T_k(f)| \leq c \|f\|_{m_0}^{(k)}, \quad f \in W_k. \quad (12)$$

Положим

$$g_f(x) = \frac{f(x)}{\varepsilon_{m_0}^k M_k \theta_{m_0}(x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in W_k.$$

Для каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ определим функционал S_k на множестве

$$\widetilde{W}_k = \left\{ g_f : g_f(x) = \frac{f(x)}{\varepsilon_{m_0}^k M_k \theta_{m_0}(x)}, \ x \in \mathbb{R}, \ f \in W_k \right\}$$

по правилу $S_k(g_f) = T_k(f)$, $f \in W_k$. В силу плотности $\widetilde{W}_k$ в $C_0(\mathbb{R}) = \{f \in C(\mathbb{R}) : \|f\|_0 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| < \infty; f(x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty\}$ из оценки (12) следует неравенство $|S_k(g)| \leq c \|g\|_0$, $g \in C_0(\mathbb{R})$. Тогда по теореме Рисса функционал S_k имеет вид

$$S_k(g) = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu_k(x), \quad g \in C_0(\mathbb{R}),$$

где μ_k — комплексные ограниченные меры в $\mathbb{R}$, причем $\int_{\mathbb{R}} d|\mu_k|(x) \leq c$ для любого $k \in \mathbb{Z}_+$. Отсюда получаем, что функционал T_k представляется в виде

$$T_k(f) = \frac{1}{\varepsilon_{m_0}^k M_k} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\theta_{m_0}(x)} d\mu_k(x), \quad f \in W_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Так как для $\underline{f} = (f_0, f_1, \dots, f_k, \dots) \in E$ имеет место $\underline{T}(\underline{f}) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(f_k)$, а для $f \in G$ справедливо $\underline{T}(\tilde{f}) = \tilde{T}(\tilde{f}) = T(f)$, то

$$T(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_{m_0}^k M_k} \int_{\mathbb{R}} \frac{f^{(k)}(x)}{\theta_{m_0}(x)} d\mu_k(x), \quad f \in G.$$

Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Для любого $z \in \mathbb{C}$ функция $f_z(x) = \exp(-izx)$, $x \in \mathbb{R}$, принадлежит G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in \mathbb{C}$. Для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|f_z\|_{G,m} &= \sup_{x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|(-iz)^k \exp(-izx)|}{\varepsilon_m^k M_k \theta_m(x)} \\ &= \exp(w_m(|z|)) \exp\left(\sup_{x \in \mathbb{R}} (x \operatorname{Im} z - \ln \theta_m(x))\right). \end{aligned}$$

Оценим $\sup_{x \in \mathbb{R}} (x \operatorname{Im} z - \ln \theta_m(x))$ сверху. Из оценки (3) следует, что при некоторых положительных постоянных $A_m(\varphi)$, $B_m(\varphi)$

$$\varphi(x) - m \ln(1 + |x|) \geq A_m(\varphi)|x|^{\alpha/(\alpha-1)} - B_m(\varphi), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Поэтому найдется число $y_m > 0$, что для всех z таких, что $|\operatorname{Im} z| > y_m$, точная верхняя грань функции $x \operatorname{Im} z - \varphi(x) + m \ln(1 + |x|)$ на $\mathbb{R}$ будет достигаться в некоторой точке x_m из интервала $(-(2A_m^{-1}(\varphi)|\operatorname{Im} z|)^{\alpha-1}, (2A_m^{-1}(\varphi)|\operatorname{Im} z|)^{\alpha-1})$. Тогда при $|\operatorname{Im} z| > y_m$

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in \mathbb{R}} (x \operatorname{Im} z - \varphi(x) + m \ln(1 + |x|)) - \sup_{x \in \mathbb{R}} (x \operatorname{Im} z - \varphi(x)) \\ &\leq m \ln(1 + |x_m|) \leq m \ln(1 + (2A_m^{-1}(\varphi)|\operatorname{Im} z|)^{\alpha-1}) \\ &\leq m(\alpha - 1) \ln(1 + |\operatorname{Im} z|) + m(\alpha - 1) \ln(1 + 2A_m^{-1}(\varphi)) + m \ln 2. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой обращения преобразования Юнга и выбирая подходящую постоянную $b_m > 0$, добьемся выполнения неравенства

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (x \operatorname{Im} z - \ln \theta_m(x)) - \psi(\operatorname{Im} z) \leq m(\alpha - 1) \ln(1 + |\operatorname{Im} z|) + b_m, \quad (13)$$

справедливого при всех $z \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$\|f_z\|_{G,m} \leq \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_m(|z|) + m(\alpha - 1) \ln(1 + |\operatorname{Im} z|) + b_m), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пользуясь леммой 2, найдем постоянную $q_m > 0$ такую, что

$$w_m(|z|) + m(\alpha - 1) \ln(1 + |\operatorname{Im} z|) + b_m \leq w_{m+1}(|z|) + q_m, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (14)$$

И тогда

$$\|f_z\|_{G,m} \leq \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|z|) + q_m), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, $f_z \in G$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Пусть для $T \in G^*$ при некоторых $c > 0$, $m \in \mathbb{N}$

$$|T(f)| \leq c \|f\|_{G,m}, \quad f \in G. \quad (15)$$

Тогда $\widehat{T}$ – целая функция, удовлетворяющая оценке

$$|\widehat{T}(z)| \leq c \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|z|) + q_m), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (16)$$

где q_m – постоянная из неравенства (14). При этом $\widehat{T}$ представляется в виде

$$\widehat{T}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(z) z^k, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (17)$$

где V_k – целые функции, удовлетворяющие при некотором $A > 0$, не зависящем от k , оценке

$$|V_k(z)| \leq \frac{A(1 + |z|)^{m(\alpha-1)} \exp(\psi(\operatorname{Im} z))}{\varepsilon_m^k M_k}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь леммой 5, имеем

$$\widehat{T}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-iz)^k}{\varepsilon_m^k M_k} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-izz}}{\theta_m(x)} d\mu_k(x), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (19)$$

где μ_k – комплексные ограниченные меры в $\mathbb{R}$ такие, что для любого $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\int_{\mathbb{R}} d|\mu_k|(x) \leq c. \quad (20)$$

Пользуясь ограниченностью мер μ_k и оценкой

$$\left| \frac{e^{-izz}}{\theta_n(x)} \right| \leq \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + n(\alpha - 1) \ln(1 + |\operatorname{Im} z|) + b_n), \quad (21)$$

вытекающей из (13) и справедливой при любых $z \in \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, легко показать, что функция

$$V_k(z) = \frac{(-i)^k}{\varepsilon_m^k M_k} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-izz}}{\theta_m(x)} d\mu_k(x), \quad z \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

целая. Оценка (18) немедленно следует из (20), (21) при $n = m$. В силу условия (iii) и оценки (18) ряд в правой части (19) сходится в топологии пространства $H(\mathbb{C})$. Следовательно, $\widehat{T}$ – целая функция. Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. Пусть целая функция U при некотором $C_U > 0$ удовлетворяет оценке:

$$|U(z)| \leq \frac{C_U \exp(\psi(\operatorname{Im} z))}{1 + |z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда существует функция $p \in C(\mathbb{R})$ такая, что:

- (a) $\sup_{t \in \mathbb{R}} |p(t)| \exp(\varphi(t)) < \frac{C_U}{2}$;
- (b) $U(z) = \int_{\mathbb{R}} p(t) e^{-izt} dt, \quad z \in \mathbb{C}.$

Доказательство этой леммы проводится стандартным образом (см., например, [13]–[15]).

ЛЕММА 9. Пусть целая функция $F \in P$ имеет вид $F(z) = U(z)V(z)$, $z \in \mathbb{C}$, где целые функции U, V при некоторых $m \in \mathbb{N}$, положительных C_U, C_V удовлетворяют оценкам:

$$\begin{aligned} |U(z)| &\leq \frac{C_U \exp(\psi(\operatorname{Im} z))}{1 + |z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}; \\ |V(z)| &\leq C_V e^{w_m(|z|)}, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Тогда найдется функционал $T \in G^*$ такой, что $\hat{T} = F$, причем

$$|T(f)| \leq \beta_m C_U C_V \|f\|_{G, m+1}, \quad f \in G,$$

где β_m – некоторая постоянная, зависящая только от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 8 существует функция $p \in C(\mathbb{R})$ такая, что выполнены свойства (a) и (b).

Далее оценим коэффициенты Тейлора целой функции $V(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k$ по неравенству Коши:

$$|v_k| \leq C_V \inf_{r>0} \frac{\exp(w_m(r))}{r^k} = C_V \varepsilon_m^{-k} \inf_{r>0} \frac{\exp(w(r))}{r^k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Пользуясь равенством (см. [1; гл. 1, п. 8])

$$\inf_{r>0} \frac{\exp(w(r))}{r^k} = \frac{1}{M_k}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (22)$$

получаем

$$|v_k| \leq C_V \varepsilon_m^{-k} M_k^{-1}, \quad k \in \mathbb{Z}_+. \quad (23)$$

Определим функционал T на пространстве G по формуле

$$T(f) = \int_{\mathbb{R}} p(t) \sum_{k=0}^{\infty} v_k i^k f^{(k)}(t) dt, \quad f \in G.$$

Функционал T определен корректно. Действительно, для любого $f \in G$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} i^k v^k f^{(k)}(t) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |v_k| \|f\|_{G,m+1} \varepsilon_{m+1}^k M_k \theta_{m+1}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пользуясь оценкой (23), имеем для любого $f \in G$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} v_k i^k f^{(k)}(t) \right| \leq \beta_m C_V \|f\|_{G,m+1} \theta_{m+1}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\beta_m = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}}$. Следовательно, для любого $f \in G$

$$\begin{aligned} |T(f)| &\leq \beta_m C_V \|f\|_{G,m+1} \int_{\mathbb{R}} |p(t)| \exp(\varphi(t)) (1 + |t|)^{-(m+1)} dt \\ &\leq \beta_m C_U C_V \|f\|_{G,m+1}. \end{aligned}$$

Итак, $T \in G^*$. При этом

$$\hat{T}(z) = \int_{\mathbb{R}} p(t) \sum_{k=0}^{\infty} v_k i^k (-iz)^k e^{-izt} dt = U(z)V(z) = F(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Лемма 9 доказана.

Применение аппроксимационной теоремы Р. С. Юлмухаметова [6] в ходе доказательства теоремы 1 становится возможным благодаря нижеследующей лемме 10. Для ее формулировки и доказательства введем обозначения и напомним некоторые факты (см., например, [16]).

Для произвольной субгармонической в $\mathbb{C}$ функции u пусть μ_u – мера, ассоциированная по Риссу с u [16; гл. I, § 2, п. 1]; μ_u – σ -аддитивная неотрицательная функция множества, определенная на борелевских подмножествах $\mathbb{C}$ и конечная на всех компактах из $\mathbb{C}$, а для обобщенной функции $F_u \in \mathcal{D}^*(\mathbb{C})$, построенной по мере μ_u , справедливо равенство $F_u = \frac{1}{2\pi} \Delta u$, где Δ – оператор Лапласа.

ЛЕММА 10. Пусть для функции u , субгармонической в комплексной плоскости, при некоторых $\beta \geq 1$, $A_u > 0$

$$|u(z_1) - u(z_2)| \leq A_u (1 + |z_1| + |z_2|)^{\beta-1} |z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \quad (24)$$

Тогда для любого $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$, справедливо неравенство

$$\mu_u(\overline{D(z, t)}) \leq c_u |z|^{\beta-1} t, \quad t \in (0, |z|),$$

где $c_u > 0$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное $z_0 = x_0 + iy_0$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $z_0 \neq 0$. Пусть $t \in (0, |z_0|)$. Пусть для $\varepsilon \in (0, 1)$, $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, $K_\varepsilon(z) = C_\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |z|^2}\right)$ при $|z| < \varepsilon$, $K_\varepsilon(z) = 0$ при $|z| \geq \varepsilon$. Постоянная $C_\varepsilon > 0$ выбрана так, что $\int_{\mathbb{C}} K_\varepsilon(z) d\lambda(z) = 1$, где $d\lambda$ – мера Лебега в $\mathbb{C}$. Положим $u_\varepsilon(z) = \int_{\mathbb{C}} u(\xi) K_\varepsilon(z - \xi) d\lambda(\xi)$. Функции u_ε – бесконечно дифференцируемы в $\mathbb{C}$, и последовательность $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ сходится равномерно на компактах из $\mathbb{C}$ к u при $\varepsilon \rightarrow 0$. Из (24) следует, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$|u_\varepsilon(z_1) - u_\varepsilon(z_2)| \leq A_u(3 + |z_1| + |z_2|)^{\beta-1}|z_1 - z_2|, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Следовательно,

$$\max \left\{ \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}(z) \right|, \left| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}(z) \right| \right\} \leq A_u(3 + 2|z|)^{\beta-1}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (25)$$

Пусть функция $\eta \in \mathcal{D}(\mathbb{C})$ такова, что $\eta(z) = 1$ для $z \in D(z_0, t)$, $0 \leq \eta(z) \leq 1$ для $z \in \mathbb{C}$ и $\text{supp } \eta \subset \overline{D(z_0, t + \delta)}$. Обозначив через χ характеристическую функцию круга $\overline{D(z_0, t)}$, имеем

$$\begin{aligned} \mu_u(\overline{D(z_0, t)}) &= \int_{\overline{D(z_0, t)}} \chi(z) d\mu_u(z) \leq \int_{\overline{D(z_0, t + \delta)}} \eta(z) d\mu_u(z) = (F_u, \eta) = \frac{1}{2\pi} (u, \Delta \eta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u_\varepsilon, \Delta \eta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Delta u_\varepsilon, \eta) \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{0 < \varepsilon < 1} (\Delta u_\varepsilon, \eta) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{0 < \varepsilon < 1} \iint_{\Pi(z_0, t, \delta)} \left(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial^2 x}(x, y) + \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial^2 y}(x, y) \right) dx dy, \end{aligned}$$

где $\Pi(z_0, t, \delta) = \{(x, y) : |x - x_0| < t + \delta, |y - y_0| < t + \delta\}$. Пользуясь теперь оценкой (25) и проводя элементарные вычисления и оценки, получаем $\mu_u(\overline{D(z_0, t)}) < 2A_u(3 + 4(|z_0| + \delta))^{\beta-1}(t + \delta)$. Так как $\delta > 0$ было произвольно, то $\mu_u(\overline{D(z_0, t)}) \leq 2A_u(3 + 4|z_0|)^{\beta-1}t$. Отсюда получаем утверждение леммы для любого $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$.

Лемма 10 доказана.

§ 3. Пространство $\mathcal{E}(\Phi)$

Введем счетнонормированное пространство

$$\mathcal{E}(\Phi) = \left\{ f \in \mathcal{E}(\mathbb{R}) : \forall n \in \mathbb{Z}_+, m \in \mathbb{N} \quad \|f\|_{n,m} = \sup_{x \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq n} \frac{|f^{(k)}(x)|}{\theta_m(x)} < \infty \right\}.$$

Легко видеть, что $\mathcal{E}^*(\Phi) \subset G^*$. В этом параграфе будет описано пространство преобразований Фурье–Лапласа функционалов из $\mathcal{E}^*(\Phi)$. Это понадобится при доказательстве теоремы 1.

Если $F \in \mathcal{E}^*(\Phi)$, то существуют $c > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$ такие, что $|F(f)| \leq c\|f\|_{n,m}$, $f \in \mathcal{E}(\Phi)$. Поэтому, пользуясь оценкой (21), имеем при некотором $C > 0$

$$|F(\exp(-ixz))| \leq C(1 + |z|)^{n+m(\alpha-1)} \exp(\psi(\text{Im } z)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Согласно лемме 7 $\hat{F}$ – целая функция. Далее будет доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть $U \in H(\mathbb{C})$ удовлетворяет при некоторых $C > 0$, $N \in \mathbb{N}$ неравенству

$$|U(z)| \leq C(1 + |z|)^N \exp(\psi(\operatorname{Im} z)), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (26)$$

Тогда существует единственный функционал $T \in \mathcal{E}^*(\Phi)$ такой, что

$$T(\exp(-izx)) = U(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Причем

$$|T(f)| \leq C_1 C \|f\|_{N+2,2}, \quad f \in \mathcal{E}(\Phi),$$

где $C_1 > 0$ не зависит от U .

Доказательство единственности в теореме 2 основывается на полноте многочленов в $\mathcal{E}(\Phi)$. Поэтому сейчас будет исследоваться вопрос о полноте многочленов в $\mathcal{E}(\Phi)$. При этом будут использована следующая

ЛЕММА 11. Пусть для функции g , определенной на вещественной прямой, при некоторых постоянных $A > 0$, B справедливо неравенство

$$g(x) > A|x|^{\alpha/(\alpha-1)} - B, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тогда найдется постоянная C , зависящая только от A и B , такая, что для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (m \ln(1 + |x|) - g(x)) < (1 - \alpha^{-1})m \ln m + Cm.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} (m \ln(1 + |x|) - g(x)) &\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} (m \ln(1 + |x|) - A|x|^{\alpha/(\alpha-1)}) + B \\ &= B + \sup_{x \geq 0} (m \ln(1 + x) - Ax^{\alpha/(\alpha-1)}) < B + 2m + \sup_{u > 0} (mu - Ae^{(\alpha/(\alpha-1))u}) \\ &= B + 2m + (1 - \alpha^{-1})m \ln m - (1 - \alpha^{-1})m \ln((1 - \alpha^{-1})Ae). \end{aligned}$$

Отсюда следует утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 3. Многочлены плотны в $\mathcal{E}(\Phi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \mathcal{E}(\Phi)$, т.е. $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ и для любых $n, m \in \mathbb{N}$ существует постоянная $c_{m,n} > 0$ такая, что для $k = 0, 1, \dots, n$

$$|f^{(k)}(x)| \leq c_{m,n} \theta_m(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (27)$$

Приближим функцию f многочленами в $\mathcal{E}(\Phi)$. Это будет проделано в три этапа.

Этап 1. Пусть $\gamma \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ такова, что $\operatorname{supp} \gamma \subseteq [-2, 2]$, $\gamma(x) = 1$ для $x \in [-1, 1]$, $0 \leq \gamma(x) \leq 1$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Положим $f_\nu(x) = f(x)\gamma(x/\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

Очевидно, $f_\nu \in \mathcal{E}(\Phi)$. Покажем, что $f_\nu \rightarrow f$ в $\mathcal{E}(\Phi)$ при $\nu \rightarrow \infty$. Пусть взяты произвольные натуральные числа m и n . Тогда

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f_\nu(x) - f(x)|}{\theta_m(x)} \leq \sup_{|x| > \nu} \frac{|f(x)|}{\theta_m(x)} \leq \sup_{|x| > \nu} \frac{c_{m+1,n} \theta_{m+1}(x)}{\theta_m(x)}.$$

Следовательно, при $\nu \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f_\nu(x) - f(x)|}{\theta_m(x)} \rightarrow 0. \quad (28)$$

Далее,

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq n} \frac{|(f_\nu(x) - f(x))^{(k)}|}{\theta_m(x)} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq n} \frac{|\sum_{s=0}^{k-1} C_k^s f^{(s)}(x) \nu^{s-k} \gamma^{(k-s)}(x/\nu) + f^{(k)}(x)(\gamma(x/\nu) - 1)|}{\theta_m(x)} \\ &\leq \sup_{\nu < |x| < 2\nu, 1 \leq k \leq n} \frac{\sum_{s=0}^{k-1} C_k^s |f^{(s)}(x)| n^{s-k} |\gamma^{(k-s)}(x/\nu)|}{\theta_m(x)} + \sup_{|x| > \nu, 1 \leq k \leq n} \frac{|f^{(k)}(x)|}{\theta_m(x)}. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь неравенством (27) (с заменой m на $m+1$), заключаем, что при $\nu \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq n} \frac{|(f_\nu(x) - f(x))^{(k)}|}{\theta_m(x)} \rightarrow 0.$$

Отсюда и из (28) следует, что $\|f_\nu - f\|_{n,m} \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$. В силу произвольности $m, n \in \mathbb{N}$ это означает, что последовательность $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ сходится к f в $\mathcal{E}(\Phi)$ при $\nu \rightarrow \infty$.

Этап 2. Зафиксируем $\nu \in \mathbb{N}$. Пусть h – не равная тождественно нулю четная целая функция экспоненциального типа не выше 1, принадлежащая классу $L_1(\mathbb{R})$ и неотрицательная на вещественной прямой. Можно взять, например, $h(z) = \frac{\sin^2 \frac{z}{2}}{z^2}$, $z \in \mathbb{C}$.

По теореме Пэли–Винера [17] существует функция $g \in C(\mathbb{R})$ с носителем в $[-1, 1]$ такая, что

$$h(z) = \int_{-1}^1 g(t) e^{-izt} dt, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Так как

$$h^{(k)}(z) = \int_{-1}^1 g(t) (-it)^k e^{-izt} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

то

$$|h^{(k)}(x)| \leq C_g, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad (29)$$

где $C_g = 2 \max_{|t| \leq 1} |g(t)|$.

Пусть $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx = A$. Для $\lambda > 0$ положим

$$f_{\nu,\lambda}(x) = \frac{\lambda}{A} \int_{\mathbb{R}} f_\nu(y) h(\lambda(x-y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно проверить, что $f_{\nu,\lambda} \in \mathcal{E}(\Phi)$.

Покажем, что при $\lambda \rightarrow +\infty$ $f_{\nu,\lambda} \rightarrow f_\nu$ в $\mathcal{E}(\Phi)$. Пусть взяты произвольные натуральные числа m и n . Для любых $k \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f_{\nu,\lambda}^{(k)}(x) - f_\nu^{(k)}(x) &= \frac{\lambda}{A} \int_{\mathbb{R}} (f_\nu^{(k)}(y) - f_\nu^{(k)}(x)) h(\lambda(x-y)) dy \\ &= \frac{\lambda}{A} \int_{|y-x| \leq \lambda^{-2/3}} (f_\nu^{(k)}(y) - f_\nu^{(k)}(x)) h(\lambda(x-y)) dy \\ &\quad + \frac{\lambda}{A} \int_{|y-x| > \lambda^{-2/3}} (f_\nu^{(k)}(y) - f_\nu^{(k)}(x)) h(\lambda(x-y)) dy. \end{aligned}$$

Обозначим слагаемые в правой части последнего равенства через $I_{1,k}(x)$ и $I_{2,k}(x)$ соответственно. Пусть $K_n = \max_{x \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq n+1} |f_\nu^{(k)}(x)|$. Очевидно,

$$|I_{1,k}(x)| \leq \frac{2C_g K_n}{A} \lambda^{-1/3}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (30)$$

Далее,

$$|I_{2,k}(x)| \leq \frac{2K_n}{A} \int_{|t| > \lambda^{1/3}} h(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (31)$$

Пусть ε – произвольное положительное число, а $\Theta_m = \inf_{x \in \mathbb{R}} \theta_m(x)$, $m \in \mathbb{N}$. Выберем $\lambda(\varepsilon) > 0$ так, что $\frac{1}{A} \int_{|t| > \lambda^{1/3}} h(t) dt < \frac{\varepsilon \Theta_m}{4K_n}$ и $2C_g K_n \lambda^{-1/3} < \frac{A\varepsilon \Theta_m}{2}$ для $\lambda > \lambda(\varepsilon)$. Тогда из неравенств (30) и (31) следует, что $\|f_{\nu,\lambda} - f_\nu\|_{n,m} < \varepsilon$ для всех $\lambda > \lambda(\varepsilon)$. Следовательно, по полунорме $\|\cdot\|_{n,m}$ $f_{\nu,\lambda} \rightarrow f_\nu$ при $\lambda \rightarrow +\infty$. Так как $n, m \in \mathbb{N}$ произвольны, то это означает, что $f_{\nu,\lambda} \rightarrow f_\nu$ в $\mathcal{E}(\Phi)$ при $\lambda \rightarrow +\infty$.

Этап 3. Зафиксируем $\lambda > 0, \nu \in \mathbb{N}$. Приближим функцию $f_{\nu,\lambda}$ многочленами в $\mathcal{E}(\Phi)$.

Пусть $h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{2k}$, $x \in \mathbb{R}$, – разложение в ряд Тейлора функции h . Пусть $P_{2N}(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^{2k}$, $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$. Пользуясь формулой Тейлора и оценкой (29), имеем

$$|h(x) - P_{2N}(x)| \leq \frac{C_g |x|^{2N+1}}{(2N+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (32)$$

Положим

$$Q_{2N}(x) = \frac{\lambda}{A} \int_{-L}^L f_\nu(y) P_{2N}(\lambda(x-y)) dy, \quad x \in \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{N},$$

где положительное L выбрано так, что $\text{supp } f_\nu \subseteq [-L, L]$; Q_{2N} – многочлен степени не выше $2N$.

Покажем, что последовательность $\{Q_{2N}\}_{N=1}^\infty$ сходится в $\mathcal{E}(\Phi)$ к $f_{\nu,\lambda}$ при $N \rightarrow \infty$. Пусть взяты произвольные натуральные числа m и n . Для любого $k \in \mathbb{Z}_+$

$$f_{\nu,\lambda}^{(k)}(x) - Q_{2N}^{(k)}(x) = \frac{\lambda}{A} \int_{-L}^L f_\nu^{(k)}(y) (h(\lambda(x-y)) - P_{2N}(\lambda(x-y))) dy, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Пользуясь неравенствами (29), (32), имеем при любых $x \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \dots, n$

$$|f_{\nu, \lambda}^{(k)}(x) - Q_{2N}^{(k)}(x)| \leq K_n C_g \frac{2L\lambda^{2N+2}}{A} \frac{(|x| + L)^{2N+1}}{(2N+1)!}.$$

Отсюда при некотором положительном C_1 , зависящем от n , и некотором положительном C_2 для любого $N \in \mathbb{N}$

$$\|f_{\nu, \lambda} - Q_{2N}\|_{n, m} \leq \frac{C_1 C_2^{2N+2}}{(2N+1)!} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{(1 + |x|)^{2N+1}}{\theta_m(x)}. \quad (33)$$

В силу (3) функция φ удовлетворяет условиям леммы 11, поэтому найдется положительная постоянная C_3 такая, что для любых $m, N \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}} ((2N + m + 1) \ln(1 + |x|) - \varphi(x)) \\ & \leq (1 - \alpha^{-1})(2N + m + 1) \ln(2N + m + 1) + C_3(2N + m + 1). \end{aligned}$$

Из этой оценки и неравенства (33) следует, что каково бы ни было $N \in \mathbb{N}$ при некоторых положительных C_4, C_5 , зависящих от m и n и не зависящих от N ,

$$\|f_{\nu, \lambda} - Q_{2N}\|_{n, m} \leq \frac{C_4 C_5^N (2N + 1)^{(2N+1)(1-\alpha^{-1})}}{(2N+1)!}.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к 0 при $N \rightarrow \infty$. Это означает, что функцию $f_{\nu, \lambda}$ удалось приблизить многочленами в $\mathcal{E}(\Phi)$, так как $m, n \in \mathbb{N}$ были произвольные.

Из этапов 1–3 следует полнота многочленов в $\mathcal{E}(\Phi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Зафиксируем не равные друг другу и отличные от нуля вещественные числа $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N+1}$. Подберем числа $a_0, a_1, \dots, a_{N+1}$ так, что для целой функции

$$g(z) = U(z) - \sum_{k=0}^{N+1} a_k \exp(-i\lambda_k z), \quad z \in \mathbb{C},$$

выполнено условие: $g^{(n)}(0) = 0$, $n = 0, 1, \dots, N+1$. В силу условий, наложенных на $\{\lambda_k\}_{k=0}^{N+1}$, эти числа определяются единственным образом. Из оценки на U имеем $|U^{(k)}(0)| \leq c_1 C$, $k = 0, 1, \dots, N+1$, где $c_1 > 0$ зависит только от N . Но тогда $|a_k| \leq c_2 C$, $k = 0, 1, \dots, N+1$, где постоянная $c_2 > 0$ зависит лишь от N . Пользуясь еще вторым условием на ψ , имеем при некотором $c_3 > 0$, зависящем только от N ,

$$|g(z)| \leq c_3 C (1 + |z|)^N \exp(\psi(\operatorname{Im} z)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Положим $h(z) = \frac{g(z)}{(-iz)^{N+2}}$. Легко видеть, что целая функция h удовлетворяет оценке вида

$$|h(z)| \leq \frac{c_4 C \exp(\psi(\operatorname{Im} z))}{1 + |z|^2}, \quad z \in \mathbb{C},$$

причем постоянная $c_4 > 0$ зависит лишь от N .

Согласно лемме 8 найдется функция $p \in C(\mathbb{R})$ такая, что:

- (a) $\sup_{t \in \mathbb{R}} |p(t)| \exp(\varphi(t)) < \frac{c_4 C}{2}$;
- (b) $h(z) = \int_{\mathbb{R}} p(t) e^{-izt} dt, z \in \mathbb{C}$.

Определим функционал T на $\mathcal{E}(\Phi)$ формулой

$$T(f) = \sum_{k=0}^{N+1} a_k f(\lambda_k) + \int_{\mathbb{R}} p(t) f^{(N+2)}(t) dt, \quad f \in \mathcal{E}(\Phi).$$

Нетрудно убедиться, что при некотором $C_1 > 0$, зависящем только от N , $|T(f)| \leq C_1 C \|f\|_{N+2,2}$, $f \in \mathcal{E}(\Phi)$. Следовательно, $T \in \mathcal{E}^*(\Phi)$. Очевидно, $T(\exp(-izx)) = U(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

Теперь докажем единственность. Предположим, что $S(\exp(-izx)) = 0$ для $S \in \mathcal{E}^*(\Phi)$ и любого $z \in \mathbb{C}$. Покажем, что $S = 0$. Пусть

$$P_{N,\xi}(x) = \sum_{\nu=0}^N \frac{\xi^\nu}{\nu!} x^\nu, \quad \xi, x \in \mathbb{R}, \quad N \in \mathbb{Z}_+.$$

Покажем вначале, что для любого $R > 0$ последовательность полиномов $\{P_{N,\xi}\}_{N=0}^\infty$ сходится в $\mathcal{E}(\Phi)$ к $e^{\xi x}$ равномерно по $\xi \in [-R, R]$ при $N \rightarrow \infty$. Пусть n, m – произвольные натуральные числа. Так как из формулы Тейлора

$$|e^{\xi x} - P_{N-k,\xi}(x)| \leq \frac{|\xi|^{N-k+1} |x|^{N-k+1}}{(N-k+1)!} \max(1; e^{\xi x}), \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

то при $N \geq n$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq n} \frac{|(e^{\xi x})^{(k)} - P_{N,\xi}^{(k)}(x)|}{\theta_m(x)} &= \sup_{x \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq n} \frac{\xi^k |e^{\xi x} - P_{N-k,\xi}(x)|}{\theta_m(x)} \\ &\leq \frac{|\xi|^{N+1}}{(N-k+1)!} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|x|^{N-k+1} \max(1; e^{\xi x})}{\theta_m(x)} \\ &\leq \frac{R^{N+1}}{(N-n+1)!} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{(1+|x|)^{N+1} \max(1; e^{\xi x})}{\theta_m(x)}. \end{aligned}$$

Так как найдутся положительные постоянные A и B , зависящие от R , такие, что для всех $\xi \in [-R, R]$, $x \in \mathbb{R}$ $\varphi(x) - \xi x \geq A|x|^{\alpha/(\alpha-1)} - B$, то, пользуясь леммой 11, найдем постоянную $Q > 0$, не зависящую от $\xi \in [-R, R]$, такую, что

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{(1+|x|)^{N+1} \max(1; e^{\xi x})}{\theta_m(x)} \leq Q^{N+m+1} (N+m+1)^{(1-\alpha^{-1})(N+m+1)}.$$

Из последних двух оценок следует, что при $N \rightarrow \infty$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq n} \frac{|(e^{\xi x})^{(k)} - P_{N,\xi}^{(k)}(x)|}{\theta_m(x)} \rightarrow 0$$

равномерно по $\xi \in [-R, R]$. Так как n, m произвольны, то это означает, что для любого $R > 0$ при $N \rightarrow \infty$ $\{P_{N,\xi}\}_{N=0}^\infty \rightarrow e^{\xi x}$ в $\mathcal{E}(\Phi)$ равномерно по $\xi \in [-R, R]$. Из этого, пользуясь непрерывностью линейного функционала S , заключаем, что степенной ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{S(x^\nu)}{\nu!} \xi^\nu$$

сходится равномерно на компактах из $\mathbb{R}$ к $S(\exp(\xi x))$. По предположению для любого $\xi \in \mathbb{R}$ $S(\exp(\xi x)) = 0$, следовательно, $S(x^\nu) = 0$ для всех $\nu \in \mathbb{Z}_+$. Так как многочлены плотны в $\mathcal{E}(\Phi)$, то $S = 0$.

Теорема 2 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Через J обозначим отображение, которое всякому элементу $T \in G^*$ ставит в соответствие целую функцию $\hat{T}$.

Отображение J является линейным и по лемме 7 действует из G^* в P .

Отображение J непрерывно. Действительно, если $T \in G^*$, то $T \in G_m^*$ при некотором $m \in \mathbb{N}$ и, следовательно, $|T(f)| \leq \|T\|_{G^*,m} \|f\|_{G,m}$ для любого $f \in G$, где $\|T\|_{G^*,m}$ — норма T в G_m^* . Согласно лемме 7 при некотором $q_m > 0$

$$|\hat{T}(z)| \leq \|T\|_{G^*,m} \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|z|) + q_m), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Поэтому для любого $T \in G_m^*$ $\|\hat{T}\|_{m+1} \leq e^{q_m} \|T\|_{G^*,m}$. Следовательно, J непрерывно.

Покажем, что отображение J взаимно однозначно. То есть, если для $T \in G^*$ $\hat{T} \equiv 0$, то $T(f) = 0$ для любого $f \in G$. Будем действовать по схеме из [5; доказательство теоремы 2.8]. По лемме 5 T представляется в виде

$$T(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_m^k M_k} \int_{\mathbb{R}} \frac{f^{(k)}(x)}{\theta_m(x)} d\mu_k(x), \quad f \in G,$$

где μ_k — комплексные ограниченные меры в $\mathbb{R}$, причем $\int_{\mathbb{R}} d|\mu_k|(x) \leq \|T\|_{G^*,m}$ для любого $k \in \mathbb{Z}_+$. Отметим, что функционал

$$T_k(f) = \frac{1}{\varepsilon_m^k M_k} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\theta_m(x)} d\mu_k(x), \quad f \in \mathcal{E}(\Phi),$$

принадлежит $\mathcal{E}^*(\Phi)$. По лемме 7 $\hat{T}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(z) z^k$, где целые функции $V_k(z) = (-i)^k T_k(\exp(-ixz))$ удовлетворяют при некотором $B_m > 0$ оценке

$$|V_k(z)| \leq \frac{B_m(1 + |z|)^{m(\alpha-1)} \exp(\psi(\operatorname{Im} z))}{\varepsilon_m^k M_k}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (34)$$

Рассмотрим функцию $H(z, u) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(z) u^k$, $z, u \in \mathbb{C}$. Нетрудно видеть, что $H(z, u)$ — целая функция. Используя оценку (34), имеем

$$|H(z, u)| \leq \frac{B_m \varepsilon_m}{\varepsilon_m - \varepsilon_{m+1}} (1 + |z|)^{m(\alpha-1)} \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|u|)), \quad z, u \in \mathbb{C}.$$

Так как $H(z, z) = 0$, то $H(z, u) = (z - u)S(z, u)$, где S – целая функция. Отметим, что S удовлетворяет оценке

$$|S(z, u)| \leq A_S(1 + |z|)^{m(\alpha-1)} \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|u|)), \quad z, u \in \mathbb{C}, \quad (35)$$

где $A_S > 0$ – некоторая постоянная. В случае $|z - u| \geq 1$ это очевидно, а для $|z - u| < 1$ оценка получается применением принципа максимума и использованием неравенства (4). Далее, разлагаем S в ряд по степеням u : $S(z, u) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(z)u^k$. Пользуясь неравенством Коши для коэффициентов степенного ряда, равенством (22), неравенством (35), имеем

$$|S_k(z)| \leq \frac{A_S}{\varepsilon_{m+1}^k M_k} (1 + |z|)^{m(\alpha-1)} \exp(\psi(\operatorname{Im} z)), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad z \in \mathbb{C}.$$

По теореме 2 существуют функционалы $\Phi_k \in \mathcal{E}^*(\Phi)$ такие, что $\Phi_k(\exp(-izx)) = S_k(z)$, $z \in \mathbb{C}$, причем

$$|\Phi_k(f)| \leq \frac{K}{\varepsilon_{m+1}^k M_k} \|f\|_{N+2,2}, \quad f \in \mathcal{E}(\Phi), \quad (36)$$

где $N = [m(\alpha - 1)] + 1$, постоянная $K > 0$ не зависит от $k \in \mathbb{Z}_+$.

Так как H представимо в виде

$$H(z, u) = zS_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (zS_k(z) - S_{k-1}(z))u^k,$$

то $V_0(z) = zS_0(z)$, $V_k(z) = zS_k(z) - S_{k-1}(z)$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда по теореме 2 $T_0(f) = i\Phi_0(f')$, $(-i)^k T_k(f) = i\Phi_k(f') - \Phi_{k-1}(f)$, $f \in \mathcal{E}(\Phi)$. Из (36), попутно пользуясь условием (ii), имеем для $f \in G$

$$|\Phi_n(f^{(n+1)})| \leq KH_1 \sup_{0 \leq k \leq N+2} (\varepsilon_{m+3}^{k+1} M_{k+1} H_2^{k+1}) \|f\|_{G, m+3} \left(\frac{\varepsilon_{m+3} H_2}{\varepsilon_{m+1}} \right)^n.$$

С учетом замечания 3 отсюда следует, что $\Phi_n(f^{(n+1)}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, для любого $f \in G$

$$\begin{aligned} T(f) &= \sum_{k=0}^{\infty} T_k(f^{(k)}) = i\Phi_0(f') + \sum_{k=1}^{\infty} (i^{k+1}\Phi_k(f^{(k+1)}) - i^k\Phi_{k-1}(f^{(k)})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} i^{n+1}\Phi_n(f^{(n+1)}) = 0. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что отображение J сюръективно.

Пусть целая функция $F \in P$ при некоторых $m \in \mathbb{N}$, $c > 0$ удовлетворяет неравенству

$$|F(z)| \leq c \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_m(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (37)$$

Покажем, что существует функционал $\mathcal{F} \in G^*$ такой, что $\widehat{\mathcal{F}} = F$.

Согласно лемме 10 функции $\psi(\operatorname{Im} z)$, $w_{m+3}(|z|)$ удовлетворяют условиям теоремы 6 из [6]. Поэтому существуют целые функции L и Y с простыми нулями, удовлетворяющие условиям:

- (L1) круги $D(\lambda_j, d_1|\lambda_j|^{1-\alpha})$, где d_1 – некоторое положительное число, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots$ – нули функции L , расположенные в порядке неубывания их модулей, попарно не пересекаются;
 (L2) вне множества $\bigcup_{j=1}^{\infty} D(\lambda_j, d_1|\lambda_j|^{1-\alpha})$ при некоторых положительных A, A_0 выполняется неравенство

$$|\psi(\operatorname{Im} z) - \ln |L(z)|| \leq A \ln(1 + |z|) + A_0; \quad (38)$$

- (Y1) круги $D(\mu_k, d_2)$, где d_2 – некоторое положительное число, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \dots$ – нули функции Y , расположенные в порядке неубывания их модулей, попарно не пересекаются;
 (Y2) вне множества $\bigcup_{k=1}^{\infty} D(\mu_k, d_2)$ при некоторых положительных B, B_0 выполняется неравенство

$$|w_{m+3}(|z|) - \ln |Y(z)|| \leq B \ln(1 + |z|) + B_0. \quad (39)$$

Без ограничения общности считаем, что $|\mu_k| > \max(1; 4d_2)$ для любого $k \in \mathbb{N}$, $|\lambda_j| > \max(2(d_1 + d_2); 1)$ для любого $j \in \mathbb{N}$.

Вначале, исходя из функций L и Y , построим целую функцию $\mathcal{N} \in P$, которая вне некоторых исключительных кружков удовлетворяет при некотором $C_{\mathcal{N}} > 0$ оценке вида

$$|\mathcal{N}(z)| \geq C_{\mathcal{N}} \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|z|)).$$

Применяя принцип максимума к функции Y в кружках $D(\mu_k, d_2)$, $k \in \mathbb{N}$, и пользуясь неравенством (4), (39), имеем

$$|Y(z)| \leq B_1 \exp(w_{m+3}(|z|) + B \ln(1 + |z|)), \quad z \in D(\mu_k, d_2),$$

где B_1 – некоторое положительное число. Отсюда и из (39), пользуясь леммой 2, имеем при некотором $B_2 > 0$

$$|Y(z)| \leq B_2 \exp(w_{m+4}(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (40)$$

Пусть для произвольных $\nu > 0$, $b \in (0, d_2)$ $\Omega(b, \nu) = \bigcup_{k=1}^{\infty} D(\mu_k, b|\mu_k|^{-\nu})$. Оценим $|Y(z)|$ снизу вне множества $\Omega(b, \nu)$. С этой целью для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию

$$Y_k(z) = \frac{z - \mu_k}{Y(z)}, \quad z \in \overline{D(\mu_k, d_2)}.$$

Функция $Y_k(z)$ аналитична в $\overline{D(\mu_k, d_2)}$ и не имеет там нулей. По принципу максимума модуля

$$|Y_k(z)| \leq \frac{d_2}{|Y(z_0)|}, \quad z \in D(\mu_k, d_2),$$

где z_0 – точка минимума $|Y|$ на окружности $\partial D(\mu_k, d_2)$. Отсюда, пользуясь неравенствами (39) и (4), получаем

$$|Y_k(z)| \leq C_1(1 + |z|)^B \exp(-w_{m+3}(|z|)), \quad z \in D(\mu_k, d_2),$$

где $C_1 > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от k . Следовательно,

$$|Y(z)| \geq \frac{|z - \mu_k| \exp(w_{m+3}(|z|))}{C_1(1 + |z|)^B}, \quad z \in D(\mu_k, d_2).$$

Таким образом, для $z \in D(\mu_k, d_2) \setminus D(\mu_k, b|\mu_k|^{-\nu})$

$$|Y(z)| \geq \frac{b \exp(w_{m+3}(|z|))}{C_1 |\mu_k|^\nu (1 + |z|)^B}.$$

Так как для $z \in D(\mu_k, d_2)$ $|\mu_k| \leq \frac{4}{3}|z|$, то из последнего неравенства получаем для $z \in D(\mu_k, d_2) \setminus D(\mu_k, b|\mu_k|^{-\nu})$

$$|Y(z)| \geq \frac{C_2 \exp(w_{m+3}(|z|))}{(1 + |z|)^{B+\nu}}, \quad (41)$$

где $C_2 > 0$ – некоторая постоянная, зависящая только от b и ν .

Из (39) и (41) получаем

$$|Y(z)| \geq \frac{C_3 \exp(w_{m+3}(|z|))}{(1 + |z|)^{B+\nu}}, \quad z \notin \Omega(b, \nu),$$

где $C_3 > 0$ – некоторая постоянная, зависящая от b и ν . Пользуясь теперь леммой 2, получаем оценку

$$|Y(z)| \geq C_4 \exp(w_{m+2}(|z|)), \quad z \notin \Omega(b, \nu), \quad (42)$$

где $C_4 > 0$ – некоторая постоянная, зависящая от b и ν .

Для дальнейших построений необходимо выбрать положительные числа b, ν и последовательность $t = \{t_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{C}$ так, чтобы выполнялись условия:

- 1) для любого $j \in \mathbb{N}$ $D(\lambda_j + t_j, b|\lambda_j + t_j|^{-\nu}) \subset D(\lambda_j, d_1|\lambda_j|^{1-\alpha})$;
- 2) $\Omega(b, \nu) \cap \left(\bigcup_{j=1}^\infty D(\lambda_j + t_j, b|\lambda_j + t_j|^{-\nu}) \right) = \emptyset$;
- 3) $\sum_{j=1}^\infty |t_j| |\lambda_j|^{\alpha-1} < \infty$.

Для этого надо лишь продолжить рассуждения, изложенные в [8; гл. 2, § 4] и [10], где в связи с применением аппроксимационной теоремы Р. С. Юлмухаметова [6] требовалось, чтобы исключительное множество кружков не задевало нулей некоторой целой функции конечного порядка. И это было достигнуто за счет сдвижек нулей аппроксимирующей целой функции и уменьшения радиуса исключительных кружков. Этот же прием проходит и в нашем случае.

Из неравенств (40) и (1) следует, что последовательность $\mu = \{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ нулей целой функции Y имеет конечную верхнюю плотность при порядке 1 [11]. Следовательно, при некотором $A_\mu > 1$ для количества $n_\mu(r)$ точек последовательности

μ в круге $D(0, r)$ справедливо неравенство $n_\mu(r) < A_\mu r$, $r > 0$. Выберем теперь ν и b так, что $\nu > 2\alpha + 1$, $0 < b < \min(d_2; d_1 2^{-(\nu+6)} A_\mu^{-2})$.

Введем обозначения: $\Delta(z) = |z|$, $z \in \mathbb{C}$, $D_{k,Y} = D(\mu_k, b|\mu_k|^{-\nu})$, $D_{j,L} = D(\lambda_j, d_1|\lambda_j|^{1-\alpha})$, $k, j \in \mathbb{N}$.

Зафиксируем произвольное $j \in \mathbb{N}$. Для $k \in \mathbb{N}$ таких, что $\Delta(D_{k,Y}) \cap \Delta(D_{j,L}) \neq \emptyset$ имеем $||\mu_k| - |\lambda_j|| < l$, где $l = d_1 + d_2$. Сумма s длин всех интервалов $\Delta(D_{k,Y})$, пересекающихся с $\Delta(D_{j,L})$, оценивается следующим образом:

$$s = \sum_{|\lambda_j| - l < |\mu_k| < |\lambda_j| + l} 2b|\mu_k|^{-\nu} \leq \frac{2bn_\mu(|\lambda_j| + l)}{(|\lambda_j| - l)^\nu} \leq \frac{2bA_\mu(|\lambda_j| + l)}{(|\lambda_j| - l)^\nu}.$$

Так как $|\lambda_j| > 2l$ для всех $j \in \mathbb{N}$, то $s \leq 2^{\nu+2}bA_\mu|\lambda_j|^{1-\nu}$. Положим $\sigma_j = 2^{\nu+2}bA_\mu|\lambda_j|^{1-\nu}$. Найдется интервал вида $(|\lambda_j| + k_0\sigma_j, |\lambda_j| + (k_0 + 1)\sigma_j)$, где $k_0 + 1 \leq 4n(|\lambda_j| + l)$, не пересекающийся с $\bigcup_{k=1}^\infty \Delta(D_{k,Y})$. Положим $t_j = (k_0 + \frac{1}{2})\sigma_j \exp(i \arg \lambda_j)$. Таким образом, точки t_j так же, как и в [8], [10], удовлетворяют условию $\arg t_j = \arg \lambda_j$, $j \in \mathbb{N}$. Оценим t_j по модулю:

$$|t_j| \leq (k_0 + 1)\sigma_j \leq 4n(|\lambda_j| + l)2^{\nu+2}bA_\mu|\lambda_j|^{1-\nu} \leq 2^{\nu+5}bA_\mu^2|\lambda_j|^{2-\nu}. \quad (43)$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^\infty |t_j| |\lambda_j|^{\alpha-1} \leq 2^{\nu+5}bA_\mu^2 \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^{\alpha+1-\nu} < \infty,$$

так как в силу выбора ν $\nu - \alpha - 1 > \alpha$, а показатель сходимости последовательности $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ не превосходит α . Это означает, что условие 3) выполнено.

Неравенство (43), выбор ν , b , а также то, что $|\lambda_j| > 1$ для всех $j \in \mathbb{N}$, гарантируют выполнение условия 1).

По построению кружок $D(\lambda_j + t_j, \frac{\sigma_j}{2})$ не пересекается с $\Omega(b, \nu)$. Так как

$$\frac{\sigma_j}{2} = 2^{\nu+1}bA_\mu|\lambda_j|^{1-\nu} > b(|\lambda_j| + |t_j|)^{-\nu} = b|\lambda_j + t_j|^{-\nu},$$

то круг $D(\lambda_j + t_j, b|\lambda_j + t_j|^{-\nu})$ тем более не пересекается с $\Omega(b, \nu)$. Итак, условие 2) также выполнено.

Обозначим $D(\lambda_j + t_j, b|\lambda_j + t_j|^{-\nu})$ через $D'_{j,L}$, $j \in \mathbb{N}$.

Согласно теореме S функция L_t удовлетворяет неравенству

$$|\ln |L_t(z)| - \ln |L(z)|| \leq C, \quad z \notin \bigcup_{j=1}^\infty D_{j,L},$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная. Отсюда и из неравенства (38) следует, что для $z \notin \bigcup_{j=1}^\infty D_{j,L}$

$$|\ln |L_t(z)| - \psi(\operatorname{Im} z)| \leq A \ln(1 + |z|) + A_0 + C. \quad (44)$$

Применяя принцип максимума к функции $L_t(z)$ в каждом круге $D_{j,L}$, пользуясь неравенством (44) и вытекающим из (2) неравенством

$$|\psi(\operatorname{Im} z_1) - \psi(\operatorname{Im} z_2)| \leq A_1, \quad z_1, z_2 \in \overline{D}_{j,L}, \quad (45)$$

где $A_1 > 0$ – некоторая постоянная, не зависящая от $j \in \mathbb{N}$, получим оценку

$$|L_t(z)| \leq A_2(1 + |z|)^A \exp(\psi(\operatorname{Im} z)), \quad z \in \bigcup_{j=1}^{\infty} D_{j,L}, \quad (46)$$

где $A_2 > \exp(A_0 + C)$ – некоторая постоянная. Из (44), (46) следует, что неравенство (46) на самом деле справедливо при всех $z \in \mathbb{C}$. Действуя точно так же, как и в [8; гл. 2, §4], пользуясь при этом неравенствами (38), (44), (45), получим вне $\bigcup_{j=1}^{\infty} D'_{j,L}$ оценку

$$|L_t(z)| \geq \exp(\psi(\operatorname{Im} z) - A_3 \ln(1 + |z|) - A_4), \quad (47)$$

где A_3, A_4 – некоторые положительные постоянные. Итак, необходимые оценки модуля функции L_t сверху в комплексной плоскости и снизу вне $\bigcup_{j=1}^{\infty} D'_{j,L}$ установлены.

В силу выбора b, ν сумма радиусов непересекающихся исключительных кругов $D'_{j,L}$ и $D_{k,Y}$ конечна, поэтому найдется последовательность $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$ окружностей $l_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R_n\}$, где $R_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, не пересекающая исключительных кругов $D'_{j,L}$ и $D_{k,Y}$.

Положим

$$\mathcal{L}(z) = \frac{L_t(z)}{\prod_{j=1}^N (z - (\lambda_j + t_j))}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где $N \in \mathbb{N}$ выбрано так, что $N > A + 2$. Тогда из (46), (47) при некоторых положительных A_5, A_6

$$|\mathcal{L}(z)| \leq \frac{A_5 \exp(\psi(\operatorname{Im} z))}{1 + |z|^2}, \quad z \in \mathbb{C}; \quad (48)$$

$$|\mathcal{L}(z)| \geq \frac{A_6 \exp(\psi(\operatorname{Im} z))}{(1 + |z|)^{A_3 + N}}, \quad z \notin \bigcup_{j=N+1}^{\infty} D'_{j,L}. \quad (49)$$

Пусть $\mathcal{N}(z) = \mathcal{L}(z)Y(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ – нули $\mathcal{N}$, расположенные в порядке неубывания модулей. Из оценок (42), (49) и леммы 2 следует, что найдется постоянная $C_{\mathcal{N}} > 0$ такая, что вне $\bigcup_{n=1}^{\infty} D(a_n, b|a_n|^{-\nu})$ справедлива оценка

$$|\mathcal{N}(z)| \geq C_{\mathcal{N}} \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+1}(|z|)), \quad (50)$$

в частности, эта оценка справедлива на окружностях l_n , $n \in \mathbb{N}$.

Пусть K – произвольный компакт в $\mathbb{C}$ и $k_0 \in \mathbb{N}$ таково, что $\overline{K} \subset D(0, R_{k_0})$. Для $k \geq k_0$ рассмотрим интеграл

$$I_k(z) = \int_{l_k} \frac{F(\xi)}{\mathcal{N}(\xi)(\xi - z)} d\xi, \quad z \in K.$$

По теореме о вычетах

$$I_k(z) = 2\pi i \sum_{|a_n| < R_k} \frac{F(a_n)}{\mathcal{N}'(a_n)(a_n - z)} + 2\pi i \frac{F(z)}{\mathcal{N}(z)}, \quad z \in K. \quad (51)$$

Пользуясь оценками (37) и (50), имеем для $z \in K$

$$|I_k(z)| \leq \int_{l_k} \frac{c \exp(\psi(\operatorname{Im} \xi) + w_m(|\xi|))}{C_{\mathcal{N}} \operatorname{dist}(K, l_k) \exp(\psi(\operatorname{Im} \xi) + w_{m+1}(|\xi|))} |d\xi|.$$

Устремляя k к бесконечности в правой части последнего неравенства и учитывая лемму 2, получаем $\lim_{k \rightarrow \infty} I_k(z) = 0$, $z \in K$. Переходя в (51) к пределу при $k \rightarrow \infty$, имеем

$$F(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|a_n| < R_k} \frac{F(a_n)}{\mathcal{N}'(a_n)} \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n}, \quad z \in K. \quad (52)$$

В силу произвольности компакта K равенство (52) верно для всех $z \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(a_n)}{\mathcal{N}'(a_n)} \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (53)$$

Покажем, что он сходится равномерно на компактах комплексной плоскости. Вначале для каждого $n \in \mathbb{N}$ оценим сверху модуль целой функции $\frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n}$, $z \in \mathbb{C}$. Возможны два случая.

Первый случай. Пусть a_n — нуль функции $\mathcal{L}$. Тогда при некотором $j \in \mathbb{N}$ $a_n = \lambda_j + t_j$ и поэтому

$$\frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n} = \frac{\mathcal{L}(z)}{z - (\lambda_j + t_j)} Y(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Если $z \notin D'_{j,L}$, то по неравенству (48)

$$\left| \frac{\mathcal{L}(z)}{z - (\lambda_j + t_j)} \right| \leq \frac{A_5 \exp(\psi(\operatorname{Im} z))}{1 + |z|^2} \frac{|\lambda_j + t_j|^\nu}{b}. \quad (54)$$

Если $z \in D'_{j,L}$, то по принципу максимума модуля

$$\left| \frac{\mathcal{L}(z)}{z - (\lambda_j + t_j)} \right| \leq \max_{\xi \in \partial D'_{j,L}} \left| \frac{\mathcal{L}(\xi)}{\xi - (\lambda_j + t_j)} \right|.$$

Пусть максимум в правой части последнего неравенства достигается в точке $\xi_0 \in \partial D'_{j,L}$. Тогда, пользуясь неравенством (48), получим

$$\left| \frac{\mathcal{L}(z)}{z - (\lambda_j + t_j)} \right| \leq \frac{|\mathcal{L}(\xi_0)| |\lambda_j + t_j|^\nu}{b} \leq \frac{A_5 \exp(\psi(\operatorname{Im} \xi_0))}{1 + |\xi_0|^2} \frac{|\lambda_j + t_j|^\nu}{b}.$$

Учитывая, что для $z \in D'_{j,L}$ $|\xi_0| \geq |z| - 1$, и используя неравенство (45), получаем при некотором $A_6 > 0$, не зависящем от j ,

$$\left| \frac{\mathcal{L}(z)}{z - (\lambda_j + t_j)} \right| \leq \frac{A_6 \exp(\psi(\operatorname{Im} z))}{1 + |z|^2} \frac{|\lambda_j + t_j|^\nu}{b}. \quad (55)$$

Таким образом, из (54), (55) имеем

$$\left| \frac{\mathcal{L}(z)}{z - a_n} \right| \leq \frac{A_7 \exp(\psi(\operatorname{Im} z))}{1 + |z|^2} |a_n|^\nu, \quad (56)$$

где $A_7 = b^{-1} \max(A_5; A_6)$. Из (40), (56) получаем в первом случае

$$\left| \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n} \right| \leq A_8 |a_n|^\nu \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+4}(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (57)$$

где $A_8 = A_7 B_2$.

Второй случай. Пусть a_n — нуль функции Y . Тогда при некотором $k \in \mathbb{N}$ $a_n = \mu_k$ и поэтому

$$\frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n} = \frac{Y(z)}{z - \mu_k} \mathcal{L}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Если $z \notin D_{k,Y}$, то, пользуясь неравенством (40), получим

$$\left| \frac{Y(z)}{z - \mu_k} \right| \leq b^{-1} B_2 \exp(w_{m+4}(|z|)) |\mu_k|^\nu, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (58)$$

Если $z \in D_{k,Y}$, то по принципу максимума модуля

$$\left| \frac{Y(z)}{z - \mu_k} \right| \leq \max_{\xi \in \partial D_{k,Y}} \left| \frac{Y(\xi)}{\xi - \mu_k} \right|.$$

Пусть максимум в правой части последнего неравенства достигается в точке $\xi_0 \in \partial D_{k,Y}$. Тогда, опять пользуясь неравенством (40), имеем

$$\left| \frac{Y(z)}{z - \mu_k} \right| \leq b^{-1} |Y(\xi_0)| |\mu_k|^\nu \leq b^{-1} B_2 \exp(w_{m+4}(|\xi_0|)) |\mu_k|^\nu.$$

Для $z \in D_{k,Y}$ $|\xi_0 - z| < 1$, поэтому из последнего неравенства с помощью неравенства (4) получаем

$$\left| \frac{Y(z)}{z - \mu_k} \right| \leq B_3 \exp(w_{m+4}(|z|)) |\mu_k|^\nu, \quad (59)$$

где $B_3 > 0$ не зависит от k . Из оценок (58) и (59) следует неравенство

$$\left| \frac{Y(z)}{z - a_n} \right| \leq B_4 |a_n|^\nu \exp(w_{m+4}(|z|)), \quad (60)$$

где постоянная $B_4 = \max(b^{-1} B_2; B_3)$ не зависит от n . Из оценок (48) и (60) во втором случае получаем

$$\left| \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n} \right| \leq A_9 |a_n|^\nu \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+4}(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (61)$$

где $A_9 = A_5 B_4$. Из неравенств (57) и (61) заключаем, что в обоих случаях справедливо неравенство

$$\left| \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n} \right| \leq A_{10} |a_n|^\nu \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+4}(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}, \quad (62)$$

где $A_{10} = \max(A_8; A_9)$.

Из представления

$$\frac{1}{\mathcal{N}'(a_n)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - a_n| = b|a_n|^{-\nu}} \frac{d\xi}{\mathcal{N}(\xi)},$$

оценки (50), а также применением неравенств (4) и (45) получаем

$$\left| \frac{1}{\mathcal{N}'(a_n)} \right| \leq A_{11} |a_n|^{-\nu} \exp(-(\psi(\operatorname{Im} a_n) + w_{m+1}(|a_n|))),$$

где постоянная $A_{11} > 0$ не зависит от $n \in \mathbb{N}$. Из этого неравенства и из неравенства (37) получаем

$$\left| \frac{F(a_n)}{\mathcal{N}'(a_n)} \right| \leq c A_{11} |a_n|^{-\nu} \exp(w_m(|a_n|) - w_{m+1}(|a_n|)), \quad n \in \mathbb{N}.$$

По лемме 2 найдется постоянная Q такая, что $w_m(|a_n|) - w_{m+1}(|a_n|) < -(\alpha + 1) \times \ln(1 + |a_n|) + Q$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поэтому при некотором $A_{12} > 0$, не зависящем от n ,

$$\left| \frac{F(a_n)}{\mathcal{N}'(a_n)} \right| \leq A_{12} (1 + |a_n|)^{-(\alpha + \nu + 1)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (63)$$

Из оценок (62) и (63) для любого $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{F(a_n)}{\mathcal{N}'(a_n)} \right| \left| \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n} \right| \leq A_{10} A_{12} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)^{-(\alpha + 1)} \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_{m+4}(|z|)).$$

Так как показатель сходимости корней целой функции $\mathcal{N}$ не превосходит α , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + |a_n|)^{-(\alpha + 1)} < \infty. \quad (64)$$

Из двух последних неравенств следует, что ряд (53) сходится равномерно на компактах из $\mathbb{C}$, более того, он сходится в топологии пространства P . Поэтому из равенства (52) ((52) справедливо для любого $z \in \mathbb{C}$) имеем

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(a_n)}{\mathcal{N}'(a_n)} \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (65)$$

Определим функционал $\mathcal{F}_n \in G^*$ такой, что $\widehat{\mathcal{F}}_n(z) = \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n}$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Возможны два случая.

Первый случай: a_n – нуль функции $\mathcal{L}$. Следовательно,

$$\frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n} = \frac{\mathcal{L}(z)}{z - a_n} Y(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

В силу оценок (40) и (56), леммы 9 существует функционал $\mathcal{F}_n \in G^*$ такой, что $\widehat{\mathcal{F}}_n(z) = \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n}$, $z \in \mathbb{C}$, при этом $|\mathcal{F}_n(f)| \leq \beta_m A_7 B_2 |a_n|^\nu \|f\|_{G, m+5}$, $f \in G$.

Второй случай: a_n – нуль функции Y . Следовательно,

$$\frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n} = \frac{Y(z)}{z - a_n} \mathcal{L}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

В силу оценок (48) и (60), леммы 9 существует функционал $\mathcal{F}_n \in G^*$ такой, что $\widehat{\mathcal{F}}_n(z) = \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n}$, $z \in \mathbb{C}$, при этом $|\mathcal{F}_n(f)| \leq \beta_m A_5 B_4 |a_n|^\nu \|f\|_{G, m+5}$, $f \in G$.

Итак, в обоих случаях для любого $n \in \mathbb{N}$ существует функционал $\mathcal{F}_n \in G^*$ такой, что

$$\widehat{\mathcal{F}}_n(z) = \frac{\mathcal{N}(z)}{z - a_n}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (66)$$

причем

$$|\mathcal{F}_n(f)| \leq H |a_n|^\nu \|f\|_{G, m+5}, \quad f \in G, \quad (67)$$

где постоянная $H > 0$ не зависит от n . Положим

$$\mathcal{F}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(a_n)}{\mathcal{N}'(a_n)} \mathcal{F}_n(f), \quad f \in G.$$

В силу (63), (64), (67) функционал $\mathcal{F}$ определен корректно и является линейным и непрерывным на G . Из равенств (65) и (66) имеем $\widehat{\mathcal{F}} = F$. Таким образом, отображение J сюръективно.

По теореме об открытом отображении для пространств (LN^*) (см. [18; приложение 1], [19; теорема 3.2.]) J осуществляет топологический изоморфизм между G^* и P . Теорема 1 доказана.

§ 5. О сюръективности линейного дифференциального оператора в G

Пусть $M(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ – целая функция с нулевым множеством $Z(M) = \{\zeta_j\}_{j=1}^{\infty}$. Предположим, что для M выполнено условие: существуют положительные числа A_1, A_2, B такие, что

$$|M(z)| \leq A_2 \exp(w(B|z|)), \quad z \in \mathbb{C},$$

и для z вне множества Ω попарно непересекающихся кругов $D(\zeta_j, b|\zeta_j|^{-\tau})$, $b > 0$, $\tau > \alpha - 1$, $\zeta_j \in Z(M)$,

$$|M(z)| \geq A_1 \exp(-w(B|z|)). \quad (68)$$

Введем линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{M}(f) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k i^k f^{(k)}, \quad f \in G.$$

Так как $|a_k| \leq A_2 B^k M_k^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то, пользуясь условием (ii), для $0 < \varepsilon < (BH_2)^{-1}$ и для любых $f \in G$, $m \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |f^{(k+m)}(x)| &\leq A_2 \|f\|_{\varphi_\varepsilon} \exp(\varphi_\varepsilon(x)) \sum_{k=0}^{\infty} B^k M_k^{-1} \varepsilon^{k+m} M_{k+m} \\ &\leq A_2 \|f\|_{\varphi_\varepsilon} \exp(\varphi_\varepsilon(x)) \varepsilon^m \sum_{k=0}^{\infty} B^k \varepsilon^k H_1 H_2^{k+m} M_m \\ &\leq A_2 H_1 \delta^m M_m \|f\|_{\varphi_\varepsilon} (1 - \varepsilon B H_2)^{-1} \exp(\varphi_\delta(x)), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где $\delta = \varepsilon H_2$. Следовательно, $\mathcal{M}(f) \in G$. Более того, для $\delta = \varepsilon H_2$, $0 < \varepsilon < (BH_2)^{-1}$

$$\|\mathcal{M}(f)\|_{\varphi_\delta} \leq A_2 H_1 (1 - \delta B)^{-1} \|f\|_{\varphi_\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что $\mathcal{M}$ действует из G в G непрерывно.

Следующие три леммы понадобятся при доказательстве теоремы 4. Пользуясь условием (ii), легко проверить, что справедлива следующая

ЛЕММА 12. *Для любых положительных чисел a , b существуют положительные числа c , q такие, что*

$$w(a|z|) + w(b|z|) \leq w(c|z|) + q, \quad z \in \mathbb{C}.$$

ЛЕММА 13. *Система $W = \{\exp(-ixz)\}_{z \in \mathbb{C} \setminus Z(M)}$ полна в G .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать лемму, нужно показать, что если для произвольного функционала $T \in G^*$ такого, что $T(f) = 0$ для любого $f \in W$, то $T(f) = 0$ для любого $f \in G$. Поскольку $\hat{T}(z) = 0$, $z \in \mathbb{C} \setminus Z(M)$, то по теореме единственности $\hat{T} = 0$. Тогда по теореме 1 имеем $T = 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 14. *Если для $F \in P$ отношение $\frac{F}{M}$ — целая функция, то $\frac{F}{M} \in P$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $F \in P$, то найдутся положительные числа ε , C такие, что

$$|F(z)| \leq C \exp\left(\psi(\operatorname{Im} z) + w\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right)\right), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (69)$$

По лемме 12 существуют положительные числа c , q такие, что

$$w\left(\frac{|z|}{\varepsilon}\right) + w(B|z|) \leq w(c|z|) + q, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (70)$$

Если $z \notin \Omega$, то, пользуясь (68)–(70), получим

$$\left| \frac{F(z)}{M(z)} \right| \leq C A_1^{-1} \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w(c|z|) + q). \quad (71)$$

Если $z \in \Omega$, то $z \in D(\zeta_j, b|\zeta_j|^{-\tau})$ при некотором $j \in \mathbb{N}$. Применяя принцип максимума модуля $\frac{F}{M}$ в круге $D(\zeta_j, b|\zeta_j|^{-\tau})$ и снова пользуясь оценками (68)–(70), получаем

$$\left| \frac{F(z)}{M(z)} \right| \leq C A_1^{-1} \exp(\psi(\operatorname{Im} \xi_0) + w(c|\xi_0|) + q),$$

где ξ_0 – точка максимума $\left| \frac{F(z)}{M(z)} \right|$ на $\partial D(\zeta_j, b|\zeta_j|^{-\tau})$. Отсюда, пользуясь неравенствами (2), (4), получаем

$$\left| \frac{F(z)}{M(z)} \right| \leq A_3 \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w(c|z|)), \quad z \in D(\zeta_j, b|\zeta_j|^{-\tau}), \quad (72)$$

где A_3 – некоторая постоянная, не зависящая от j .

Из (71), (72) следует, что $\frac{F}{M} \in P$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 4. Для любого $h \in G$ уравнение $\sum_{k=0}^{\infty} a_k i^k f^{(k)}(x) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, разрешимо в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейный оператор $\mathcal{M}$ определяет сопряженный оператор $\mathcal{M}^*: G^* \rightarrow G^*$ по правилу $(\mathcal{M}(f), T) = (f, \mathcal{M}^*(T))$, $f \in G$, $T \in G^*$. Так как пространства G^* и P топологически изоморфны, то $\mathcal{M}^*$ порождает оператор $\widehat{\mathcal{M}}: P \rightarrow P$ по формуле $\widehat{T} \rightarrow \widehat{\mathcal{M}^*(T)}$, $T \in G^*$. Легко видеть, что $\widehat{\mathcal{M}}(F)(z) = F(z)M(z)$, $F \in P$.

Образ произвольного оператора A будем обозначать через $\operatorname{im} A$.

Покажем, что множество $\operatorname{im} \mathcal{M}$ замкнуто в G . Так как G – пространство Фреше, то замкнутость $\operatorname{im} \mathcal{M}$ в G равносильна замкнутости $\operatorname{im} \mathcal{M}^*$ в G^* [20], а последнее имеет место тогда и только тогда, когда множество $\operatorname{im} \widehat{\mathcal{M}}$ замкнуто в P . Согласно [12; теорема 1] $\operatorname{im} \widehat{\mathcal{M}}$ замкнуто в P тогда и только тогда, когда $\operatorname{im} \widehat{\mathcal{M}} \cap P_m$ замкнуто в P_m для любого $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольно. Пусть F принадлежит замыканию $\operatorname{im} \widehat{\mathcal{M}} \cap P_m$ в P_m . Тогда существует последовательность $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \operatorname{im} \widehat{\mathcal{M}} \cap P_m$, сходящаяся к F в топологии P_m , т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N(\varepsilon)$

$$|F(z) - F_n(z)| \leq \varepsilon \exp(\psi(\operatorname{Im} z) + w_m(|z|)), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (73)$$

Если ζ_j – нуль M кратности s_j , то для $k = 0, 1, \dots, s_j - 1$

$$|F^{(k)}(\zeta_j)| = |F^{(k)}(\zeta_j) - F_n^{(k)}(\zeta_j)| \leq \frac{k!}{r^k} \max_{|\zeta - \zeta_j| = r} |F(\zeta) - F_n(\zeta)|,$$

где $r = (|\zeta_j| + 1)^{1-\alpha}$. Пользуясь (73), (2), (4) и леммой 2, получаем при $k = 0, 1, \dots, s_j - 1$

$$|F^{(k)}(\zeta_j)| \leq \varepsilon C_k \exp(\psi(\operatorname{Im} \zeta_j) + w_{m+1}(|\zeta_j|)),$$

где положительная постоянная C_k не зависит от j . В силу произвольности $\varepsilon > 0$ $F^{(k)}(\zeta_j) = 0$, $k = 0, 1, \dots, s_j - 1$. Отсюда следует, что $\frac{F}{M}$ – целая функция. По лемме 14 $\frac{F}{M} \in P$. Следовательно, $F \in \operatorname{im} \widehat{\mathcal{M}} \cap P_m$. Это означает, что множество $\operatorname{im} \widehat{\mathcal{M}}$ замкнуто в P . Следовательно, множество $\operatorname{im} \mathcal{M}$ замкнуто в G .

Покажем теперь, что $\operatorname{im} \mathcal{M} = G$. Рассмотрим уравнение $\mathcal{M}(f) = \exp(-ixz)$, где $z \in \mathbb{C} \setminus Z(M)$. Оно имеет решение $f(z) = \frac{\exp(-ixz)}{M(z)}$. Привлекая лемму 13, делаем вывод, что множество $\operatorname{im} \mathcal{M}$ плотно в G . Из этого и из замкнутости $\operatorname{im} \mathcal{M}$ в G следует, что $\operatorname{im} \mathcal{M} = G$.

Теорема 4 доказана.

В заключение выражаю признательность В. В. Напалкову за внимание, проявленное к работе. Также автор признателен рецензенту за указанные замечания.

Список литературы

1. Мандельброт С. Примающиеся ряды, регуляризация последовательностей, применения. М.: ИЛ, 1955.
2. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973.
3. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 1. Обобщенные функции и действия над ними. М.: ГИФМЛ, 1958.
4. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е. Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. М.: ГИФМЛ, 1958.
5. Taylor B. A. Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions // Comm. Pure Appl. Math. 1971. V. 24. №1. P. 39–51.
6. Юлмухаметов Р. С. Квазианалитические классы функций в выпуклых областях // Матем. сб. 1986. Т. 130 (172). №4 (8). С. 500–519.
7. Юлмухаметов Р. С. Аппроксимация субгармонических функций // Anal. Math. 1985. V. 11. №3. P. 257–282.
8. Соломещ М. И. Операторы типа свертки в некоторых пространствах аналитических функций // Дис. . . . канд. физ.-матем. наук. М., 1995.
9. Напалков В. В., Соломещ М. И. Оценка изменения целой функции при сдвигах ее нулей // Докл. РАН. 1995. Т. 342. №6. С. 739–741.
10. Соломещ М. И. К теореме Р. С. Юлмухаметова об аппроксимации субгармонических функций. Уфа: Ин-т математики УрО РАН, 1992. Деп. в ВИНТИ 24.07.1992. №2447 – В92.
11. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
12. Себастьян-и-Силва Ж. О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях // Сб. переводов. Математика. Т. 1. №1. М.: ИЛ, 1957. С. 60–77.
13. Напалков В. В. Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. №2. С. 287–305.
14. Попенков С. В. О весовом пространстве функций, аналитических в неограниченной выпуклой области в $\mathbb{C}^m$ // Матем. заметки. 1986. Т. 40. №3. С. 374–384.
15. Маннанов М. М. Описание одного класса аналитических функционалов // Сиб. матем. журн. 1990. Т. 31. №3. С. 62–72.
16. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.
17. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p . М.: Мир, 1984.
18. Робертсон А., Робертсон В. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
19. Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
20. Дьёдонне Ж., Шварц Л. Двойственность в пространствах $(\mathcal{F})$ и $(\mathcal{L}\mathcal{F})$ // Сб. переводов. Математика. Т. 2. №2. М.: ИЛ, 1958. С. 77–107.

Институт математики с ВЦ УНЦ РАН, Уфа
 E-mail: musin@imat.rb.ru

Поступила в редакцию
 20.09.1999