Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Х. Сабитов, Двумерные многообразия с метриками вращения, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 10, 87–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm517>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:01:32

УДК 513.73

И. Х. Сабитов

Двумерные многообразия с метриками вращения

Работа посвящена изучению топологического и метрического строения двумерных многообразий, на которых введена метрика, локально являющаяся метрикой вращения. Оказывается, этот вопрос допускает в случае компактных многообразий исчерпывающее исследование, которое, в частности, объясняет, почему в $\mathbb{R}^3$ нет замкнутых аналитических поверхностей вращения, отличных от сферы и тора (а вместе с тем в гладкости C^∞ такие поверхности при некотором обобщенном их понимании существуют в любом топологическом классе).

Библиография: 11 названий.

Метрики и поверхности вращения, казалось, досконально изученные еще в 19 веке, тем не менее продолжают оставаться объектом интереса, особенно в метрической геометрии, так как исследование их относительно просто и вместе с тем в них содержится достаточно богатая информация, позволяющая рассматривать поверхности вращения как источник постановки задач в общей теории и как объекты для проверки общих задач в модельных вариантах. На самом деле вопрос о строении многообразий с метрикой вращения не очень простой. Недаром в многомерной постановке он исследован только для *односвязных* многообразий, см. [1]–[3]. Мы рассматриваем двумерные многообразия и в компактном случае получаем полное их описание.

1. Пусть D – некоторая открытая область в плоскости переменных (ξ, η) . Будем говорить, что на D задана *метрика вращения* или *метрика с круговой симметрией*, если линейный элемент метрики в окрестности каждой точки (ξ, η) имеет вид

$$ds^2 = \Lambda^2(\rho)(d\xi^2 + d\eta^2), \quad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2, \quad \Lambda > 0. \quad (1)$$

Координаты (ξ, η) , в которых метрика ds^2 имеет вид (1), будем называть *стандартными*. Если точка $(0, 0)$ с $\rho = 0$ принадлежит области D , то мы будем называть ее *полюсом* метрики.

Область D будем называть областью с *круговой выпуклостью*, если пересечение D с произвольной окружностью $\rho = \text{Const}$ или пусто, или состоит из одной только связной компоненты. Для областей D с круговой выпуклостью метрика вращения (1) в целом задается однозначной функцией $\Lambda(\rho)$, где ρ изменяется между минимальным и максимальным значениями расстояния от начала координат до точек области D .

Если же D не обладает свойством круговой выпуклости, то она разбивается на конечное или счетное число подобластей D_j с круговой выпуклостью, ограниченных дугами межвых окружностей, касающихся границы D хотя бы в одной

Работа выполнена при частичной поддержке Санкт-Петербургского конкурсного центра по фундаментальному естествознанию (грант № П-6-99).

Рис. 1

точке (см. рис. 1). В этом случае метрику (1) тоже можно задавать или однозначной функцией $\Lambda(\rho)$ (и это единственный способ задать метрику (1) в аналитическом случае) или же для (1) можно задавать в каждой подобласти D_j свою функцию $\Lambda_j(\rho)$, склеивающуюся C^n -гладко ($0 \leq n \leq \infty$) с другими функциями $\Lambda_i(\rho)$, соответствующими областям D_i , имеющим с D_j общие граничные точки. Таким образом, общая функция $\Lambda(\rho)$ будет многозначной функцией от ρ (см. рис. 2), а метрика (1) в D будет в целом C^n -гладкой.

Рис. 2

Рис. 3

Существенное различие между заданием метрики (1) в D однозначной или многозначной функцией $\Lambda(\rho)$ проявляется, например, в следующем обстоятельстве: если метрика в D задана однозначной функцией $\Lambda(\rho)$, то ее можно распространить на круг вида $\xi^2 + \eta^2 \leq R_{\max}^2$ (если начало координат $(0,0) \in D$, рис. 1а)) или на кольцо вида $R_{\min}^2 \leq \xi^2 + \eta^2 \leq R_{\max}^2$ (рис. 1б)) той же формулой (1) с сохранением имеющегося порядка гладкости. Таким образом, при однозначности $\Lambda(\rho)$ метрику (1) можно считать в случае необходимости заданной в круге или кольце.

Случай метрики (1) с многозначной функцией $\Lambda(\rho)$ моделируется на поверхностях вращения следующим образом (рис. 3). Пусть поверхность S получена вращением кривой $L : y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, вокруг оси Ox , с углом поворота ϕ от

$\phi = 0$ до $\phi = 2\pi$. Продолжим теперь кривую L на отрезок $[b, c]$, $c > b$, некоторой дугой $L_1 : y = f_1(x)$ и рассмотрим поверхность S_1 от вращения L_1 вокруг Ox на участке поворота от угла $\phi = 0$ до угла $\phi = \phi_0$, $\phi_0 < 2\pi$. Затем продолжим L на тот же отрезок $[b, c]$ другой дугой $L_2 : y = f_2(x)$ и рассмотрим поверхность S_2 от вращения L_2 вокруг Ox на участке поворота от $\phi = \phi_1 \geq \phi_0$ до угла $\phi = \phi_2 \leq 2\pi$. Поверхность, полученная объединением поверхностей S , S_1 и S_2 , будет иметь метрику вида (1) с коэффициентом $\Lambda(\rho)$, однозначным на участке $[a, b]$ и двузначным на $[b, c]$.

2. Пусть в некоторой области Ω плоскости (x, y) задана метрика

$$d\sigma^2 = \lambda^2(x, y)(dx^2 + dy^2). \quad (2)$$

Как узнать, является ли эта метрика метрикой вращения? Интересно, конечно, указать такой признак круговой симметричности метрики (2), который одновременно давал бы алгоритм приведения (2) к виду (1). Здесь мы по этому поводу докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы C^1 -гладкая метрика (2) в целом была метрикой вращения, необходимо и достаточно, чтобы область Ω допускала конформное отображение $\zeta = \zeta(z)$, $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, в плоскость (ξ, η) , удовлетворяющее уравнению*

$$\operatorname{Im} \left(\zeta(z) \left[\left(\frac{1}{\zeta'(z)} \right)' + \frac{2}{\zeta'(z)} \frac{\partial \ln \lambda}{\partial z} \right] \right) = 0, \quad z \in \Omega, \quad (3)$$

где $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$. Если, кроме того, предположить, что в стандартных координатах (ξ, η) коэффициент $\Lambda(\rho) > 0$ и класса C^1 в замкнутой области $\bar{D} = \zeta(\bar{\Omega})$, то $\zeta(z)$ необходимо имеет вид

$$\zeta(z) = \exp \left(\int \frac{dz}{\Phi(z)} \right), \quad (4)$$

где голоморфная функция $\Phi(z)$ — решение краевой задачи

$$\operatorname{Im} \left(\Phi'(t) + 2 \frac{\partial \ln \lambda}{\partial t} \Phi(t) \right) = 0, \quad t \in \partial\Omega. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обе изометричные метрики (1) и (2) даны в изотермических координатах, поэтому переход от координат (x, y) к (ξ, η) необходимо дается некоторым конформным отображением $\zeta = \zeta(z)$. Пусть $z = z(\zeta)$ — обратное отображение. Тогда

$$d\sigma^2 = \lambda^2[z(\zeta)]|z'(\zeta)|^2(d\xi^2 + d\eta^2) = \Lambda^2(\zeta)(d\xi^2 + d\eta^2). \quad (6)$$

Следовательно, Λ будет зависеть только от $\rho = |\zeta|$ в том и лишь том случае, когда

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \lambda^2[z(\zeta)]|z'(\zeta)|^2 = 0, \quad \zeta = \rho e^{i\theta}.$$

Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial \theta} = i\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} - i\bar{\zeta} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}}$, и возвращаясь к переменной z , получаем уравнение (3).

Если теперь предположить, что $\Lambda(\zeta) > 0$ и класса C^1 в $\bar{D}$, то из (6) получаем, что $|z'(\zeta)| > 0$ и класса C^1 в $\bar{D}$, следовательно, $z'(\zeta) \neq 0$ и класса $C^1(\bar{D})$, а тогда для обратной функции $\zeta(z)$ имеем, что она класса $C^2(\bar{\Omega})$. Вводя функцию $\Phi(z) = \frac{\zeta(z)}{\zeta'(z)}$, для $\zeta(z)$ получаем утверждаемое представление (4), а уравнение (3) при $z \rightarrow t \in \partial\Omega$ переходит в граничное условие (5). Теорема доказана.

Значит, алгоритм проверки круговой симметричности метрики (2) и приведения ее к виду (1) следующий: надо сначала решить краевую задачу (5) (теория этой задачи разработана хорошо, см. [4]), затем проверить, удовлетворяется ли для полученного решения $\Phi(z)$ условие

$$\operatorname{Im}\left(\Phi'(z) + 2\frac{\partial \ln \lambda}{\partial z}\Phi(z)\right) = 0, \quad z \in \Omega; \quad (7)$$

в случае положительного ответа по функции $\Phi(z)$ найти по (4) функцию $\zeta(z)$ и, наконец, если найденная функция $\zeta(z)$ однолистка в $\bar{\Omega}$, то получаем, что (2) в целом приводится к стандартному виду (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Так как любая область Ω обязательно содержит некоторый круг $\bar{\omega}_R : |z - z_0| \leq R$, то на практике функцию $\zeta(z)$ можно искать по следующему алгоритму. Сначала краевую задачу (5) решаем для круга ω_R и по $\Phi(z)$ находим $\zeta_R(z)$ в ω_R . И так как голоморфная функция $\zeta_R(z)$ в пределах ω_R совпадает с $\zeta(z)$, то $\zeta(z)$ получается из ζ_R аналитическим продолжением из ω_R в Ω и остается лишь проверить ее однолиственность.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае, когда гладкость метрики (2) класса C^3 , для нахождения $\Phi(z)$ вместо краевой задачи (5) можно решать дифференциальное уравнение 3-го порядка. Получается оно так. Продифференцируем уравнение (7) по $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ и по $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ и из полученных двух уравнений исключаем функцию $\bar{\Phi}(z)$. В итоге приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \Phi''' + \left(2\frac{\partial \ln \lambda}{\partial z} + \frac{4}{K\lambda^2} \frac{\partial^3 \ln \lambda}{\partial z^2 \partial \bar{z}}\right) \Phi'' + \left(4\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial z^2} + \frac{8}{K\lambda^2} \frac{\partial \ln \lambda}{\partial z} \frac{\partial^3 \ln \lambda}{\partial z^2 \partial \bar{z}}\right) \Phi' \\ + \left(2\frac{\partial^3 \ln \lambda}{\partial z^3} + 8\frac{1}{K\lambda^2} \frac{\partial^3 \ln \lambda}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial z^2}\right) \Phi = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где K – гауссова кривизна, связанная с метрикой уравнением $4\frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial z \partial \bar{z}} = -K\lambda^2$.

3. Применим полученный выше результат для исследования следующего вопроса: какова свобода выбора системы координат, в которой метрика вращения имеет стандартный вид (1)? В [5] этот вопрос рассмотрен подробно для случая метрик постоянной кривизны. Для полноты изложения приведем некоторые результаты этой работы.

Пусть метрика (1) постоянной кривизны записана в двух формах: в каноническом виде

$$ds^2 = \frac{1}{(1 + K\rho^2/4)^2} (d\xi^2 + d\eta^2), \quad K = 0, 1 \text{ или } -1, \quad (9)$$

и в некотором стандартном виде

$$ds^2 = \Lambda^2(r)(du^2 + dv^2), \quad r^2 = u^2 + v^2. \quad (10)$$

Согласно предыдущему для нахождения перехода

$$w = w(\zeta) = C \exp\left(\int \frac{d\zeta}{\Phi(\zeta)}\right), \quad w = u + iv, \quad \zeta = \xi + i\eta,$$

от (9) к (10) нужно решить уравнение (7), которое в случае $K = 0$ имеет вид $\text{Im } \Phi' = 0$, т.е. $\Phi(\zeta) = a\zeta + b$, $\text{Im } a = 0$. Следовательно,

$$w = C(A\zeta + b)^{1/A} \quad \text{при } A \neq 0 \quad \text{или} \quad w = Ce^{\zeta/b} \quad \text{при } A = 0 \quad (11)$$

и поэтому в стандартном виде (10) локально евклидовой метрики коэффициент $\Lambda(r)$ в общем случае имеет выражение

$$\Lambda(r) = C_0 r^a, \quad \text{где } C_0 \text{ и } a - \text{действительные числа}, \quad (12)$$

т.е. при $a = 0$ имеем канонический вид (9) (с точностью до подобия), при $a = -1$ имеем метрику цилиндра, а при $a \neq -1$ — метрику конуса (эти формы возможны лишь в случаях, когда область изменения стандартных координат не содержит полюса).

При $K \neq 0$ мы воспользуемся замечанием 2. Для $\lambda = \frac{1}{1 + K\rho^2/4}$ уравнение (8) имеет простой вид $\Phi''' = 0$, т.е. $\Phi(\zeta)$ является полиномом второй степени. Из условия (7) находим, что

$$\Phi(\zeta) = a_2 \zeta^2 + a_1 \zeta - \frac{4}{K} \bar{a}_2, \quad \text{Im } a_2 = 0.$$

В [5] рассмотрены все случаи и получены все возможные формы стандартного вида (10) метрик постоянной кривизны с указанием отображений перехода к ним от канонического вида (9), причем как и в евклидовом случае, неканонический вид стандартной формы возможен лишь тогда, когда область изменения стандартных координат не содержит полюса. В той же работе даны применения этих результатов для нахождения всех центрально-симметричных решений уравнения Лиувилля $\Delta u = ae^{bu}$ с постоянными a и b .

Пусть теперь кривизна метрики (1) не является постоянной. В таком случае окрестность полюса допускает замену стандартных координат только вида $\xi + i\eta = \zeta \rightarrow C\zeta$. Действительно, пусть $w = u + iv = w(\zeta)$ — некоторая замена, и пусть полюс $\zeta_0 = (0, 0)$ перешел в точку $w_0 = w(\zeta_0) \neq (0, 0)$. Замкнутые линии $|\zeta| = \text{Const}$, вдоль которых кривизна K постоянна, перейдут в замкнутые линии γ вокруг точки w_0 , и так как вдоль линий $|w| = \text{Const}$ кривизна тоже постоянна, а эти линии пересекают линии γ , то в окрестности w_0 на всех линиях $|w| = \text{Const}$ кривизна окажется одной и той же. Значит, полюс $(0, 0)$ при отображении $w = w(\zeta)$ должен остаться на месте, и линии $|\zeta| = \text{Const}$ должны перейти в линии $|w| = \text{Const}$. А такое конформное отображение только одного вида: $w = C\zeta$.

В случае, когда и область D изменения стандартных координат ξ, η , и область Ω новых стандартных координат (u, v) не содержит полюса, требование перехода линий $|\zeta|$ в линии $|w| = \text{Const}$ останется в силе, значит, если $\zeta = \rho e^{i\theta}$, то $w(\zeta)$ имеет вид $w = re^{i\phi}$, $r = r(\rho)$, $\phi = \phi(\theta)$. Общий вид конформных отображений с таким свойством следующий: $w = C\zeta^\alpha$ или $w = C\bar{\zeta}^\alpha$, $\text{Im } \alpha = 0$. Следовательно, наиболее богатое разнообразие стандартных форм метрики вращений бывает только в случаях метрик постоянной кривизны.

4. Рассмотрим теперь многообразия, метрика которых локально является метрикой вращения. Это значит, что каждая точка такого многообразия обладает окрестностью, в которой метрика может быть приведена к виду (1). Такие метрики будем называть *метриками ЛКС* (*метрики с локальной круговой симметрией*).

Прежде всего, сказанное выше позволяет утверждать справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Если на многообразии M с метрикой ЛКС множества уровня $K = \text{Const}$ не содержат внутренних точек, то полюсы метрики расположены на M изолированно.*

Далее, относительно метрик ЛКС возникают два естественных вопроса – на каких многообразиях их можно ввести и когда локальная круговая симметричность приводит к круговой симметричности в целом? *Круговая симметричность в целом* означает, что на всем многообразии (с некоторыми выколотыми точками или разрезами) можно ввести единую систему стандартных координат, в которых метрика имеет вид (1) с однозначной функцией $\Lambda(\rho)$. Один из ответов содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть в односвязной области Ω на плоскости (x, y) задана метрика ЛКС (2). Пусть в Ω нет областей с постоянной кривизной. Тогда существуют функция $\zeta = \zeta(z)$, определенная в области Ω и локально конформная в ней, и положительная функция $\Lambda = \Lambda(\rho)$, $\rho < \sup_{\Omega} |\zeta(z)|$, возможно, многозначная в своей области определения, такие, что метрический коэффициент в (2) имеет вид $\lambda^2(z) = \Lambda^2[|\zeta(z)|]|\zeta'(z)|^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\omega} \subset \Omega$ – замыкание односвязной подобласти ω в Ω . С обычным использованием компактности покроем $\bar{\omega}$ конечной системой круговых окрестностей $U_0, U_1, \dots, U_n$, в каждой из которых существует конформное отображение 1-го рода $\zeta = \xi + i\eta = \zeta_i(z)$, приводящее метрику (2) к виду (1). Пусть U_0 – окрестность, содержащая полюс $z = z_0$; тогда для функции $\zeta = \zeta_0(z)$ имеем $\zeta_0(z_0) = 0$, поскольку полюсу в системе координат (ξ, η) соответствует начало координат. В силу результатов п. 3 функция $\zeta = \zeta_0$, конформно отображающая U_0 в окрестность точки $\zeta = 0$, определена с точностью до постоянного множителя. Выберем одну конкретную функцию $\zeta_0(z)$ и покажем, что она допускает аналитическое продолжение на Ω .

Действительно, пусть U_1 – окрестность, пересекающаяся с U_0 . Если U_1 содержит точку z_0 , то получается, что область $U_0 \cap U_1$ отображается на окрестность точки $(0, 0)$ в плоскости (ξ, η) двумя функциями: $\zeta = \zeta_0$ и $\zeta = \zeta_1$, но они согласно п. 3 связаны равенством $\zeta_1 = C\zeta_0$, поэтому подбором множителя C можем добиться, чтобы в $U_0 \cap U_1$ было равенство $\zeta_0 = \zeta_1$, и тогда получим, что $\zeta_1(z)$ является аналитическим продолжением ζ_0 из U_0 в U_1 . Если же U_1 не содержит точку z_0 , то в области U_1 наряду с $\zeta_1(z)$ согласно п. 3 существуют еще другие отображения, локально приводящие метрику (2) к стандартному виду (1), и все они вида $C\zeta_1^\alpha$. В точках из $U_0 \cap U_1$ одна из этих функций должна совпадать с уже имеющимся там отображением $\zeta_0(z)$. Тогда эта совпавшая с ζ_0 функция $C\zeta_1^\alpha$ будет аналитическим продолжением ζ_0 из U_0 в U_1 . Теперь можем считать, что ζ_0 задана в $U_0 \cup U_1$ и затем повторить предыдущее рассуждение с какой-либо пересекающейся с $U_0 \cup U_1$ окрестностью U_j и т.д. В итоге в силу односвязности Ω получим, что ζ_0 допускает однозначное аналитическое продолжение на всю область ω , а в силу произвольности выбора ω – на всю область Ω . Всю эту функцию обозначим $\zeta(z)$.

Если метрика (2) в Ω не имеет полюса, то выбор первой окрестности U_0 и элемента ζ_0 в ней производим произвольным образом. В том и другом случае метрика (2) в U_i имеет представление $\lambda^2(z) = \Lambda_i[|\zeta_i(z)|]|\zeta'_i(z)|^2$; если метрика (2) имела гладкость C^n , $0 \leq n \leq \infty$, или была аналитической, то $\Lambda_i(\rho)$ будет иметь такую же гладкость и в координатах (ξ, η) , причем в случае неаналитичности полученная склеиванием функция $\Lambda(\rho)$, возможно, окажется многозначной в том смысле, как это объяснялось в п. 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В зависимости от гладкости данной метрики и границы области Ω практическое нахождение функции $\zeta(z)$ сводится к процедуре, описанной в п. 2, без требования однолистности $\zeta(z)$.

Покажем, что в условиях теоремы круговую симметричность в целом метрики (2) на Ω гарантировать нельзя. Это очевидно, если в Ω метрика имеет два или больше полюсов, так как тогда отображение $\zeta(z)$ не может быть в Ω однолистным (потому что каждый полюс отображается в одну точку $\zeta = 0$). В случае наличия только одного полюса отображение $\zeta(z)$ тоже может не быть однолистным. Для построения примера такой возможности достаточно взять в качестве области Ω круг $|z| < 1$ и в нем метрику (2) с $\lambda(z) = \Lambda(|\zeta_0(z)|)|\zeta'_0(z)|$, где $\Lambda(\rho)$ — любая (достаточно гладкая) функция, определенная в $[0, \infty)$, а $\zeta_0(z)$ — тоже любая локально конформная, но не однолистная функция в Ω , равная нулю только в одной точке, скажем, в точке $z = 0$ (надо еще проследить за тем, чтобы не получилось метрики с постоянной кривизной). Очевидно, введенная функция $\lambda(z)$ удовлетворяет условию (3) с $\zeta(z) = \zeta_0(z)$, поэтому эта метрика ЛКС. Так как по сказанному в п. 3 при приведении ее к стандартному виду в окрестности полюса допустимы лишь отображения вида $C\zeta_0(z)$, то и для всего круга упоминаемое в теореме отображение может быть только того же вида, т.е. любая функция $\zeta(z)$ будет не однолистной.

При отсутствии в Ω полюса тоже можно построить примеры, когда при выполнении условий теоремы 3 ни функция $\zeta(z)$, ни какая-либо ее степень ζ^α не являются в Ω однолистными. Для этого рассмотрим отображение $\zeta(w)$ полукольца $D : r < |w| < R, \operatorname{Im} w > 0$, функцией $\zeta = w^3 + a, a > R^3$. Получим область $D^* : r^3 < |\zeta - a| < R^3$ вида кольца с двойным перекрытием по части $\operatorname{Im} \zeta > 0$. Возьмем теперь функцию $w = f(z)$, дающую конформное отображение круга $\overline{\Omega} : |z| \leq 1$ на $\overline{D}$. Отображение $\zeta = \zeta(z) = f^3(z) + a$ переводит круг в область D^* , поэтому оно не однолистно в Ω . Очевидно, любая степень $\zeta^\alpha(z)$ тоже является не однолистной, так как в D^* есть “перекрывающиеся” точки со сколь угодно малым значением $\arg \zeta(z)$, которые отображением $\zeta^\alpha(z)$ переведутся в одну точку. Тогда метрика (2) в Ω с $\lambda(z) = \Lambda(|\zeta(z)|)|\zeta'(z)|$, где $\Lambda(\rho)$ — любая функция на $[0, \infty)$, является метрикой ЛКС без полюса и непостоянной кривизны при подходящем выборе Λ . Так как любое отображение, приводящее (2) к стандартным координатам, должно иметь вид $\zeta^\alpha(z)$, то любое из них не однолистно в Ω .

В заключение этого пункта отметим, что в любой плоской области существуют метрики ЛКС с любым конечным или счетным числом полюсов. Такие метрики проще всего построить как метрики поверхностей вращения с любым конечным или счетным числом полюсов. В свою очередь, такие поверхности строятся аналогично тем поверхностям, метрики которых имеют многозначный коэффициент Λ в стандартной форме (1), поэтому мы ограничимся лишь изображением односвязной поверхности вращения с тремя полюсами (см. рис. 4).

5. Рассмотрим теперь метрики вращения на компактных многообразиях без края. Относительно таких многообразий справедлива следующая

Рис. 4

ТЕОРЕМА 4. C^n -гладкие ($2 \leq n \leq \infty$) метрики вращения с локальной круговой симметрией, для которых нет областей с постоянной кривизной, можно задавать только на сфере и на торе (ориентируемый случай) или на проективной плоскости и на бутылке Клейна (неориентируемый случай). Если допускать области с постоянной кривизной, то метрика ЛКС может быть задана на любом компактном многообразии без края.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с последней части теоремы. Если рассматриваются метрики ЛКС с постоянной кривизной, то известно, что их можно задавать на любом компактном многообразии (кривизна должна быть того же знака, что и эйлерова характеристика многообразия). Что касается метрик ЛКС в целом непостоянной кривизны, но с областями постоянной кривизны, то возможность их введения на любом компактном многообразии очевидна: для этого из многообразия постоянной кривизны достаточно в какой-нибудь стандартной карте удалить круг вида $\rho \leq \text{Const}$ с метрикой вида (9) и вклеить туда круг с другой метрикой (1), коэффициент Λ которой C^n -гладко ($0 \leq n \leq \infty$) согласован с коэффициентом из (9) вдоль линии $\rho = \text{Const}$. Более интересной является возможность введения на любом ориентируемом многообразии метрики ЛКС, которую можно реализовать как метрику некоторой замкнутой поверхности в $\mathbb{R}^3$, локально являющейся поверхностью вращения. Укажем построение такой поверхности.

Рассмотрим следующий способ построения ручки к сфере. Отрежем от некоторой данной сферы две непересекающиеся шапочки с непараллельными основаниями; оставшуюся часть сферы обозначим Σ . Края шапочек – это два круговых края Γ_1 и Γ_2 поверхности Σ , плоскости которых имеют нормали l_1 и l_2 . Рассматривая l_i ($i = 1, 2$) как ось вращения для сферы, продолжим Σ в окрестности окружности Γ_i наружу C^∞ -гладким образом как поверхность вращения S_i типа кольца на некоторое достаточно удаленное расстояние. Пусть Γ'_i – другой край поверхности S_i . Рассматривая окружность Γ'_i как лежащую на некоторой сфере Σ_i и не совпадающую с ее экватором, можем C^∞ -гладким образом склеить S_i с Σ_i , отбросив при этом на каждой сфере Σ_i шапочку, ограниченную окружностью Γ'_i . Оставшуюся часть сферы Σ_i обозначим как Σ'_i . Все построенные поверхности – Σ , S_1 , S_2 , Σ'_1 и Σ'_2 – можно расположить без взаимопересечений. Соединим теперь центры сфер Σ_1 и Σ_2 отрезком прямой l ; эти сферы можно расположить так далеко от Σ , чтобы l проходила вне Σ . Плоскостями, перпендикулярными к l , отрежем от Σ'_i шапочки так, чтобы их края γ_i не пересекались с Γ'_i ; оставшиеся части от Σ'_i снова обозначим как Σ_i (для симметричности обозначения с Σ). Приняв теперь l за ось вращения, построим поверхность вращения S_3 с C^n -гладкой склейкой с Σ_i вдоль γ_i . Получим ручку $R = S_1 \cup \Sigma_1 \cup S_3 \cup \Sigma_2 \cup S_2$. Склеивание ручки R с Σ дает поверхность типа тора, которая в окрестности каждой точки является поверхностью вращения (см. рис. 5). Таких ручек, очевидно, можно построить какое угодно конечное или даже счетное число.

Таким же образом можно построить и неориентируемые ручки и получить в $\mathbb{R}^3$

Рис. 5

Рис. 6

неориентируемую поверхность с любой допустимой четной характеристикой Эйлера, локально представляющую собой поверхность вращения (см. на рис. 6 реализацию бутылки Клейна).

ПРОБЛЕМА 1. *Существуют ли неориентируемые поверхности, локально являющиеся поверхностями вращения и имеющие нечетную эйлерову характеристику?*

Дадим теперь доказательство первой части теоремы. Пусть на некотором двумерном компактном многообразии M без края задана метрика ЛКС гладкости C^n , $2 \leq n \leq \infty$. Так как полюсы метрики расположены изолированно, то их может быть только конечное число. Рассмотрим на M функцию K – гауссову кривизну метрики. Через каждую точку на M , не являющуюся полюсом, проходит только одна дуга линии уровня функции K , которая локально представляет собой в любой стандартной системе координат (ξ, η) дугу окружности $|\zeta| = \text{Const}$. Если M ориентируемо, то касательные к линиям $K = \text{Const}$ можно ориентировать таким образом, что они образуют на M непрерывное касательное векторное поле, имеющее особенности только в полюсах. Действительно, покроем M некоторой конечной системой стандартных карт с конформным переходом 1-го рода в пересечениях. Пусть a – некоторая (отличная от полюса) точка на M , U_0 – покрывающая ее карта. На плоскости (ξ_1, η_1) линии $K = K(a)$, проходящей через a , соответствует некоторая дуга окружности. Выберем направление касательной к этой окружности идущим, скажем, против часовой стрелки и распространим этот вектор непрерывно на все M как вектор, касательный к линиям $K = \text{Const}$.

Покажем, что такое продолжение корректно, т.е. в каждой точке, кроме полюсов, получится вполне определенный вектор. Пусть имеются две последовательности карт $U_0, U_1, \dots, U_n$ и $U_0, U'_1, \dots, U'_m$, проходя через которые мы приходим к картам U_n и U'_m , покрывающим некоторую отличную от полюса точку $b \in M$. Согласно п. 3 в точках пересечения двух карт U_k и U_{k+1} переход от координат (ξ_k, η_k) к координатам (ξ_{k+1}, η_{k+1}) дается отображением $\zeta_{k+1} = C_k \zeta_k^{\alpha_{k+1}}$, где $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $j = k, k+1$; при этом если $\alpha_{k+1} > 0$, то окружности $|\zeta_k| = \text{Const}$ и $|\zeta_{k+1}| = \text{Const}$, соответствующие на M одной линии уровня $K = \text{Const}$, обходятся в одном и том же направлении, а если $\alpha_{k+1} < 0$, то они обходятся в противоположных направлениях. После перехода от U_0 к U_n по первой последовательности карт мы имеем $\zeta_n = C \zeta_0^{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n}$. Если произведение $\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n$ положительно (отрицательно), то дуга окружности $|\zeta_n| = \text{Const}$ в точке, соответствующей точке $b \in M$, обходится против часовой стрелки (соответственно по часовой стрелке). При переходе к b по цепочке второй последовательности карт из U_0 к U'_m мы получаем $\zeta'_m = C' \zeta_0^{\alpha'_1 \cdot \alpha'_2 \cdots \alpha'_m}$. Снова при положительном (отрицательном) значении произведения $\alpha' = \alpha'_1 \cdot \alpha'_2 \cdots \alpha'_m$ обход соответствующей окружности в карте с переменной ζ'_m будет положительным (отрицательным). Если $U_n = U'_m$, то $\zeta_n = \zeta'_m$, поэтому $\alpha = \alpha'$, следовательно, мы приходим к одному и тому же обходу окружности. Если же U_n и U'_m — две разные карты, покрывающие точку $b \in M$, то переход между ними дается равенством вида

$$\zeta'_m = C_0 \zeta^{\alpha'/\alpha} \quad (13)$$

и снова имеем, что направления обхода окружностей, к которым мы пришли в картах ζ_n и ζ'_m по цепочкам $U_0, U_1, \dots, U_n$ и $U_0, U'_1, \dots, U'_m$, согласованы между собой. Действительно, если α и α' одного знака, то обходы в U_n и U'_m одинаковые и они согласно (13) не изменяются при переходе от координат ζ'_m к ζ_n ; если же знаки у α и α' разные, то обходы окружностей в U_n и U'_m разные, но они разные и при переходе (13).

Таким образом, мы построили на многообразии M непрерывное векторное поле касательных с изолированными особыми точками только в полюсах метрики (если они есть). Суммарный индекс особых точек равен эйлеровой характеристике многообразия, которая четна и отрицательна для всех ориентируемых многообразий, кроме тора и сферы. Очевидно, индекс каждой особой точки как индекс поля касательных к замкнутым линиям равен единице. Следовательно, эйлерова характеристика может равняться только или 2 (случай сферы), или 0 (случай тора, когда нет ни одного полюса).

Если же M неориентируемо, то возьмем его двулистное покрытие $\widetilde{M}$ с локальным сохранением метрики; тогда $\widetilde{M}$ будет или сферой (значит, M — проективная плоскость), или тором (значит, M — бутылка Клейна).

Реальное существование сферы и тора с метрикой вращения непостоянной кривизны общеизвестно. Проективную плоскость с метрикой вращения непостоянной кривизны можно построить следующим образом: возьмем в $\mathbb{R}^3$ замкнутую поверхность вращения, симметричную относительно наибольшей параллели, и отождествим точки, симметричные относительно центра этой наибольшей параллели; такое отождествление совместимо с метрикой, и оно дает проективную плоскость, снабженную метрикой ЛКС с одним полюсом.

Построение бутылки Клейна с метрикой вращения проводится аналогичным образом на основе тора. Представим круговой тор вращения с метрикой $ds^2 =$

$a^2 d\psi^2 + (b + a \cos \psi) d\phi^2$ (где a – радиус вращаемой окружности C , $b > a$ – расстояние от центра C до оси вращения; линии $\phi = \text{Const}$ – меридианы, $\psi = \text{Const}$ – параллели) по обычному правилу как квадрат $-\pi \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$ с отождествленными противоположными сторонами. Возьмем теперь в этом квадрате прямоугольник $\Pi : 0 \leq \phi \leq \pi$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$ и отождествим в нем точки (π, ψ) с точками $(0, 2\pi - \psi)$ и точки $(\phi, 0)$ с точками $(\phi, 2\pi)$. Нетрудно проверить, что это отождествление вводит на Π аналитическую метрику, локально совпадающую с метрикой тора вращения в соответствующей окрестности, а топологически Π будет бутылкой Клейна.

СЛЕДСТВИЕ 1. Аналитические метрики непостоянной кривизны, локально являющиеся метрикой вращения, можно задавать только на сфере, торе, проективной плоскости и на бутылке Клейна.

Между прочим, доказанная теорема и ее следствие объясняют, почему в $\mathbb{R}^3$ не существует других замкнутых аналитических поверхностей вращения, кроме сферы и тора. Это замечание может показаться тривиальным наблюдением, однако автору неизвестно никакого другого его формального доказательства.

6. Используя прием, приведенный в начале доказательства теоремы 4, мы можем построить и односвязные многообразия с метрикой ЛКС, имеющие области постоянной кривизны и какое угодно конечное число изолированных полюсов (пример см. на рис. 7.). В связи с этим интересно сравнить эти примеры с приведенной в [1]–[3] теоремой о строении односвязного полуприводимого риманова пространства, совпадающего в двумерном случае с многообразием с метрикой ЛКС (см. также работу [6, утверждение в п. 4]). Рассмотрим область Σ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, расположенную между плоскостями $P_h : z = h$ и $P_b : ay + z = b$ с коэффициентами, подобранными так, что $0 < h < R$, $a < 0$, $\frac{b-h}{a} > R$, $\frac{b^2}{1+a^2} < R^2$. Сечения Σ плоскостями из пучка $P = \lambda_1 P_h + \lambda_2 P_b$ являются окружностями (рис. 8.).

Рис. 7

Ось пучка – прямая, параллельная оси Ox и содержащая точку $M(0, (b-h)/a, h)$. Параметризуем плоскости пучка аппликатой t точки их пересечения с осью Oz .

Рис. 8

Тогда уравнение соответствующей плоскости P_t пучка имеет вид $(b-t)(z-h) + (t-h)(ay+z-b) = 0$ или

$$P_t : a(t-h)y + (b-h)z + t(h-b) = 0, \quad b \leq t \leq h. \quad (14)$$

Легко вычислить, что координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — центра сечения сферы плоскостью P_t — имеют следующие значения:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \frac{a(h-b)t(h-t)}{A}, \quad z_0 = \frac{t(h-b)^2}{A}, \quad (15)$$

где $A = (b-h)^2 + a^2(t-h)^2$.

Так как сечения области Σ плоскостями пучка являются окружностями Γ_t (они играют роль “параллелей” поверхности вращения) с центрами в точках $(0, y_0(t), z_0(t))$, то координаты точек Σ можно представить в виде

$$x = r(t) \sin \theta, \quad y = y_0(t) + r(t) \cos \alpha \cos \theta, \quad z = z_0(t) - r(t) \sin \alpha \cos \theta, \quad (16)$$

где

$$r = r(t) = \sqrt{R^2 - \frac{t^2(h-b)^2}{A}}, \quad (17)$$

$$\cos \alpha = \frac{b-h}{\sqrt{A}}, \quad \sin \alpha = \frac{a(\zeta-h)}{\sqrt{A}},$$

а значения y_0 , z_0 и A взяты из (15); параметр θ изменяется от 0 до 2π (учтено, что уравнение окружности радиуса r на плоскости $ax+by+cz=0$ с центром в $(0, 0, 0)$ имеет вид

$$x = \frac{ac - b \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{a^2 + b^2}} r \cos \theta, \quad y = \frac{bc + a \operatorname{tg} \theta}{\sqrt{a^2 + b^2}} r \cos \theta, \quad z = -\sqrt{a^2 + b^2} r \cos \theta.$$

Определим векторное поле $\mathbf{l}_1$, для которого сечения области Σ плоскостями (14) — окружности Γ_t — будут интегральными кривыми. Пусть (x, y, z) — произвольная точка из Σ . Плоскость из пучка P , проходящая через эту точку, имеет нормаль $\mathbf{n} = \{0, h-z, y-(b-h)/a\}$, поэтому $\mathbf{l}_1$ можно взять равным векторному произведению $\mathbf{r}$ и $\mathbf{n}$, где $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$. Это нам дает

$$\mathbf{l}_1 = \{y^2 + z^2 - (b-h)/a - zh, x((b-h)/a - y), x(h-z)\}. \quad (18)$$

Ищем теперь ортогональные траектории Γ_θ интегральных кривых Γ_t . Касательное к Γ_θ векторное поле $\mathbf{l}_2$ можно определить равенством $\mathbf{l}_2 = \mathbf{r} \times \mathbf{l}_1 = \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{n}) = \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n}R^2$, откуда

$$\mathbf{l}_2 = \{x(hy - z(b-h)/a), y(hy - z(b-h)/a) - (h-z)R^2, \\ z(hy - z(b-h)/a) - (y - (b-h)/a)R^2\}. \quad (19)$$

Оказывается, это векторное поле легко интегрируется. Действительно, для направления $\{dx, dy, dz\}$, параллельного $\mathbf{l}_2$, имеем интегрируемую комбинацию

$$d \frac{y(b-h)/a + zh - R^2}{x} = 0$$

и тем самым получаем, что кривые Γ_θ являются сечениями Σ плоскостями Π_C с уравнениями $Cx + \frac{b-h}{a}y + hz - R^2 = 0$.

Подставим в уравнение $Cx + \frac{b-h}{a}y + hz - R^2 = 0$ значения координат точек (x, y, z) из (16) и найдем связь между C , θ , t вдоль Γ_θ . С учетом (15) получим уравнение

$$a\sqrt{A}C \sin \theta + (A - a^2t(t-h)) \cos \theta = a\sqrt{A}r. \quad (20)$$

Мы должны теперь изменить параметр C . Дело в том, что при одном и том же значении C плоскость Π_C дает в сечении с Σ две компоненты (которые играют роль “меридианов” поверхности вращения), поэтому для их различия выберем C из условия, что плоскость Π_C пересекает круговой край $z = h$ в точке $x = r_0 \sin \phi$, $y = r_0 \cos \phi$, $z = h$, где $r_0 = \sqrt{R^2 - h^2}$. Тогда имеем

$$C = \frac{ar_0 - (b-h) \cos \phi}{a \sin \phi}.$$

Подставляя это значение C в (20) и решая полученное уравнение, находим $\cos \theta$ и $\sin \theta$ как однозначные функции от t и $\cos \phi$, $\sin \phi$, которые при $a = 0$ превращаются в соотношения $\cos \theta = \cos \phi$, $\sin \theta = \sin \phi$, т.е., как и положено, $\theta = \phi$, когда область Σ ограничена двумя параллельными окружностями.¹

Таким образом, мы получили, что на Σ есть два аналитических взаимно ортогональных распределения π_1 и π_2 как в [1], [3] (у нас они даны векторными полями $\mathbf{l}_1$ и $\mathbf{l}_2$ по формулам (18) и (19)), которые интегрируемы, причем интегральные кривые одного из них являются окружностями. Далее, на Σ можно ввести, даже в целом, координаты ϕ и ρ (мы для использования стандартных обозначений заменили параметр t на ρ) такие, что интегральные линии будут иметь внутренние уравнения $\phi = \text{Const}$ и $\rho = \text{Const}$, а поверхность будет иметь уравнение $\mathbf{r} = \mathbf{f}(\rho) + F(\rho)\mathbf{e}(\rho, \phi)$, где $\mathbf{e}$ — единичный вектор, описывающий при каждом фиксированном ρ полную окружность, что аналогично условиям упомянутого выше предложения из [6]. Однако оказывается, что метрика поверхности имеет вид

¹ Хотя уравнение $a \cos x + b \sin x = c$ имеет двузначные решения $\cos x = \frac{ac \pm b\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}$, $\sin x = \frac{bc \mp a\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{a^2 + b^2}$, тем не менее можно показать, что возможен их однозначный выбор.

$ds^2 = E(\rho, \phi)d\rho^2 + G(\rho, \phi)d\phi^2$ с зависимостью каждого коэффициента от обоих аргументов, и поэтому метрика области Σ (которую при желании можно дополнить до компактного многообразия с такими же распределениями, правда, уже без аналитичности и даже без C^2 -гладкости интегральных кривых, см. рис. 7) *не является* в целом метрикой вращения. Этот пример показывает, что наличия взаимно ортогональных интегрируемых распределений с сеткой интегральных окружностей недостаточно: условие хотя бы локальной представимости метрики в координатах интегральных кривых имеющих интегрируемых взаимно ортогональных распределений как метрики вращения является существенным для справедливости результатов как работ [1]–[3], так и работы [6].

7. Применим теорему 4 для нового решения проблемы Бианки-Спивака, которая состоит в метрическом описании в целом поверхностей, допускающих изгибания скольжения по себе, см. [7; с. 328]. Эта проблема решена в [8], а здесь мы можем дать новое доказательство полученной в [8] теоремы (при более сильных предположениях о гладкости, чем в [8], но с включением и неориентируемых поверхностей).

ТЕОРЕМА 5. *Если компактная поверхность класса гладкости C^3 допускает изгибания скольжения по себе, то она имеет топологический класс одного из четырех видов – сферы, тора, проективной плоскости или бутылки Клейна и метрически она устроена как эти многообразия с метрикой ЛКС. Это же верно для поверхностей, допускающих бесконечно малые (б.м.) изгибания скольжения по себе.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [7] показано, что в условиях теоремы² метрика поверхности локально является метрикой поверхности вращения, т.е. в наших терминах она является метрикой ЛКС. Остается применить теорему 4. Та же самая аргументация пригодна и для случая б.м. изгибаний скольжения, только вместо [7] надо сослаться на [9].

8. Теперь, особенно после теоремы 4, естественно задаться вопросом о строении метрик ЛКС в целом на сфере и на торе (изучение строения метрик на проективной плоскости и на бутылке Клейна проводится переходом к их двулистному накрытию – сфере или тору).

ТЕОРЕМА 6. *Пусть C^2 -гладкая метрика на сфере локально является метрикой вращения, и пусть она не имеет областей с постоянной кривизной. Тогда эту метрику можно задать в целом в стандартном виде (1), и при этом полюсам метрики будут соответствовать точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для заданной на сфере метрики ds^2 введем изотермическую систему координат (x, y) такую, чтобы имеющиеся два полюса метрики соответствовали точкам $z = x + iy = 0$ и $z = \infty$ (этого всегда можно добиться, применяя в случае необходимости дробно-линейное преобразование). В односвязной области $D : |z| < \infty$ существует согласно теореме 3 однозначная и локально конформная функция $\zeta = \zeta(z)$, отображающая точку $z = 0$ в точку $\zeta = 0$. Точка $z = \infty$ является, таким образом, изолированной особой точкой однозначной функции $\zeta(z)$, поэтому она будет или полюсом или существенной особой точкой. Но в некоторой окрестности U точки $z = \infty$ тоже существует функция $\zeta_1(z)$, $\zeta_1(\infty) = \infty$, приводящая метрику к виду (1), причем в любой односвязной области $U_1 \subset U$, не

²Вот здесь нужна требуемая гладкость класса C^3 .

содержащей точку $z = \infty$, согласно п. 3 имеем $\zeta = C\zeta_1^\alpha(z)$. Это же равенство тогда должно быть верно и в некоторой проколотой окрестности точки $z = \infty$ (по аналитическому продолжению $\zeta(z)$ и $\zeta_1(z)$ из U_1), и так как $\zeta(z)$ однозначная, а $\zeta_1(z)$ — однолиственная функции, то $z = \infty$ может быть только полюсом функции $\zeta(z)$. Следовательно, $\zeta(z)$ — полином, но $\zeta'(z) \neq 0$ в силу локальной конформности $\zeta(z)$, поэтому $\zeta(z) = Cz$. Значит, изотермические координаты (x, y) уже сами являются стандартными, и в них метрика ds^2 имеет требуемый стандартный вид (1). Теорема доказана.

Итак, метрическое строение сферы с локальной метрикой вращения в точности такое же, как у любой замкнутой поверхности вращения топологического типа сферы: многообразие расслоено на замкнутые линии уровня $K = \text{Const}$ (“параллели” $|\zeta| = \text{Const}$) с ортогональными траекториями (“меридианами”), идущими по линиям градиента K от одного полюса к другому полюсу метрики, и метрика в целом представима в виде

$$ds^2 = \Lambda^2(u)(du^2 + u^2 dv^2), \quad 0 \leq u \leq \infty, \quad 0 \leq v \leq 2\pi. \quad (21)$$

ПРОБЛЕМА 2. *Повидимому, эта и другие теоремы работы верны и без условия C^2 -гладкости метрики (которое использовано для применимости теоремы 3), но доказательство этого предположения нам неизвестно.*

9. Для формулировки теоремы о строении метрики ЛКС на торе нам нужно сначала ввести некоторые новые понятия. Так как метрика ЛКС на торе не имеет ни одного полюса, то по аналогии с метрикой поверхностей вращения, не содержащих полюса, метрику вида (1) можно локально привести к виду

$$ds^2 = L^2(u)(du^2 + dv^2), \quad (22)$$

который мы будем называть *вторым* стандартным видом метрики ЛКС. Переход от (1) к (22) дается отображением $w = \ln \zeta$, где $w = u + iv$, при этом $L(u) = \Lambda(e^u)e^u$.

Нетрудно убедиться, что метрика (2), заданная в *общих* изотермических координатах (x, y) , будет метрикой ЛКС, приводимой к виду (22) в том и только том случае, когда существует локально конформное отображение $w = w(z)$, удовлетворяющее условию

$$\text{Im} \left[\frac{w''(z)}{w'(z)} - 2 \frac{\partial \ln \lambda}{\partial z} \frac{1}{w'(z)} \right] = 0 \quad (23)$$

(это аналог уравнения (3)). Переход от одних стандартных координат (u, v) второго вида к другим таким координатам (u_1, v_1) дается линейным отображением

$$u_1 + iv_1 = w_1 = Cw + C_1, \quad \text{Im } C_1 = 0. \quad (24)$$

Используя (24), легко доказать следующий аналог теоремы 3.

ТЕОРЕМА 7. *Если в односвязной области D задана метрика ЛКС (2), не имеющая ни одного полюса, то в D существует однозначная локально конформная функция $w = w(z)$ такая, что коэффициент $\lambda(z)$ в (2) представляется в виде $\lambda(z) = L(\text{Re } w(z))|w'(z)|$ с некоторой функцией $L(u) > 0$, возможно, неоднозначной как функцией от (u, v) .*

Пусть на торе T дана некоторая метрика ЛКС. Введем на T атлас из его карт в изотермических координатах, в которых переходы между картами являются конформными отображениями. Тогда по теореме об униформизации на универсальной

накрывающей тора – на комплексной плоскости, которую мы обозначим через E , – будет задана метрика

$$ds^2 = \Lambda(x, y)(dx^2 + dy^2), \quad (25)$$

обладающая свойством двоякой периодичности

$$\Lambda(z + n\omega_1 + m\omega_2) = \Lambda(z), \quad (26)$$

где n, m – произвольные целые числа, а ω_1 и ω_2 – комплексные числа, определяющие целочисленную решетку исходного тора на его универсальной накрывающей E (условие (26) обеспечивает изометричность параллелограммов в решетке тора). Без ограничения общности можем считать, что точка $(0, 0)$ является левой нижней вершиной фундаментального параллелограмма $\Pi_{0,0}$. В силу периодичности функция Λ ограничена на E . Применяя теорему 7 к произвольной области $D \subset E$, получаем, что на E существует однозначная локально конформная функция $w = w(z)$, локально приводящая (25) ко второму стандартному виду (22). В силу (26) можем считать, что функции $w_{0,0}$ и $w_{n,m}$ – ограничения $w(z)$ на параллелограммы $\Pi_{0,0}$ и $\Pi_{n,m} = \{z : z = z_0 + n\omega_1 + m\omega_2, z_0 \in \Pi_{0,0}\}$ – локально приводят к двум разным, но изометричным между собой вторым стандартным видам (22) метрики тора T . Поэтому согласно (23) $w_{n,m} = C'_{n,m}w_{0,0} + C''_{n,m}$, $\text{Im } C'_{n,m} = 0$, или

$$w(z + n\omega_1 + m\omega_2) = C'_{n,m}w(z) + C''_{n,m}. \quad (27)$$

Формально равенство (27) выполнено для z из некоторой области D_0 в $\Pi_{0,0}$ (а именно там, где отображение $w = w(z)$ остается конформным в целом, т.е. однолиственным). Продифференцировав (27) два раза по z , поделив вторую производную на первую и введя функцию $f(z) = \frac{w''(z)}{w'(z)}$, получим, что

$$f(z + n\omega_1 + m\omega_2) = f(z). \quad (28)$$

Так как $w'(z) \neq 0$, то определение функции $f(z)$ позволяет продолжить ее с $D_0 \subset \Pi_{0,0}$ на всю плоскость, при этом ее свойство (28) оказывается справедливым для каждой пары $\Pi_{0,0}$ и $\Pi_{n,m}$. Следовательно, f является двоякопериодической функцией и поэтому ограниченной на всей плоскости. Значит, $f(z) \equiv C = \text{Const}$. Отсюда имеем общий вид искомых функций $w(z)$:

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{C_1 e^{Cz}}{C} + C_2 \quad \text{при } C \neq 0, \\ w(z) &= C_1 z + C_2 \quad \text{при } C = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

В силу (28) предположение $C \neq 0$ невыполнимо. Следовательно, отображение $w(z)$ имеет линейный вид (29) и оно в целом конформно. Значит, метрика (25) в целом приводится к виду (22), в котором за счет возможного выбора $|C_1| = 1$ и $C_2 = 0$ можно считать, что $L(u) = \Lambda(pu + qv, -qu + pv)$, $p^2 + q^2 = 1$. Из этого мы делаем вывод, что метрика ЛКС на торе такова, что в любых изотермических координатах (x, y) в целом коэффициент $\Lambda(x, y)$ будет постоянным на семействе параллельных прямых вида $px - qy = u = \text{Const}$. Кроме того, коэффициент $L(u)$ должен обладать свойством

$$L(u + ma + nc) = L(u) \quad (30)$$

для любых целых m и n , где a и c — действительные части периодов ω_1 и ω_2 решетки тора на комплексной плоскости (u, v) .

Изучим более подробно строение метрики ЛКС тора в стандартных координатах (u, v) 2-го рода. Пусть в них фундаментальный параллелограмм $\Pi_{0,0}$ имеет вершины в точках $0, a + ib, c + id, (a + c) + i(b + d)$, $a > 0, d > 0$. Вдоль прямых $u = \text{Const}$ кривизна метрики постоянна, и они играют роль параллелей на поверхности вращения. Если $c = 0$, то эти прямые параллельны одной из сторон фундаментального параллелограмма и каждый их отрезок в пределах параллелограмма является замкнутой геодезической длины $L(0)d$. Для изометрической погружаемости такой метрики в $\mathbb{R}^3$ в виде поверхности вращения с уравнениями

$$x = r(u) \cos kv, \quad y = r(u) \sin kv, \quad z = h(u)$$

необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие условия:

- 1) функция $r(u)$ определена равенством $r(u) = L(u)/k$;
- 2) функция $L(u)$ (обладающая, конечно, свойством (30)) такова, что уравнение $h'^2(u) = L^2(u) - L'^2/k^2$ допускает решение с условием $h(0) = h(a)$;
- 3) числа b и d таковы, что существуют целые числа m и n , для которых $kb = 2m\pi, kd = 2n\pi$ (в частности, отношение b/d рационально).

Отметим, что если даже $b = 0$, т.е. фундаментальный параллелограмм является прямоугольником, все равно выполнение этих требований не гарантировано.

ПРОБЛЕМА 3. Пусть в описываемом случае метрика тора не погружается изометрически в $\mathbb{R}^3$ в виде поверхности вращения. Существует ли другое ее погружение?

Рассмотрим теперь случай $c \neq 0$. Тогда геодезическая $u = u_0$, исходящая из точки $M_0(u_0, \frac{bu_0}{a})$ стороны OM_1 фундаментального параллелограмма $\Pi_{0,0}$, пересекает прямые $bx - ay = mbc - mad$, параллельные OM_1 , в точках с координатами $M_m(u_0, \frac{bu_0 + (ad - bc)m}{a})$, $m \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, точки на универсальной накрывающей тора, отождествляемые с M_0 , имеют координаты $(u_0 + na + mc, \frac{bu_0}{a} + nb + md)$, $m, n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, одна из этих точек может совпасть с M_m в том и только том случае, когда $\frac{c}{a} = -\frac{n}{m}$, т.е. когда отношение $\frac{c}{a}$ является рациональным числом. Если это не так, то метрика (22) не может быть на торе метрикой непостоянной кривизны. Действительно, тогда прямая $u = u_0$ является иррациональной обмоткой тора, которая всюду плотна на торе. Но вдоль этой прямой кривизна метрики постоянна, значит, кривизна постоянна на всем торе. Таким образом, мы получили полное описание метрик ЛКС на торе.³

ТЕОРЕМА 8. Пусть на торе задана некоторая метрика ЛКС с непостоянной кривизной. Тогда на универсальной накрывающей тора она может быть представлена в целом в виде (22), в котором для фундаментального параллелограмма $\Pi_{0,0}$ с вершинами в точках $0, a + ib, c + id, (a + c) + i(b + d)$, $a > 0, d > 0$, должно быть выполнено условие, что отношение $\frac{c}{a}$ рационально.

³В [8] можно найти другое доказательство этой же теоремы.

ПРОБЛЕМА 4. *Вопрос о существовании изометрического погружения описанных в теореме 8 метрик в $\mathbb{R}^3$ остается также еще нерешенным.*

Впрочем, если гипотеза о неизгибаемости компактных поверхностей в классе деформаций гладкости C^2 или выше верна, то погружений в соответствующем классе гладкости, кроме как в виде поверхности вращения, не должно быть. Действительно, если S — изометрическое погружение многообразия типа сферы или тора с метрикой вращения вида (21) или соответственно (22) с радиус-вектором $\mathbf{r}(u, v)$, то деформация $S_t = \mathbf{r}(u, v + t)$ является изгибанием (скольжения) поверхности S , которая будет движением только в случае, когда S — поверхность вращения. Но изучение изометрических погружений этих метрик в многомерные пространства является вполне решаемой задачей, и у автора в этом направлении получен ряд результатов, опубликованных только в виде тезисов докладов конференций [10], [11].

ПРОБЛЕМА 5. *Описать некомпактные полные двумерные многообразия с метрикой ЛКС.*

Список литературы

1. Камышанский Н. Р., Солодовников А. С. Полуприводимые аналитические пространства “в целом” // УМН. 1980. Т. 35. № 5. С. 3–51.
2. Солодовников А. С. О строении в целом полуприводимых аналитических пространств // Труды сем. по векторному и тензорному анализу. № 15. М.: МГУ, 1970. С. 79–118.
3. Солодовников А. С. Глобальное строение полуприводимых римановых пространств класса R^∞ // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 5. С. 3–18.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
5. Сабитов И. Х. Полный перечень центрально-симметричных форм двумерных метрик постоянной кривизны // Изв. вузов. Сер. матем. 1994. № 3. С. 65–68.
6. Сабитов И. Х. Изометрические преобразования поверхности, порождающие конформные отображения ее на себя // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 1. С. 119–132.
7. Spivak M. A comprehensive introduction to differential geometry. V. 5. Berkley: Publish or Perish, 1979.
8. Сабитов И. Х. Квазиконформные отображения поверхности, порожденные ее изометрическими преобразованиями, и изгибания поверхности на себя // Фундамент. и прикл. матем. 1995. Т. 1. № 1. С. 281–288.
9. Rembs E. Infinitesimal Verbiegungen von Flächen in sich // Math. Nachr. 1957. № 16. P. 134–136.
10. Сабитов И. Х. Двумерные римановы многообразия с локальной метрикой вращения // Тезисы докладов на 8-й Всесоюзной научной конференции по соврем. проблемам дифференц. геометрии. Одесса: Одесский гос. ун-т им. И. И. Мечникова, 1984. С. 138.
11. Sabitov I. Kh. Two dimensional Riemannian manifolds with local circular symmetry // Colloquim on Differential Geometry, Hungary, 1989, August 20–26. Eger: János Bolyai Math. Soc., 1989. P. 47–48.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
09.12.1999