Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Угланов, Вариационное исчисление на банаховых пространствах, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 10, 105–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm518>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 15:08:51

УДК 517.98

А. В. Угланов

Вариационное исчисление на банаховых пространствах

Рассматривается задача вариационного исчисления на (подвижной) области банахова пространства. Выводятся аналоги фундаментальных положений конечномерной теории: основная формула для вариации функционала, необходимые условия экстремума, теорема Нётер. Все полученные результаты являются размерностно-инвариантными и применительно к конечномерному случаю переходят в классические. Главный инструмент исследования – теория поверхностного интегрирования в банаховых пространствах.

Библиография: 20 названий.

Введение

Как известно, (простейшая) задача классического вариационного исчисления имеет вид

$$J(u) = \int_V \Phi(x, u(x), u'(x)) dx \rightarrow \text{extr}, \quad (1)$$

где V – область в $\mathbb{R}^n$, $\Phi: V * \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ – известная гладкая функция, $u: V \rightarrow \mathbb{R}^1$ – неизвестная гладкая функция. Мы рассмотрим задачу (1) (и более общую – так называемую задачу с подвижной областью) с заменой $\mathbb{R}^n$ на банахово пространство X , лебеговой меры dx – на некоторую борелевскую меру в X . Разумеется, такие задачи представляют и чисто математический интерес; автор, однако, столкнулся с ними при оптимизации одной системы массового обслуживания [1]. Укажем, что задача (1) ($\mathbb{R}^n \rightarrow X$) исследовалась в [2], [3], но лишь в специальном случае $V = X$. Эта специфика существенна: $\partial V = \emptyset$, и авторам [2], [3] не пришлось иметь дело с поверхностными интегралами. В общем же случае рассмотрение таких интегралов (в том числе и векторных) становится неизбежным. Этим объясняется введение в работу вспомогательного § 1. Центральный результат статьи – теорема 7, дающая общую формулу вариации интегрального функционала; из этой формулы вытекают основные положения бесконечномерного вариационного исчисления. Отметим сразу же бездоказательный характер замечания 2 к теореме 7: замечание в основной части работы не используется и при чтении может быть пропущено.

Введем следующие обозначения: (Ω, Σ) – абстрактное измеримое пространство ($\Omega \in \Sigma$); X – банахово пространство (б.п.); $M(\Omega, X)$ – пространство мер (т.е. счетноаддитивных функций), определенных на Σ и принимающих значения в пространстве X ; $|\mu|: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ – полное изменение меры $\mu \in M(\Omega, X)$; $MB(\Omega, X) =$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00211).

$\{\mu \in M(\Omega, X) : |\mu|(\Omega) < \infty\}$; $L(Y, Z)$ — наделенное равномерной нормой пространство линейных непрерывных отображений б.п. Y в б.п. Z ; $X^* = L(X, \mathbb{R}^1)$.

Все рассматриваемые линейные пространства вещественные; подмножества метрических пространств предполагаются, если не оговорено противное, наделенными индуцированной метрикой; каждое метрическое пространство T рассматривается как измеримое с борелевской σ -алгеброй Σ_T .

§1. Необходимые сведения и вспомогательные результаты

1.1. Векторные меры и интегралы. Функцию $f: \Omega \rightarrow L(X, Y)$ назовем:
а) *простой*, если $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$, $Q_n \in \Sigma$, $Q_n \cap Q_m = \emptyset$, $f = l_n = \text{const}$ на Q_n ;
б) *измеримой*, если существует последовательность простых функций $f_n: \Omega \rightarrow L(X, Y)$, равномерно сходящаяся к f ; в) *интегрируемой по мере* $\mu \in MB(\Omega, X)$, если f измерима и конечен интеграл $\int_{\Omega} \|f\| d|\mu|$. Для простой интегрируемой функции f положим

$$\int_Q f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} l_n \mu(Q \cap Q_n) \quad (Q \in \Sigma);$$

для интегрируемой функции f положим

$$\int_Q f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Q f_n d\mu.$$

Данное определение корректно, и полученный интеграл обладает всеми естественными свойствами интеграла. Если $X = \mathbb{R}^1$, $\mu \geq 0$, то введенный интеграл практически совпадает с интегралом Бохнера. Точнее, справедливо следующее.

ТЕОРЕМА 1. *Функция $f: \Omega \rightarrow Y$ является μ -интегрируемой по Бохнеру тогда и только тогда, когда существует μ -интегрируемая функция $f_0: \Omega \rightarrow Y$ такая, что $f = f_0$ μ -почти всюду. В этом случае соответствующие интегралы совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Бохнеровская μ -интегрируемость функции f эквивалентна ее бохнеровской μ -измеримости вместе с выполнением неравенства $\int_{\Omega} \|f\| d\mu < \infty$ [4; с. 45]. Бохнеровская μ -измеримость f эквивалентна существованию борелевской сепарабельнозначной функции $f_0: \Omega \rightarrow Y$, равной f μ -почти всюду [5; гл. I, §3]. Борелевость функции f_0 вместе с ее сепарабельнозначностью эквивалентна измеримости f_0 по нашему определению [5; гл. I, §1]. Утверждение теоремы следует теперь из определений интегралов Бохнера и данного нами.

Теорема 1 позволяет в дальнейшем, если $X = \mathbb{R}^1$, $\mu \geq 0$, не уточнять, о каком μ -интеграле идет речь: бохнеровском (в частности, лебеговом) или введенном нами.

Уточним, что если $S \in L(X, Y)$, $\mu \in M(\Omega, X)$, то формула $S\mu(Q) = S(\mu(Q))$ ($Q \in \Sigma$) корректно определяет (индуцированную) меру $S\mu \in M(\Omega, Y)$. Напомним два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Мера $\mu \in M(\Omega, X)$ называется: ν -непрерывной ($\mu \ll \nu$; здесь $\nu \in M(\Omega, \mathbb{R}^1)$), если из равенства $|\nu|(Q) = 0$ вытекает равенство $\mu(Q) = 0$ ($Q \in \Sigma$); ν -дифференцируемой, если существует ν -интегрируемая функция $\frac{d\mu}{d\nu}: \Omega \rightarrow X$ такая, что для любого $Q \in \Sigma$ выполняется равенство $\mu(Q) = \int_Q \frac{d\mu}{d\nu} d\nu$ (функция $\frac{d\mu}{d\nu}$ называется *плотностью Радона–Никодима* меры μ относительно меры ν).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор $S \in L(X, Y)$ называется *оператором Радона–Никодима*, если для любой ν -непрерывной меры $\mu \in MB(\Omega, X)$ мера $S\mu$ является ν -дифференцируемой.

ТЕОРЕМА 2. Если мера $\mu \in MB(\Omega, X)$ является ν -дифференцируемой, то для любой μ -интегрируемой функции $f: \Omega \rightarrow X^*$ корректно и справедливо равенство

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} \left(f, \frac{d\mu}{d\nu} \right) d\nu. \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из ν -интегрируемости функции $\frac{d\mu}{d\nu}$ следует $|\nu|$ -интегрируемость функции $\left\| \frac{d\mu}{d\nu} \right\|$, так что для любого $Q \in \Sigma$ имеем

$$|\mu|(Q) = \int_Q \left\| \frac{d\mu}{d\nu} \right\| d|\nu|$$

(см. [5; гл. II, предложение 3.5]). Отсюда и из μ -интегрируемости функции f получаем

$$\int_{\Omega} \left| \left(f, \frac{d\mu}{d\nu} \right) \right| d|\nu| \leq \int_{\Omega} \|f\| \left\| \frac{d\mu}{d\nu} \right\| d|\nu| = \int_{\Omega} \|f\| d|\mu| < \infty,$$

что доказывает существование лебегова интеграла в правой части (2).

Пусть функция f простая. Тогда

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} (l_n, \mu(Q_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(l_n, \int_{Q_n} \frac{d\mu}{d\nu} d\nu \right).$$

Отсюда и из совпадения интегралов Бохнера и Петтиса для интегрируемых по Бохнеру функций находим

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Q_n} \left(l_n, \frac{d\mu}{d\nu} \right) d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} \mathbf{1}_{Q_n} \left(l_n, \frac{d\mu}{d\nu} \right) d\nu.$$

Замечая теперь, что частичные суммы ряда $\sum \mathbf{1}_{Q_n} \left(l_n, \frac{d\mu}{d\nu} \right)$ ограничены ν -интегрируемой функцией $\|f\| \left\| \frac{d\mu}{d\nu} \right\|$, и используя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получаем равенство (2).

Равенство (2) для общего случая получается из доказанного предельным переходом.

С фигурирующим ниже понятием абсолютно суммирующего оператора можно познакомиться, например, в [6]. Доказательство следующего утверждения имеется в [7].

ТЕОРЕМА 3. Если $\mu \in M(\Omega, X)$ и $S \in L(X, Y)$ есть абсолютно суммирующий оператор, то $S\mu \in MB(\Omega, Y)$.

1.2. Дифференцируемые и поверхностные меры. Далее до конца работы используются обозначения: H – непрерывно и плотно вложенное в X сепарабельное гильбертово пространство (так что $X^* \subset H \subset X$) такой, что оператор вложения $I: H \rightarrow X$ является абсолютно суммирующим; $L_1(H) \subset L(H, H)$ – банахово пространство ядерных отображений с ядерной нормой $\|\cdot\|_1$; $V^0, \overline{V}, \partial V$ – соответственно внутренность, замыкание и граница множества $V \subset X$; $C^m(V, Y)$ – множество всех функций, определенных на подмножестве $V \subset X$, принимающих значения в банаховом пространстве Y и m раз непрерывно и ограничено дифференцируемых (здесь и далее – по Фреше) на множестве V^0 ; $C^m(\overline{V}, Y)$ – множество тех функций из $C^m(V, Y)$, производные которых порядка $0, \dots, m-1$ допускают непрерывное продолжение на $\overline{V}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Меры $\mu \in M(X, \mathbb{R}^1)$ называется *дифференцируемой по пространству H* , если для любых $A \in \Sigma_X$, $h \in H$ существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\mu(A + th) - \mu(A)] \stackrel{\text{def}}{=} D_h \mu(A).$$

Далее через M^1 обозначается множество всех мер, дифференцируемых по пространству H , $\mu \in M^1$. Нам потребуются следующие результаты (см., например, [8]).

1. Для любого $h \in H$ функция $D_h \mu: \Sigma_X \rightarrow \mathbb{R}^1$, $A \mapsto D_h \mu(A)$, счетноаддитивна, причем $D_h \mu \ll \mu$.

2. Для любого $A \in \Sigma_X$ отображение $D\mu(A): H \rightarrow \mathbb{R}^1$, $h \mapsto D_h \mu(A)$, линейно и непрерывно.

3. Если $\mu = \mu^+ - \mu^-$ есть жорданово разложение меры μ , то $\mu^\pm \in M^1$.

В силу 1, 2 и теоремы Петтиса (слабо счетноаддитивная функция множеств является сильно счетноаддитивной, см. [5; гл. II, § 3]) равенство $(\mu'(A), h) = D_h \mu(A) \forall A \in \Sigma_X, h \in H$, корректно определяет меру $\mu' \in M(X, H)$ (она называется *производной меры μ*).

ЛЕММА 1. Существуют гильбертово пространство G , оператор Гильберта–Шмидта $S_1 \in L(H, G)$ и оператор $S_2 \in L(G, X)$ такие, что $I = S_2 S_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как I есть абсолютно суммирующий оператор, то он допускает представление в виде следующего произведения

$$H \xrightarrow{A_1} C(T) \xrightarrow{J} L_\nu^2(T) \xrightarrow{A_2} X,$$

где ν есть борелевская вероятность на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве T , $C(T)$ есть равномерно нормированное пространство вещественных непрерывных функций на T , $L_\nu^2(T)$ есть гильбертово пространство ν -квадратично интегрируемых вещественных функций на T , J есть вложение $C(T)$ в $L_\nu^2(T)$, $A_1 \in L(H, C(T))$, $A_2 \in L(L_\nu^2(T), X)$ (см. [9; 3.3.4]). Но так как H – гильбертово пространство, то JA_1 есть оператор Гильберта–Шмидта [9; 3.3.4]. Полагая теперь $G = L_\nu^2(T)$, $S_1 = JA_1$, $S_2 = A_2$, получим требуемое.

ТЕОРЕМА 4. Мера $I\mu' \in M(X, X)$ является μ -дифференцируемой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем объекты G, S_1, S_2 , фигурирующие в лемме 1. Так как S_1 есть оператор Гильберта–Шмидта, то он абсолютно суммирующий [9; 2.5.5] и, следовательно (теорема 3), $S_1\mu' \in MB(X, G)$. Так как G – гильбертово пространство, то тождественный оператор $1: G \rightarrow G$ есть оператор Радона–Никодима [6; 24.2.4, 24.3.6]. Но класс операторов Радона–Никодима есть операторный идеал [6; 24.2.7], так что $S_2 = S_2 1$ есть оператор Радона–Никодима. Остается только заметить, что $S_1\mu' \ll \mu$ (см. выше свойство 1 дифференцируемых мер) и что $I\mu = S_2(S_1\mu')$.

Для вектора $a \in X$ положим $R_a = \{ta : t \in \mathbb{R}^1\}$. Множество $Q \in \Sigma_X$ назовем: *простой гладкой поверхностью*, если существуют замкнутое гиперподпространство $E \subset X$, открытое (в E) множество $A \subset E$, вектор $a \in H \setminus E$ и функция $f \in C^1(A, R_a)$ такие, что $Q = \text{gr } f$; *простой поверхностью*, если Q есть борелевское подмножество некоторой простой гладкой поверхности; *поверхностью*, если Q есть счетное объединение простых поверхностей. Для простой гладкой поверхности Q положим:

$$\begin{aligned} \mu_a: \Sigma_Q \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad S \mapsto D_a \mu \left[\bigcup_{t \leq 0} (S + ta) \right]; \\ \mu_Q: \Sigma_Q \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad S \mapsto \int_S |(n, a)| d\mu_a \end{aligned}$$

(здесь и далее $n(q) \in X^*$ есть единичная нормаль к поверхности Q в точке $q \in Q$). Пусть $\mu = \mu^+ - \mu^-$ есть жорданово разложение μ ; тогда $\mu^\pm \in M^1$ (свойство 3 дифференцируемых мер), и для поверхности $Q = \bigcup_{m=1}^\infty Q_m$ (Q_m – простые поверхности, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$) положим

$$\mu_Q^\pm: \Sigma_Q \rightarrow [0, \infty], \quad S \mapsto \sum_{m=1}^\infty \mu_{Q_m}^\pm(S \cap Q_m).$$

В работе [10] доказано, что $\mu_Q^\pm$ суть корректно определенные неотрицательные σ -конечные меры. Таким образом, на Q естественным образом определяется σ -конечная мера $\mu_Q = \mu^+ - \mu^-$ и далее интеграл $\int_Q f d\mu_Q$ ($f: Q \rightarrow \mathbb{R}^1$), который обладает всеми естественными свойствами интеграла.

Пусть $s, \tau \in \mathbb{R}^1$, $s < \tau$; G – открытое множество в X , $F: [s, \tau] \times G \rightarrow \mathbb{R}^1$ – непрерывно дифференцируемая функция; $V_t = \{x \in G : F(t, x) > 0\}$; $\Omega_t = \{x \in G : F(t, x) = 0\}$. Предполагается, что Ω_t есть поверхность при каждом $t \in [s, \tau]$. Для $x \in G$ положим $T(x) = \left\{ t \in [s, \tau] : F(t, x) = 0, \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) \neq 0 \right\}$, $|T(x)|$ равно числу

точек множества $T(x)$. В нижеследующем произведении $\frac{\partial F}{\partial t} \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|^{-1}$ считается, что $\frac{0}{0} = 0$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть мера μ и борелевская функция $f: G \rightarrow \mathbb{R}^1$ удовлетворяют условиям

$$\int_G |f(x)| |T(x)| d|\mu|(x) < \infty;$$

$$|\mu| \left\{ \bigcup_{s \leq t \leq \tau} \left(\omega \in \Omega_t : \frac{\partial F}{\partial x}(t, \omega) = 0 \right) \right\} = 0.$$

Тогда корректно и справедливо равенство

$$\int_s^\tau \int_{\Omega_t} f \frac{\partial F}{\partial t} \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|^{-1} d\mu_{\Omega_t} dt = \int_G (\mathbf{1}_{V_\tau} - \mathbf{1}_{V_s}) f d\mu$$

($\mathbf{1}_A$ – характеристическая функция множества A).

Доказательство содержится в [10].

Пусть Q – поверхность. Точку $q \in Q$ назовем *регулярной*, если существуют открытая окрестность (в X) $U(q) \ni q$ и функция $f \in C^1(U(q), \mathbb{R}^1)$ такие, что $f'(q) \neq 0$ и $Q \cap U(q) = f^{-1}(0)$. Совокупность всех регулярных точек поверхности Q обозначим через Q_r и положим $Q_0 = Q \setminus Q_r$ (множество особых точек). Множество $V \in \Sigma_X$ назовем μ -*правильным*, если ∂V есть поверхность и $|\mu_{\partial V}|(Q_0) = 0$. Единичную нормаль $n(q)$ к поверхности ∂V в точке $q \in \partial V_r$ назовем *внешней*, если для любого $x \in X$ такого, что $(n(q), x) > 0$, существует $\delta > 0$ такое, что при всех $\varepsilon \in (0, \delta)$ выполняются включения $q - \varepsilon x \in V^0$, $q + \varepsilon x \in X \setminus \overline{V}$. Обозначим через $\partial V_n \subset \partial V_r$ множество всех точек, в которых внешняя нормаль существует и единственна. Продолжим функцию $n: \partial V_n \rightarrow X^*$ на множество ∂V , полагая $n = 0$ на $\partial V \setminus \partial V_n$; эта функция будет борелевской (так как ∂V_n открыто в ∂V и функция n непрерывна на ∂V_n).

ЛЕММА 2. Для любых $b \in C^1(V, X^*)$, $A \in L(H, H)$, $x \in V^0$ справедливы включения $AI^*b'(x)I \in L_1(H)$ и оценка

$$|\operatorname{Tr} AI^*b'(x)I| \leq C(H, X) \|A\| \|b'(x)\|. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В пространстве H рассмотрим симметричную гауссову меру цилиндрических множеств w . Так как оператор I абсолютно суммирующий, то мера цилиндрических множеств wI^{-1} счетноаддитивна в X [5; гл. VI, §5, п. 4] и, следовательно, тройка (I, H, X) есть абстрактное винеровское пространство. По теореме Гудмена [11; гл. I, §4] $I^*b'(x)I \in L_1(H)$ и $\|I^*b'(x)I\|_1 \leq C(H, X) \|b'(x)\|$. Неравенство (3) теперь следует из общих свойств ядерных операторов (см., например, [12; гл. VI, п. 5]).

В следующей теореме, имеющейся в [13] (см. также [10]), V есть μ -правильное множество, $b \in C^1(\overline{V}, X^*)$, $\operatorname{div} b(x) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Tr} I^*b'(x)I$.

ТЕОРЕМА 6. Если функция $\|b\|_H \|n\|_H: \partial V \rightarrow \mathbb{R}^1$ является $\mu_{\partial V}$ -интегрируемой, то справедливо равенство

$$\int_V \operatorname{div} b \, d\mu + \int_V b \, dI\mu' = \int_{\partial V} (b, n) \, d\mu_{\partial V} \quad (4)$$

(формула Гаусса–Остроградского).

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу теоремы 3 $I\mu' \in MB(X, X)$, что вместе с ограниченностью функции $b: V \rightarrow X^*$ влечет существование векторного интеграла в смысле п. 1.1: $\Omega = X, \Sigma = \Sigma_X, Y = \mathbb{R}^1, f = b \in L(X, \mathbb{R}^1) = X^*$.

§ 2. Вариационное исчисление

2.1. Основная формула для вариации функционала. Пусть: V – открытое подмножество X ; $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in C^1([-1, 1] \times \overline{V} \times \mathbb{R}^1, X)$ (t – первый аргумент φ); $\psi \in C^1([-1, 1] \times \overline{V} \times \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^1)$; $u \in C^1(\overline{V}, \mathbb{R}^1) \cap C^2(V, \mathbb{R}^1)$; $\varphi(0, x, u(x)) \equiv x$; $\psi(0, x, u(x)) \equiv u(x)$. Будем предполагать следующее: для любого $t \in [-1, 1]$ отображение $\varphi_t: \overline{V} \rightarrow X, x \mapsto \varphi(t, x, u(x))$ есть непрерывный изоморфизм $\overline{V}$ на $\varphi_t(\overline{V})$ и есть диффеоморфизм V на $\varphi_t(V) = V_t$, причем $\varphi_t^{-1} \in C^1(V_t, X)$; для любого $t \in [-1, 1]$ множество V_t является μ -правильным; для любого $t \in [-1, 1]$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_t(x) &= \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x, u(x)) \in X^* \quad \forall x \in \overline{V}, \\ \alpha_t &= \{x \mapsto \overline{\alpha}_t(\varphi_t^{-1}(x))\} \in C^1(\overline{V}_t, X^*); \end{aligned} \quad (5)$$

существуют открытое множество $G \subset X$ и непрерывно дифференцируемая функция $F: [-1, 1] \times G \rightarrow \mathbb{R}^1$ такие, что $V_t = \{x \in G : F(t, x) > 0\}$, $\bigcup_{-1 \leq t \leq 1} \overline{V}_t \subset G$. Пусть $u_t: V_t \rightarrow \mathbb{R}^1 : u_t(x) = \psi(t, \varphi_t^{-1}(x), u(\varphi_t^{-1}(x)))$;

$$\begin{aligned} \beta_t &= \left\{x \mapsto \frac{\partial}{\partial t} u_t(x)\right\} \in C^1(V_t, \mathbb{R}^1); \quad \Phi \in C^2(G \times \mathbb{R}^1 \times X, \mathbb{R}^1); \\ J_t &= J_t(u) = \int_{V_t} \Phi\left(x, u_t(x), \frac{\partial}{\partial x} u_t(x)\right) d\mu(x). \end{aligned} \quad (6)$$

Предположим еще, что существует функция $f \in C^1(G, \mathbb{R}^1)$, являющаяся продолжением функции $V \rightarrow \mathbb{R}^1 : x \mapsto \Phi\left(x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x)\right)$.

В силу теоремы 4 корректно определена функция $\lambda: X \rightarrow X, x \mapsto \frac{dI\mu'}{d\mu}(x)$ (эта функция называется *логарифмическим градиентом* меры μ).

ТЕОРЕМА 7. Пусть функции F, f удовлетворяют условиям теоремы 5 ($s = -1, \tau = 1$) и для любого $t \in [-1, 1]$ функция $\|\alpha_t\|_H \|n\|_H: \partial V_t \rightarrow \mathbb{R}^1$ является $\mu_{\partial V_t}$ -интегрируемой. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_t \Big|_{t=0} &= \int_V \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} - \left(\lambda, \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right) - \operatorname{div} \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right) \beta_0 \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{div} \left(\beta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right) + \left(\lambda, \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right) \beta_0 + \Phi(\lambda, \alpha_0) + \operatorname{div}(\Phi \alpha_0) \right] d\mu. \end{aligned} \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стандартно находим

$$\left. \frac{d}{dt} J_t \right|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} f d\mu \Big|_{t=0} + \int_V \beta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial u} d\mu + \int_V \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}, \frac{\partial \beta_0}{\partial x} \right) d\mu. \quad (8)$$

Применяя теорему 5 с заменами $s \rightarrow -1$, $\tau \rightarrow t$, $t \rightarrow \tau$ и замечая, что $\Omega_t = \partial V_t$, получаем

$$\int_{-1}^t \int_{\partial V_\tau} f \frac{\partial F}{\partial \tau} \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|^{-1} d\mu_{\partial V_\tau} d\tau = \int_{V_t} f d\mu - \int_{V_{-1}} f d\mu. \quad (9)$$

Так как $\frac{\partial F}{\partial \tau} \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|^{-1} = (\alpha_\tau, n)$, то, заменяя в равенстве (4) V на V_τ , b на $f\alpha_\tau$ (см. (5)) и учитывая равенство $|\mu|(\partial V_\tau) = 0$ (так как ∂V_τ есть поверхность), заключаем, что внутренний интеграл в левой части (9) есть непрерывная по τ функция. Дифференцируя теперь (9) по t , полагая $t = 0$, опять применяя (4), преобразуя векторный интеграл в (4) ($b = f\alpha_0$) по формуле (2), находим

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V_t} f d\mu \right|_{t=0} = \int_V [\operatorname{div} f\alpha_0 + f(\lambda, \alpha_0)] d\mu.$$

Отсюда, из равенств $f = \Phi$ на V , $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}, \frac{\partial \beta_0}{\partial x} \right) = \operatorname{div} \left(\beta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right) - \beta_0 \operatorname{div} \frac{\partial \Phi}{\partial u'}$ и (8) получаем (7). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Равенство (7) и называется *основной формулой для вариации функционала*. Если $H = X = \mathbb{R}^m$, μ — мера Лебега, то $\lambda = 0$ и формула (7) совпадает с классической (см., например, [14; гл. VII, §33, равенство (17)]).

2) Условия гладкости, наложенные на функции u , φ , ψ , Φ , являются весьма жесткими, хотя и упрощают изложение материала. Разумеется, условия могут быть значительно ослаблены. В частности, дифференцируемость функций вдоль пространства X (автоматически гарантирующая существование и ограниченность подынтегральных членов в (7)) везде можно заменить на дифференцируемость вдоль пространства H (H -дифференцируемость) плюс очевидные дополнительные требования (пример: включения $u \in C^1(\bar{V}, \mathbb{R}^1) \cap C^2(V, \mathbb{R}^1)$, $\Phi \in C^2(G \times \mathbb{R}^1 \times X, \mathbb{R}^1)$ заменяются H -дифференцируемостью функции u , H -дифференцируемостью функции $\Phi: G \times \mathbb{R}^1 \times H \rightarrow \mathbb{R}^1$ по третьему аргументу, H -дифференцируемостью функции $V \rightarrow H: x \mapsto \frac{\partial \Phi}{\partial u'}(x, u(x), u'(x))$ и включениями $\frac{\partial \Phi}{\partial u'} \in X^*$, $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right)' \in L_1(H)$).

Сказанное относится и ко всем результатам пп. 2.2, 2.3; в этом свете понимается и приводимый в п. 2.2 пример.

Отметим еще, что предположение о существовании функции F , “определяющей” множества V_t , мало существенно: вместо использования теоремы 5 можно прямо доказать формулу (9) с заменой $\frac{\partial F}{\partial \tau} \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|^{-1}$ на (α_τ, n) . Соответственно становится не нужным и предположение об “объемлющей” области G .

3) Теорема 7 верна и для случая, когда (I, H, X) есть абстрактное винеровское пространство, μ — каноническая гауссова мера (хотя в этом случае вложение I не обязано быть абсолютно суммирующим: см. [15]). Действительно, абсолютная

суммируемость I использовалась трижды: при выводе оценки (3) и при доказательстве теорем 3, 4 (см. замечание после теоремы 6). Но вывод (3) основывался на теореме Гудмена, справедливой для абстрактных винеровских пространств. Теоремы же 3, 4 вытекают из равенства $I\mu' = -\frac{x}{2}\mu$ и μ -интегрируемости функции $x \mapsto \|x\|$ [8; гл. IV, § 4], [11; гл. II, § 1].

2.2. Необходимые условия экстремума. Далее до конца работы предполагается, что норма пространства X есть непрерывно дифференцируемая (вне нуля) функция, λ – непрерывная функция. Для открытого множества $G \subset X$ обозначим через $C_0^1(G) \subset C^1(G, \mathbb{R}^1)$ множество функций, носители которых лежат в G .

ЛЕММА 3. Если мера $\nu \in M(G, \mathbb{R}^1)$ такова, что $\int_G f d\nu = 0$ для любой $f \in C_0^1(G)$, то $\nu = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $t > \varepsilon > 0$ возьмем гладкую функцию $h_{t,\varepsilon}: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$, равную 1 на $[-t + \varepsilon, t - \varepsilon]$, нулю на $(-\infty, t] \cup [t, \infty)$ и заключенную между нулем и единицей. Для $y \in G$, $\rho(y, \partial G) > t$ (ρ – расстояние) положим $f_{t,\varepsilon,y}: G \rightarrow \mathbb{R}^1$, $f_{t,\varepsilon,y}(x) = h_{t,\varepsilon}(\|x - y\|)$. Ясно, что (почти всюду) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{t,\varepsilon,y} = \mathbf{1}_{U(t,y)}$, где $U(t,y) = \{x \in G : \|x - y\| < t\}$, откуда $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \prod_{i=1}^m f_{t_i,\varepsilon,y_i} = \prod_{i=1}^m \mathbf{1}_{U(t_i,y_i)}$. Замечая, что $\prod_{i=1}^m f_{t_i,\varepsilon,y_i} \in C_0^1(G)$, пользуясь условием леммы и теоремой Лебега (о предельном переходе), получим, что $\nu\left(\bigcap_{i=1}^m U(t_i,y_i)\right) = 0$. Сепарабельность G и счетная аддитивность ν теперь дают равенство $\nu(A) = 0$ для любого открытого $A \subset G$. Утверждение леммы вытекает теперь из регулярности меры $|\nu|$ [5; гл. I, § 3].

Пусть $V \subset X$ есть открытое μ -правильное множество, $f: \partial V \rightarrow \mathbb{R}^1$ – непрерывная ограниченная функция, $\Phi \in C^2(\bar{V} \times \mathbb{R}^1 \times X, \mathbb{R}^1)$,

$$J: C^1(\bar{V}, \mathbb{R}^1) \rightarrow \mathbb{R}^1, \quad J(u) = \int_V \Phi(x, u(x), u'(x)) d\mu(x). \quad (10)$$

Естественным образом дается определение локального условного экстремума функционала J . Напомним, что мера $\nu: \Sigma_Z \rightarrow \mathbb{R}^1$ называется *топологически невырожденной*, если $|\nu|(A) > 0$ для любого открытого множества $A \subset Z$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть мера μ топологически невырождена на V . Для того чтобы функция $u \in C^1(V, \mathbb{R}^1) \cap C^2(V, \mathbb{R}^1)$ была точкой локального экстремума функционала J при условии $u|_{\partial V} = f$, необходимо выполнение тождества (на V)

$$\begin{aligned} L_u(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial u}(x, u(x), u'(x)) - \left(\lambda(x), \frac{\partial \Phi}{\partial u'}(x, u(x), u'(x)) \right) \\ &\quad - \operatorname{div} \frac{\partial \Phi}{\partial u'}(x, u(x), u'(x)) \equiv 0. \end{aligned} \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\varphi(t, x, u) = x$, $\psi(t, x, u) = u(x) + th(x)$, где $h \in C_0^1(V)$. Тогда $\alpha_t = 0$, $\beta_t = h$ и, применяя формулу (7) (поскольку $V_t = V$, то ясно, что все условия теоремы 7, касающиеся теоремы 5, излишни), а затем преобразуя интеграл $\int_V \operatorname{div} \left(h \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right) d\mu$ по формуле (4) ($b = h \frac{\partial \Phi}{\partial u'}$; так как $h|_{\partial V} = 0$, то условие теоремы 6 выполнено), получим

$$\left. \frac{d}{dt} J_t \right|_{t=0} = \int_V L_u h d\mu.$$

Введем меру $\nu: \Sigma_V \rightarrow \mathbb{R}^1$, полагая $\nu(A) = \int_A L_u d\mu$ для $A \in \Sigma_V$. Поскольку u — экстремальная точка, то $\left. \frac{d}{dt} J_t \right|_{t=0} = 0 = \int_V h d\nu$. Так как h — произвольная функция из $C_0^1(V)$, то лемма 3 ($G \rightarrow V$, $f \rightarrow h$) дает равенство $\nu = 0$. Отсюда $L_u = 0$ почти всюду по мере μ , а так как L_u — непрерывная функция, а мера μ топологически невырождена, то $L_u \equiv 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Любая невырожденная (в частности, каноническая) гауссова мера в X топологически невырождена: [11; гл. I, §5; гл. II, §5; гл. III, §1].

Таким образом, экстремумы функционала (10) следует искать среди решений краевой задачи $L_u = 0$, $u|_{\partial V} = f$, т.е. ситуация вполне аналогична конечномерной ($L_u = 0$ — уравнение Эйлера).

ПРИМЕР. Пусть $\Phi = (u', u')$ (в этом случае интеграл (10) называется интегралом Дирихле) и рассматривается задача $J(u) \rightarrow \min$, $u|_{\partial V} = f$. Согласно (11) получаем краевую задачу $\Delta u + (\lambda, u') = 0$ (здесь $\Delta u = \operatorname{div} u'$ есть бесконечномерный лапласиан). Теория решения таких задач развита в [16] (см. также [17; гл. 13]). Согласно [16] при определенных предположениях существует и единственно решение $\xi(t)$ стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi(t) = \frac{1}{2} \lambda(\xi(t)) dt + dw(t), \quad \xi(0) = x \in V \quad (12)$$

(здесь $w(t)$ есть симметричный относительно H винеровский процесс в X), и справедливо равенство $u(x) = Mf(\xi(\tau))$, где τ есть момент первого выхода процесса ξ из области V , M — знак математического ожидания. В частности, если μ есть симметричная относительно H гауссова мера, то $\lambda(y) = \gamma y$ ($\gamma < 0$) и (12) решается явно:

$$\xi(t) = xe^{\gamma t/2} + w(t) + \frac{1}{2}\gamma \int_0^t e^{\gamma(t-\tau)/2} w(\tau) d\tau$$

(заметим, кстати, что теорема из [16] о существовании и единственности решения уравнения (12) здесь не работает, ибо $\lambda(V) \not\subset H$; однако единственность все же имеет место: см. [8; гл. VII, §2]).

Как и в конечномерном случае, необходимым условием безусловного экстремума является выполнение уравнения Эйлера с граничными условиями третьего рода.

ТЕОРЕМА 9. Пусть меры $\mu, \mu_{\partial V}$ топологически невырождены на множествах $V, \partial V_n$ соответственно, функция $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right\|_H \|n\|_H: \partial V \rightarrow \mathbb{R}^1$ является $\mu_{\partial V}$ -интегрируемой. Для того чтобы функция $u \in C^2(\bar{V}, \mathbb{R}^1)$ была точкой локального экстремума функционала J , необходимо выполнение тождеств (11) и $u \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}, n \right) \equiv 0$ на ∂V .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тождество (11) выполняется по теореме 8. Взяв теперь $\varphi(t, x, u) = x, \psi(t, x, u) = u(x) + th(x), h \in C^1(V, \mathbb{R}^1)$, используя формулы (7) и (4) $\left(b = h \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right)$, получим

$$0 = \frac{d}{dt} J_t \Big|_{t=0} = \int_{\partial V} h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}, n \right) d\mu_{\partial V}. \quad (13)$$

Продолжим меру $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}, n \right) \mu_{\partial V}$ на все X , полагая ее нулем на $X \setminus \partial V$. Так как $C_0^1(X)$ естественно включается в $C^1(V, \mathbb{R}^1)$, то из (13) и леммы 3 ($G = X, \nu = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}, n \right) \mu_{\partial V}$) следует, что $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}, n \right) \mu_{\partial V} = 0$, откуда $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}, n \right) = 0$ на ∂V почти всюду по мере $\mu_{\partial V}$. Так как $\mu_{\partial V}$ топологически невырождена на ∂V_n , а функция $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}, n \right)$ непрерывна на ∂V_n , то $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}, n \right) \equiv 0$ на ∂V_n . На множестве $\partial V \setminus \partial V_n$ $n = 0$ по определению, и теорема доказана.

Выясним условия топологической невырожденности поверхностей меры. Пусть $a \in X^*, a \neq 0, X_a = \{x \in X : (x, a) = 0\}, P_a$ — проектор X на X_a , параллельный $a, |\mu|^a: \Sigma_{X_a} \rightarrow \mathbb{R}^1, A \mapsto |\mu|(P_a^{-1}A), l$ — лебегова мера в R_a . Как показано в [18], существует функция $g_a: X_a \times R_a = X \rightarrow \mathbb{R}^1$ такая, что $\mu = g_a(|\mu|^a \times l)$.

ЛЕММА 4. Пусть для любого $a \in X^*$ $|g_a| > 0, Q$ — поверхность без особых точек. Тогда если мера μ топологически невырождена, то и мера μ_Q топологически невырождена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $q \in Q, U(q)$ — любая окрестность q , то в силу регулярности q и теоремы о неявной функции существуют вектор $a \in X^*$, открытый шар B в пространстве X_a с центром в точке $P_a q$ и функция $f \in C^1(B, R_a)$ такие, что справедливо включение $\text{gr } f \subset Q \cap U(q)$. В [19] доказано, что справедливо равенство $|\mu_Q|(\text{gr } f) = \int_B |g_a(x, f(x))| |(n(x, f(x)), a)| d|\mu|^a(x)$. Так как $|\mu|^a(B) > 0$ и $|g_a(x, f(x))| |(n(x, f(x)), a)| > 0$ на B , то $|\mu_Q|(\text{gr } f) > 0$ и лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Если ν есть невырожденная гауссова мера в X , то для любой поверхности Q без особых точек мера ν_Q топологически невырождена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всегда существует плотно вложенное в X гильбертово пространство H_1 , относительно которого мера ν симметрична [11; гл. III, § 1]. Применяя лемму 4 (с заменой H на H_1) и учитывая, что $g_a(x, y) = e^{\gamma y^2}$ ($\gamma < 0$), получаем требуемое.

Рассмотрим еще вариационную задачу с переменной областью.

Пусть φ , V_t , G , F , Φ – те же, что перед теоремой 7; предположим, что φ не зависит от третьего аргумента. Для $t \in [-1, 1]$ и $u \in C^1(\bar{V}_t, \mathbb{R}^1)$ положим

$$J(t, u) = \int_{V_t} \Phi(x, u(x), u'(x)) d\mu(x). \quad (14)$$

Определим расстояние между функциями $u_1 \in C^1(\bar{V}_t, \mathbb{R}^1)$ и $u_2 \in C^1(\bar{V}_s, \mathbb{R}^1)$, полагая $\rho(u_1, u_2) = \|u_1 \circ \varphi_t - u_2 \circ \varphi_s\|_{C^1(V, \mathbb{R}^1)}$; теперь естественным образом определяется понятие локального экстремума функционала (двух переменных) (14).

ТЕОРЕМА 10. Пусть выполнены условия теорем 7 и 9. Тогда если пара $(0, u)$ ($u \in C^2(\bar{V}, \mathbb{R}^1)$) есть точка локального экстремума функционала (14), то выполняются тождества (11) (на V), $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u'}, n\right) \equiv 0$ (на ∂V) и равенство

$$\int_V [\Phi(\lambda, \alpha_0) + \operatorname{div}(\Phi \alpha_0)] d\mu = 0. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 9 нужно доказать лишь последнее равенство. Беря $\psi(t, x, u) = u$, видим, что функция $t \mapsto J_t$ (см. определение (6); сейчас u считается фиксированным) имеет экстремум в точке $t = 0$. Применение формулы (7) теперь дает (15), что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если преобразование φ зависит и от третьей переменной, то заключение теоремы 10 остается в силе при дополнительном условии: для любого $t \in [-1, 1]$ отображение $\varphi_t: V \rightarrow X$, $\varphi_t(x) = \varphi(t, x, u(x))$, есть непрерывный изоморфизм $\bar{V}$ на $\bar{V}_t$ и диффеоморфизм V на V_t , причем $\varphi_t^{-1} \in C^1(V_t, X)$.

2.3. Теорема Нётер, преобразование Лежандра, система Гамильтона. Мы придерживаемся обозначений и предположений, приведенных в начале п. 2.2. Будем говорить, что функционал J_t инвариантен относительно преобразований $x \mapsto x_t = \varphi(t, x, u(x))$, $u \mapsto u_t$, если для любого открытого μ -правильного множества $V' \subset V$ и любого $t \in [-1, 1]$ справедливо равенство

$$\int_{V'_t} \Phi(x, u_t(x), u'_t(x)) d\mu(x) = \int_{V'} \Phi(x, u(x), u'(x)) d\mu(x)$$

$$(V'_t = \varphi_t(V')).$$

ТЕОРЕМА 11 (Нётер). Пусть выполнены условия теорем 7, 8. Если функционал J_t инвариантен относительно преобразований $x \mapsto x_t$, $u \mapsto u_t$, а функция u есть экстремаль функционала J_0 , то на V справедливо тождество

$$\operatorname{div} \left(\beta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right) + \left(\lambda, \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right) \beta_0 + \Phi(\lambda, \alpha_0) + \operatorname{div}(\Phi \alpha_0) \equiv 0. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы (7), примененной с заменой V на V' , и выполнения тождества $L_u = 0$ (теорема 8) имеем

$$\int_{V'} \left[\operatorname{div} \left(\beta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right) + \left(\lambda, \frac{\partial \Phi}{\partial u'} \right) \beta_0 + \Phi(\lambda, \alpha_0) + \operatorname{div}(\Phi \alpha_0) \right] d\mu = 0.$$

Отсюда, из произвольности $V' \subset V$, непрерывности подынтегральной функции и топологической невырожденности меры μ вытекает (16) (см. доказательство леммы 3 и теоремы 8). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $X = H = \mathbb{R}^m$, то $\lambda = 0$ и мы получаем классическую форму теоремы Нётер: $\operatorname{div} j(x) \equiv 0$ ($j: V \rightarrow \mathbb{R}^m$, $j = \beta_0 \frac{\partial \Phi}{\partial u'} + \Phi \alpha_0$, см. [14; гл. VII, § 33]).

С помощью преобразований Лежандра уравнение Эйлера сводится к (эквивалентной) канонической системе уравнений Гамильтона. Такое сведение для случая $V = X$ проделано в [2]; поскольку при этом граница множества V нигде не фигурирует, то сведение дословно переносится на общий случай ($V \neq X$).

В заключение работы отметим следующее. Все результаты пп. 2.2, 2.3 получены для пространств X с непрерывно дифференцируемой нормой. Обусловлено это тем, что на таких пространствах достаточно много функций класса $C^1(X, \mathbb{R}^1)$ (см. доказательство леммы 3). Вообще же класс $C^1(X, \mathbb{R}^1)$ может быть крайне беден (существуют сепарабельные банаховы пространства, где $C_0^1(G) = \emptyset$ для любого ограниченного множества $G \subset X$, см. [20]). Поэтому в общем случае не проходит доказательство леммы 3 и всех последующих утверждений работы. Однако вариационное исчисление все же может быть развито и для произвольного (сепарабельного) X . Решающими факторами здесь являются следующие: 1) достаточно богат класс $HC^\infty(X, \mathbb{R}^1)$ функций, непрерывно и ограничено бесконечно дифференцируемых (по Фреше) вдоль пространства H (подробнее см. [11; гл. III, § 6]); 2) построена теория интегрирования по HC^1 -поверхностям (т.е. поверхностям, которые локально задаются уравнением $f = 0$, где $f \in HC^1(X, \mathbb{R}^1)$, $f' \neq 0$, см. [10]). Теперь, заменяя везде в § 2 классы C^m на классы HC^m и последовательно применяя результаты [10], можно провести доказательство аналогов теорем 8–11. Мы не пошли по этому пути во избежание сильного усложнения работы.

Список литературы

1. Uglov A. V. On optimal organization of queueing systems with finite sources of requirements // Sem. de probabilitate statistica matematica. Italy: Cassino Univ., 1998. P. 64–95.
2. Dalecky Yu. L., Steblovskaya V. R. On infinite-dimensional variational problems // Stochastic Anal. Appl. 1996. V. 14. № 1. P. 47–71.
3. Вайцзеккер Х., Смолянов О. Г. Теорема Нётер для бесконечномерных вариационных задач // Докл. РАН. 1998. Т. 361. № 5. С. 583–586.
4. Diestel J., Uhl J. J. Vector measures. Providence: Amer. Math. Soc., 1977.
5. Вахания Н. Н., Тарчеладзе В. И., Чобаян С. А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985.
6. Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.
7. Ефимова Е. И. О предельном переходе под знаком векторного интеграла. Ярославль: Ярославский гос. ун-т, 1989. Деп. в ВИНТИ 03.02.1989. № 736–В89. 11 с.
8. Далецкий Ю. Л., Фомин С. В. Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах. М.: Наука, 1983.
9. Пич А. Ядерные локально выпуклые пространства. М.: Мир, 1977.

10. Угланов А. В. Поверхностные интегралы в пространствах Фреше // Матем. сб. 1998. Т. 189. № 11. С. 139–157.
11. Го Х.-С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. М.: Мир, 1979.
12. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.
13. Ефимова Е. И., Угланов А. В. Формулы векторного анализа на банаховом пространстве // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271. № 6. С. 1302–1306.
14. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
15. Смолянов О. Г., Угланов А. В. Всякое гильбертово подпространство винеровского пространства имеет меру нуль // Матем. заметки. 1973. Т. 14. № 3. С. 369–374.
16. Лобузов А. А. Исследование первых краевых задач для эллиптических и параболических уравнений в банаховых пространствах // Дис. . . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1982.
17. Вентцель А. Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975.
18. Угланов А. В. О факторизации гладких мер // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 121–127.
19. Угланов А. В. Частное гладких мер есть гладкая функция // Изв. вузов. Сер. матем. 1989. № 9. С. 72–76.
20. Bonic R., Frumpton J. Differentiable functions on certain Banach spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1965. V. 71. № 2. P. 393–395.

Ярославский государственный университет

Поступила в редакцию
23.02.1998 и 20.09.1999