Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Чуешов, Аналитичность глобальных аттракторов и определяющие узлы для некоторого класса нелинейных волновых уравнений с демпфированием, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 10, 119–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm519>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:02:31

УДК 517.94

И. Д. Чуешов

**Аналитичность глобальных аттракторов
и определяющие узлы для некоторого класса
нелинейных волновых уравнений с демпфированием**

Доказана регулярность по Жевре глобальных аттракторов динамических систем, порождаемых некоторым классом диссипативных систем связанных нелинейных волновых уравнений с периодическими граничными условиями. Этот результат означает, что элементы аттрактора являются вещественно-аналитическими функциями по пространственным переменным, и позволяет доказать существование двух определяющих узлов для задач с одной пространственной переменной.

Библиография: 15 названий.

Введение

Основная цель данной работы – показать, что некоторые результаты о регулярности по Жевре глобальных аттракторов полулинейных параболических уравнений (см., например, [1]–[5] и ссылки, приведенные в этих работах) остаются справедливыми для некоторого класса диссипативных нелинейных волновых уравнений. В качестве основной модели рассматривается следующая система связанных нелинейных волновых уравнений с демпфированием

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u_j(t, x) + \gamma \partial_t u_j(t, x) + \sum_{i=1}^m d_{ij} (-\Delta + 1) u_i(t, x) \\ + f_j(u_1(t, x), \dots, u_m(t, x)) = h_j(x), \\ x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1)$$

где неизвестная векторная функция $u(x, t) = \{u_1(x, t), \dots, u_m(x, t)\}$, $m \geq 1$, удовлетворяет периодическим граничным условиям:

$$u(t, x + Le_k) = u(t, x), \quad k = 1, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (2)$$

Здесь $\{e_k\}$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, L – положительная константа, $D = \{d_{ij}\}_{i,j=1}^m$ – положительная матрица, Δ – оператор Лапласа, $h(x) = \{h_1(x), \dots, h_m(x)\}$ – заданная вещественно-аналитическая L -периодическая векторная функция. Снабдим задачу (1), (2) начальными условиями

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0, x) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

где $u_0(x)$ и $u_1(x)$ – L -периодические векторные функции. Предполагается, что $f_j(u) \equiv f_j(u_1, \dots, u_m)$ – вещественно-аналитические функции относительно переменной $u = (u_1, \dots, u_m)$.

В статье изучаются свойства асимптотической регулярности решений задачи (1)–(3). Основной результат (см. теорему 1.1) утверждает, что глобальный аттрактор задачи принадлежит некоторому классу Жевре. Отсюда вытекает, что его элементы являются вещественно-аналитическими функциями по пространственным переменным. Аналогичный результат хорошо известен для некоторых полулинейных параболических уравнений (см., например, [1], [2]). Однако в параболическом случае метод доказательства существенно опирается на регуляризирующий эффект параболических уравнений (решение в момент $t > 0$ является более гладким, чем его начальное условие). Это явление позволяет доказать существование поглощающего множества, состоящего из вещественно-аналитических функций. Отсюда вытекает, что каждое решение после некоторого переходного интервала времени становится вещественно-аналитической функцией по пространственной переменной. Для случая эволюционных уравнений второго порядка по времени регуляризирующий эффект отсутствует (пространственная гладкость начальных условий сохраняется с течением времени). Для этих уравнений удастся доказать лишь существование равномерно притягивающего множества, состоящего из вещественно-аналитических функций. Основным моментом здесь является построение подходящего разложения эволюционного оператора на убывающую и компактную компоненты. Рассуждения опираются на некоторые идеи, представленные в [6] (см. также работу [7], в которой была установлена аналитичность аттрактора для слабо демпфированного нелинейного уравнения Шрёдингера с возбуждением). В качестве приложения теоремы 1.1 об аналитичности аттрактора задачи (1)–(3) в данной работе доказано также, что пространственно-одномерный вариант этой задачи обладает двумя определяющими узлами, т.е. асимптотическое поведение решений полностью определяется их динамикой в двух точках, лежащих внутри пространственного интервала $(0, L)$. Отметим, что впервые связь между регулярностью по Жевре и существованием малого числа определяющих узлов была установлена в работе [3], посвященной уравнению Гинзбурга–Ландау (см. также [4], [7] и обзор [8], где приведены аналогичные результаты для других уравнений). В работе [8] содержится также общее обсуждение проблемы существования определяющих функционалов для бесконечномерных уравнений.

Статья построена следующим образом. В §1 вводятся обозначения, дается некоторое описание классов Жевре и формулируются основные результаты. Параграф 2 посвящен доказательству теоремы о регулярности по Жевре аттрактора динамической системы, порождаемой задачей (1)–(3). В §3 установлено существование двух определяющих узлов в случае одной пространственной переменной. В §4 приведено несколько примеров.

§ 1. Предварительные рассмотрения и формулировка основных результатов

Пусть $\Omega = (0, L)^n \equiv (0, L) \times \cdots \times (0, L) \subset \mathbb{R}^n$. Для каждого $s \geq 0$ рассмотрим соболевское пространство

$$H_{\text{per}}^s(\Omega) = \{u(x) \in H_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^n) : u(x + Le_j) = u(x), j = 1, \dots, n, x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Так как $-\Delta$ порождает неотрицательный самосопряженный оператор в пространстве $L^2(\Omega)$ с областью определения $\mathbf{D}(-\Delta) = H_{\text{per}}^2(\Omega)$, то можно определить положительный оператор $A = (-\Delta + 1)^{1/2}$ на области определения $\mathbf{D}(A) = H_{\text{per}}^1(\Omega)$

и задать в пространстве $H_{\text{per}}^s(\Omega)$ скалярное произведение

$$(u, v)_s = \int_{\Omega} ((-\Delta + 1)^s u)(x) v(x) dx = (A^s u, A^s v), \quad s \geq 0,$$

где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Ниже символом $\|\cdot\|_s$ обозначается соответствующая норма в $H_{\text{per}}^s(\Omega)$, а символом $\|\cdot\|$ – норма в $L^2(\Omega)$. Отметим, что каждый элемент $u(x) \in H_{\text{per}}^s(\Omega)$ может быть представлен в виде

$$u(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} u_j \exp \left\{ i(j, x) \frac{2\pi}{L} \right\}, \quad (1.1)$$

где коэффициенты Фурье u_j обладают свойством $\bar{u}_j = u_{-j}$ (черта обозначает комплексное сопряжение) и

$$\|u\|_s^2 = L^n \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} (1 + (2\pi/L)^2 \cdot |j|^2)^s |u_j|^2 < \infty.$$

В дальнейшем для каждого $N = 1, 2, \dots$ будем обозначать через P_N ортопроектор в $L^2(\Omega)$ на подпространство

$$L_N = \left\{ u \in L^2(\Omega) : u(x) = \sum_{|j| \leq N} u_j \exp \left\{ i(j, x) \frac{2\pi}{L} \right\}, \bar{u}_j = u_{-j} \right\}. \quad (1.2)$$

Введем теперь классы Жевре $G_{\sigma}^s(\Omega)$ формулой $G_{\sigma}^s(\Omega) = \mathbf{D}(A^s e^{\sigma A})$, где, как и ранее, $A = (-\Delta + 1)^{1/2}$ с периодическими граничными условиями на Ω , а $\mathbf{D}(B)$ обозначает область определения оператора B . Здесь $s \geq 0$ и $\sigma \geq 0$ – некоторые константы. Эти классы являются гильбертовыми пространствами, состоящими из функций вида (1.1) таких, что

$$\begin{aligned} |u|_{G_{\sigma}^s(\Omega)}^2 &= \|A^s \exp\{\sigma A\} u\|^2 \\ &\equiv L^n \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} (1 + (2\pi/L)^2 |j|^2)^s \exp\{2\sigma(1 + (2\pi/L)^2 |j|^2)^{1/2}\} |u_j|^2 < \infty. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Символом $(u, v)_{G_{\sigma}^s(\Omega)}$ будем обозначать соответствующие скалярные произведения. Ясно, что $G_0^s(\Omega) = H_{\text{per}}^s(\Omega)$ для любого $s \geq 0$ и $G_{\sigma}^s(\Omega) \subset H_{\text{per}}^m(\Omega)$ для всех $s \geq 0$, $\sigma > 0$ и $m \geq 0$. Более того, каждый элемент $v(x) \in G_{\sigma}^s(\Omega)$, $\sigma > 0$, может быть продолжен как аналитическая функция в параллелепипед

$$\Pi^n = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z \in \Omega, \operatorname{Im} z \in (-\sigma, \sigma)^n\}.$$

В дальнейшем понадобится следующая лемма (ее доказательство см. в [5]).

ЛЕММА 1.1. Пусть $s > n/2$, $\sigma \geq 0$ и предположим, что функции $u(x)$ и $v(x)$ лежат в классе $G_{\sigma}^s(\Omega)$. Тогда $u(x) \cdot v(x) \in G_{\sigma}^s(\Omega)$ и существует константа C_s , не зависящая от σ и такая, что

$$|u \cdot v|_{G_{\sigma}^s(\Omega)} \leq C_s \cdot |u|_{G_{\sigma}^s(\Omega)} \cdot |v|_{G_{\sigma}^s(\Omega)}. \quad (1.4)$$

Ниже будут также рассматриваться векторные классы $\mathbf{H}^s(\Omega)$ и $\mathbf{G}_\sigma^s(\Omega)$, определяемые формулами

$$\mathbf{H}_{\text{per}}^s(\Omega) \equiv [H_{\text{per}}^s(\Omega)]^m = \{u(x) \equiv (u_1, \dots, u_m) : u_j \in H_{\text{per}}^s(\Omega), j = 1, \dots, m\}$$

и

$$\mathbf{G}_\sigma^s(\Omega) \equiv [G_\sigma^s(\Omega)]^m = \{u(x) \equiv (u_1, \dots, u_m) : u_j \in G_\sigma^s(\Omega), j = 1, \dots, m\}$$

с нормами

$$\|u\|_s^2 = \sum_{j=1}^m \|u_j\|_s^2 \quad \text{и} \quad |u|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2 = \sum_{j=1}^m |u_j|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2. \quad (1.5)$$

Ради простоты сохраняются те же самые символы для норм и скалярных произведений в $\mathbf{H}_{\text{per}}^s(\Omega)$ и $H_{\text{per}}^s(\Omega)$ и в $\mathbf{G}_\sigma^s(\Omega)$ и $G_\sigma^s(\Omega)$.

Перепишем уравнения (1) как задачу в пространстве $\mathbf{L}^2(\Omega)$ вида

$$\partial_t^2 u(t, x) + \gamma \partial_t u(t, x) + \mathcal{L}u(t, x) + f(u(t, x)) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0. \quad (1.6)$$

Здесь $f(u)$ и $h(x)$ – векторные функции вида

$$f(u) = (f_1(u_1, \dots, u_m), \dots, f_m(u_1, \dots, u_m)), \quad h = (h_1, \dots, h_m),$$

а $\mathcal{L}$ – положительный оператор в $\mathbf{L}^2(\Omega)$ с областью определения $\mathbf{D}(\mathcal{L}) = \mathbf{H}_{\text{per}}^2(\Omega)$, задаваемый формулой

$$(\mathcal{L}u)_j(x) = \sum_{i=1}^m d_{ij} A^2 u_i(x), \quad j = 1, \dots, m, \quad u(x) = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbf{H}_{\text{per}}^2(\Omega),$$

где $D = \{d_{ij}\}_{i,j=1}^m$ – положительная матрица такая, что для некоторых $0 < d_0 \leq d_1$ справедлива оценка

$$d_0 \cdot \sum_{i=1}^m \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^m d_{ij} \xi_i \xi_j \leq d_1 \cdot \sum_{i=1}^m \xi_i^2 \quad \text{для всех} \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Относительно задачи (1.6), (2), (3) предполагаются выполненными следующие условия.

(A1) При некотором неотрицательном $s > n/2 - 1$ задача (1.6), (2), (3) корректно разрешима в классе

$$\mathcal{W}_s = C^1(0, +\infty; \mathbf{H}_{\text{per}}^s(\Omega)) \cap C(0, +\infty; \mathbf{H}_{\text{per}}^{s+1}(\Omega)). \quad (1.7)$$

(A2) Эволюционный оператор S_t , порождаемый в пространстве $\mathbf{E}_s = \mathbf{H}_{\text{per}}^{s+1}(\Omega) \times \mathbf{H}_{\text{per}}^s(\Omega)$ формулой $S_t(u_0; u_1) = (u(t); \partial_t u(t))$, где $u(t)$ – решение задачи (1.6), (2), (3), обладает глобальным аттрактором $\mathcal{A}$, ограниченным в пространстве $\mathbf{E}_s$, т.е. (см. [9]–[13]) существует ограниченное замкнутое множество $\mathcal{A}$ в $\mathbf{E}_s$ такое, что $S_t \mathcal{A} = \mathcal{A}$ для всех $t \geq 0$ и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \{\text{dist}_{\mathbf{E}_s}(S_t y, \mathcal{A}) : y \in B\} = 0$$

для любого ограниченного множества B из $\mathbf{E}_s$.

(A3) Функция $h(x) = \{h_1(x), \dots, h_m(x)\}$ лежит в классе $\mathbf{G}_{\sigma_0}^s(\Omega)$ при некотором $\sigma_0 > 0$ и для каждого $j = 1, \dots, m$ функция $f_j(u) = f_j(u_1, \dots, u_m)$ может быть представлена в виде

$$f_j(u) = \sum_{\alpha} b_{\alpha}^{(j)} u^{\alpha}.$$

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ — мультииндекс такой, что

$$n(\alpha) \equiv \alpha_1 + \dots + \alpha_m \geq 1, \quad u^{\alpha} = u_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot u_m^{\alpha_m},$$

а коэффициенты $\{b_{\alpha}^{(j)}\}$ обладают свойством

$$g_j(r) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(\sum_{n(\alpha)=k} |b_{\alpha}^{(j)}| \right) < \infty \quad (1.8)$$

для всех $0 < r < r_0$ и $j = 1, \dots, m$, где r_0 — достаточно большое число.

Примеры задач, для которых выполнены предположения (A1)–(A3), приведены в § 4 (см. также [10] и [12]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Отметим, что при условиях (A1) и (A3) задача (1.6), (2), (3) корректно разрешима в каждом классе

$$\mathcal{W}_{s+k} = C^1(0, +\infty; \mathbf{H}_{\text{per}}^{s+k}(\Omega)) \cap C(0, +\infty; \mathbf{H}_{\text{per}}^{s+k+1}(\Omega)), \quad k = 0, 1, \dots$$

Кроме того, каждое пространство $\mathbf{E}_{s+k} = (\mathbf{H}_{\text{per}}^{s+k+1} \times \mathbf{H}_{\text{per}}^{s+k})(\Omega)$ является инвариантным относительно эволюционного оператора S_t , так как $S_t \mathbf{E}_{s+k} = \mathbf{E}_{s+k}$, и если имеет место (A2), глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ лежит в каждом из пространств $\mathbf{E}_{s+k}$, $k = 0, 1, \dots$. Следовательно, $\mathcal{A} \subset C_{\text{per}}^{\infty}(\Omega) \times C_{\text{per}}^{\infty}(\Omega)$. Для доказательства этих фактов нужно повторить рассуждения, приведенные в [14]. Здесь не приводятся подробных доказательств, потому что эти свойства не используются в последующих рассмотрениях. Отметим также, что в случае $m = 1$ задача (1.6), (2), (3) обладает функцией Ляпунова (см., например, [10], [11]) и поэтому глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ имеет регулярную структуру, т.е. состоит из неподвижных точек и их неустойчивых многообразий (см. [10]).

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1. *Предположим, что выполняются условия (A1)–(A3). Тогда существует $0 < \sigma \leq \sigma_0$ такое, что глобальный аттрактор $\mathcal{A}$ динамической системы $(S_t, \mathbf{E}_s)$, порождаемой задачей (1)–(3), лежит в $\mathbf{G}_{\sigma}^{s+1}(\Omega) \times \mathbf{G}_{\sigma}^s(\Omega)$ и*

$$\sup\{|u_0|_{G_{\sigma}^{s+1}(\Omega)}^2 + |u_1|_{G_{\sigma}^s(\Omega)}^2 : (u_0, u_1) \in \mathcal{A}\} < \infty.$$

Таким образом, все элементы глобального аттрактора являются вещественно-аналитическими функциями по пространственным переменным.

Теорема 1.1 позволяет также доказать следующее утверждение о существовании двух определяющих узлов для задачи (1)–(3) в случае одной пространственной переменной.

ТЕОРЕМА 1.2. *Предположим, что $n = 1$ и условия (A1)–(A3) выполняются при $s = 0$. Пусть x_1 и x_2 – два узла таких, что $0 \leq x_1 < x_2 \leq L$. Пусть $u(t) = (u_1(t, x), \dots, u_m(t, x))$ и $u^*(t) = (u_1^*(t, x), \dots, u_m^*(t, x))$ – решения задачи (1), (2) при $n = 1$ из класса $\mathcal{W}_2$. Тогда существует Δ_0 , не зависящее от u и u^* , такое, что если $x_2 - x_1 \leq \Delta_0$, то из условия*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{l=1,2} \sum_{j=1}^m |u_j(t, x_l) - u_j^*(t, x_l)| = 0 \quad (1.9)$$

вытекает

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ \|\partial_t(u(t) - u^*(t))\|^2 + \|u(t) - u^*(t)\|_1^2 \} = 0. \quad (1.10)$$

Теорема 1.2 означает, что асимптотическое поведение любого решения задачи (1)–(3) класса $\mathcal{W}_2$ полностью определяется значениями этого решения в любых двух достаточно близких друг к другу узлах.

§ 2. Регулярность аттрактора по Жевре

В этом параграфе доказана теорема 1.1. Метод ее доказательства использует некоторые идеи, представленные в [6] и [7] для нелинейного уравнения Шрёдингера. Ниже предполагается выполнение всех условий, приведенных в § 1.

Пусть $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ – решение задачи (1.6), (2), (3) с начальными условиями $y = (u_0; u_1) \in B$, где B – какое-либо ограниченное множество в $\mathbf{E}_s$. Из условия (A2) о существовании глобального аттрактора вытекает, что найдется $t_0 = t_0(B)$ такое, что

$$\sup_{y \in B} \{ \|\partial_t u(t)\|_s^2 + \|u(t)\|_{s+1}^2 \} \leq R_0^2 \quad \text{для всех } t \geq t_0 = t_0(B), \quad (2.1)$$

где $R_0 = 1 + \sup_{y \in \mathcal{A}} \|y\|_{\mathbf{E}_s}$. Пусть $p_N(t) = P_N u(t) \equiv (P_N u_1(t), \dots, P_N u_m(t))$, где P_N – ортопроектор на подпространство L_N , определяемое формулой (1.2). Рассмотрим в пространстве $Q_N \mathbf{L}^2(\Omega)$, где $Q_N = 1 - P_N$, следующую вспомогательную задачу

$$\partial_t^2 w(t, x) + \gamma \partial_t w(t, x) + \mathcal{L} w(t, x) + Q_N f(p_N(t) + w(t, x)) = Q_N h(x) \quad (2.2)$$

в классе периодических функций:

$$w(t, x + L e_k) = w(t, x), \quad k = 1, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > t_0 = t_0(B), \quad (2.3)$$

с нулевыми начальными условиями в момент $t_0 = t_0(B)$:

$$w(t_0, x) = 0, \quad \partial_t w(t_0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

Отметим, что уравнение (2.2) формально получается как проекция уравнения (1.6) на подпространство $Q_N \mathbf{L}^2(\Omega)$. Однако из-за нулевых начальных условий для $w(t)$ в момент t_0 функция $v(t) = p_N(t) + w(t)$ не обязательно является решением исходной задачи (1)–(3).

В приведенных ниже двух леммах будет показано, что решение $w(t)$ задачи (2.2)–(2.4) по пространственным переменным принадлежит классу Жевре и аппроксимирует решение $u(t)$ исходной задачи при $t \rightarrow \infty$. Эти свойства дают возможность доказать существование равномерно притягивающего ограниченного в

некотором классе Жевре множества и воспользоваться стандартными результатами об аттракторах асимптотически компактных динамических систем (см., например, [9], [11]).

ЛЕММА 2.1. *Существуют числа $0 < \sigma \equiv \sigma_N \leq \sigma_0$, $N_0 \geq 1$ и $R > 0$, не зависящие от N , такие, что задача (2.2)–(2.4) имеет единственное решение в классе*

$$C^1(t_0, +\infty; Q_N \mathbf{G}_\sigma^s(\Omega)) \cap C(t_0, +\infty; Q_N \mathbf{G}_\sigma^{s+1}(\Omega)), \quad N \geq N_0,$$

где $Q_N = 1 - P_N$, а P_N – ортопроектор на подпространство L_N , определяемое с помощью (1.2). Это решение обладает свойством

$$|\partial_t w(t)|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2 + |w(t)|_{G_\sigma^{s+1}(\Omega)}^2 \leq R^2 \quad \text{для всех } t \geq t_0 = t_0(B), \quad N \geq N_0. \quad (2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в пространстве $Q_{M,N} \mathbf{L}^2(\Omega)$, где $Q_{M,N} = P_M - P_N$ с $M > N$, вместо (2.2) следующее уравнение

$$\partial_t^2 w(t, x) + \gamma \partial_t w(t, x) + \mathcal{L} w(t, x) + Q_{M,N} f(p_N(t) + w(t, x)) = Q_{M,N} h(x).$$

Ясно, что это уравнение имеет единственное решение

$$w_M(t, x) = \sum_{N \leq |j| \leq M} w_j(t) \exp \left\{ i(j, x) \frac{2\pi}{L} \right\}, \quad w_M(t_0, x) = 0,$$

на некотором интервале $(t_0, t_0 + T_{M,N})$. Если будет доказана равномерная оценка (2.5) для $w_M(t)$ на интервале существования $(t_0, t_0 + T_{M,N})$, то можно будет сделать вывод о возможности продолжения этого решения на полуось $(t_0, +\infty)$. После этого можно выполнить предельный переход $M \rightarrow \infty$ и установить существование решения для (2.2)–(2.4) со свойством (2.5). Легко обнаружить, что это решение единственно. Таким образом, нужно лишь доказать для $w_M(t)$ равномерную оценку (2.5) на любом интервале существования. Ниже для краткости индекса M будем опускать.

При $\nu > 0$ и $0 < \sigma \leq \sigma_0$ определим функционал

$$V(t) \equiv V(\partial_t w(t), w(t)) = V_0(\partial_t w(t), w(t)) + \nu \cdot V_1(\partial_t w(t), w(t)),$$

где

$$V_0(\partial_t w(t), w(t)) = \frac{1}{2} \left(|\partial_t w(t)|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2 + \sum_{i,j=1}^m d_{ij}(w_i(t), w_j(t))_{G_\sigma^{s+1}(\Omega)} \right)$$

и

$$V_1(\partial_t w(t), w(t)) = (w(t), \partial_t w(t))_{G_\sigma^s(\Omega)} + \frac{\gamma}{2} |w(t)|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2.$$

Ясно, что для каждого $\nu \leq \gamma/2$ справедливо соотношение

$$\beta_1 (|\partial_t w|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2 + |w|_{G_\sigma^{s+1}(\Omega)}^2) \leq V(t) \leq \beta_2 (|\partial_t w|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2 + |w|_{G_\sigma^{s+1}(\Omega)}^2) \quad (2.6)$$

с некоторыми положительными константами β_j , не зависящими от ν . Стандартные вычисления дают, что

$$\frac{d}{dt}V_0(\partial_t w(t), w(t)) = -\gamma|\partial_t w(t)|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2 + (-Q_N f(p_N(t) + w(t)) + Q_N h, \partial_t w(t))_{G_\sigma^s(\Omega)}.$$

Поэтому

$$\frac{d}{dt}V_0(\partial_t w, w) \leq -\frac{\gamma}{2}|\partial_t w|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2 + \gamma^{-1}|Q_N f(p_N(t) + w)|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2 + \gamma^{-1}|h|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2. \quad (2.7)$$

Мы также имеем, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V_1(\partial_t w, w) &\leq |\partial_t w|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2 - d_0|w|_{G_\sigma^{s+1}(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}|Q_N f(p_N(t) + w)|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2 + |w|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}|h|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из (2.6)–(2.8) вытекает существование $\nu > 0$ и $\mu > 0$ таких, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}V(t) + \mu V(t) &\leq -\frac{\nu d_0}{2}|w|_{G_\sigma^{s+1}(\Omega)}^2 \\ &\quad + C_1 \cdot |Q_N f(p_N(t) + w)|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2 + C_2 \cdot |w|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2 + C_3 \cdot |h|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

где константы $C_j > 0$ не зависят от N . Так как

$$|w|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2 \leq (1 + N^2)^{-(s^* - s)} \cdot |w|_{G_\sigma^{s^*}(\Omega)}^2, \quad w \in Q_N G_\sigma^{s^*}(\Omega), \quad s < s^*, \quad (2.9)$$

то

$$\frac{d}{dt}V(t) + \mu V(t) \leq -\frac{\nu d_0}{4}|w|_{G_\sigma^{s+1}(\Omega)}^2 + C_1 \cdot |Q_N f(p_N(t) + w)|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2 + C_2 \quad (2.10)$$

для всех достаточно больших N , где константы $C_j > 0$ не зависят от N , $\sigma \leq \sigma_0$.

Оценим теперь величину $|Q_N f(p_N(t) + w)|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2$, опираясь на представление $f_j(p_N(t) + w)$ в виде

$$f_j(p_N + w) = f_j(p_N) + (\nabla f_j(p_N), w) + \int_0^1 (1 - \tau)(\nabla^2 f_j(p_N + \tau w)w, w) d\tau,$$

где

$$(\nabla f_j, w) = \sum_{k=1}^m \partial_{u_k} f_j \cdot w_k \quad \text{и} \quad (\nabla^2 f_j w, w) = \sum_{k,l=1}^m \partial_{u_k u_l}^2 f_j \cdot w_k \cdot w_l.$$

Пусть s^* – любое число, обладающее свойством $\max\{n/2, s\} < s^* < s + 1$. Из леммы 1.1 вытекает, что

$$\begin{aligned} |f(p_N(t))|_{G_\sigma^{s^*}(\Omega)}^2 &= \sum_{j=1}^m |f_j(p_N(t))|_{G_\sigma^{s^*}(\Omega)}^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{\alpha} |b_\alpha^{(j)}| \cdot |(p_N(t))^\alpha|_{G_\sigma^{s^*}(\Omega)} \right)^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{\alpha} |b_\alpha^{(j)}| \cdot C_{s^*}^{n(\alpha)-1} \cdot \prod_{i=1}^m |(p_N(t))_i|_{G_\sigma^{s^*}(\Omega)}^{\alpha_i} \right)^2 \\ &\leq C_{s^*}^{-2} \cdot \sum_{j=1}^m [g_j(C_{s^*} |p_N(t)|_{G_\sigma^{s^*}(\Omega)})]^2, \end{aligned}$$

где функции $g_j(r)$ определяются соотношениями (1.8), а C_{s^*} — константа из леммы 1.1 с $s = s^*$. Аналогичным образом имеем, что

$$\begin{aligned} |(\nabla f(p_N(t)), w)|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}^2 &= \sum_{j=1}^m |(\nabla f_j(p_N(t)), w)|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m C_{s^*} \cdot |\partial_{u_i} f_j(p_N(t))|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)} \cdot |w_i|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)} \right)^2 \\ &\leq C \cdot \sum_{j=1}^m [g'_j(C_{s^*} |p_N(t)|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)})]^2 \cdot |w|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

где $g'_j(r)$ — производная функции $g_j(r)$, а константа C не зависит от N . Наконец, те же рассуждения дают, что

$$\begin{aligned} |(\nabla^2 f(p_N(t) + \tau w)w, w)|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}^2 &\leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l,k=1}^m |\partial_{u_l u_k}^2 f_j(p_N(t) + \tau w)|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)} \cdot |w_l \cdot w_k|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)} \right)^2 \\ &\leq C \cdot \sum_{j=1}^m [g''_j(C_{s^*} |p_N(t)|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)} + C_{s^*} |w|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)})]^2 \cdot |w|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}^4, \end{aligned}$$

где $g''_j(r)$ — вторая производная функции $g_j(r)$ и константа C не зависит от N . Таким образом, имеем, что

$$\begin{aligned} |Q_N f(p_N(t) + w)|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}^2 &\leq G_0(C_{s^*} |p_N(t)|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}) \\ &\quad + G_1(C_{s^*} |p_N(t)|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}) \cdot |w|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}^2 \\ &\quad + G_2(C_{s^*} |p_N(t)|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)} + C_{s^*} |w|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}) \cdot |w|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}^4. \end{aligned}$$

Здесь

$$G_k(r) = C \cdot \sum_{j=1}^m [g_j^{(k)}(r)]^2, \quad k = 0, 1, 2,$$

где $g_j^{(k)}(r)$ — производная функции $g_j(r)$ порядка k и константа C не зависит от N . Так как $s^* < s + 1$, то из (2.1) имеем, что

$$|p_N(t)|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)} \leq e^{\sigma(1+N)} |p_N(t)|_{s+1} \leq e^{\sigma(1+N)} R_0, \quad t \geq t_0 = t_0(B).$$

Поэтому если выбрать $\sigma = (1 + N)^{-1}$, то получим

$$|Q_N f(p_N(t) + w)|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}^2 \leq C_0 + C_1 |w|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}^2 + G_2(C_2 + C_{s^*} |w|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}) \cdot |w|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}^4$$

для всех $t \geq t_0$, где C_j не зависят от N , $j = 0, 1, 2$. Следовательно, из (2.9) вытекает, что

$$\begin{aligned} |Q_N f(p_N(t) + w)|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}^2 &\leq |Q_N f(p_N(t) + w)|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}^2 \\ &\leq C_0 + C_1 (1 + N^2)^{-\delta} |w|_{G_{\sigma}^{s+1}(\Omega)}^2 \\ &\quad + (1 + N^2)^{-2\delta} G_2(C_2 + C_{s^*} |w|_{G_{\sigma}^{s^*}(\Omega)}) \cdot |w|_{G_{\sigma}^{s+1}(\Omega)}^4, \end{aligned}$$

где $\delta = s + 1 - s^* > 0$. Поэтому из (2.6) и (2.10) имеем, что

$$\frac{d}{dt}V(t) + \mu V(t) \leq C_1 + C_2(1 + N^2)^{-2\delta} [V(t)]^2 \cdot G_2(C_3 + C_4 \cdot [V(t)]^{1/2}) \quad (2.11)$$

для всех достаточно больших N , где $\delta > 0$, $\sigma = (1 + N)^{-1}$, а константы $C_j > 0$ не зависят от N . Ясно, что при достаточно больших N функция

$$F(V) = -\mu V + C_1 + C_2(1 + N^2)^{-2\delta} V^2 \cdot G_2(C_3 + C_4 \cdot V^{1/2})$$

имеет простой корень $V_0 \equiv V_0(N) > 0$ такой, что $F(V) > 0$ при $V \in (0, V_0)$. Так как $V(t_0) = 0$, то указанное свойство функции $F(V)$ и неравенство (2.11) дают, что $V(t) \leq V_0$ при $t \geq t_0$. Кроме того, так как $V_0(N) \rightarrow C_1 \mu^{-1}$ при $N \rightarrow \infty$, то $V_0(N) \leq V_0^*$, где V_0^* не зависит от N . Поэтому из (2.6) имеем, что

$$|\partial_t w(t)|_{G_\sigma^s(\Omega)}^2 + |w(t)|_{G_\sigma^{s+1}(\Omega)}^2 \leq \beta_1^{-1} V_0^* \equiv R^2, \quad t \geq t_0, \quad (2.12)$$

для достаточно больших N с произвольным $0 \leq \sigma \leq (1 + N)^{-1} \leq \sigma_0$. Из этого неравенства вытекает (2.5). Лемма 2.1 доказана.

ЛЕММА 2.2. Пусть $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$ — решение задачи (1.6), (2), (3) с начальными условиями $y = (u_0; u_1) \in B$, где B — некоторое ограниченное множество в $\mathbf{E}_s$ такое, что выполняется (2.1). Предположим, что $w(t) = (w_1(t), \dots, w_m(t))$ — решение задачи (2.2)–(2.4). Тогда существует $N_0 > 0$ такое, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{y \in B} \{ \|\partial_t(Q_N u(t) - w(t))\|_s^2 + \|Q_N u(t) - w(t)\|_{s+1}^2 \} = 0 \quad (2.13)$$

для каждого $N \geq N_0$, где $Q_N = 1 - P_N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(t) = Q_N u(t) - w(t)$. Тогда $v(t)$ — решение задачи

$$\partial_t^2 v(t, x) + \gamma \partial_t v(t, x) + \mathcal{L}v(t, x) + Q_N(f(u(t, x)) - f(p_N(t) + w(t))) = 0 \quad (2.14)$$

в классе периодических функций:

$$v(t, x + Le_k) = v(t, x), \quad k = 1, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > t_0, \quad (2.15)$$

с начальными условиями в момент t_0 :

$$v(t_0) = Q_N u(t_0), \quad \partial_t v(t_0, x) = Q_N \partial_t u(t_0). \quad (2.16)$$

Как и при доказательстве леммы 2.1, при $0 < \nu \leq \gamma/2$ рассмотрим функционал

$$W(t) \equiv W(\partial_t v(t), v(t)) = W_0(\partial_t v(t), v(t)) + \nu \cdot W_1(\partial_t v(t), v(t)),$$

где

$$W_0(\partial_t v(t), v(t)) = \frac{1}{2} \left(\|\partial_t v(t)\|_s^2 + \sum_{i,j=1}^m d_{ij}(v_i(t), v_j(t))_{s+1} \right)$$

и

$$W_1(\partial_t v(t), v(t)) = (v(t), \partial_t v(t))_s + \frac{\gamma}{2} \|v(t)\|_s^2.$$

Как и ранее, ясно, что

$$\beta_1(\|\partial_t v\|_s^2 + \|v\|_{s+1}^2) \leq W(t) \leq \beta_2(\|\partial_t v\|_s^2 + \|v\|_{s+1}^2) \quad (2.17)$$

с положительными константами β_j , не зависящими от ν . Стандартные вычисления дают, что

$$\frac{d}{dt} W_0(\partial_t v, v) \leq -\frac{\gamma}{2} \|\partial_t v\|_s^2 + \frac{1}{2\gamma} \|Q_N \tilde{f}(u, w)\|_s^2. \quad (2.18)$$

Здесь и далее полагаем

$$\tilde{f}(u, w) = f(u(t)) - f(p_N(t) + w(t)).$$

Используя (2.9) при $\sigma = 0$, имеем также, что

$$\frac{d}{dt} W_1(\partial_t v, v) \leq \|\partial_t v\|_s^2 - (d_0 - (1 + N^2)^{-1}) \|v\|_{s+1}^2 + \frac{1}{4} \|Q_N \tilde{f}(u, w)\|_s^2. \quad (2.19)$$

Как и при доказательстве леммы 2.1, из (2.17)–(2.19) вытекает существование чисел $\nu > 0$ и $\mu > 0$ таких, что

$$\frac{d}{dt} W(t) + \mu W(t) \leq -\frac{\nu d_0}{4} \|v\|_{s+1}^2 + C \cdot \|Q_N \tilde{f}(u, w)\|_s^2 \quad (2.20)$$

для всех достаточно больших N , где константа $C > 0$ не зависит от N .

Оценим теперь величину $\|Q_N \tilde{f}(u, w)\|_s^2$. Так как

$$\tilde{f}(u, w) = \int_0^1 (\nabla f(u - \tau v), v) d\tau,$$

имеем, что

$$\|Q_N \tilde{f}(u, w)\|_s^2 \leq \|Q_N \tilde{f}(u, w)\|_{s^*}^2 \leq \int_0^1 \|(\nabla f(u - \tau v), v)\|_{s^*}^2 d\tau,$$

где s^* – произвольное число со свойством $\max\{n/2; s\} < s^* < s + 1$. Из леммы 1.1 при $\sigma = 0$ и из предположения (A3) вытекает, что

$$\|(\nabla f(u - \tau v), v)\|_{s^*}^2 \leq C \cdot \|\nabla f(u - \tau v)\|_{s^*}^2 \|v\|_{s^*}^2 \leq C_1 \cdot \sum_{j=1}^m [g'_j(C_2 \|u - \tau v\|_{s^*}^2)]^2 \|v\|_{s^*}^2.$$

Из (2.1) и из (2.12) при $\sigma = 0$ имеем, что

$$\|u(t) - \tau v(t)\|_{s^*}^2 \leq \|u(t) - \tau v(t)\|_{s+1}^2 \leq C(R_0, R) \quad \text{для всех } t \geq t_0 = t_0(B).$$

Следовательно, используя (2.9), получаем, что

$$\|Q_N \tilde{f}(u, w)\|_s^2 \leq C(R_0, R) \cdot (1 + N^2)^{-(s+1-s^*)} \|v(t)\|_{s+1}^2 \quad \text{для всех } t \geq t_0 = t_0(B).$$

Таким образом, из (2.20) следует существование числа N_0 такого, что

$$\frac{d}{dt}W(t) + \mu W(t) \leq 0$$

для всех $t \geq t_0 = t_0(B)$, $N \geq N_0$. Из этого соотношения вытекает, что $W(t) \leq e^{-\mu(t-t_0)}W(t_0)$ для всех $t \geq t_0 = t_0(B)$ и $N \geq N_0$. Поэтому, используя (2.1) и (2.17), получаем (2.13). Лемма 2.2 доказана.

Леммы 2.1 и 2.2 позволяют завершить доказательство теоремы 1.1. Зафиксируем N так, чтобы выполнялись утверждения лемм 2.1 и 2.2. Тогда существует $\sigma > 0$ такое, что множество

$$\mathcal{G} = \{(u_0, u_1) \in \mathbf{G}_{\sigma}^{s+1}(\Omega) \times \mathbf{G}_{\sigma}^s(\Omega) : |u_0|_{G_{\sigma}^{s+1}(\Omega)}^2 + |u_1|_{G_{\sigma}^s(\Omega)}^2 \leq \overline{R}^2\}$$

является равномерно притягивающим для динамической системы $(S_t, \mathbf{E}_s)$. Здесь $\overline{R}^2 = e \cdot R_0^2 + R^2$, а R_0 и R – константы из (2.1) и (2.5). Поэтому из стандартных теорем о существовании аттрактора для асимптотически компактного случая (см, например, [9] или [11]) следует, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Представленный выше метод может быть также применен к другим эволюционным уравнениям второго порядка по времени. Например, можно доказать утверждение, аналогичное теореме 1.1, для уравнения (1) с бигармоническим оператором Δ^2 вместо $-\Delta$. В этом случае допустима зависимость нелинейного члена $f(u)$ от пространственных производных первого порядка.

§3. Определяющие узлы ($n = 1$)

В этом параграфе доказана теорема 1.2 о существовании определяющих узлов для задачи (1)–(3) в случае одной пространственной переменной.

Начнем со следующей простой леммы.

ЛЕММА 3.1. *Предположим, что x_1 и x_2 – узлы такие, что $0 \leq x_1 < x_2 \leq L$. Пусть $u^1(t, x)$ и $u^2(t, x)$ – два решения задачи (1), (2) при $n = 1$ из класса*

$$\mathcal{W}_2 = C^1(0, +\infty; \mathbf{H}_{\text{per}}^2(0, L)) \cap C(0, +\infty; \mathbf{H}_{\text{per}}^3(0, L))$$

такие, что

$$\|\partial_t u^k(t)\|_2^2 + \|u^k(t)\|_3^2 \leq R^2 \quad \text{при} \quad t \geq t_0, \quad k = 1, 2, \quad (3.1)$$

для некоторых $R > 0$ и $t_0 \geq 0$. Тогда существуют числа $\Delta_0 \equiv \Delta_0(R) > 0$ и $\mu > 0$ такие, что при условии $0 < x_2 - x_1 < \Delta_0$ для разности $u(t) \equiv u(t, x) = u^1(t, x) - u^2(t, x)$ при всех $t \geq s \geq t_0$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \|\partial_t u(t)\|_{\Delta}^2 + \|u(t)\|_{1, \Delta}^2 &\leq c_1 e^{-\mu(t-s)} \\ &+ c_2 \max_{l=1,2} |u(t, x_l)| + c_3 \cdot \int_s^t e^{-\mu(t-\tau)} \cdot \max_{l=1,2} |u(\tau, x_l)| d\tau, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где c_j – положительные константы, зависящие от R . Здесь и далее используются обозначения: $\Delta = \{x : x_1 \leq x \leq x_2\}$, $|\Delta| = x_2 - x_1$ и

$$\|w\|_{\Delta}^2 = \int_{x_1}^{x_2} |w(x)|^2 dx, \quad \|w\|_{1, \Delta}^2 = \|w\|_{\Delta}^2 + \|\partial_x w\|_{\Delta}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся тем же подходом, что и при доказательстве лемм 2.1 и 2.2. Из (1) имеем, что функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t^2 u(t, x) + \gamma \partial_t u(t, x) + \mathcal{L}u(t, x) + f(u^1(t, x)) - f(u^2(t, x)) = 0, \quad x \in (0, L), \quad t > 0.$$

Умножая это уравнение на $\partial_t u(t, x)$, после интегрирования по частям получим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W_0^\Delta(t) &\leq -\frac{\gamma}{2} \|\partial_t u(t)\|_\Delta^2 \\ &\quad + \eta(t, x_2) - \eta(t, x_1) + (2\gamma)^{-1} \int_\Delta |f(u^1(t, x)) - f(u^2(t, x))|^2 dx, \end{aligned}$$

где

$$W_0^\Delta(t) = \frac{1}{2} \left(\|\partial_t u(t)\|_\Delta^2 + \sum_{i,j=1}^m d_{ij} \int_\Delta [\partial_x u_i(t, x) \cdot \partial_x u_j(t, x) + u_i(t, x) \cdot u_j(t, x)] dx \right)$$

и

$$\eta(t, x) = \sum_{i,j=1}^m d_{ij} \partial_x u_i(t, x) \cdot \partial_t u_j(t, x).$$

Для функции

$$W_1^\Delta(t) = \int_\Delta (u(t, x), \partial_t u(t, x))_\Delta dx + \frac{\gamma}{2} \|u(t)\|_\Delta^2$$

имеем также, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W_1^\Delta(t) &= \|\partial_t u\|_\Delta^2 + \sum_{i,j=1}^m d_{ij} \int_\Delta ((\partial_x^2 - 1)u_i(t, x), u_j(t, x)) dx \\ &\quad - \int_\Delta (f(u^1(t, x)) - f(u^2(t, x)), u(t, x)) dx \\ &\leq \|\partial_t u\|_\Delta^2 - \frac{d_0}{2} \|u\|_{1,\Delta}^2 \\ &\quad + C_1 \|f(u^1(t)) - f(u^2(t))\|_\Delta^2 + C_2 \sum_{l=1,2} |u(\tau, x_l)| \cdot |\partial_x u(\tau, x_l)|. \end{aligned}$$

Поэтому, как и ранее, при достаточно малых $\mu > 0$ и $\nu > 0$ функционал $W^\Delta(t) = W_0^\Delta(t) + \nu \cdot W_1^\Delta(t)$ обладает свойством

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} W^\Delta(t) + \mu W^\Delta(t) &\leq -\frac{\nu d_0}{4} \|u\|_{1,\Delta}^2 + C_1 \|f(u^1(t)) - f(u^2(t))\|_\Delta^2 \\ &\quad + C_2 \max_{l=1,2} |u(t, x_l)| \cdot |\partial_x u(t, x_l)| + \eta(t, x_2) - \eta(t, x_1). \end{aligned}$$

Так как $H_{\text{per}}^1(0, L)$ непрерывно вложено в $C([0, L])$, то из (3.1) легко видеть, что

$$|\partial_x u(t, x_l)| \leq C \|u(t)\|_2 \leq C_R$$

и

$$\begin{aligned}\|f(u^1(t)) - f(u^2(t))\|_{\Delta}^2 &\leq C_R \cdot \|u^1(t) - u^2(t)\|_{\Delta}^2 \\ &\leq C_R \cdot (|u(t, x_1)|^2 + |\Delta|^2 \cdot \|u\|_{1, \Delta}^2).\end{aligned}$$

Поэтому при достаточно малых $|\Delta|$ имеем, что

$$\frac{d}{dt}W^{\Delta}(t) + \mu W^{\Delta}(t) \leq C_R \max_{l=1,2} |u(t, x_l)| + \eta(t, x_2) - \eta(t, x_1).$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$\begin{aligned}W^{\Delta}(t) &\leq C_R \cdot e^{-\mu(t-s)} + C_R \int_s^t e^{-\mu(t-\tau)} \max_{l=1,2} |u(\tau, x_l)| d\tau \\ &\quad + \int_s^t e^{-\mu(t-\tau)} [\eta(\tau, x_2) - \eta(\tau, x_1)] d\tau.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Однако интегрирование по частям дает, что

$$\begin{aligned}&\int_s^t e^{-\mu(t-\tau)} \eta(\tau, x) d\tau \\ &= \sum_{i,j=1}^m d_{ij} \int_s^t e^{-\mu(t-\tau)} \partial_x u_i(\tau, x) \cdot \partial_t u_j(\tau, x) d\tau \\ &= \sum_{i,j=1}^m d_{ij} \{ \partial_x u_i(t, x) \cdot u_j(t, x) - e^{-\mu(t-s)} \partial_x u_i(s, x) \cdot u_j(s, x) \} \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^m d_{ij} \left\{ \mu \int_s^t e^{-\mu(t-\tau)} \partial_x u_i(\tau, x) \cdot u_j(\tau, x) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_s^t e^{-\mu(t-\tau)} \partial_{xt}^2 u_i(\tau, x) \cdot u_j(\tau, x) d\tau \right\}.\end{aligned}$$

Поэтому из (3.1) имеем, что

$$\left| \int_s^t e^{-\mu(t-\tau)} \eta(\tau, x) d\tau \right| \leq C_R \cdot \left\{ e^{-\mu(t-s)} + |u(t, x)| + \int_s^t e^{-\mu(t-\tau)} |u(\tau, x)| d\tau \right\}.$$

Из этого неравенства и из (3.3) вытекает (3.2).

ЛЕММА 3.2. *Предположим, что $n = 1$ и выполнены предположения (A1)–(A3) при $s = 0$. Тогда существует $R > 0$ такое, что для любого решения $u(t, x)$ задачи (1), (2), лежащего в классе $\mathcal{W}_2$, имеем, что*

$$\|\partial_t u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_3^2 \leq R^2, \quad t \geq t_0(u). \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что существование глобального аттрактора (см. (A2) с $s = 0$) дает, что

$$\|\partial_t u(t)\|^2 + \|u(t)\|_1^2 \leq R_0^2, \quad t \geq \bar{t}_0(u), \quad (3.5)$$

с некоторыми R_0 и $\bar{t}_0(u)$ (ср. (2.1)). Кроме того, функция $v(t, x) = \partial_t u(t, x)$ является решением задачи

$$\partial_t^2 v(t) + \gamma \partial_t v(t) + \mathcal{L}v(t) = F(t) \equiv -(\nabla f(u(t)), \partial_t u(t)), \quad t > 0, \quad (3.6)$$

с периодическими условиями и с начальными данными:

$$v(0, x) = u_1, \quad \partial_t v(0, x) = -\gamma u_1 - \mathcal{L}u_0 - f(u_0) + h.$$

Так как

$$\begin{aligned} \|F(t)\| &= \|(\nabla f(u(t)), \partial_t u(t))\| \leq \|\nabla f(u(t))\|_{L^\infty} \cdot \|\partial_t u(t)\| \\ &\leq C \cdot \left(\sum_{j=1}^m \left[g'_j \left(\max_{(0, L)} |u(t, x)| \right) \right]^2 \right)^{1/2} \|\partial_t u(t)\| \end{aligned}$$

и так как $H_{\text{рег}}^1(0, L)$ непрерывно вложено в $C([0, L])$, то из (3.5) следует, что

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|F(t)\| \leq C(R_0).$$

Поэтому стандартные рассуждения, аналогичные приведенным в леммах 2.1 или 2.2, позволяют получить соотношение

$$\|\partial_{tt} u(t)\|^2 + \|\partial_t u(t)\|_2^2 + \|u(t)\|_3^2 \leq R_1^2, \quad t \geq t_1(u), \quad (3.7)$$

где R_1 зависит от R_0 и от параметров уравнения (1). Используя это соотношение и дифференцируя (3.6) по t , можно применить тот же, что и ранее, метод и получить (3.4). Аналогичные и более подробные рассуждения для общего случая эволюционных уравнений второго порядка по времени могут быть найдены в [14].

Теперь мы можем доказать теорему 1.2.

Пусть выполняется (1.9) и $0 < x_2 - x_1 < \Delta_0$, где Δ_0 — то же самое число, что и в лемме 3.1. Тогда леммы 3.1 и 3.2 дают, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ \|\partial_t u(t) - \partial_t u^*(t)\|_\Delta^2 + \|u(t) - u^*(t)\|_{1, \Delta}^2 \} = 0, \quad (3.8)$$

где $\Delta = (x_1, x_2)$. Предположим, что (1.10) не верно. В этом случае так как

$$\text{dist}_{\mathbf{E}_0}((u(t); \partial_t u(t)), \mathcal{A}) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

для любого решения $u(t) \in \mathcal{W}_0$, то существует последовательность $\{t_n\}$ и элементы $a = a(x)$ и $a^* = a^*(x)$ из $\mathcal{A}$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|\partial_t u(t_n) - \partial_t u^*(t_n)\|^2 + \|u(t_n) - u^*(t_n)\|_1^2) > 0 \quad (3.9)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(u(t_n); \partial_t u(t_n)) - a\|_{\mathbf{E}_0} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|(u^*(t_n); \partial_t u^*(t_n)) - a^*\|_{\mathbf{E}_0} = 0.$$

Из (3.8) вытекает, что $a(x) = a^*(x)$ при $x \in \Delta = (x_1, x_2)$. Так как элементы аттрактора $\mathcal{A}$ являются вещественно-аналитическими функциями по пространственной переменной (см. теорему 1.1), то имеем, что $a(x) = a^*(x)$ для всех $x \in (0, L)$. Это противоречит соотношению (3.9). Теорема 1.2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Используя интерполяционные неравенства для соболевских норм и некоторые дополнительные рассуждения, из (3.4) можно извлечь более сильную сходимости к нулю величины $u(t) - u^*(t)$. А именно, в условиях теоремы 1.2 можно вместо (1.10) доказать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{ \|\partial_t(u(t) - u^*(t))\|_2^2 + \|u(t) - u^*(t)\|_3^2 \} = 0.$$

Отметим также, что из теоремы 1.1 и леммы 3.1 вытекает следующее свойство любых двух траекторий $y^k(t) = (u^k(t, x); \partial_t u^k(t, x))$, $k = 1, 2$, лежащих в глобальном аттракторе $\mathcal{A}$ задачи (1)–(3) в случае одной пространственной переменной: если x_1 и x_2 – достаточно близкие друг к другу узлы на интервале $(0, L)$ такие, что

$$u^1(t, x_l) = u^2(t, x_l) \quad \text{для всех } t \in (-\infty, +\infty), \quad l = 1, 2, \quad (3.10)$$

то

$$u^1(t, x) = u^2(t, x) \quad \text{для всех } t \in (-\infty, +\infty), \quad x \in (0, L). \quad (3.11)$$

Действительно, из теоремы 1.1 вытекает, что

$$\|\partial_t u(t)\|_q^2 + \|u(t)\|_{q+1}^2 < R_q^2 \quad \text{для всех } t \in (-\infty, +\infty), \quad q = 0, 1, \dots$$

Здесь $(u(t); \partial_t u(t))$ – траектория, лежащая в глобальном аттракторе $\mathcal{A}$. Поэтому можно применить лемму 3.1 при каждом $t \geq s > -\infty$. Следовательно, (3.2) и (3.10) дают, что

$$\|\partial_t u(t)\|_{\Delta}^2 + \|u(t)\|_{1,\Delta}^2 \leq c_1 e^{-2\mu(t-s)} \quad \text{для любых } t \geq s,$$

где $u(t, x) = u^1(t, x) - u^2(t, x)$. Поэтому если зафиксировать t и устремить $s \rightarrow -\infty$, то получим, что $u(t, x) = 0$ для всех $t \in (-\infty, +\infty)$ и $x \in (x_1, x_2)$. Отсюда вытекает (3.11), потому что $y^1(t), y^2(t) \in \mathcal{A}$ – вещественно-аналитические функции по пространственной переменной (см. теорему 1.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Утверждение, аналогичное теореме 1.2, может быть также получено для решений u и u^* из $\mathcal{W}_1$ (вместо $\mathcal{W}_2$). В этом случае нужны дополнительные определяющие функционалы. Например, можно доказать, что из (1.9) и одного из дополнительных предположений

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{l=1,2} \sum_{j=1}^m |\partial_x u_j(t, x_l) - \partial_x u_j^*(t, x_l)| = 0$$

или

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{l=1,2} \sum_{j=1}^m |\partial_t u_j(t, x_l) - \partial_t u_j^*(t, x_l)| = 0$$

вытекает (1.10). Для доказательства нужно только заметить, что (3.3) остается в силе для разности $u(t)$ любых двух решений $u^1(t)$ и $u^2(t)$ из $\mathcal{W}_1$, обладающих свойством

$$\|\partial_t u^k(t)\|_1^2 + \|u^k(t)\|_2^2 \leq R^2 \quad \text{при } t \geq t_0, \quad k = 1, 2.$$

Это позволяет для указанных случаев получить неравенства, аналогичные (3.2). После этого достаточно воспользоваться (3.7) и повторить те же самые рассуждения, что и в теореме 1.2.

§4. Примеры

В этом параграфе кратко описаны несколько ситуаций, в которых могут быть использованы теоремы 1.1 и 1.2. Ниже во всех примерах предполагается выполненным условие (2) пространственной периодичности.

ПРИМЕР 4.1. Пусть $n \leq 3$, $m \geq 1$. Рассмотрим систему связанных волновых уравнений с демпфированием

$$\partial_t^2 u_j(t, x) + \gamma \partial_t u_j(t, x) - \Delta u_j(t, x) + \lambda [u_j(t, x)]^3 + \sum_{i=1}^m a_{ji} u_i(t, x) = h_j(x), \quad (4.1)$$

$$x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad j = 1, \dots, m,$$

где $\{a_{ji}\}$ – матрица с постоянными элементами, γ и λ – положительные параметры. Используя стандартные методы (см., например, [15], где рассмотрен случай $m = 1$), легко обнаружить, что задача (4.1), (2), (3) корректно разрешима в класс $\mathcal{W}_0$ (классы $\mathcal{W}_s$ определяются формулой (1.7)). Используя подход, представленный в [14], можно доказать (ср. замечание 1.1), что эта задача корректно разрешима в каждом классе $\mathcal{W}_k$, $k = 0, 1, \dots$, а эволюционный оператор S_t обладает глобальным аттрактором в пространстве $\mathbf{E}_1 = \mathbf{H}_{\text{рег}}^2(\Omega) \times \mathbf{H}_{\text{рег}}^1(\Omega)$. Если матрица $\{a_{ji}\}$ является симметрической (это всегда так при $m = 1$), то задача имеет функционал Ляпунова и поэтому в случае общего положения аттрактор имеет регулярную структуру (см., например, [10], [11] или [12]). Таким образом, выполняются гипотезы (A1)–(A3) с $s = 1$ при условии, что $h_j(x)$ лежит в некотором классе Жевре. Эти же рассуждения и выводы остаются в силе, если вместо (4.1) рассмотреть систему

$$\partial_t^2 u_j(t, x) + \gamma \partial_t u_j(t, x) - \Delta u_j(t, x) + \lambda u_j(t, x) \cdot \sum_{i=1}^m [u_i(t, x)]^2 + \sum_{i=1}^m a_{ji} u_i(t, x) = h_j(x),$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, $j = 1, \dots, m$.

ПРИМЕР 4.2. В случае одной пространственной переменной допустимы нелинейности более общего вида. Например, можно рассмотреть следующую систему

$$\partial_t^2 u_j(t, x) + \gamma \partial_t u_j(t, x) - \partial_{xx} u_j(t, x) + f(u_j(t, x)) + \sum_{i=1}^m a_{ji} u_i(t, x) = h_j(x),$$

$$x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0, \quad j = 1, \dots, m.$$

Здесь $\gamma > 0$, $m \geq 1$, $\{a_{ji}\}$ – матрица с постоянными элементами и $f(u)$ – полином нечетной степени с положительным старшим коэффициентом. Легко видеть (ср. [14] и [12]), что когда $h_j(x)$ – функции класса Жевре, условия (A1)–(A3) выполняются с $s = 0$. В этом случае применимы обе теоремы 1.1 и 1.2.

ПРИМЕР 4.3. Можно также рассмотреть несколько уравнений синус-Гордона с демпфированием. Они используются при моделировании динамики контактов Джозефсона, возбуждаемых источником тока (ссылки и комментарии см., например, в [12]). Рассмотрим сначала скалярное уравнение синус-Гордона

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u - \Delta u + \beta u + \lambda \sin u = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

Здесь $n \leq 3$ а γ, β и λ — положительные константы. Ясно, что функция $f(u) = \lambda \sin u$ обладает свойствами, перечисленными в (A3). Как и в приведенных ранее примерах, свойства (A1) и (A2) могут быть установлены методом, представленным в [14] и [12]. Те же заключения справедливы и для пары связанных уравнений синус-Гордона:

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u_1 + \gamma \partial_t u_1 - \Delta u_1 + \beta u_1 + \lambda \sin u_1 + \alpha(u_1 - u_2) &= h_1(x), \\ \partial_t^2 u_2 + \gamma \partial_t u_2 - \Delta u_2 + \beta u_2 + \lambda \sin u_2 - \alpha(u_1 - u_2) &= h_2(x),\end{aligned}$$

а также для системы (см. в [12]):

$$\begin{aligned}\partial_t^2 u_1 + \gamma \partial_t u_1 - \Delta u_1 + \beta u_1 + \lambda \sin(u_1 + u_2) &= h_1(x), \\ \partial_t^2 u_2 + \gamma \partial_t u_2 - \Delta u_2 + \beta u_2 + \lambda \sin(u_1 - u_2) &= h_2(x).\end{aligned}$$

Отметим, что в приведенных выше уравнениях можно положить $\beta = 0$. Однако в этом случае необходимо слегка видоизменить фазовое пространство. Нужно его факторизовать (подробности см. в [12]) для того, чтобы отождествить решения $u(t, x)$ и $u^*(t, x)$, обладающие свойством $u(t, x) - u^*(t, x) = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Список литературы

1. Foias C., Temam R. Gevrey class regularity for the solutions of the Navier–Stokes equations // J. Funct. Anal. 1989. V. 87. P. 359–369.
2. Promislow K. Time analyticity and Gevrey regularity for solutions of a class of dissipative partial differential equations // Nonlinear Anal. 1991. V. 16. P. 959–980.
3. Kukavica I. On the number of determining nodes for the Ginzburg–Landau equation // Nonlinearity. 1992. V. 5. P. 997–1006.
4. Foias C., Kukavica I. Determining nodes for the Kuramoto–Sivashinsky equation // J. Dynam. Differential Equations. 1995. V. 7. P. 365–373.
5. Ferrari A. B., Titi E. S. Gevrey regularity of solutions of a class of analytic nonlinear parabolic equations // Comm. Partial Differential Equations. 1998. V. 2. P. 1–16.
6. Goubet O. Regularity of the attractor for a weakly damped driven nonlinear Schrödinger equation // Appl. Anal. 1996. V. 60. P. 99–119.
7. Oliver M., Titi E. S. Analyticity of the attractor and the number of determining nodes for a weakly damped driven nonlinear Schrödinger equation // Indiana Univ. Math. J. 1998. V. 47. P. 49–73.
8. Чуешов И. Д. Теория функционалов, однозначно определяющих асимптотическую динамику бесконечномерных диссипативных систем // УМН. 1998. Т. 53. № 4. С. 77–124.
9. Ладыженская О. А. О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнения Навье–Стокса и других уравнений с частными производными // УМН. 1987. Т. 42. № 6. С. 25–60.
10. Бабин А. В., Вилиш М. И. Аттракторы эволюционных уравнений. М.: Наука, 1989.
11. Hale J. K. Asymptotic behavior of dissipative systems. Providence: Amer. Math. Soc., 1988.
12. Temam R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. New York: Springer-Verlag, 1988.
13. Чуешов И. Д. Глобальные аттракторы в нелинейных задачах математической физики // УМН. 1993. Т. 48. № 3. С. 135–162.
14. Ghidaglia J.-M., Temam R. Regularity of the solutions of second order evolution equations and their attractors // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1987. V. 14. P. 485–511.
15. Lions J.-L. Quelques methodes de resolution de problemes aux limites non lineaires. Paris: Dunod, 1969.