Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Юрко, Обратная задача для пучков дифференциальных операторов, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 10, 137–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm520>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:40:19

УДК 517.984

В. А. Юрко

Обратная задача для пучков дифференциальных операторов

Исследуется обратная спектральная задача восстановления дифференциальных операторных пучков второго порядка на полуоси. Доказана теорема единственности, получены необходимые и достаточные условия разрешимости и алгоритм решения обратной задачи. Указаны связи с обратными задачами для уравнений с частными производными.

Библиография: 22 названия.

Введение

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ell_\rho y := y'' + (\rho^2 + i\rho q_1(x) + q_0(x))y = 0, \quad x > 0, \quad (1)$$

на полуоси, где $q_j(x)$ — комплекснозначные функции. В статье исследуется обратная задача восстановления коэффициентов дифференциального пучка ℓ_ρ по заданным спектральным характеристикам. В качестве основной спектральной характеристики вводится так называемая функция Вейля, являющаяся аналогом классической функции Вейля для оператора Штурма–Лиувилля [1]. Изучены свойства функции Вейля, доказана теорема единственности решения обратной задачи, получена конструктивная процедура решения и необходимые и достаточные условия на функцию Вейля.

Известно, что обратная задача спектрального анализа для оператора Штурма–Лиувилля $\ell y := -y'' + q_0(x)y$ достаточно полно изучена (см. [2], [3] и литературу в них). Важную роль в этих исследованиях сыграл метод оператора преобразования. Нелинейное вхождение спектрального параметра вносит существенные качественные изменения в исследование обратной задачи, особенно для случая полуоси. Метод оператора преобразования в этом случае является неудобным, и мы будем использовать другой метод, связанный с развитием идей метода контурного интеграла [4], [5]. Центральным местом здесь является получение и исследование так называемого основного уравнения обратной задачи, которое является линейным уравнением в соответствующем банаховом пространстве относительно специально выбранного решения дифференциального уравнения (1). При выводе основного уравнения мы опираемся на интегральную формулу Коши и на аналитическую структуру функции Вейля. Можно считать, что в некотором смысле основное уравнение играет примерно ту же роль, что и уравнение Гельфанда–Левитана в методе оператора преобразования.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00741).

В работе исследована разрешимость основного уравнения и предложен алгоритм построения коэффициентов пучка с использованием решения основного уравнения. При этом обнаружены новые качественные эффекты в свойствах решений основного уравнения, характерные для пучков дифференциальных операторов. Важной и наиболее трудной задачей является получение необходимых и достаточных условий разрешимости обратной задачи, т.е. условий, при выполнении которых наперед заданная функция будет функцией Вейля пучка из заданного класса. Эти необходимые и достаточные условия описаны в теореме 8.

Отметим, что прямые задачи спектрального анализа для уравнения (1) на конечном интервале и для более общих пучков операторов достаточно полно изучены в [6]–[11] и других работах. Некоторые аспекты теории обратных спектральных задач для пучков дифференциальных операторов на конечном интервале исследовались в [12]–[16]. Отметим также, что к виду (1) могут быть приведены более общие дифференциальные уравнения вида

$$y'' + P_1(x, \rho)y' + P_0(x, \rho)y = 0,$$

где

$$P_j(x, \rho) = \sum_{k=0}^j \rho^k p_{jk}(x).$$

Полученные в статье результаты и методы позволяют исследовать также обратные задачи для уравнений с частными производными. В качестве модельного примера в последней части статьи рассматривается важная для приложений обратная задача для волнового уравнения

$$u_{xx} - u_{tt} + q_1(x)u_t + q_0(x)u = 0 \quad (2)$$

с сосредоточенным источником в начале координат. Обратным задачам для уравнений с частными производными посвящена обширная литература (см. монографии [17]–[19] и библиографию в них). В частности, получено локальное решение обратной задачи для уравнения (2) в окрестности начала координат. В данной статье установлена связь между обратной задачей для уравнения (2) и обратной спектральной задачей для пучка (1). С помощью этой связи удалось получить глобальное решение обратной задачи для уравнения (2) и дать необходимые и достаточные условия ее разрешимости.

Несколько слов о структуре статьи. В §1 исследуются свойства спектральных характеристик, приводится постановка обратной задачи, доказывается теорема единственности решения обратной задачи. В §2 дается вывод основного уравнения обратной задачи, исследуется его разрешимость и приводятся алгоритмы решения обратной задачи. В §3 получены необходимые и достаточные условия на функцию Вейля. Параграф 4 посвящен решению обратной задачи для волнового уравнения.

§1. Постановка обратной задачи. Теорема единственности

Наряду с дифференциальным уравнением (1) рассмотрим линейную форму

$$U_\rho(y) := y'(0) + (i\rho h_1 + h_0)y(0), \quad (3)$$

где h_j — комплексные числа, $h_1 \neq \pm 1$. Последнее условие исключает из рассмотрения задачи типа Редже [20], которые требуют отдельного исследования

(см. [14]). Обозначим через W_N , $N \geq 0$, множество функций $f(x)$ таких, что $f^{(\nu)}(x)$, $\nu = 0, \dots, N-1$, абсолютно непрерывны при $x \in [0, T]$ для любого $T > 0$ и $f^{(\nu)}(x) \in L(0, \infty)$, $\nu = 0, \dots, N$. Будем говорить, что $L := (\ell_\rho, U_\rho) \in V_N$, если $q_j(x) \in W_{N+j}$, $j = 0, 1$. Решение обратной задачи будем искать в классах V_N .

Обозначим

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_0^x q_1(s) ds, \quad \Pi_\pm = \{\rho : \pm \operatorname{Im} \rho > 0\}.$$

Фиксируем $\alpha \geq 0$. Известным методом [6] получаем, что при $|\rho| > \rho_\alpha$, $x \geq 0$ существует фундаментальная система решений $\{Y_{k\alpha}(x, \rho)\}_{k=1,2}$ уравнения (1) такая, что

1) функции $Y_{k\alpha}^{(\nu)}(x, \rho)$, $\nu = 0, 1$, непрерывны при $|\rho| > \rho_\alpha$, $x \geq 0$ в каждой из полуплоскостей $\overline{\Pi}_\pm$;

2) при каждом фиксированном $x \geq 0$ функции $Y_{k\alpha}^{(\nu)}(x, \rho)$ регулярны при $|\rho| > \rho_\alpha$ в каждой из полуплоскостей $\Pi_\pm$;

3) при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{\Pi}_\pm$, равномерно по $x \geq \alpha$

$$Y_{k\alpha}^{(\nu)}(x, \rho) = ((-1)^{k-1} i \rho)^\nu \exp((-1)^{k-1} (i \rho x - Q(x))) \left(1 + \frac{a_{k\nu\alpha}(x)}{\rho} + o\left(\frac{1}{\rho}\right) \right);$$

4) при каждом фиксированном $\rho \in \Pi_\pm$, $|\rho| > \rho_\alpha$,

$$Y_{k\alpha}^{(\nu)}(x, \rho) = ((-1)^{k-1} i \rho)^\nu \exp((-1)^{k-1} (i \rho x - Q(x))) (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty.$$

Отметим, что $\rho_\alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow \infty$.

Пусть функция $\Phi(x, \rho)$ является решением дифференциального уравнения (1) при условиях $U_\rho(\Phi) = 1$, $\Phi(x, \rho) = O(\exp(\pm i \rho x))$, $x \rightarrow \infty$, $\rho \in \Pi_\pm$. Таким образом, $\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x, \rho) = 0$ при каждом фиксированном не вещественном ρ . Функцию $\Phi(x, \rho)$ будем называть *решением Вейля* для пары $L = (\ell_\rho, U_\rho)$. Ясно, что

$$\Phi(x, \rho) = \frac{Y_{k\alpha}(x, \rho)}{U_\rho(Y_{k\alpha})}, \quad k = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho \in \Pi_+, \\ 2 & \text{при } \rho \in \Pi_-. \end{cases} \quad (4)$$

Положим $M(\rho) := \Phi(0, \rho)$. Функцию $M(\rho)$ будем называть *функцией Вейля* для L . Обратная задача ставится следующим образом.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА 1. По заданной функции Вейля найти коэффициенты пучка (1), (3).

Пусть функции $\varphi(x, \rho)$ и $S(x, \rho)$ являются решениями уравнения (1) при начальных условиях

$$\varphi(0, \rho) = 1, \quad U_\rho(\varphi) = 0, \quad S(0, \rho) = 0, \quad S'(0, \rho) = 1.$$

Тогда

$$\Phi(x, \rho) = S(x, \rho) + M(\rho) \varphi(x, \rho), \quad (5)$$

$$\langle \varphi(x, \rho), \Phi(x, \rho) \rangle \equiv 1, \quad (6)$$

где $\langle y, z \rangle := yz' - y'z$. При каждом фиксированном $x \geq 0$ функции $\varphi^{(\nu)}(x, \rho)$ и $S^{(\nu)}(x, \rho)$ являются целыми аналитическими по ρ . Кроме того, имеет место представление

$$\varphi(x, \rho) = \frac{U_\rho(Y_{2\alpha})Y_{1\alpha}(x, \rho) - U_\rho(Y_{1\alpha})Y_{2\alpha}(x, \rho)}{\langle Y_{1\alpha}(x, \rho), Y_{2\alpha}(x, \rho) \rangle}. \quad (7)$$

Используя (4), (7) и свойства фундаментальной системы решений $\{Y_{k\alpha}(x, \rho)\}$, приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 1. 1) При $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{\Pi_{\pm}}$, равномерно по $x \geq 0$

$$\begin{aligned} \varphi^{(\nu)}(x, \rho) = & \frac{1+h_1}{2}(-i\rho)^{\nu} \exp(-i\rho x + Q(x)) \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) \\ & + \frac{1-h_1}{2}(i\rho)^{\nu} \exp(i\rho x - Q(x)) \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Phi^{(\nu)}(x, \rho) = \frac{(\pm i\rho)^{\nu}}{(h_1 \pm 1)i\rho} \exp(\pm(i\rho x - Q(x))) \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right). \quad (9)$$

2) Функция $M(\rho)$ является регулярной в каждой из полуплоскостей $\Pi_{\pm}$, за исключением не более чем счетного ограниченного множества полюсов $\Lambda'_{\pm}$, и непрерывна в $\overline{\Pi_{\pm}}$, за исключением ограниченных множеств $\Lambda_{\pm}$. При $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \overline{\Pi_{\pm}}$,

$$M(\rho) = \frac{1}{(h_1 \pm 1)i\rho} \left(1 + \frac{M_1^{\pm}}{(h_1 \pm 1)i\rho}\right) + \frac{\kappa^{\pm}(\rho)}{\rho}, \quad \kappa^{\pm}(\rho) = o(1), \quad (10)$$

где $M_1^{\pm} = -h_0 \pm \frac{1}{2}q_1(0)$. Если $q_j(x) \in W_2^j(0, \infty)$, то $\kappa^{\pm}(\rho) \in L_2$.

Наряду с L будем рассматривать пучок $\tilde{L}$ того же вида, но с другими коэффициентами $\tilde{q}_j(x)$, $\tilde{h}_j$. Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к L , то $\tilde{\alpha}$ обозначает соответствующий объект, относящийся к $\tilde{L}$, и $\hat{\alpha} = \alpha - \tilde{\alpha}$.

Рассмотрим матрицу $P(x, \rho) = [P_{jk}(x, \rho)]_{j,k=1,2}$, определяемую равенством

$$P(x, \rho) \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x, \rho) & \tilde{\Phi}(x, \rho) \\ \tilde{\varphi}'(x, \rho) & \tilde{\Phi}'(x, \rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x, \rho) & \Phi(x, \rho) \\ \varphi'(x, \rho) & \Phi'(x, \rho) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Учитывая (6), вычисляем

$$\begin{aligned} P_{j1}(x, \rho) &= \varphi^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{\Phi}'(x, \rho) - \Phi^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{\varphi}'(x, \rho), \\ P_{j2}(x, \rho) &= \Phi^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{\varphi}(x, \rho) - \varphi^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{\Phi}(x, \rho). \end{aligned} \quad (12)$$

Обозначим

$$\Omega(x) = \frac{1}{2}(\exp(\hat{Q}(x)) + \exp(-\hat{Q}(x))), \quad \Lambda(x) = -\frac{1}{2i}(\exp(\hat{Q}(x)) - \exp(-\hat{Q}(x))). \quad (13)$$

Тогда

$$\Omega'(x) = -\frac{i}{2}\hat{q}_1(x)\Lambda(x), \quad \Lambda'(x) = \frac{i}{2}\hat{q}_1(x)\Omega(x), \quad \Omega(0) = 1, \quad \Lambda(0) = 0, \quad (14)$$

$$\Omega^2(x) + \Lambda^2(x) = 1. \quad (15)$$

Используя (12), (13) и асимптотические формулы (8), (9), приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 2. Пусть $h_1 = \tilde{h}_1$. Тогда при $|\rho| \rightarrow \infty$ равномерно по $x \geq 0$

$$\begin{aligned} P_{11}(x, \rho) &= \Omega(x) + O\left(\frac{1}{\rho}\right), & P_{12}(x, \rho) &= \frac{\Lambda(x)}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \\ P_{21}(x, \rho) &= -\rho\Lambda(x) + O(1), & P_{22}(x, \rho) &= \Omega(x) + O\left(\frac{1}{\rho}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Сформулируем теперь теорему единственности решения обратной задачи.

ТЕОРЕМА 1. Если $M(\rho) = \tilde{M}(\rho)$, то $L = \tilde{L}$. Таким образом, задание функции Вейля однозначно определяет коэффициенты пучка (1), (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При условии теоремы согласно (10) имеем $h_1 = \tilde{h}_1$ и, следовательно, в силу леммы 2 имеют место асимптотические формулы (16). С другой стороны, используя (12) и (5), вычисляем

$$\begin{aligned} P_{j1}(x, \rho) &= \varphi^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{S}'(x, \rho) - S^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{\varphi}'(x, \rho) \\ &\quad + (\tilde{M}(\rho) - M(\rho)) \varphi^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{\varphi}'(x, \rho), \\ P_{j2}(x, \rho) &= S^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{\varphi}(x, \rho) - \varphi^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{S}(x, \rho) \\ &\quad + (M(\rho) - \tilde{M}(\rho)) \varphi^{(j-1)}(x, \rho) \tilde{\varphi}(x, \rho). \end{aligned}$$

Так как $M(\rho) \equiv \tilde{M}(\rho)$, то при каждом фиксированном $x \geq 0$ функции $P_{jk}(x, \rho)$ являются целыми аналитическими по ρ . Вместе с (16) это, в частности, дает

$$P_{11}(x, \rho) \equiv \Omega(x), \quad P_{12}(x, \rho) \equiv 0.$$

Отсюда согласно (12) приходим к соотношению

$$\tilde{\varphi}(x, \rho) \Phi(x, \rho) = \varphi(x, \rho) \tilde{\Phi}(x, \rho),$$

или

$$\frac{\varphi(x, \rho)}{\tilde{\varphi}(x, \rho)} = \frac{\Phi(x, \rho)}{\tilde{\Phi}(x, \rho)}. \quad (17)$$

Учитывая асимптотические формулы (8) и (9), вычисляем при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\arg \rho \in [\varepsilon, \pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$,

$$\frac{\varphi(x, \rho)}{\tilde{\varphi}(x, \rho)} = \exp(\hat{Q}(x)) \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right), \quad \frac{\Phi(x, \rho)}{\tilde{\Phi}(x, \rho)} = \exp(-\hat{Q}(x)) \left(1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right).$$

Отсюда и из (17) заключаем, что $\hat{Q}(x) = 0$. Тогда согласно (13) $\Omega(x) = 1$, т.е. $P_{11}(x, \rho) = 1$. Подставляя равенства $P_{11}(x, \rho) = 1$, $P_{12}(x, \rho) = 0$ в (11), находим, что при всех x и ρ

$$\varphi(x, \rho) = \tilde{\varphi}(x, \rho), \quad \Phi(x, \rho) = \tilde{\Phi}(x, \rho)$$

и, следовательно, $L = \tilde{L}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Задания функции Вейля $M(\rho)$ в одной из полуплоскостей Π_+ или Π_- недостаточно для однозначного определения L . Например, если

$$q_0(x) = \frac{1}{2}q_1'(x) - \frac{1}{4}q_1^2(x), \quad h_1 = h_0 = 0,$$

то при $\rho \in \Pi_+$

$$\Phi(x, \rho) \equiv \frac{1}{i\rho - q_1(0)/2} \exp(i\rho x - Q(x)), \quad M(\rho) \equiv \frac{1}{i\rho - q_1(0)/2}.$$

§ 2. Основное уравнение. Решение обратной задачи

В этом параграфе мы даем вывод основного уравнения обратной задачи и исследуем его разрешимость. Далее, опираясь на основное уравнение, мы получаем конструктивную процедуру решения обратной задачи и приводим явные формулы для построения коэффициентов пучка.

Положим

$$D(x, \rho, \theta) = \frac{\langle \varphi(x, \rho), \varphi(x, \theta) \rangle}{\rho - \theta}. \quad (18)$$

Так как в силу (1)

$$\frac{d}{dx} \langle \varphi(x, \rho), \varphi(x, \theta) \rangle = (\rho - \theta)(\rho + \theta + iq_1(x))\varphi(x, \rho)\varphi(x, \theta)$$

и, кроме того,

$$\langle \varphi(x, \rho), \varphi(x, \theta) \rangle|_{x=0} = ih_1(\rho - \theta),$$

то

$$D(x, \rho, \theta) = ih_1 + \int_0^x (\rho + \theta + iq_1(s))\varphi(s, \rho)\varphi(s, \theta) ds. \quad (19)$$

ЛЕММА 3. *Справедлива оценка*

$$|D(x, \rho, \theta)| \leq C_x \frac{|\rho| + |\theta| + 1}{|\rho - \theta| + 1} \exp(|\operatorname{Im} \rho|x) \exp(|\operatorname{Im} \theta|x). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (8) следует

$$|\varphi^{(\nu)}(x, \rho)| \leq C|\rho|^\nu \exp(|\operatorname{Im} \rho|x). \quad (21)$$

Фиксируем $\delta_0 > 0$. Пусть $|\rho - \theta| \geq \delta_0$. Используя (18), (21) и равенство

$$\langle \varphi(x, \rho), \varphi(x, \theta) \rangle = \varphi(x, \rho)\varphi'(x, \theta) - \varphi'(x, \rho)\varphi(x, \theta),$$

получаем

$$|D(x, \rho, \theta)| \leq C \frac{|\rho| + |\theta|}{|\rho - \theta|} \exp(|\operatorname{Im} \rho|x) \exp(|\operatorname{Im} \theta|x),$$

что приводит к (20).

Пусть теперь $|\rho - \theta| \leq \delta_0$. Тогда вместо (18) удобнее пользоваться (19). Из (19) и (21) следует

$$\begin{aligned} |D(x, \rho, \theta)| &\leq C(1 + \exp(|\operatorname{Im} \rho|x) \exp(|\operatorname{Im} \theta|x)) \int_0^x (|\rho| + |\theta| + |q_1(s)|) ds \\ &\leq C_x(|\rho| + |\theta| + 1) \exp(|\operatorname{Im} \rho|x) \exp(|\operatorname{Im} \theta|x) \end{aligned}$$

и мы снова приходим к (20).

Обозначим

$$M^\pm(\rho) = \lim_{z \rightarrow 0, \operatorname{Re} z > 0} M(\rho \pm iz), \quad \rho \in \mathbb{R} \setminus \Lambda_\pm.$$

Пусть L и $\tilde{L}$ выбраны так, что при достаточно большом $\rho^* > 0$

$$\int_{|\rho| \geq \rho^*} |\widehat{M}^\pm(\rho)|^2 \rho^4 d\rho < \infty. \quad (22)$$

Отсюда и из (10), в частности, следует, что

$$h_j = \tilde{h}_j, \quad j = 0, 1, \quad (23)$$

и, кроме того, $\widehat{q}_1(0) = 0$. Положим

$$r(x, \rho, \theta) = D(x, \rho, \theta) \widehat{M}(\theta), \quad \tilde{r}(x, \rho, \theta) = \tilde{D}(x, \rho, \theta) \widehat{M}(\theta), \quad (24)$$

и пусть $\gamma = \gamma_{-1} \cup \gamma_0 \cup \gamma_1$ — контур в ρ -плоскости (с обходом против часовой стрелки), где γ_0 — ограниченный замкнутый контур, охватывающий множества $\Lambda_\pm, \tilde{\Lambda}_\pm, \{0\}$ (т.е. $\Lambda_\pm, \tilde{\Lambda}_\pm, \{0\} \subset \text{int } \gamma_0$), а $\gamma_{\pm 1}$ — двусторонний разрез вдоль луча $\{\rho : \pm \rho > 0, \rho \notin \text{int } \gamma_0\}$ (см. рис. 1). Обозначим $J_\gamma = \{\rho : \rho \notin \gamma \cup \text{int } \gamma_0\}$.

Рис. 1

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы соотношения*

$$\Omega(x) \tilde{\varphi}(x, \rho) = \varphi(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tilde{r}(x, \rho, \theta) \varphi(x, \theta) d\theta, \quad (25)$$

$$r(x, \rho, \theta) - \tilde{r}(x, \rho, \theta) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tilde{r}(x, \rho, \xi) r(x, \xi, \theta) d\xi = \Lambda(x) \tilde{\varphi}(x, \rho) \varphi(x, \theta) \widehat{M}(\theta). \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Из (21), (22), (24) и леммы 3 следует, что интегралы в (25), (26) сходятся абсолютно. Рассмотрим контур $\gamma_R := \gamma \cap \{\rho : |\rho| \leq R\}$ с обходом против часовой стрелки, а также контур $\gamma_R^0 := \gamma_R \cup \{\rho : |\rho| = R\}$ с обходом по часовой стрелке и воспользуемся интегральной формулой Коши [21; гл. IV, § 3]

$$P_{1k}(x, \rho) - \Omega(x) \delta_{1k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^0} \frac{P_{1k}(x, \theta) - \Omega(x) \delta_{1k}}{\rho - \theta} d\theta, \quad k = 1, 2,$$

где $x \geq 0, \rho \in \text{int } \gamma_R^0$, а δ_{jk} — символ Кронекера. В силу (23) и леммы 2 имеем

$$P_{1k}(x, \theta) - \Omega(x) \delta_{1k} = O\left(\frac{1}{\theta}\right), \quad |\theta| \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\theta|=R} \frac{P_{1k}(x, \theta) - \Omega(x) \delta_{1k}}{\rho - \theta} d\theta = 0$$

и, следовательно,

$$P_{1k}(x, \rho) = \Omega(x)\delta_{1k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P_{1k}(x, \theta)}{\rho - \theta} d\theta, \quad k = 1, 2, \quad \rho \in J_{\gamma}, \quad x \geq 0. \quad (27)$$

Здесь (и везде в дальнейшем, где необходимо) интеграл понимается в смысле главного значения: $\int_{\gamma} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R}$.

Далее, согласно (11)

$$\varphi(x, \rho) = P_{11}(x, \rho)\tilde{\varphi}(x, \rho) + P_{12}(x, \rho)\tilde{\varphi}'(x, \rho). \quad (28)$$

Подставляя (27) в (28), получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x, \rho) &= \Omega(x)\tilde{\varphi}(x, \rho) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\tilde{\varphi}(x, \rho)P_{11}(x, \theta) + \tilde{\varphi}'(x, \rho)P_{12}(x, \theta)}{\rho - \theta} d\theta, \quad \rho \in J_{\gamma}, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Используя (12), вычисляем

$$\begin{aligned} \varphi(x, \rho) &= \Omega(x)\tilde{\varphi}(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} [\tilde{\varphi}(x, \rho)(\varphi(x, \theta)\tilde{\Phi}'(x, \theta) - \Phi(x, \theta)\tilde{\varphi}'(x, \theta)) \\ &+ \tilde{\varphi}'(x, \rho)(\Phi(x, \theta)\tilde{\varphi}(x, \theta) - \varphi(x, \theta)\tilde{\Phi}(x, \theta))] \frac{d\theta}{\rho - \theta}. \end{aligned}$$

В силу (5) это дает

$$\varphi(x, \rho) = \Omega(x)\tilde{\varphi}(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \theta) \rangle}{\rho - \theta} \widehat{M}(\theta) \varphi(x, \theta) d\theta,$$

так как по теореме Коши [21; гл. IV, § 2] слагаемые с $S(x, \theta)$ и $\tilde{S}(x, \theta)$ обращаются в нуль. Принимая во внимание (18) и (24), приходим к (25), причем равенство (25) верно при всех $x \geq 0$, $\rho \in \mathbb{C}$, так как и слева, и справа стоят целые по ρ функции.

2) Так как

$$\frac{1}{\rho - \theta} \left(\frac{1}{\rho - \xi} - \frac{1}{\theta - \xi} \right) = \frac{1}{(\rho - \xi)(\xi - \theta)},$$

то, пользуясь интегральной формулой Коши и повторяя предыдущие рассуждения, получаем при $x \geq 0$, $\rho, \theta \in J_{\gamma}$:

$$\begin{aligned} \frac{P_{21}(x, \rho) - P_{21}(x, \theta)}{\rho - \theta} &= -\Lambda(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P_{21}(x, \xi)}{(\rho - \xi)(\xi - \theta)} d\xi, \\ \frac{P_{jk}(x, \rho) - P_{jk}(x, \theta)}{\rho - \theta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P_{jk}(x, \xi)}{(\rho - \xi)(\xi - \theta)} d\xi, \quad (j, k) \neq (2, 1). \end{aligned} \quad (29)$$

Пусть $y(x)$ — произвольная гладкая функция. Тогда согласно (29) имеем

$$\frac{P(x, \rho) - P(x, \theta)}{\rho - \theta} \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Lambda(x)y(x) \end{bmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} P(x, \xi) \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} \frac{d\xi}{(\rho - \xi)(\xi - \theta)}. \quad (30)$$

В силу (12)

$$P(x, \rho) \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} = \langle y(x), \tilde{\Phi}(x, \rho) \rangle \begin{bmatrix} \varphi(x, \rho) \\ \varphi'(x, \rho) \end{bmatrix} - \langle y(x), \tilde{\varphi}(x, \rho) \rangle \begin{bmatrix} \Phi(x, \rho) \\ \Phi'(x, \rho) \end{bmatrix}$$

и равенство (30) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{P(x, \rho) - P(x, \theta)}{\rho - \theta} \begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\Lambda(x)y(x) \end{bmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\langle y(x), \tilde{\Phi}(x, \xi) \rangle \begin{bmatrix} \varphi(x, \xi) \\ \varphi'(x, \xi) \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \langle y(x), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle \begin{bmatrix} \Phi(x, \xi) \\ \Phi'(x, \xi) \end{bmatrix} \right) \frac{d\xi}{(\rho - \xi)(\xi - \theta)}. \end{aligned}$$

При $y(x) = \tilde{\varphi}(x, \rho)$ отсюда следует

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{P(x, \rho) - P(x, \theta)}{\rho - \theta} \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x, \rho) \\ \tilde{\varphi}'(x, \rho) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi(x, \theta) \\ \varphi'(x, \theta) \end{bmatrix} \right) \\ = -\Lambda(x)\tilde{\varphi}(x, \rho)\varphi(x, \theta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \rho), \tilde{\Phi}(x, \xi) \rangle}{\rho - \xi} \cdot \frac{\langle \varphi(x, \xi), \varphi(x, \theta) \rangle}{\xi - \theta} \right. \\ \left. - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle}{\rho - \xi} \cdot \frac{\langle \Phi(x, \xi), \varphi(x, \theta) \rangle}{\xi - \theta} \right) d\xi. \end{aligned} \quad (31)$$

Согласно (11)

$$P(x, \rho) \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x, \rho) \\ \tilde{\varphi}'(x, \rho) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(x, \rho) \\ \varphi'(x, \rho) \end{bmatrix}$$

и поэтому

$$\det \left(P(x, \rho) \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x, \rho) \\ \tilde{\varphi}'(x, \rho) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi(x, \theta) \\ \varphi'(x, \theta) \end{bmatrix} \right) = \langle \varphi(x, \rho), \varphi(x, \theta) \rangle. \quad (32)$$

Далее, пользуясь (12) и (6), вычисляем

$$\begin{aligned} P_{11}(x, \rho)\varphi'(x, \rho) - P_{21}(x, \rho)\varphi(x, \rho) &= \tilde{\varphi}'(x, \rho), \\ P_{22}(x, \rho)\varphi(x, \rho) - P_{12}(x, \rho)\varphi'(x, \rho) &= \tilde{\varphi}(x, \rho) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \det \left(P(x, \theta) \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}(x, \rho) \\ \tilde{\varphi}'(x, \rho) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \varphi(x, \theta) \\ \varphi'(x, \theta) \end{bmatrix} \right) &= \tilde{\varphi}(x, \rho)(P_{11}(x, \theta)\varphi'(x, \theta) - P_{21}(x, \theta)\varphi(x, \theta)) \\ &\quad - \tilde{\varphi}'(x, \rho)(P_{22}(x, \theta)\varphi(x, \theta) - P_{12}(x, \theta)\varphi'(x, \theta)) = \langle \tilde{\varphi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \theta) \rangle. \end{aligned} \quad (33)$$

Подставляя (5), (32) и (33) в (31), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\langle \varphi(x, \rho), \varphi(x, \theta) \rangle}{\rho - \theta} - \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \theta) \rangle}{\rho - \theta} \\ = \Lambda(x)\tilde{\varphi}(x, \rho)\varphi(x, \theta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle \tilde{\varphi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \xi) \rangle}{\rho - \xi} \cdot \frac{\langle \varphi(x, \xi), \varphi(x, \theta) \rangle}{\xi - \theta} \widehat{M}(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

так как по теореме Коши слагаемые с $S(x, \xi)$ и $\tilde{S}(x, \xi)$ обращаются в нуль. Умножая обе части последнего равенства на $\widehat{M}(\theta)$ и учитывая (18) и (24), приходим к (26), причем равенство (26) верно при всех $x \geq 0$, $\rho \in \mathbb{C}$. Теорема 2 доказана.

Аналогичным образом доказывается, что при $\rho \in J_\gamma$

$$\Omega(x)\tilde{\Phi}(x, \rho) = \Phi(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\langle \tilde{\Phi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \theta) \rangle}{\rho - \theta} \widehat{M}(\theta) \varphi(x, \theta) d\theta. \quad (34)$$

Заметим, что так как в силу (1)

$$\frac{d}{dx} \langle \tilde{\Phi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \theta) \rangle = (\rho - \theta)(\rho + \theta + i\tilde{q}_1(x)) \tilde{\Phi}(x, \rho) \tilde{\varphi}(x, \theta)$$

и, кроме того,

$$\langle \tilde{\Phi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \theta) \rangle|_{x=0} = -1 + i(\rho - \theta)\tilde{h}_1\tilde{\Phi}(0, \rho),$$

то

$$\frac{\langle \tilde{\Phi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \theta) \rangle}{\rho - \theta} = -\frac{1}{\rho - \theta} + i\tilde{h}_1\widehat{M}(\rho) + \int_0^x (\rho + \theta + i\tilde{q}_1(x)) \tilde{\Phi}(t, \rho) \tilde{\varphi}(t, \theta) dt.$$

Меняя местами L и $\tilde{L}$, получаем симметрично к (25), (26):

$$\Omega(x)\varphi(x, \rho) = \tilde{\varphi}(x, \rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma r(x, \rho, \theta) \tilde{\varphi}(x, \theta) d\theta, \quad (35)$$

$$r(x, \rho, \theta) - \tilde{r}(x, \rho, \theta) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma r(x, \rho, \xi) \tilde{r}(x, \xi, \theta) d\xi = \Lambda(x)\varphi(x, \rho) \tilde{\varphi}(x, \theta) \widehat{M}(\theta). \quad (36)$$

При каждом фиксированном $x \geq 0$ рассмотрим следующие линейные операторы в $C(\gamma)$:

$$\begin{aligned} \tilde{A}y(\rho) &= y(\rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tilde{r}(x, \rho, \theta) y(\theta) d\theta, & \rho \in \gamma, \\ Ay(\rho) &= y(\rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma r(x, \rho, \theta) y(\theta) d\theta, & \rho \in \gamma. \end{aligned} \quad (37)$$

Из (22), (24) и леммы 3 вытекает, что при $\rho \in \gamma$

$$\int_\gamma |\tilde{r}(x, \rho, \theta)| |d\theta| \leq C_x$$

и, следовательно, при каждом фиксированном $x \geq 0$ A и $\tilde{A}$ являются линейными ограниченными операторами в $C(\gamma)$.

ТЕОРЕМА 3. *Справедливы соотношения*

$$\tilde{A}\varphi(x, \rho) = \Omega(x)\tilde{\varphi}(x, \rho), \quad A\tilde{\varphi}(x, \rho) = \Omega(x)\varphi(x, \rho), \quad (38)$$

$$\tilde{A}Ay(\rho) = y(\rho) - \Lambda(x)\tilde{\varphi}(x, \rho) \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \varphi(x, \theta) \widehat{M}(\theta) y(\theta) d\theta, \quad (39)$$

$$A\tilde{A}y(\rho) = y(\rho) - \Lambda(x)\varphi(x, \rho) \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tilde{\varphi}(x, \theta) \widehat{M}(\theta) y(\theta) d\theta. \quad (40)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (38) следует из (25) и (35). Так как согласно (37)

$$\tilde{A}Ay(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left(\tilde{r}(x, \rho, \theta) - r(x, \rho, \theta) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}(x, \rho, \xi) r(x, \xi, \theta) d\xi \right) y(\theta) d\theta,$$

то (39) следует из (26). Аналогично (40) является следствием (36).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что для частного случая уравнения Штурма–Лиувилля (когда $q_1(x) \equiv 0$) имеем $\Omega(x) \equiv 1$, $\Lambda(x) \equiv 0$ и, следовательно, операторы A и $\tilde{A}$ являются взаимно обратными.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Из (38) следует $\tilde{A}A\tilde{\varphi}(x, \rho) = \Omega^2(x)\tilde{\varphi}(x, \rho)$. Сравнивая с (39) и используя (15), получаем полезное соотношение

$$\Lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \varphi(x, \theta) \tilde{\varphi}(x, \theta) \widehat{M}(\theta) d\theta.$$

Обозначим $\omega = \{x : \Omega(x) \neq 0\}$, $\omega_0 = \{x : \Omega(x) = 0\}$.

ТЕОРЕМА 4. 1) Пусть $x \in \omega$. Тогда однородное уравнение

$$\tilde{A}y(\rho) = 0, \quad y(\rho) \in C(\gamma), \quad (41)$$

имеет только нулевое решение.

2) Пусть $x \in \omega_0$. Тогда решения однородного уравнения (41) образуют одномерное подпространство

$$y(\rho) = C\varphi(x, \rho), \quad C = \text{const}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $x \in \omega$ и $y(\rho)$ – решение (41). Тогда $A\tilde{A}y(\rho) = 0$. С другой стороны, согласно (40) имеем

$$A\tilde{A}y(\rho) = y(\rho) - C\varphi(x, \rho)$$

и, следовательно,

$$y(\rho) = C\varphi(x, \rho).$$

Действуя оператором $\tilde{A}$ на обе части этого равенства, получаем

$$C\tilde{A}\varphi(x, \rho) = 0.$$

В силу (38) это дает

$$C\Omega(x)\tilde{\varphi}(x, \rho) = 0.$$

Следовательно, $C = 0$, т.е. $y(\rho) = 0$.

2) Пусть $x \in \omega_0$. Тогда согласно (38) имеем $\tilde{A}\varphi(x, \rho) = 0$ и, следовательно, функции $y(\rho) = C\varphi(x, \rho)$, $C = \text{const}$, являются решениями уравнения (41). С другой стороны, пусть $y_0(\rho)$ – некоторое решение уравнения (41). Тогда $A\tilde{A}y_0(\rho) = 0$. Пользуясь (40), вычисляем

$$0 = A\tilde{A}y_0(\rho) = y_0(\rho) - C\varphi(x, \rho),$$

т.е. $y_0(\rho) = C\varphi(x, \rho)$. Теорема 4 доказана.

Пусть L и $\tilde{L}$ таковы, что $\omega_0 = \emptyset$. Например, это всегда имеет место, если $\hat{q}_1(x)$ вещественна. При каждом фиксированном $x \geq 0$ рассмотрим линейное уравнение в $C(\gamma)$

$$\tilde{\varphi}(x, \rho) = z(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}(x, \rho, \theta) z(x, \theta) d\theta \quad (42)$$

относительно $z(x, \rho)$. Уравнение (42) называется *основным уравнением обратной задачи*. Из теорем 3, 4 вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 5. При каждом фиксированном $x \geq 0$ уравнение (42) имеет единственное решение, а именно $z(x, \rho) = \varphi(x, \rho)/\Omega(x)$.

Так как функция $\varphi(x, \rho)$ является решением уравнения (1), то функция $z(x, \rho) = \varphi(x, \rho)/\Omega(x)$ удовлетворяет уравнению

$$z'' + a(x)z' + (\rho^2 + i\rho q_1(x) + h(x))z = 0, \quad (43)$$

где

$$a(x) = 2\frac{\Omega'(x)}{\Omega(x)}, \quad h(x) = q_0(x) + \frac{1}{2}a'(x) + \frac{1}{4}a^2(x). \quad (44)$$

Для функции $w(x, \rho) = \Phi(x, \rho)/\Omega(x)$ имеем аналогично

$$w'' + a(x)w' + (\rho^2 + i\rho q_1(x) + h(x))w = 0. \quad (45)$$

Перепишем (43) и (45) в виде

$$\begin{aligned} a(x)z' + (i\rho q_1(x) + h(x))z &= -z'' - \rho^2 z, \\ a(x)w' + (i\rho q_1(x) + h(x))w &= -w'' - \rho^2 w. \end{aligned} \quad (46)$$

Кроме того, в силу (34)

$$w(x, \rho) = \tilde{\Phi}(x, \rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\langle \tilde{\Phi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \theta) \rangle}{\rho - \theta} \widehat{M}(\theta) z(x, \theta) d\theta, \quad (47)$$

а тождество (6) принимает вид

$$\langle z(x, \rho), w(x, \rho) \rangle \equiv \Omega^2(x). \quad (48)$$

Опираясь на полученные факты, приходим к следующей процедуре решения обратной задачи 1.

АЛГОРИТМ 1. Дана $M(\rho)$ – функция Вейля пучка L .

- 1) Выбираем $\tilde{L}$ и строим функции $\tilde{\varphi}(x, \rho)$, $\tilde{\Phi}(x, \rho)$, $\tilde{M}(\rho)$ и $\tilde{r}(x, \rho, \theta)$.
- 2) Решая основное уравнение (42), находим $z(x, \rho)$.
- 3) Строим $w(x, \rho)$ и $\Omega^2(x)$ по формулам (47), (48).
- 4) Вычисляем $a(x)$, $q_1(x)$, $h(x)$, решая систему линейных алгебраических уравнений (46) с определителем $\Omega^2(x) \neq 0$.
- 5) Строим $q_0(x)$ и h_j , $j = 0, 1$, используя (44) и (23).

Дадим также другой алгоритм решения обратной задачи 1. Для этого рассмотрим функцию

$$\lambda(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{\varphi}(x, \theta) z(x, \theta) \widehat{M}(\theta) d\theta, \quad (49)$$

где $z(x, \rho)$ – решение основного уравнения (42). Так как $\lambda(x) = \Lambda(x)/\Omega(x)$, то в силу (15)

$$\lambda^2(x) + 1 = \frac{1}{\Omega^2(x)} \neq 0.$$

ТЕОРЕМА 6. *Справедливы следующие соотношения*

$$a(x) = -i\widehat{q}_1(x)\lambda(x), \quad (50)$$

$$i\widehat{q}_1(x) = a(x)\lambda(x) + 2\lambda'(x), \quad (51)$$

$$h(x) = \widetilde{q}_0(x) + c(x), \quad (52)$$

где

$$\begin{aligned} c(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} [(a(x)(\theta + i\widetilde{q}_1(x)) + i\widetilde{q}'_1(x))\widetilde{\varphi}(x, \theta)z(x, \theta) \\ + 2(\theta + i\widetilde{q}_1(x))(\widetilde{\varphi}(x, \theta)z(x, \theta))' + i\widehat{q}_1(x)\widetilde{\varphi}'(x, \theta)z(x, \theta)]\widehat{M}(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (53)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцируя (42) по x дважды, получаем

$$\widetilde{\varphi}'(x, \rho) = z'(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \widetilde{r}(x, \rho, \theta)z'(x, \theta) d\theta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \widetilde{r}'(x, \rho, \theta)z(x, \theta) d\theta, \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}''(x, \rho) = z''(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \widetilde{r}(x, \rho, \theta)z''(x, \theta) d\theta \\ + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \widetilde{r}'(x, \rho, \theta)z'(x, \theta) d\theta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \widetilde{r}''(x, \rho, \theta)z(x, \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (55)$$

Заменяем в (55) $\widetilde{\varphi}''(x, \rho)$ и $z''(x, \rho)$ из дифференциальных уравнений (1) и (43) соответственно:

$$\begin{aligned} -(\rho^2 + i\rho\widetilde{q}_1(x) + \widetilde{q}_0(x))\widetilde{\varphi}(x, \rho) = -a(x)z'(x, \rho) - (\rho^2 + i\rho q_1(x) + h(x))z(x, \rho) \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \widetilde{r}(x, \rho, \theta)[a(x)z'(x, \theta) + (\theta^2 + i\theta q_1(x) + h(x))z(x, \theta)] d\theta \\ + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \widetilde{r}'(x, \rho, \theta)z'(x, \theta) d\theta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \widetilde{r}''(x, \rho, \theta)z(x, \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Далее, заменяем здесь $z(x, \rho)$ и $z'(x, \rho)$ из (42) и (54). Тогда

$$\begin{aligned} - (i\rho\widetilde{q}_1(x) + \widetilde{q}_0(x))\widetilde{\varphi}(x, \rho) = -a(x)\widetilde{\varphi}'(x, \rho) - (i\rho q_1(x) + h(x))\widetilde{\varphi}(x, \rho) \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} a(x)\widetilde{r}'(x, \rho, \theta)z(x, \theta) d\theta + (\rho^2 + i\rho q_1(x))\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \widetilde{r}(x, \rho, \theta)z(x, \theta) d\theta \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \widetilde{r}(x, \rho, \theta)(\theta^2 + i\theta q_1(x))z(x, \theta) d\theta + \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \widetilde{r}'(x, \rho, \theta)z'(x, \theta) d\theta \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \widetilde{r}''(x, \rho, \theta)z(x, \theta) d\theta. \end{aligned} \quad (56)$$

Так как

$$\widetilde{r}(x, \rho, \theta) = \frac{\langle \widetilde{\varphi}(x, \rho), \widetilde{\varphi}(x, \theta) \rangle}{\rho - \theta} \widehat{M}(\theta),$$

то

$$\widetilde{r}'(x, \rho, \theta) = (\rho + \theta + i\widetilde{q}_1(x))\widetilde{\varphi}(x, \rho)\widetilde{\varphi}(x, \theta)\widehat{M}(\theta).$$

Подставляя выражения для $\tilde{r}(x, \rho, \theta)$, $\tilde{r}'(x, \rho, \theta)$ и $\tilde{r}''(x, \rho, \theta)$ в (56) и приводя подобные члены, приходим к равенству

$$A(x)\tilde{\varphi}'(x, \rho) + B(x)\rho\tilde{\varphi}(x, \rho) + C(x)\tilde{\varphi}(x, \rho) = 0, \quad (57)$$

где

$$\begin{aligned} A(x) &= a(x) + i\hat{q}_1(x)\lambda(x), \\ B(x) &= i\hat{q}_1(x) - a(x)\lambda(x) - 2\lambda'(x), \\ C(x) &= h(x) - \tilde{q}_0(x) - c(x) \end{aligned}$$

(слагаемые с $\rho\tilde{\varphi}'(x, \rho)$ сокращаются). Так как (57) верно при всех $\rho \in \mathbb{C}$, то, используя асимптотическую формулу (8), вычисляем $A(x) = B(x) = C(x) = 0$, что равносильно (50)–(52).

Следующая теорема является непосредственным следствием теоремы 6.

ТЕОРЕМА 7. *Коэффициенты пучков L и $\tilde{L}$ связаны соотношениями*

$$q_j(x) = \tilde{q}_j(x) + \varepsilon_j(x), \quad h_j = \tilde{h}_j, \quad j = 0, 1, \quad (58)$$

где

$$\varepsilon_1(x) = -\frac{2i\lambda'(x)}{\lambda^2(x) + 1}, \quad \varepsilon_0(x) = c(x) - \frac{a'(x)}{2} - \frac{a^2(x)}{4}, \quad a(x) = -i\lambda(x)\varepsilon_1(x). \quad (59)$$

В самом деле, из (50) и (51) вытекает

$$i\hat{q}_1(x)(\lambda^2(x) + 1) = 2\lambda'(x)$$

и, следовательно, $\hat{q}_1(x) = \varepsilon_1(x)$. Далее, соотношения (52) и (44) дают

$$q_0(x) + \frac{1}{2}a'(x) + \frac{1}{4}a^2(x) = \tilde{q}_0(x) + c(x),$$

т. е. $\hat{q}_0(x) = \varepsilon_0(x)$.

ЛЕММА 4. *Имеют место равенства*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \theta^j \widehat{M}(\theta) d\theta = 0, \quad j = 0, 1. \quad (60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно определению функции $\varphi(x, \rho)$ имеем

$$\varphi(0, \rho) = 1, \quad \varphi'(0, \rho) = -(i\rho h_1 + h_0). \quad (61)$$

Так как $z(x, \rho) = \varphi(x, \rho)/\Omega(x)$ и в силу (14) $\Omega(0) = 1$, $\Omega'(0) = 0$, то

$$z(0, \rho) = 1, \quad z'(0, \rho) = -(i\rho h_1 + h_0). \quad (62)$$

Взяв в (54) $x = 0$, с учетом (61), (62) и (23) получаем

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}(0, \rho, \theta)(i\theta h_1 + h_0) d\theta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \tilde{r}'(0, \rho, \theta) d\theta = 0. \quad (63)$$

Так как

$$\tilde{r}(0, \rho, \theta) = i\tilde{h}_1 \widehat{M}(\theta), \quad \tilde{r}'(0, \rho, \theta) = (\rho + \theta + i\tilde{q}_1(0)) \widehat{M}(\theta),$$

то, приравнявая в (63) коэффициенты при степенях ρ , вычисляем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \widehat{M}(\theta) d\theta = 0, \quad (h_1^2 + 1) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \theta \widehat{M}(\theta) d\theta = 0. \quad (64)$$

Положим теперь $x = 0$ в (51). Так как $a(0) = \widehat{q}_1(0) = 0$, то $\lambda'(0) = 0$. С другой стороны, в силу (49)

$$\lambda'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} [\tilde{\varphi}'(0, \theta) z(0, \theta) + \tilde{\varphi}(0, \theta) z'(0, \theta)] \widehat{M}(\theta) d\theta. \quad (65)$$

С учетом (23), (61) и (62) это дает

$$ih_1 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \theta \widehat{M}(\theta) d\theta + h_0 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \widehat{M}(\theta) d\theta = 0,$$

что вместе с (64) приводит к (60).

Опираясь на полученные соотношения, приходим к следующему алгоритму решения обратной задачи 1.

АЛГОРИТМ 2. Дана $M(\rho)$ – функция Вейля пучка L .

- 1) Выбираем $\tilde{L}$ и строим функции $\tilde{\varphi}(x, \rho)$ и $\tilde{r}(x, \rho, \theta)$.
- 2) Решая основное уравнение (42), находим $z(x, \rho)$.
- 3) Строим L по формулам (58), где функции $\varepsilon_j(x)$ вычисляются по формулам (59), (53), (50), (49).

§ 3. Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи

В этом параграфе мы сформулируем условия, при которых наперед заданная функция $M(\rho)$ будет функцией Вейля пучка вида (1), (3).

Обозначим через Θ множество функций $M(\rho)$, регулярных в каждой из полуплоскостей $\Pi_{\pm}$, за исключением не более чем счетного ограниченного множества полюсов $\Lambda'_{\pm}$, непрерывных в $\bar{\Pi}_{\pm}$, за исключением ограниченных множеств $\Lambda_{\pm}$ (множества $\Lambda'_{\pm}$, $\Lambda_{\pm}$ свои для каждой функции $M(\rho)$ из Θ), и таких, что при $|\rho| \rightarrow \infty$, $\rho \in \bar{\Pi}_{\pm}$, верно (10).

ТЕОРЕМА 8. Для того чтобы $M(\rho) \in \Theta$ была функцией Вейля для некоторого пучка $L \in V_N$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) (асимптотика) существует $\tilde{L} \in V_N$ такая, что имеет место (22);
- 2) (условие Р) при каждом фиксированном $x \geq 0$ уравнение (42) имеет единственное решение $z(x, \rho) \in C(\gamma)$;
- 3) при $j = 0, 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \theta^j \widehat{M}(\theta) d\theta = 0, \quad \varepsilon_j(x) \in W_{N+j},$$

где $\varepsilon_j(x)$ вычисляются по формулам (59), (53), (49).

При выполнении этих условий пучок L строится по формулам (58).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость* условий теоремы доказана выше. Докажем *достаточность*. Пусть дана функция $M(\rho)$, удовлетворяющая условиям теоремы 8, и пусть $z(x, \rho)$, $x \geq 0$, — решение основного уравнения (42). Известным методом (см., например, [1; гл. I, § 4]) нетрудно получить, что функции $z(x, \rho)$, $z'(x, \rho)$ абсолютно непрерывны по x и при $\nu = 0, 1, 2$ имеют место оценки

$$|z^{(\nu)}(x, \rho)| \leq C_x |\rho|^\nu \exp(|\operatorname{Im} \rho| x).$$

Построим пучок $L = (\ell_\rho, U_\rho)$ вида (1), (3) по формулам (58). Ясно, что $L \in V_N$.

Полагая $x = 0$ в (42) и (54), вычисляем

$$\begin{aligned} z(0, \rho) &= 1 - \frac{h_1}{2\pi} \int_\gamma z(0, \theta) \widehat{M}(\theta) d\theta, \\ z'(0, \rho) &= -(i\rho h_1 + h_0) - \frac{h_1}{2\pi} \int_\gamma z'(0, \theta) \widehat{M}(\theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\rho + \theta + i\tilde{q}_1(0)) \widehat{M}(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (66)$$

Отсюда видно, что $z(0, \rho) = \text{const}$, а $z'(0, \rho)$ линейна по ρ . Тогда в силу (60) интегралы в (66) равны нулю, т.е. функция $z(x, \rho)$ удовлетворяет условиям (62). Аналогично, (49) и (65) дают

$$\lambda(0) = \lambda'(0) = 0. \quad (67)$$

Далее, согласно (58) и (59)

$$a(x) = -i\widehat{q}_1(x)\lambda(x), \quad i\widehat{q}_1(x) = \frac{2\lambda'(x)}{\lambda^2(x) + 1}.$$

Тогда

$$i\widehat{q}_1(x) = -i\widehat{q}_1(x)\lambda^2(x) + 2\lambda'(x),$$

т.е. верны (50) и (51).

Построим функцию $\Omega(x)$ как решение задачи Коши

$$\Omega'(x) = \frac{1}{2}a(x)\Omega(x), \quad \Omega(0) = 1.$$

Тогда $\Omega(x) \neq 0$ и

$$\frac{\Omega'(x)}{\Omega(x)} = \frac{1}{2}a(x), \quad \frac{\Omega''(x)}{\Omega(x)} = \frac{1}{2}a'(x) + \frac{1}{4}a^2(x). \quad (68)$$

Вместе с (50) это, в частности, дает

$$\frac{\Omega'(x)}{\Omega(x)} = -\frac{i}{2}\widehat{q}_1(x)\lambda(x). \quad (69)$$

Положим

$$\Lambda(x) := \lambda(x)\Omega(x). \quad (70)$$

Тогда согласно (67)

$$\Lambda(0) = \Lambda'(0) = 0. \quad (71)$$

Построим

$$h(x) := q_0(x) + \frac{\Omega''(x)}{\Omega(x)}.$$

В силу (68), (58) и (59) имеют место соотношения (44) и (52).

Далее, учитывая (51), (68) и (70), вычисляем

$$i\widehat{q}_1(x) = 2 \frac{\Omega'(x)}{\Omega(x)} \frac{\Lambda(x)}{\Omega(x)} + 2 \frac{\Lambda'(x)\Omega(x) - \Lambda(x)\Omega'(x)}{\Omega^2(x)}$$

и, следовательно,

$$\Lambda'(x) = \frac{i}{2} \widehat{q}_1(x) \Omega(x). \quad (72)$$

Умножая (72) на $-\lambda(x)$ и используя (69), получаем

$$-\lambda(x)\Lambda'(x) = \Omega'(x) \quad (73)$$

и, следовательно,

$$\Omega'(x) = -\frac{i}{2} \widehat{q}_1(x) \Lambda(x). \quad (74)$$

Так как $\Omega(0) = 1$, то согласно (72) и (71)

$$\widehat{q}_1(0) = 0. \quad (75)$$

Умножая (73) на $\Omega(x)$ и учитывая (70), находим

$$\Lambda(x)\Lambda'(x) + \Omega(x)\Omega'(x) = 0,$$

т.е.

$$\frac{d}{dx}(\Lambda^2(x) + \Omega^2(x)) = 0.$$

Так как $\Lambda(0) = 0$, $\Omega(0) = 1$, то имеет место равенство (15).

Построим теперь непрерывную функцию $\widehat{Q}(x)$ из соотношений

$$\Omega(x) - i\Lambda(x) = \exp(\widehat{Q}(x)), \quad \widehat{Q}(0) = 0. \quad (76)$$

С учетом (15) это дает

$$\Omega(x) + i\Lambda(x) = \exp(-\widehat{Q}(x))$$

и, следовательно, имеют место равенства (13). Дифференцируя (76) по x , вычисляем

$$\Omega'(x) - i\Lambda'(x) = \widehat{Q}'(x)(\Omega(x) - i\Lambda(x)).$$

Пользуясь (72) и (74), получаем

$$\left(\frac{1}{2} \widehat{q}_1(x) - \widehat{Q}'(x) \right) (\Omega(x) - i\Lambda(x)) = 0.$$

Вместе с (76) это дает

$$\widehat{Q}(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \widehat{q}_1(t) dt. \quad (77)$$

Положим

$$\varphi(x, \rho) := \Omega(x)z(x, \rho), \quad (78)$$

где $z(x, \rho)$ — решение основного уравнения (42).

Для дальнейшего доказательства теоремы 8 нам потребуются следующие леммы 5–7.

ЛЕММА 5. *Справедливо соотношение*

$$\ell_\rho \varphi(x, \rho) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$z^*(x, \rho) := \ell_\rho^0 z(x, \rho),$$

где

$$\ell_\rho^0 z(x, \rho) := z''(x, \rho) + a(x)z'(x, \rho) + (\rho^2 + i\rho q_1(x) + h(x))z(x, \rho).$$

Используя (42), (54) и (55), вычисляем

$$\begin{aligned} z^*(x, \rho) &= \ell_\rho^0 \tilde{\varphi}(x, \rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tilde{r}(x, \rho, \theta) z''(x, \theta) d\theta - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma a(x) \tilde{r}(x, \rho, \theta) z'(x, \theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\rho^2 + i\rho q_1(x) + h(x)) \tilde{r}(x, \rho, \theta) z(x, \theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \tilde{r}'(x, \rho, \theta) z'(x, \theta) d\theta - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tilde{r}''(x, \rho, \theta) z(x, \theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma a(x) \tilde{r}'(x, \rho, \theta) z(x, \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Добавим и вычтем слагаемое

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\theta^2 + i\theta q_1(x) + h(x)) \tilde{r}(x, \rho, \theta) z(x, \theta) d\theta.$$

Тогда

$$\begin{aligned} z^*(x, \rho) &= \ell_\rho^0 \tilde{\varphi}(x, \rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tilde{r}(x, \rho, \theta) z^*(x, \theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\rho^2 - \theta^2 + i(\rho - \theta)q_1(x)) \tilde{r}(x, \rho, \theta) z(x, \theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{\pi i} \int_\gamma \tilde{r}'(x, \rho, \theta) z'(x, \theta) d\theta - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tilde{r}''(x, \rho, \theta) z(x, \theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma a(x) \tilde{r}'(x, \rho, \theta) z(x, \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Заменяя здесь $\tilde{\varphi}''(x, \rho)$ из дифференциального уравнения и используя равенство

$$(\rho - \theta) \tilde{r}(x, \rho, \theta) = \langle \tilde{\varphi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \theta) \rangle \widehat{M}(\theta),$$

вычисляем

$$\begin{aligned} z^*(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tilde{r}(x, \rho, \theta) z^*(x, \theta) d\theta &= (a(x) + i\hat{q}_1(x)\lambda(x)) \tilde{\varphi}'(x, \rho) \\ &\quad + (i\hat{q}_1(x) - a(x)\lambda(x) - 2\lambda'(x)) \rho \tilde{\varphi}(x, \rho) + (h(x) - \tilde{q}_0(x) - c(x)) \tilde{\varphi}(x, \rho). \end{aligned}$$

С учетом (50)–(52) это дает

$$z^*(x, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \tilde{r}(x, \rho, \theta) z^*(x, \theta) d\theta = 0. \quad (79)$$

Из (79) и условия R теоремы 8 вытекает, что $z^*(x, \rho) = 0$, т.е. $\ell_\rho^0 z(x, \rho) = 0$. Следовательно, $\ell_\rho \varphi(x, \rho) = 0$ и лемма 5 доказана.

Построим теперь функцию $\Phi(x, \rho)$ из соотношения (34).

ЛЕММА 6. *Справедливо соотношение*

$$\ell_\rho \Phi(x, \rho) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждения здесь во многом аналогичны доказательству леммы 5, но вместо условия Р мы будем использовать здесь результат леммы 5.

Для функции $w(x, \rho) = \Phi(x, \rho)/\Omega(x)$ имеет место равенство (47). Дифференцируя (47) по x дважды, получаем

$$\begin{aligned} w'(x, \rho) &= \tilde{\Phi}'(x, \rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\langle \tilde{\Phi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \theta) \rangle}{\rho - \theta} \widehat{M}(\theta) z'(x, \theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\rho + \theta + i\tilde{q}_1(x)) \tilde{\Phi}(x, \rho) \tilde{\varphi}(x, \theta) \widehat{M}(\theta) z(x, \theta) d\theta, \\ w''(x, \rho) &= \tilde{\Phi}''(x, \rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\langle \tilde{\Phi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \theta) \rangle}{\rho - \theta} \widehat{M}(\theta) z''(x, \theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{\pi i} \int_\gamma (\rho + \theta + i\tilde{q}_1(x)) \tilde{\Phi}(x, \rho) \tilde{\varphi}(x, \theta) \widehat{M}(\theta) z'(x, \theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma i\tilde{q}_1'(x) \tilde{\Phi}(x, \rho) \tilde{\varphi}(x, \theta) \widehat{M}(\theta) z(x, \theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\rho + \theta + i\tilde{q}_1(x)) (\tilde{\Phi}(x, \rho) \tilde{\varphi}(x, \theta))' \widehat{M}(\theta) z(x, \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \ell_\rho^0 w(x, \rho) &= \ell_\rho^0 \tilde{\Phi}(x, \rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\langle \tilde{\Phi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \theta) \rangle}{\rho - \theta} [\ell_\theta^0 z(x, \theta) + ((\rho^2 - \theta^2) \\ &\quad + i(\rho - \theta)q_1(x))z(x, \theta)] \widehat{M}(\theta) d\theta \\ &\quad - \frac{a(x)}{2\pi i} \int_\gamma (\rho + \theta + i\tilde{q}_1(x)) \tilde{\Phi}(x, \rho) \tilde{\varphi}(x, \theta) \widehat{M}(\theta) z(x, \theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{\pi i} \int_\gamma (\rho + \theta + i\tilde{q}_1(x)) \tilde{\Phi}(x, \rho) \tilde{\varphi}(x, \theta) \widehat{M}(\theta) z'(x, \theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\rho + \theta + i\tilde{q}_1(x)) (\tilde{\Phi}(x, \rho) \tilde{\varphi}(x, \theta))' \widehat{M}(\theta) z(x, \theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma i\tilde{q}_1'(x) \tilde{\Phi}(x, \rho) \tilde{\varphi}(x, \theta) \widehat{M}(\theta) z(x, \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Заменяя здесь $\tilde{\Phi}''(x, \rho)$ из дифференциального уравнения и используя равенство $\ell_\theta^0 = 0$, вычисляем

$$\begin{aligned} \ell_\rho^0 w(x, \rho) &= (a(x) + i\hat{q}_1(x)\lambda(x))\tilde{\Phi}'(x, \rho) + (i\hat{q}_1(x) - a(x)\lambda(x) - 2\lambda'(x))\rho\tilde{\Phi}(x, \rho) \\ &\quad + (h(x) - \tilde{q}_0(x) - c(x))\tilde{\Phi}(x, \rho). \end{aligned}$$

В силу (50)–(52) это дает $\ell_\rho^0 w(x, \rho) = 0$. Следовательно, $\ell_\rho \Phi(x, \rho) = 0$ и лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. *Имеют место соотношения*

$$\varphi(0, \rho) = 1, \quad U_\rho(\varphi(x, \rho)) = 0, \quad (80)$$

$$\Phi(0, \rho) = M(\rho), \quad U_\rho(\Phi(x, \rho)) = 1, \quad (81)$$

$$\Phi(x, \rho) = O(\exp(\pm i\rho x)), \quad x \rightarrow \infty, \quad \rho \in \Pi_\pm. \quad (82)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\Omega(0) = 1$, $\Omega'(0) = 0$, то из (78) и (62) вытекает, что функция $\varphi(x, \rho)$ удовлетворяет начальным условиям (61) или, что то же самое, условиям (80). Далее, используя (34), вычисляем

$$\Phi(0, \rho) = \tilde{\Phi}(0, \rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\langle \tilde{\Phi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \theta) \rangle}{\rho - \theta} \Big|_{x=0} \widehat{M}(\theta) d\theta, \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \Phi'(0, \rho) &= \tilde{\Phi}'(0, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\langle \tilde{\Phi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \theta) \rangle}{\rho - \theta} \Big|_{x=0} (ih_1\theta + h_0) \widehat{M}(\theta) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\rho + \theta + i\tilde{q}_1(0)) \tilde{\Phi}(0, \rho) \widehat{M}(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (84)$$

Так как

$$\frac{\langle \tilde{\Phi}(x, \rho), \tilde{\varphi}(x, \theta) \rangle}{\rho - \theta} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{\rho - \theta} + ih_1 \tilde{\Phi}(0, \rho),$$

то (83), (84) дают с учетом (60):

$$\Phi(0, \rho) = \tilde{\Phi}(0, \rho) + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\widehat{M}(\theta)}{\rho - \theta} d\theta, \quad (85)$$

$$\Phi'(0, \rho) = \tilde{\Phi}'(0, \rho) - \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(ih_1\theta + h_0) \widehat{M}(\theta)}{\rho - \theta} d\theta. \quad (86)$$

Используя интегральную формулу Коши, получаем

$$\widehat{M}(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R^0} \frac{\widehat{M}(\theta)}{\rho - \theta} d\theta, \quad \rho \in \text{int } \gamma_R^0.$$

Так как в силу (10) и (58)

$$\widehat{M}(\rho) = O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \quad |\rho| \rightarrow \infty, \quad \rho \in \overline{\Pi_\pm}, \quad (87)$$

то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\theta|=R} \frac{\widehat{M}(\theta)}{\rho - \theta} d\theta = 0$$

и, следовательно,

$$\widehat{M}(\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\widehat{M}(\theta)}{\rho - \theta} d\theta, \quad \rho \in J_\gamma.$$

Тогда из (85) вытекает

$$\Phi(0, \rho) = \tilde{\Phi}(0, \rho) + \widehat{M}(\rho) = \widetilde{M}(\rho) + \widehat{M}(\rho) = M(\rho).$$

Кроме того, (85), (86) дают

$$U_\rho(\Phi(x, \rho)) = 1 + \frac{h_1}{2\pi} \int_\gamma \widehat{M}(\theta) d\theta = 1$$

и (81) доказано.

Так как функция $\varphi(x, \rho)$ является решением задачи Коши (1), (61), то по необходимости имеет место оценка (21) и, следовательно,

$$|\varphi(x, \theta)| \leq C, \quad x \geq 0, \quad \theta \in \gamma. \quad (88)$$

Кроме того, в силу леммы 1 для функций $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\Phi}$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}^{(\nu)}(x, \theta)| &\leq C|\theta|^\nu, & x \geq 0, \quad \theta \in \gamma, \\ |\tilde{\Phi}^{(\nu)}(x, \rho)| &\leq C|\rho|^{\nu-1} \exp(-|\operatorname{Im} \rho|x), & x \geq 0, \quad \rho \in \overline{\Pi_\pm}. \end{aligned} \quad (89)$$

Перепишем теперь (34) в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, \rho) &= \Omega(x)\tilde{\Phi}(x, \rho) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\tilde{\Phi}'(x, \rho)\tilde{\varphi}(x, \theta) - \tilde{\Phi}(x, \rho)\tilde{\varphi}'(x, \theta)}{\rho - \theta} \widehat{M}(\theta) \varphi(x, \theta) d\theta, \quad \rho \in J_\gamma. \end{aligned}$$

Фиксируем $\rho \in J_\gamma$. Тогда, используя (87)–(89), а также (13) и (77), вычисляем

$$|\Phi(x, \rho)| \exp(|\operatorname{Im} \rho|x) \leq C \left(1 + \int_{\rho^*}^\infty \frac{d\theta}{\theta|\rho - \theta|} \right) \leq C_1$$

и (82) доказано.

Из лемм 6 и 7 вытекает, в частности, что функция $\Phi(x, \rho)$ является решением Вейля, а функция $M(\rho)$ – функцией Вейля для построенного пучка L . Таким образом, теорема 8 доказана.

§ 4. Обратная задача для волнового уравнения

Рассмотрим следующую задачу Коши для волнового уравнения

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{tt} &= \pm q_1(x)u_t - q_0(x)u, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= 0, & u_t|_{t=0} &= 2\delta(x), \end{aligned} \quad (90)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $q_j(-x) = q_j(x)$, $q_j(x) \in W_1^j(0, \infty)$. Обозначим $r^\pm(t) := u^\pm(0, t)$, где $u^\pm(x, t)$ – решение (90). Функция $r^\pm(t)$ называется следом решения. В этом параграфе исследуется следующая обратная задача.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА 2. По заданным $r^\pm(t)$, $t \geq 0$, найти $q_1(x)$ и $q_0(x)$.

Отметим, что задача Коши (90) равносильна краевой задаче

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{tt} &= \pm q_1(x)u_t - q_0(x)u, & 0 \leq x \leq t, \\ u_x|_{x=0} &= 0, & u(x, x) &= \exp(\mp Q(x)) \end{aligned} \quad (91)$$

и $u(x, t) = 0$ при $0 \leq t < x$, $u(-x, t) = u(x, t)$. Решение задачи (91) $u^\pm(x, t)$ существует, единственно и

$$|u^\pm(x, t)| \leq C \exp(Ct), \quad 0 \leq x \leq t, \quad C = \text{const}. \quad (92)$$

Обозначим

$$\Phi(x, \rho) = - \int_x^\infty u^\pm(x, t) \exp(\pm i \rho t) dt, \quad x \geq 0, \quad \pm \operatorname{Im} \rho > C. \quad (93)$$

ТЕОРЕМА 9. *Функция $\Phi(x, \rho)$ является решением Вейля для пары $L^0 = (\ell_\rho, U^0)$, где $U^0(y) = y'(0)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть для определенности $\rho \in \Pi_+$, и пусть $u := u^+$. Дифференцируя (93) по x дважды, получаем

$$\begin{aligned}\Phi'(x, \rho) &= u(x, x) \exp(i\rho x) - \int_x^\infty u_x(x, t) \exp(i\rho t) dt, \\ \Phi''(x, \rho) &= (i\rho)u(x, x) \exp(i\rho x) + \left(\frac{du(x, x)}{dx} + u_x(x, t)|_{t=x} \right) \exp(i\rho x) \\ &\quad - \int_x^\infty u_{xx}(x, t) \exp(i\rho t) dt.\end{aligned}\tag{94}$$

С другой стороны, интегрируя (93) по частям, вычисляем

$$\begin{aligned}(i\rho)\Phi(x, \rho) &= u(x, x) \exp(i\rho x) + \int_x^\infty u_t(x, t) \exp(i\rho t) dt, \\ (i\rho)^2\Phi(x, \rho) &= (i\rho)u(x, x) \exp(i\rho x) - u_t(x, t)|_{t=x} \exp(i\rho x) \\ &\quad - \int_x^\infty u_{tt}(x, t) \exp(i\rho t) dt.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Phi''(x, \rho) + (\rho^2 + i\rho q_1(x) + q_0(x))\Phi(x, \rho) &= \left(2\frac{du(x, x)}{dx} + q_1(x)u(x, x) \right) \exp(i\rho x) \\ &\quad - \int_x^\infty [u_{xx}(x, t) - u_{tt}(x, t) - q_1(x)u_t(x, t) + q_0(x)u(x, t)] \exp(i\rho t) dt.\end{aligned}$$

В силу (91) правая часть этого равенства обращается в нуль, и, следовательно, функция $\Phi(x, \rho)$ является решением уравнения (1). Далее, из (94) с учетом (91) вытекает

$$\Phi'(0, \rho) = u(0, 0) - \int_0^\infty u_x(x, t)|_{x=0} \exp(i\rho t) dt = 1,$$

т.е. $U^0(\Phi(x, \rho)) = 1$. Наконец, используя (92) и (93), получаем, что при фиксированном ρ , $\text{Im } \rho > C$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(x, \rho) = 0.$$

Следовательно, функция $\Phi(x, \rho)$ является решением Вейля для пары $L^0 = (\ell_\rho, U^0)$. Для $\rho \in \Pi_-$ рассуждения аналогичны.

Обозначим

$$M(\rho) = - \int_0^\infty r^\pm(t) \exp(\pm i\rho t) dt, \quad \pm \text{Im } \rho > C.\tag{95}$$

Так как согласно (93) и (95) $\Phi(0, \rho) = M(\rho)$, то из теоремы 9 следует, что функцией $M(\rho)$ является функцией Вейля для пучка L^0 . Таким образом, обратная задача 2 сводится к обратной задаче 1 восстановления функций q_1 и q_0 по функции Вейля M . Используя полученные в §§ 1–3 результаты, получаем теорему единственности, алгоритм решения, а также необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи 2.

ТЕОРЕМА 10. *Задание следов $r^\pm(t)$, $t \geq 0$, однозначно определяет функции $q_1(x)$ и $q_0(x)$, $x \geq 0$.*

Таким образом, обратная задача 2 имеет не более одного решения. Решение обратной задачи 2 может быть найдено по следующему алгоритму.

АЛГОРИТМ 3. Даны функции $r^\pm(t)$, $t \geq 0$.

- 1) Находим функцию $M(\rho)$ по формуле (95).
- 2) По функции Вейля $M(\rho)$ строим функции $q_1(x)$ и $q_0(x)$, $x \geq 0$, используя алгоритм 1 или алгоритм 2.

Приведем теперь необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи 2.

ТЕОРЕМА 11. *Для того чтобы функции $r^\pm(t)$, $t \geq 0$, были следами решений для (90) с $q_j(x) \in W_{N+j}$, $j = 0, 1$, необходимо и достаточно, чтобы функция $M(\rho)$, определяемая формулой (95), удовлетворяла условиям теоремы 8.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Задания только одного из следов r^+ (или r^-) недостаточно для однозначного определения функций q_1 и q_0 (см. замечание 1). Однако задание r^+ (или r^-) однозначно определяет один из коэффициентов q_1 (или q_0) при условии, что второй априори известен. Данная обратная задача может быть исследована, например, методом эталонных моделей [5], [22].

Список литературы

1. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
2. Марченко В. А. Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1977.
3. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
4. Юрко В. А. Восстановление несамосопряженных дифференциальных операторов на полуоси по матрице Вейля // Матем. сб. 1991. Т. 182. №3. С. 431–456.
5. Yurko V. A. Inverse problems for differential operators and their applications. New York: Gordon and Breach, 2000.
6. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Петроград, 1917.
7. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. №1. С. 11–14.
8. Маркус А. С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. Кишинев: Штиинца, 1986.
9. Шкаликов А. А. О базисности собственных векторов квадратичных операторных пучков // Матем. заметки. 1981. Т. 30. №3. С. 371–385.
10. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Труды сем. им. И. Г. Петровского. №9. М.: Изд-во МГУ, 1983. С. 190–229.
11. Костюченко А. Г., Шкаликов А. А. Самосопряженные квадратичные пучки операторов и эллиптические задачи // Функци. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. №2. С. 38–61.
12. Баранова Е. А. Об обратной задаче спектрального анализа для одного класса задач с параметром в краевых условиях // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. С. 2130–2139.
13. Гасымов М. Г., Гусейнов Г. Ш. Определение оператора диффузии по спектральным данным // Докл. АН Азерб. ССР. 1981. Т. 37. №2. С. 19–23.
14. Юрко В. А. О краевых задачах с параметром в краевых условиях // Изв. АН Арм. ССР. Сер. матем. 1984. Т. 19. №5. С. 398–409.
15. Юрко В. А. Обратная задача для систем дифференциальных уравнений с нелинейной зависимостью от спектрального параметра // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. №3. С. 390–395.

16. *Yamamoto M.* Inverse eigenvalue problem for a vibration of a string with viscous drag // J. Math. Anal. Appl. 1990. V. 152. № 1. P. 20–34.
17. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984.
18. *Romanov V. G., Kabanikhin S. I.* Inverse problems for Maxwell's equations. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht: VSP, 1994.
19. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations. New York: Springer-Verlag, 1998.
20. *Редже Т.* Восстановление потенциала по резонансным параметрам // Сб. переводов. Математика. Т. 7. № 4. М.: ИЛ, 1963. С. 91–100.
21. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1967.
22. *Юрко В. А.* Восстановление дифференциальных операторов высших порядков // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25. № 9. С. 1540–1550.

Саратовский государственный
университет им. Н. Г. Чернышевского
E-mail: yurkova@info.sgu.ru

Поступила в редакцию
22.11.1999