Общероссийский математический портал

В. В. Корниенко, О нелокальной задаче для иррегулярных уравнений, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 11, 21–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm521>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 04:15:37

УДК 517.95

В. В. Корниенко

О нелокальной задаче для иррегулярных уравнений

Изучается распределение на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ спектра

$$\sigma L = P\sigma L \cup C\sigma L \cup R\sigma L$$

оператора L , порожденного замыканием в $H = \mathcal{L}_2(T_1, T_2) \otimes \mathfrak{H}$ иррегулярной операции $a(t)D_t + A$, первоначально заданной на функциях $u(t): [T_1, T_2] \rightarrow \mathfrak{H}$, гладких и удовлетворяющих нелокальным условиям: $\mu \cdot u(T_1) - u(T_2) = 0$. Здесь $a(t) = \sum_{k=1}^2 a_k |t|^{\alpha_k} \chi_k(t)$; $a_k \in \mathbb{C}$, $a_k \neq 0$; $\alpha_k \in \mathbb{R}$; $\chi_k(t)$ – характеристическая функция интервала с концами в точках $0, T_k$; $-\infty < T_1 < 0 < T_2 < +\infty$; $D_t \equiv d/dt$; A – модельный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$; $\mu \in \overline{\mathbb{C}}$, $\mu \neq 0, \infty$.

Библиография: 12 названий.

Введение

Основным объектом, изучаемым в настоящей статье, является дифференциально-операторное уравнение

$$L(D_t, A)u \stackrel{\text{def}}{=} a(t) \cdot D_t u + Au = f, \quad (1)$$

рассматриваемое при граничном условии

$$\mu \cdot u(T_1) - u(T_2) = 0, \quad \mu \in \overline{\mathbb{C}}. \quad (2)$$

Здесь D_t – операция дифференцирования по переменной t , принадлежащей конечному отрезку $\overline{V}_t$, $V_t \equiv (T_1, T_2)$, $-\infty < T_1 < 0 < T_2 < +\infty$, вещественной оси, а оператор $A: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$, коммутирующий с D_t , действует в некотором комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и удовлетворяет соответствующим требованиям (достаточно жестким), формулируемым в терминах спектральной теории операторов (см. п. 2.1). Комплексная функция $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $a = a(t)$, имеет вид

$$a(t) = \sum_{k=1}^2 a_k |t|^{\alpha_k} \chi_k(t), \quad (3)$$

где a_k и α_k – произвольные ($a_k \neq 0$) комплексные и вещественные числа соответственно: $a_k \in \mathbb{C}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$, а $\chi_k = \chi_k(t)$ является характеристической функцией интервала V_t^k с концами в точках $0, T_k$:

$$\chi_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in V_t^k; \\ 0, & \text{если } t \notin V_t^k. \end{cases}$$

“Абстрактное” уравнение (1) находит широкое применение при исследовании в цилиндре задач сопряжения, например для уравнений, меняющих тип, уравнений классических типов с разрывными коэффициентами, а также уравнений, вырождающихся внутри рассматриваемой области. В дальнейшем, как это будет следовать из постановки задачи, условиями сопряжений для нас будут условия гладкости решения при $t = 0$.

Условия (2), задающие связь между значениями неизвестной функции $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{H}$ в различных точках границы, т.е. при $\mu \neq 0$ и при $\mu \neq \infty$ ¹, принято называть *нелокальными* [1]; условия (2) при $\mu = 0$ либо при $\mu = \infty$ называют условиями Коши. Поэтому задачу (1)–(2) называют также *нелокальной задачей*, если $\mu \neq 0$, $\mu \neq \infty$, и задачей Коши, если $\mu = 0$ либо $\mu = \infty$, для уравнения (1).

Пусть $H_t \equiv H(V_t)$ – гильбертово пространство комплекснозначных функций $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ с интегрируемым квадратом над V_t . Задачу (1)–(2) будем изучать в гильбертовом пространстве H , являющемся тензорным произведением гильбертовых пространств H_t и $\mathfrak{H}$, т.е. в $H \stackrel{\text{def}}{=} H_t \otimes \mathfrak{H}$. Нас будет интересовать функциональная зависимость спектральных свойств задачи (1)–(2) от ее параметров, т.е. от μ , α_1 , α_2 , a_1 , a_2 , A . Спектральные характеристики задачи Коши для уравнения (1) ранее были исследованы в [2]. Мы рассматриваем нелокальную задачу. Результаты проведенных исследований будут описаны в терминах спектра соответствующего ей оператора $L: H \rightarrow H$, $L = L(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2, A)$. Говоря о спектре σL оператора L , мы придерживаемся терминологии, принятой в [3]. Через ρL , $P\sigma L$, $C\sigma L$, $R\sigma L$ обозначим соответственно резольвентное множество, точечный, непрерывный и остаточный спектры оператора L .

Уравнение (1), изучаемое в статье, является сильно иррегулярным по классификации, предложенной в [4]. Отметим работу [5], в которой исследовалось соответствующее слабо иррегулярное уравнение. А точнее, уравнение (1), в котором $a = 1$, а операторнозначная функция $A = A(t)$ претерпевает “разрыв первого рода” в точке $t = 0$. Целесообразность сравнительного изучения спектральных характеристик граничных задач для соответствующих друг другу иррегулярных уравнений ранее была отмечена в [4].

Уравнение (1) является предметом многочисленных исследований при изучении вопросов теории граничных задач. Зачастую исследуется задача Коши. При этом условия, налагаемые на оператор A , различны (производящий оператор полугруппы, M -оператор, симметрический положительный оператор и т.д.) и определяются как методом, так и целью исследований. Имеются также работы, в которых уравнение (1) рассматривается при условии вида (2). Особенностью настоящей работы (относительно известных автору) является либо требование, налагаемое на функцию $a(t)$ или оператор A , либо использование языка спектральной теории линейных операторов при изучении свойств задачи (1)–(2).

Что касается метода, с помощью которого велось изучение уравнения (1), то соответствующие исследования в [1] привели к естественной классификации задач (1)–(2) в случае $a = 1$. В [4] в связи с проблемами, возникающими при изучении спектра уравнений, меняющих тип, и ряда других примыкающих вопросов (см., например, [6]), рассматривались, в частности, спектральные свойства оператора L при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. В дальнейшем соответствующие исследования были продолжены в [7].

¹Запись $\mu = \infty$ используется для обозначения граничного условия $u(T_1) = 0$ в (2).

Метод модельных операторов, используемый нами при изучении оператора L , позволяет рассмотреть вначале одномерный случай, т.е. исследовать спектральные свойства оператора $L_s: H_t \rightarrow H_t$, порожденного соответствующей задачей для (операции $L_s(D_t) \stackrel{\text{def}}{=} a(t) \cdot D_t + A(s)$) уравнения (1), в котором A – умножение на постоянную $A(s) \in \mathbb{C}$; s – “номер”, приписываемый проекции уравнения (1) в подпространство H_s (см. §2) пространства H . В этом случае ряд недостаточно исследованных явлений, связанных с рассматриваемым уравнением, удастся исследовать в определенном смысле до конца. Развита в [1] техника изучения свойств оператора L , опирающаяся на свойства цепочки операторов L_s , $s \in S$, где S – набор индексов, нумерующих проекции (см. §2), позволит в дальнейшем сформулировать спектральные свойства оператора L .

Перейдем непосредственно к изложению результатов. Рассмотрим вначале одномерный случай.

§1. Одномерный случай

1.1. Пространства W_a . Пусть $V_t^\pm = V_t^1 \cup V_t^2$, $\mathfrak{D}_t$ – линейное многообразие гладких функций из H_t , удовлетворяющих условию (2), т.е.

$$\mathfrak{D}_t = \{v : (v \in C^1(V_t^\pm) \cap C(\overline{V}_t)) \wedge (\mu \cdot v(T_1) - v(T_2) = 0)\}. \quad (4)$$

Обозначим через C_a линейное многообразие функций v из $\mathfrak{D}_t$, для которых $aD_tv \in H_t$. Пополнение C_a по норме, порождаемой скалярным произведением $\{v, w\}_a = (aD_tv, aD_tw) + (v, w)$, где $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в H_t , обозначим символом W_a . В дальнейшем если $a = 1$, то индекс a будем опускать, т.е. $C = C_1$, $W = W_1$ и т.д.

ЛЕММА 1. *Элементы W представимы абсолютно непрерывными над $\overline{V}_t$ функциями, удовлетворяющими условию (2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементами W являются классы эквивалентных функций. Известно [8], [9], что в каждом классе найдется функция $v = v(t)$, абсолютно непрерывная над $\overline{V}_t$. Покажем, что v удовлетворяет условию (2). При $\mu \neq 1$ равенство (2) непосредственно вытекает из представления $v(t)$:

$$v(t) = \begin{cases} \frac{\mu}{\mu-1} \int_{T_1}^t D_\tau v(\tau) d\tau - \frac{1}{\mu-1} \int_{T_2}^t D_\tau v(\tau) d\tau, & \text{если } \mu \neq 1, \\ \int_{T_1}^t D_\tau v(\tau) d\tau + v(T_1), & \text{если } \mu = 1, \end{cases} \quad (5)$$

а при $\mu = 1$ необходимо дополнительно воспользоваться ортогональностью в пространстве H_t производной D_tv и постоянной.

Пусть $|v, \mathfrak{B}|$ – норма элемента v , рассматриваемого в конкретном пространстве $\mathfrak{B}$. Пусть также $V_t^{\varepsilon_1} = (T_1, \varepsilon_1)$, $V_t^{\varepsilon_2} = (\varepsilon_2, T_2)$, причем $T_1 < \varepsilon_1 < 0 < \varepsilon_2 < T_2$. Нормы, порождаемые скалярными произведениями $\{v, w\}$ и $\{v, w\}_a$, рассматриваемыми над $V_t^{\varepsilon_k}$, очевидно, эквивалентны. Следовательно, изучение свойств элементов гильбертова пространства W_a сводится к изучению поведения “присоединенных” элементов в окрестности точки $t = 0$.

ЛЕММА 2. Элементы W_a представимы функциями, абсолютно непрерывными над $V_t^{\varepsilon_k}$, $k = 1, 2$. При $\alpha_1 < \frac{1}{2}$ и $\alpha_2 < \frac{1}{2}$ эти функции абсолютно непрерывны над $\bar{V}_t$ и удовлетворяют условию (2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания, сделанного выше, в доказательстве нуждается лишь вторая часть леммы. Пусть $\alpha_1 < \frac{1}{2}$ и $\alpha_2 < \frac{1}{2}$. Считая, что $v \in C_a$, можем записать

$$\left| \int_{T_1}^{T_2} D_t v dt \right|^2 \leq \int_{T_1}^{T_2} \frac{dt}{|a(t)|^2} \cdot |v, W_a|^2, \quad (6)$$

откуда в силу плотности C_a в W_a следует справедливость представления (5) для любой $v \in W_a$. Дальнейший ход доказательства – как лемме 1.

Неравенство (6) и вытекающее из него представление (5) показывают, что при $\alpha_1 < \frac{1}{2}$ и $\alpha_2 < \frac{1}{2}$ элементы W_a удерживают условие непрерывности в точке $t = 0$. В то же время при $\alpha_1 \geq \frac{1}{2}$ или $\alpha_2 \geq \frac{1}{2}$ в W_a существуют функции, претерпевающие разрыв в точке $t = 0$. Например, при $\alpha_2 \geq \frac{1}{2}$ таким элементом может служить функция

$$v(t) = \begin{cases} \ln \left| \ln \frac{e}{T_2} t \right|, & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t \leq 0. \end{cases}$$

Вполне естественное обобщение приведенного примера дает следующая лемма.

ЛЕММА 3. Пусть функция $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $v = v(t)$, такова, что $v \in H_t \cap C(\bar{V}_t \setminus \{0\}) \cap C^1(V_t^\pm)$, $aD_t v \in H_t$ и $\mu v(T_1) - v(T_2) = 0$. Тогда высказывания

$$\left(\alpha_1 > \frac{1}{2} \right) \wedge \left(\alpha_2 > \frac{1}{2} \right) \Rightarrow (v \in W_a),$$

$$\left(\alpha_1 > \frac{1}{2} \right) \wedge \left(\exists \lim_{t \rightarrow +0} v(t) \right) \vee \left(\exists \lim_{t \rightarrow -0} v(t) \right) \wedge \left(\alpha_2 > \frac{1}{2} \right) \Rightarrow (v \in W_a)$$

истинны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(\alpha_1 > \frac{1}{2}) \wedge (\alpha_2 > \frac{1}{2})$. Положим $v_n = v_n(t)$ при $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$v_n(t) = v(t) \cdot \begin{cases} 1 - (n|t| - 1)^2, & \text{если } |t| \in [0, 1/n], \\ 1, & \text{если } |t| \notin [0, 1/n]. \end{cases}$$

Ясно, что $\forall n \ v_n \in C_a$. Кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |aD_t(v_n - v), H_t| = \lim_{n \rightarrow \infty} |v_n - v, H_t| = 0, \quad (7)$$

а последовательность $\{v_n\}$ фундаментальна в W_a . Отождествив соответствующий ей предельный элемент с функцией $v = v(t)$ (что естественно в силу определения нормы в W_a и равенства (7)), получим включение $v \in W_a$.

Пусть $(\alpha_1 > \frac{1}{2}) \wedge (\exists \lim_{t \rightarrow +0} v(t))$. Полагая $v(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} v(t)$, $v_n = v_n(t)$,

$$v_n(t) = \begin{cases} v(t) + (nt + 1)^2 \cdot (v(+0) - v(t)), & \text{если } t \in [-1/n, 0], \\ v(t), & \text{если } t \notin [-1/n, 0], \end{cases}$$

при $n = 1, 2, 3, \dots$, последовательно, как и ранее, получаем включения $v_n \in C_a$, равенства (7) и включение $v \in W_a$.

Доказательство истинности высказывания $(\exists \lim_{t \rightarrow -0} v(t)) \wedge (\alpha_2 > \frac{1}{2}) \Rightarrow (v \in W_a)$ проводится аналогично.

Пусть $\alpha_1^1 < \alpha_1^2$, $\alpha_2^1 < \alpha_2^2$. Тогда, очевидно, $W_{a^1} \subset W_{a^2}$. Кроме того, вложение $W_a \subset H_t$ справедливо для любой функции a .

ЛЕММА 4. При $\alpha_1 < \frac{1}{2}$ и $\alpha_2 < \frac{1}{2}$ вложение $W_a \subset H_t$ вполне непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считая $v \in C_a$, можем записать

$$|v(t+h) - v(t)|^2 \leq \left| \int_t^{t+h} \frac{d\tau}{|a(\tau)|^2} \right| \cdot |v, W_a|^2.$$

Интегрируя последнее неравенство, получаем оценку

$$|v(t+h) - v(t), H_t|^2 \leq C|h|^\beta \cdot |v, W_a|^2,$$

где C и β — некоторые положительные постоянные, не зависящие от v . В силу плотности C_a в W_a полученное неравенство дает требуемую равностепенную непрерывность в целом [8].

1.2. Обобщенное решение. Перейдем теперь к изучению уравнения

$$L_s(D_t)v \stackrel{\text{def}}{=} a \cdot D_tv + A(s)v = g, \quad v, g \in H_t. \quad (8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обобщенным решением уравнения (8) назовем элемент $v \in W_a$ такой, что справедливо равенство

$$|a \cdot D_tv + A(s)v - g, H_t| = 0. \quad (9)$$

Определение (9) обобщенного решения уравнения (8) задает, как обычно, некоторый оператор $L_s: H_t \rightarrow H_t$. Элемент $v \in H_t$ принадлежит области определения $\mathfrak{D}(L_s)$ оператора L_s и $L_sv = g$, если $v \in W_a$ и (в H_t) имеет место равенство $L_s(D_t)v = g$. Изучим функциональную зависимость спектра σL_s оператора $L_s(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2)$ от параметров $\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2$ рассматриваемой задачи.

ЛЕММА 5. Элемент $v \in H_t$ является обобщенным решением уравнения (8) тогда и только тогда, когда найдется последовательность $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ функций $v_n = v_n(t)$ из $\mathfrak{D}_t$ (см. (4)) такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |v_n - v, H_t| = \lim_{n \rightarrow \infty} |L_s(D_t)v_n - g, H_t| = 0. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть v — решение уравнения (8). Тогда существует последовательность $\{v_n\}$ функций $v_n = v_n(t)$ из C_a такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |v_n - v, W_a| = 0$. Теперь из неравенства

$$\max\{|v_n - v, H_t|, |L_s(D_t)v_n - g, H_t|\} \leq (1 + |A(s)|) \cdot |v_n - v, W_a|$$

следует равенство (10). Необходимость доказана.

Достаточность. В силу (10) последовательности

$$\{v_n\}, \quad \{L_s(D_t)v_n\} \quad (11)$$

фундаментальны в H_t . Значит, последовательность $\{v_n\}$ фундаментальна в W_a и $\lim_{n \rightarrow \infty} |v_n - v, W_a| = 0$. Неравенство

$$|L_s(D_t)v - g, H_t| \leq (1 + |A(s)|) \cdot |v_n - v, W_a| + |L_s(D_t)v_n - g, H_t|$$

завершает доказательство.

Следующая лемма 6 и замечание, сделанное после леммы 2, позволяют судить о гладкости обобщенного решения уравнения (8).

ЛЕММА 6. Оператор L_s замкнут и $\mathfrak{D}(L_s) = W_a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, в проверке нуждается лишь вложение $W_a \subset \mathfrak{D}(L_s)$. Пусть $v \in W_a$, $\{v_n\} \subset C_a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} |v_n - v, W_a| = 0$. Из неравенства

$$\max\{|v_n, H_t|, |L_s(D_t)v_n, H_t|\} \leq (1 + |A(s)|) \cdot |v_n, W_a|$$

следует фундаментальность последовательностей (11) в H_t . Так как H_t полно, то найдется элемент $g \in H_t$ такой, что справедливы равенства (10). Осталось воспользоваться леммой 5.

Следующее предложение (лемма 7) выясняет структуру собственных функций оператора L_s . Расположение собственных значений, соответствующих им, будет выяснено в следующем пункте статьи, посвященном исследованию спектра оператора L_s .

ЛЕММА 7. Собственная функция $v_\varrho = v_\varrho(t)$ оператора L_s , соответствующая собственному значению $\lambda = \lambda_{\varrho, s}$,

$$\lambda_{\varrho, s} = \varrho + A(s), \quad (12)$$

имеет вид

$$v_\varrho(t) = \begin{cases} \exp\{\varrho J(T_1, t)\}, & \text{если } t < 0, \\ \mu \exp\{\varrho J(T_2, t)\}, & \text{если } t > 0, \end{cases} \quad (13)$$

$$\text{где } J(\tau, t) = \int_\tau^t \frac{d\xi}{a(\xi)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $L_s v_\varrho = \lambda v_\varrho$, то $v_\varrho \in W_a$. Следовательно, v_ϱ абсолютно непрерывна на $\overline{V}_t^{\varepsilon k}$, $k = 1, 2$, и $L_s(D_t)v_\varrho(t) = \lambda v_\varrho(t)$ для почти всех $t \in V_t$. Отсюда $v_\varrho \in C^1(V_t^\pm)$, т.е. v_ϱ – решение обыкновенного дифференциального уравнения $a \cdot D_t v = \varrho \cdot v$ для всех $t \in V_t^1$ и $t \in V_t^2$. Учитывая, что $v_\varrho(t)$ удовлетворяет условию (2), получаем выписанное представление.

Из лемм 6, 7 вытекает, что собственные функции оператора L_s могут иметь в точке $t = 0$ разрыв первого рода при $\alpha_1 < 1$ или $\alpha_2 < 1$ и разрыв второго рода при $\alpha_1 \geq 1$ или $\alpha_2 \geq 1$. Соответствующие примеры будут приведены при изучении точечного спектра $P\sigma L_s$ оператора L_s .

Выясним теперь структуру функций, образующих ядро $\text{Ker}(L_s - \lambda)^*$ оператора $(L_s - \lambda)^*$, сопряженного [10; гл. I, §1, п. 1.3] с оператором $L_s - \lambda$. Пусть C_a^T – линейное многообразие функций $w = w(t)$ из $C^1(V_t^\pm)$, удовлетворяющих условиям:

$$aw \in C(\overline{V}_t), \quad D_t(aw) \in H_t, \quad \overline{aw(T_1)} - \mu \overline{aw(T_2)} = 0.$$

Пополнение C_a^T ($\mu \neq 0, \infty$) по норме, порождаемой скалярным произведением $\{v, w\}_a^T = (D_t(av), D_t(aw)) + (v, w)$, обозначим символом W_a^T . Элементы из W_a^T представимы функциями $w = w(t)$, для которых произведение aw абсолютно непрерывно на $\overline{V}_t$ и выполнено соответствующее граничное условие. Пусть L_s^T – замыкание в H_t операции $L_s^T(D_t)$,

$$L_s^T(D_t)w = -D_t(\overline{aw}) + \overline{A(s)}w,$$

первоначально заданной на функциях $w = w(t) \in C_a^T$. Тогда $\mathfrak{D}(L_s^T) = W_a^T$. Кроме того, собственная функция $w_\varrho = w_\varrho(t)$ оператора L_s^T , соответствующая собственному значению $\lambda^T = \bar{\varrho} + \overline{A(s)}$, имеет вид

$$w_\varrho(t) = \frac{1}{a(t)} \cdot \begin{cases} \bar{\mu} \exp\{\overline{\varrho J(t, T_1)}\}, & \text{если } t < 0, \\ \exp\{\varrho J(t, T_2)\}, & \text{если } t > 0. \end{cases} \quad (13^*)$$

Пусть теперь $\lambda \notin P\sigma L_s$. Выпишем явные выражения, дающие решение уравнения

$$L_s v = \lambda v + g, \quad v, g \in H_t. \quad (14)$$

Формально они могут быть записаны единообразно в виде

$$v(t) = \int_{T_1}^{T_2} G_s(\tau, t, \lambda) g(\tau) d\tau, \quad (15)$$

где $G_s(\tau, t, \lambda)$ — функция Грина оператора $L_s - \lambda$. Однако структура функции Грина в (15) существенно зависит от функции $a(t)$. А точнее, от параметров α_1, α_2 . При $\alpha_1 < \frac{1}{2}$ и $\alpha_2 < \frac{1}{2}$ будем иметь

$$G_s(\tau, t, \lambda) = \frac{\exp\{\varrho J(\tau, t)\}}{\Delta(\varrho)a(\tau)} \cdot \begin{cases} \mu, & \text{если } T_1 \leq \tau \leq t \leq T_2, \\ \exp\{\varrho J\}, & \text{если } T_1 \leq t \leq \tau \leq T_2. \end{cases} \quad (16)$$

Как здесь, т.е. в (16), так и в дальнейшем,

$$\varrho = \lambda - A(s), \quad J(\tau, t) = \int_\tau^t \frac{d\xi}{a(\xi)}, \quad \Delta(\varrho) = \mu - \exp\{\varrho J\}, \quad J = J(T_1, T_2).$$

Отметим, что ниже будет использована и другая форма записи функции Грина (16) при $\alpha_1 < \frac{1}{2}$ и $\alpha_2 < \frac{1}{2}$.

В остальных случаях функцию Грина удобно представить исходя из интегрального представления (15) решения уравнения (14). Например, при $\alpha_1 \geq 1$ и $\alpha_2 < 1$ справедливо равенство

$$v(t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{\exp\{\varrho J(\tau, t)\}}{a(\tau)} g(\tau) d\tau, & t < 0, \\ \mu \int_0^{T_1} \frac{\exp\{\varrho(J(\tau, T_1) + J(T_2, t))\}}{a(\tau)} g(\tau) d\tau \\ \quad + \int_{T_2}^t \frac{\exp\{\varrho J(\tau, t)\}}{a(\tau)} g(\tau) d\tau, & t > 0. \end{cases} \quad (17)$$

При $\alpha_1 < 1$ и $\alpha_2 \geq 1$ будем иметь

$$v(t) = \begin{cases} \int_0^{T_2} \frac{\exp\{\varrho(J(\tau, T_2) + J(T_1, t))\}}{a(\tau)} g(\tau) d\tau \\ \quad + \int_{T_1}^t \frac{\exp\{\varrho J(\tau, t)\}}{a(\tau)} g(\tau) d\tau, & t < 0, \\ \mu \int_0^t \frac{\exp\{\varrho J(\tau, t)\}}{a(\tau)} g(\tau) d\tau, & t > 0. \end{cases} \quad (18)$$

Наконец, при $\alpha_1 \geq 1$ и $\alpha_2 \geq 1$ справедливо либо представление (17), либо представление (18), либо нижеследующее:

$$v(t) = \int_0^t \frac{\exp\{\varrho J(\tau, t)\}}{a(\tau)} g(\tau) d\tau. \quad (19)$$

Отметим, что структура решения уравнения (14) при $\alpha_1 \geq 1$ и $\alpha_2 \geq 1$ зависит также и от младшей части. В данном случае – от спектрального параметра λ .

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Формулы (16)–(19) приводят к выделению подмножеств $\mathcal{A}_k$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$, множества точек плоскости α :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \left\{ \alpha : \left(\alpha_1 < \frac{1}{2} \right) \wedge \left(\alpha_2 < \frac{1}{2} \right) \right\}, & \mathcal{A}_2 &= \{ \alpha : (\alpha_1 < 1) \wedge (\alpha_2 < 1) \} \setminus \mathcal{A}_1, \\ \mathcal{A}_3 &= \{ \alpha : (\alpha_1 \geq 1) \wedge (\alpha_2 < 1) \}, & \mathcal{A}_4 &= \{ \alpha : (\alpha_1 < 1) \wedge (\alpha_2 \geq 1) \}, \\ \mathcal{A}_5 &= \{ \alpha : (\alpha_1 \geq 1) \wedge (\alpha_2 \geq 1) \}. \end{aligned}$$

1.3. Нелокальная задача; спектр оператора $L_s = L_s(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2)$, $\mu \neq 0, \infty$. Зависимость свойств решений уравнения (8) от значений параметров α_1, α_2 отмечена в предыдущем пункте. Здесь будет изучено влияние параметров задачи (1)–(2) на качественную характеристику спектра соответствующего ей оператора L_s . При этом зависимость структуры спектра оператора L_s от параметров $\alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2$ и “младшей” части $A(s)$ операции $L_s(D_t)$ будет отражена в выписанных формулах. Отметим, что соответствующие эффекты для случая “вырождения уравнения эллиптического типа на границе области”, по-видимому, впервые были отмечены в [11].

Структура спектра M -оператора, очевидно, является одной из наиболее простых. В связи с этим удобно назвать qM -оператором (квази- M -оператором) замкнутый оператор $L: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ с плотной областью определения, структура спектра которого аналогична структуре спектра M -оператора (см. ниже теорему 1). При этом собственные функции qM -оператора, возможно, не образуют даже полной системы в $\mathfrak{H}$. Если L является qM -оператором в $\mathfrak{H}$, то будем писать $L \in qM(\mathfrak{H})$ или коротко $L \in qM$. Аналогичная запись будет использована для других классов операторов, т.е. M -операторов, C -операторов, qC -операторов, V -операторов, BH -операторов [10; гл. I, §3]. Исследование структуры спектра оператора L (или ему обратного L^{-1}), $L \in M$, $L \in qM$, $L \in BH$, сводится, очевидно, к изучению точечного спектра оператора L или L^{-1} (теорема о связи спектров данного и обратного операторов).

Введем некоторые соглашения. Пусть $P, Q \subset \mathbb{C}$. Обозначим через $\overset{\circ}{P}$ внутренние точки множества P . По определению $P + Q = \{z : \exists p \in P, \exists q \in Q (z = p + q)\}$. Аналогично задаются множества $P \cdot Q$, $P - Q$, $\frac{P}{Q}$ ($\forall q \in Q, q \neq 0$). Введем также подмножества $\mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}_-$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{C}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{z : \operatorname{Re} z > 0\}, \quad \mathbb{C}_- \stackrel{\text{def}}{=} \{z : \operatorname{Re} z < 0\},$$

используемые ниже для описания спектра σL_s оператора $L_s = L_s(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2)$, $\mu \neq 0, \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\alpha \in \mathcal{A}_1$. При выполнении условия $J = 0$ либо (при $\mu = 1$) точечный спектр $P\sigma L_s$ оператора $L_s = L_s(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2)$, $\mu \neq 0, \infty$, совпадает с множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$, либо (при $\mu \neq 1$) каждая (конечная) точка плоскости $\mathbb{C}$ принадлежит его резольвентному множеству ρL_s . В противном случае, т.е. при $J \neq 0$, для оператора L_s справедливы следующие равенства:

$$\rho L_s = \mathbb{C} \setminus P\sigma L_s, \quad P\sigma L_s = \mathbb{Z}_\mu + A(s), \quad \mathbb{Z}_\mu \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\ln|\mu| + i \arg \mu + i2\pi\mathbb{Z}}{J(T_1, T_2)}.$$

Коротко:

$$\begin{aligned} (\alpha \in \mathcal{A}_1) \wedge (J = 0) \wedge (\mu = 1) &\Rightarrow (L_s \in qM) \wedge (P\sigma L_s = \mathbb{C}), \\ (\alpha \in \mathcal{A}_1) \wedge (J = 0) \wedge (\mu \neq 1) &\Rightarrow (L_s \in qC), \\ (\alpha \in \mathcal{A}_1) \wedge (J \neq 0) &\Rightarrow (L_s \in qM) \wedge (P\sigma L_s = \mathbb{Z}_\mu + A(s)). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Числу $\lambda_{\varrho, s}$ вида (12), где $\varrho \in \mathbb{C}$, соответствует функция (13) в том смысле, что она удовлетворяет условию (2) и обыкновенному дифференциальному уравнению $L_s(D_t)v(t) = \lambda_{\varrho, s}v(t)$ для всех $t \in V_t^\pm$. Функция (13), соответствующая числу (12), не является, вообще говоря, абсолютно непрерывной над $\overline{V}_t$. Следовательно, в силу леммы 2 не каждое число (12) является собственным значением оператора L_s . Условие абсолютной непрерывности функции (13) над $\overline{V}_t$ равносильно непрерывности этой функции в точке $t = 0$. Реализовав непрерывность функции (13) в точке $t = 0$ выбором комплексного числа ϱ в (12):

$$\varrho \in \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } (J = 0) \wedge (\mu = 1), \\ \mathbb{Z}_\mu, & \text{если } (J \neq 0), \end{cases}$$

получим собственную функцию (13) оператора L_s , соответствующую его собственному значению (12).

Пусть

$$\lambda \in \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } (J = 0) \wedge (\mu \neq 1), \\ \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Z}_\mu + A(s)\}, & \text{если } (J \neq 0). \end{cases}$$

Тогда $\lambda \notin P\sigma L_s$, а резольвента $R_{\lambda, s} = R_\lambda(L_s) = (L_s - \lambda)^{-1}$ оператора L_s имеет вид

$$R_{\lambda, s} = \frac{\mu \cdot R_{\lambda, s}^1 - \exp\{\varrho J(T_1, T_2)\} \cdot R_{\lambda, s}^2}{\mu - \exp\{\varrho J(T_1, T_2)\}}, \quad (20)$$

где $R_{\lambda, s}^1$ ($R_{\lambda, s}^2$) – резольвента оператора L_s , порожденного “прямой” (“обратной”) задачей Коши для операции $L_s(D_t)$:

$$(R_{\lambda, s}^k g)(t) = \int_{T_k}^t \frac{\exp\{\varrho J(\tau, t)\}}{a(\tau)} g(\tau) d\tau.$$

Из предложения 1, лемм 4, 6 и определения вполне непрерывного (вольтеррового, Коши) оператора вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Для оператора $L_s = L_s(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2)$, $\mu \neq 0, \infty$, справедливы следующие высказывания:

$$\begin{aligned} (\alpha \in \mathcal{A}_1) &\Rightarrow (R_\lambda(L_s) \in BH), \\ (\alpha \in \mathcal{A}_1) \wedge (J = 0) \wedge (\mu \neq 1) &\Rightarrow (R_\lambda(L_s) \in V), \\ (\alpha \in \mathcal{A}_1) \wedge (J = 0) \wedge (\mu \neq 1) &\Rightarrow (L_s \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Пусть $a_1 = q \exp\{i\varphi\}a_2$, где $0 < q < +\infty$, $-\pi < \varphi \leq \pi$. Пусть также $Q = \frac{(-T_1)^{1-\alpha_1}}{1-\alpha_1} \Big/ \frac{T_2^{1-\alpha_2}}{1-\alpha_2}$. Очевидно (при $\alpha_1 < 1$ и $\alpha_2 < 1$), что

$$(J = 0) \Leftrightarrow (\varphi = \pi) \wedge (q = Q).$$

В дальнейшем зависимость свойств задачи (1)–(2) от величины угла φ между векторами a_1 и a_2 как в одномерном, так и в общем случае станет более очевидной. Наиболее наглядно (с точки зрения спектра) эта зависимость проявится в формулах спектра (соответствующего оператора) для значений α , принадлежащих $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_5$.

Для оставшихся значений параметров α_1 и α_2 рассматриваемой задачи, т.е. для $\alpha \notin \mathcal{A}_1$, спектральные свойства соответствующего ей оператора L_s занимают в некотором смысле особое положение. Для получения нужных результатов введем подмножество $C[T_1, \dot{0}]$ множества функций $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Предполагается, что функции из $C[T_1, \dot{0}]$, во-первых, непрерывны в каждой точке отрезка $[T_1, 0]$ и, во-вторых, финитны в левосторонней окрестности точки $t = 0$ (равны нулю локально при $t \rightarrow -0$), т.е.

$$C[T_1, \dot{0}] = \{g : (g \in C[T_1, 0]) \wedge (\exists \varepsilon_g \in (T_1, 0) \forall t (t \in (\varepsilon_g, 0) \Rightarrow g(t) = 0))\}.$$

Аналогично определяется множество $C[\dot{0}, T_2]$. Обозначим через $\varkappa_k$ характеристическую функцию $\varkappa_k = \varkappa_k(t)$ интервала $V_t^{\varepsilon_k}$, $k = 1, 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если $\alpha \in \mathcal{A}_2 \setminus \overset{\circ}{\mathcal{A}}_2$, то любая точка λ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ является либо точкой точечного $P\sigma L_s$, либо точкой непрерывного $C\sigma L_s$ спектра оператора $L_s = L_s(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2)$, $\mu \neq 0, \infty$, т.е.

$$(\alpha \in \mathcal{A}_2 \setminus \overset{\circ}{\mathcal{A}}_2) \Rightarrow (P\sigma L_s \cup C\sigma L_s = \mathbb{C}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\frac{1}{2} = \alpha_1 \geq \alpha_2$. Считая, что $(J = 0) \wedge (\mu = 1)$, получаем, как и ранее, $P\sigma L_s = \mathbb{C}$. Если $\Delta(\varrho) = 0$, то (12) – собственное значение оператора L_s . Пусть $\Delta(\varrho) \neq 0$. Тогда (12) – собственное значение оператора $(L_s^T)^*$. Если $\lambda \notin P\sigma L_s$, то для $g \in C[T_1, \dot{0}] \cap C[\dot{0}, T_2]$ решение уравнения (14) существует и дается формулой (15), где функция Грина $G_s(\tau, t, \lambda)$ оператора $L_s - \lambda$ имеет вид (16). Следовательно, область определения $\mathfrak{D}((L_s - \lambda)^{-1})$ оператора $(L_s - \lambda)^{-1}$ плотна в H_t . Считая, что функция $g = g(t)$, $g(t) = \frac{a(t) \exp\{\varrho J(T_1, t)\}}{|t|} \cdot \varkappa_1(t)$, принадлежит $\mathfrak{D}((L_s - \lambda)^{-1})$, получаем для функции $v = (L_s - \lambda)^{-1}g$, $v = v(t)$, при $\varepsilon_1 \leq t \leq T_2$ представление

$$v(t) = \frac{\mu}{\Delta(\varrho)} \ln \left| \frac{T_1}{\varepsilon_1} \right| \exp\{\varrho J(T_1, t)\}.$$

Так как

$$C_2 \ln \left| \frac{T_1}{\varepsilon_1} \right| \geq |g, H_t|^2, \quad |v, H_t|^2 \geq C_1 \ln^2 \left| \frac{T_1}{\varepsilon_1} \right|,$$

где C_1, C_2 – некоторые положительные постоянные, не зависящие от ε_1 , то, очевидно, имеет место неравенство

$$\|(L_s - \lambda)^{-1}\|^2 \geq \frac{C_1}{C_2} \ln \frac{T_1}{\varepsilon_1},$$

из которого немедленно следует включение $\lambda \in C\sigma L_s$.

Аналогично разбирается случай $\frac{1}{2} = \alpha_2 \geq \alpha_1$.

В оставшихся случаях вопрос о квазимодельности оператора L_s решен полностью.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $\alpha \in \overset{\circ}{\mathcal{A}}_2$, то оператор $L_s = L_s(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2)$, $\mu \neq 0, \infty$, является qM -оператором, точечный спектр $P\sigma L_s$ которого заполняет всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, т.е.

$$(\alpha \in \overset{\circ}{\mathcal{A}}_2) \Rightarrow (L_s \in qM) \wedge (P\sigma L_s = \mathbb{C}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_1 \geq \alpha_2$, $\frac{1}{2} < \alpha_1 < 1$. Покажем, что число (12), где $\varrho \in \mathbb{C}$, является собственным значением, а функция (13) – соответствующей этому значению собственной функцией оператора L_s . При $J = 0$ и $\mu = 1$ это очевидно. Пусть $z_s = z_s(\lambda)$,

$$z_s(\lambda) = \begin{cases} (\varrho - \varrho_m)J, & \text{если } J \neq 0, \\ -\ln |\mu| - i \arg \mu, & \text{если } J = 0, \end{cases}$$

где $\varrho_m \in \mathbb{Z}_\mu^2$. Тогда формула (13) примет вид

$$v_\varrho(t) = \mu \exp\{\varrho J(T_2, t)\} \cdot \begin{cases} \exp z_s, & \text{если } T_1 \leq t < 0, \\ 1, & \text{если } 0 \leq t \leq T_2. \end{cases} \quad (21)$$

Отметим, что если $J \neq 0$, то (21) является собственной функцией оператора L_s , соответствующей собственному значению (12), где $\varrho = \varrho_m$. Положим $v_n = v_n(t)$,

$$v_n(t) = \begin{cases} (\exp\{-z_s\} - 1)(nt + 1)^2 + 1, & \text{если } t \in [-1/n, 0], \\ 1, & \text{если } t \notin [-1/n, 0]. \end{cases}$$

Пусть также $v_{\varrho, n} = v_\varrho \cdot v_n$. Очевидно, что $v_{\varrho, n} \in \mathfrak{D}_t, v_\varrho \in H_t$. Осталось заметить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |v_{\varrho, n} - v_\varrho, H_t| = \lim_{n \rightarrow \infty} |L_s(D_t)v_{\varrho, n} - \lambda v_\varrho, H_t| = 0, \quad (22)$$

и воспользоваться леммой 5.

Аналогично разбирается случай $\alpha_2 \geq \alpha_1$, $\frac{1}{2} < \alpha_2 < 1$.

²Выбор числа $\varrho_m \in \mathbb{Z}_\mu$ может быть осуществлен произвольно и, в частности, так, как это сделано ниже при доказательстве утверждения 1 (см. п. 2.4).

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение 3 непосредственно вытекает из пп. 1.1, 1.2. Тем не менее, желая показать целесообразность леммы 3, мы обсудили ее на конкретном примере.

Введем дополнительные обозначения. Пусть

$$A_k(s) = \frac{A(s)}{a_k}, \quad \varrho_k = \frac{\lambda - A(s)}{a_k}, \quad r_k = \operatorname{Re} \varrho_k, \quad k = 1, 2.$$

Ясно, что $\varrho_k = \varrho_k(\lambda, s)$, $r_k = r_k(\lambda, s)$.

Пусть также

$$\begin{aligned} P_s(\alpha_1) &= \begin{cases} a_1 \cdot (\mathbb{C}_- + \frac{1}{2} + A_1(s)), & \text{если } \alpha_1 = 1, \\ a_1 \cdot (\overline{\mathbb{C}}_- + A_1(s)), & \text{если } \alpha_1 > 1, \end{cases} \\ P_s(\alpha_2) &= \begin{cases} a_2 \cdot (\mathbb{C}_+ - \frac{1}{2} + A_2(s)), & \text{если } \alpha_2 = 1, \\ a_2 \cdot (\overline{\mathbb{C}}_+ + A_2(s)), & \text{если } \alpha_2 > 1, \end{cases} \\ P_s(\alpha) &= P_s(\alpha_1) \Delta P_s(\alpha_2), \quad \text{где } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned}$$

Δ – знак симметрической разности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $\alpha \in \mathcal{A}_3$, то оператор $L_s = L_s(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2)$, $\mu \neq 0, \infty$, является qM -оператором, точечный спектр $P\sigma L_s$ которого заполняет всю комплексную полуплоскость $P_s(\alpha_1)$, т.е.

$$(\alpha \in \mathcal{A}_3) \Rightarrow (L_s \in qM) \wedge (P\sigma L_s = P_s(\alpha_1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу лемм 3, 6, 7 функция (13) является собственной функцией оператора L_s , соответствующей собственному значению (12), где $r_1 < \frac{1}{2}$, если $\alpha_1 = 1$, и $r_1 \leq 0$, если $\alpha_1 > 1$. В силу леммы 7 других собственных значений оператор L_s иметь не может. Следовательно, справедливо равенство $P\sigma L_s = P_s(\alpha_1)$.

Пусть $\lambda \notin P\sigma L_s$. В силу леммы 3 формула (17) дает единственное решение уравнения (14) для $g \in C[T_1, 0] \cap C[0, T_2]$. Следовательно, область определения $\mathfrak{D}((L_s - \lambda)^{-1})$ оператора $(L_s - \lambda)^{-1}$ всюду плотна в H_t . В силу замкнутости спектра σL_s оператора L_s осталось доказать вложение $\mathbb{C} \setminus \overline{P\sigma L_s} \subset \rho L_s$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{P\sigma L_s}$. Если $\alpha_1 = 1$, то для решения (17) уравнения (14) при $t \in V_t^1$ будем иметь неравенство

$$|v(t)|^2 \leq \frac{1}{|a_1|^2} \cdot \left| \int_t^0 (-\tau)^{\frac{\varrho_1}{2} - \frac{3}{4}} (-\tau)^{\frac{\varrho_1}{2} - \frac{1}{4}} (-t)^{-\varrho_1} g(\tau) d\tau \right|^2. \quad (23)$$

Из (23) после применения неравенства Коши–Буняковского получим неравенство

$$|v(t)|^2 \leq \frac{2}{|a_1|^2 |2r_1 - 1|} \cdot \int_t^0 (-t)^{-r_1 - \frac{1}{2}} (-\tau)^{r_1 - \frac{1}{2}} |g(\tau)|^2 d\tau, \quad (24)$$

где, напомним, $r_1 = \operatorname{Re} \frac{\lambda - A(s)}{a_1}$. Проинтегрируем обе стороны неравенства (24) по промежутку V_t^1 . Изменив порядок интегрирования в повторном интеграле, получим неравенство

$$\int_{T_1}^0 |v(t)|^2 dt \leq \frac{4}{|a_1|^2 |2r_1 - 1|^2} \cdot \int_{T_1}^0 |g(t)|^2 dt. \quad (25)$$

Из представления (17) решения $v = v(t)$ уравнения (14) также следует неравенство

$$\int_0^{T_2} |v(t)|^2 dt \leq C(s) \cdot |g, H_t|^2, \quad (26)$$

в котором

$$C(s) = \frac{C'}{|2r_1 - 1|} \int_0^{T_2} \exp \operatorname{Re}\{2\rho J(T_2, t)\} dt + 2 \cdot \begin{cases} \int_0^{T_2} dt \int_t^{T_2} \frac{\exp \operatorname{Re}\{2\rho J(\tau, t)\}}{|a(\tau)|^2} d\tau, & \text{если } \alpha_2 \leq 0, \\ \int_0^{T_2} dt \int_t^{T_2} \frac{\exp \operatorname{Re}\{2\rho J(\tau, t)\}}{|a(\tau) \cdot a(t)|} d\tau, & \text{если } \alpha_2 > 0, \end{cases}$$

C' — некоторая положительная постоянная, не зависящая от $s \in S$. Теперь, учитывая неравенства (25) и (26), последовательно получаем неравенство

$$\|(L_s - \lambda)^{-1}\| \leq M(s), \quad (27)$$

в котором $M(s) = \max \left\{ \frac{2}{|a_1(2r_1 - 1)|}, \sqrt{C(s)} \right\}$, и включение $\lambda \in \rho L_s$.

Пусть теперь $\alpha_1 > 1$. Выведем неравенство, аналогичное (23). После применения неравенства Коши–Буняковского в представлении (17) решения уравнения (14) при $t \in V_t^1$ получим

$$|v(t)|^2 \leq \frac{1}{|a_1|^2} \int_t^0 \frac{\exp \operatorname{Re}\{\rho J(\tau, t)\}}{(-\tau)^{2\alpha_1}} d\tau \cdot \int_t^0 \exp \operatorname{Re}\{\rho J(\tau, t)\} |g(\tau)|^2 d\tau. \quad (28)$$

Пусть $m = m(\alpha_1) = \min\{n : (n \in \mathbb{N}) \wedge (n - (n - 2)\alpha_1 < 1)\}$. Отметим, что $m \geq 3$, причем $m = 3$ при $\alpha_1 > 2$. После m -кратного применения метода интегрирования по частям получим равенство

$$\int_t^0 \frac{\exp \operatorname{Re}\{\rho J(\tau, t)\}}{(-\tau)^{2\alpha_1}} d\tau = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{d_k}{r_1^{k+1} (-t)^{k-(k-1)\alpha_1}} + \frac{d_m}{r_1^m} \int_t^0 \frac{\exp \operatorname{Re}\{\rho J(\tau, t)\}}{(-\tau)^{m-(m-2)\alpha_1}} d\tau,$$

в котором $d_0 = 1$, $d_k = \prod_{n=1}^k (n - 1 - (n - 2)\alpha_1)$, $k = 1, \dots, m$. Из выписанного равенства, очевидно, следует неравенство

$$\int_t^0 \frac{\exp \operatorname{Re}\{\rho J(\tau, t)\}}{(-\tau)^{2\alpha_1}} d\tau \leq \frac{C \cdot \Phi(r_1)}{r_1 \cdot (-t)^{\alpha_1}}, \quad (29)$$

в котором C — некоторая постоянная, не зависящая от ρ (от λ),

$$\Phi(r_1) = \begin{cases} 1, & \text{если } r_1 \geq 1, \\ r_1^{1-m}, & \text{если } 0 < r_1 < 1. \end{cases}$$

Учитывая (29) в неравенстве (28), проинтегрируем (28) по промежутку V_t^1 . Изменив порядок интегрирования в повторном интеграле, получим неравенство

$$\int_{T_1}^0 |v(t)|^2 dt \leq C \cdot \frac{\Phi(r_1)}{|a_1 \cdot r_1|^2} \cdot \int_{T_1}^0 |g(\tau)|^2 d\tau. \quad (30)$$

Теперь, принимая во внимание неравенство (30) и неравенство (26), справедливое в рассматриваемом случае, последовательно получаем неравенство (27), в котором

$$M(s) = \sqrt{\max \left\{ C \cdot \frac{\Phi(\varrho)}{|a_1 \cdot r_1|^2}, C(s) \right\}}, \text{ и включение } \lambda \in \rho L_s.$$

Аналогично доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $\alpha \in \mathcal{A}_4$, то оператор $L_s = L_s(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2)$, $\mu \neq 0, \infty$, является qM -оператором, точечный спектр $P\sigma L_s$ которого заполняет всю комплексную полуплоскость $P_s(\alpha_2)$, т.е.

$$(\alpha \in \mathcal{A}_4) \Rightarrow (L_s \in qM) \wedge (P\sigma L_s = P_s(\alpha_2)).$$

При $\alpha \in \mathcal{A}_5$ структура спектра σL_s оператора L_s , как показывает нижеследующее предложение, становится менее прозрачной. Во всяком случае, при $\varphi \neq 0$ оператор L_s , вообще говоря, не является qM -оператором. А точнее, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. При $\alpha \in \mathcal{A}_5$, т.е. при $\alpha_1 \geq 1$ и $\alpha_2 \geq 1$, структура спектра σL_s оператора $L_s = L_s(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2)$, $\mu \neq 0, \infty$, раскрывается следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \rho L_s &= \overset{\circ}{P}_s(\alpha), & C\sigma L_s &= \overline{\rho L_s} \setminus \rho L_s, \\ R\sigma L_s &= \mathbb{C} \setminus \overline{P_s(\alpha_1) \cup P_s(\alpha_2)}, & P\sigma L_s &= P_s(\alpha_1) \cap P_s(\alpha_2). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_1 \geq 1$ и $\alpha_2 \geq 1$. В силу лемм 3, 6, 7 равенство $P\sigma L_s = P_s(\alpha_1) \cap P_s(\alpha_2)$ очевидно. Причем если

$$\lambda \in (a_1 \cdot \mathbb{C}_- + A(s)) \cap (a_2 \cdot \mathbb{C}_+ + A(s)),$$

то (13) является “классической” собственной функцией оператора L_s . Классической в том смысле, что она принадлежит $\mathfrak{D}_t$ — первоначальной области определения оператора L_s , т.е. $v_\varrho(t) \in \mathfrak{D}_t$ [12; гл. I, § 2, п. 1].

Если $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{P_s(\alpha_1) \cup P_s(\alpha_2)}$, т.е.

$$r_1 \in \begin{cases} (\frac{1}{2}, +\infty), & \text{если } \alpha_1 = 1, \\ (0, +\infty), & \text{если } \alpha_1 > 1, \end{cases} \quad r_2 \in \begin{cases} (-\infty, -\frac{1}{2}), & \text{если } \alpha_2 = 1, \\ (-\infty, 0), & \text{если } \alpha_2 > 1, \end{cases}$$

то функция (13*) ортогональна множеству значений $\Re(L_s - \lambda)$ оператора $L_s - \lambda$. Следовательно, имеет место вложение $\mathbb{C} \setminus \overline{P_s(\alpha_1) \cup P_s(\alpha_2)} \subset R\sigma L_s$. Отметим, что единственное решение $v = v(t)$ уравнения (14) в этом случае имеет вид (19).

Далее считаем, что $\lambda \in \overline{P_s(\alpha)} \setminus P\sigma L_s$. В силу леммы 3 единственное решение уравнения (14) при $g \in C[T_1, 0] \cap C[0, T_2]$ дается формулой (17), если $\lambda \in P_s(\alpha_2) \setminus P_s(\alpha_1)$, т.е.

$$r_1 \in \begin{cases} [\frac{1}{2}, +\infty), & \text{если } \alpha_1 = 1, \\ (0, +\infty), & \text{если } \alpha_1 > 1, \end{cases} \quad r_2 \in \begin{cases} (-\frac{1}{2}, +\infty), & \text{если } \alpha_2 = 1, \\ [0, +\infty), & \text{если } \alpha_2 > 1, \end{cases} \quad (31)$$

и формулой (18), если $\lambda \in P_s(\alpha_1) \setminus P_s(\alpha_2)$, т.е.

$$r_1 \in \begin{cases} (-\infty, \frac{1}{2}), & \text{если } \alpha_1 = 1, \\ (-\infty, 0], & \text{если } \alpha_1 > 1, \end{cases} \quad r_2 \in \begin{cases} (-\infty, -\frac{1}{2}], & \text{если } \alpha_2 = 1, \\ (-\infty, 0), & \text{если } \alpha_2 > 1. \end{cases} \quad (32)$$

Следовательно, область определения $\mathfrak{D}((L_s - \lambda)^{-1})$ оператора $(L_s - \lambda)^{-1}$ всюду плотна в H_t .

Далее полагаем $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Пусть $\lambda \in P_s(\alpha_2) \setminus P_s(\alpha_1)$, причем $r_1 = \frac{1}{2}$ и $r_2 > -\frac{1}{2}$. Считая, что функция $g = g(t)$,

$$g(t) = \frac{a(t) \exp\{\varrho J(T_1, t)\}}{|t|} \cdot \varkappa_1(t),$$

принадлежит $\mathfrak{D}((L_s - \lambda)^{-1})$, получаем для функции $v = (L_s - \lambda)^{-1}g$, $v = v(t)$, при $t > 0$ представление $v(t) = \mu \exp\{\varrho J(T_2, t)\} \ln(\varepsilon_1/T_1)$. Так как $C_2 \ln |T_1/\varepsilon_1| \geq |g, H_t|^2$, $|v, H_t|^2 \geq C_1 \ln^2 |T_1/\varepsilon_1|$, где C_1, C_2 — некоторые положительные постоянные, не зависящие от ε_1 , то $\|(L_s - \lambda)^{-1}\|^2 \geq (C_1/C_2) \ln(T_1/\varepsilon_1)$. Откуда следует включение $\lambda \in C\sigma L_s$.

Если $\lambda \in P_s(\alpha_1) \setminus P_s(\alpha_2)$, причем $r_1 < \frac{1}{2}$ и $r_2 = -\frac{1}{2}$, то включение $\lambda \in C\sigma L_s$ доказывается аналогично.

Пусть теперь $\lambda \in P_s(\alpha_2) \setminus P_s(\alpha_1)$, причем $r_1 > \frac{1}{2}$ и $r_2 > -\frac{1}{2}$. Повторив рассуждения, использованные при доказательстве предложения 6, получим неравенство (25). Аналогично неравенству (25) можно получить неравенство (26), в котором $C(s) = \frac{2T_2|\mu|^2}{|T_1||a_1|^2|2r_2+1||2r_1-1|} + \frac{8}{|a_2|^2|2r_2+1|^2}$. Следовательно, имеет место неравенство (27), т.е. $\lambda \in \rho L_s$.

Включение $\lambda \in \rho L_s$ в случае, когда $\lambda \in P_s(\alpha_1) \setminus P_s(\alpha_2)$, причем $r_1 < \frac{1}{2}$ и $r_2 < -\frac{1}{2}$, доказывается аналогично.

Пусть, наконец, $\alpha_1 \neq 1$ или $\alpha_2 \neq 1$. Остальные (см. (31) и (32)) возможные варианты расположения спектрального параметра λ на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в зависимости от значений α разбираются аналогично. На этом мы останавливаться не будем. Отметим только, что соответствующие исследования удобно провести отдельно для трех оставшихся случаев принадлежности α углу $\mathcal{A}_5$: $\alpha_1 > \alpha_2 = 1$; $\alpha_2 > \alpha_1 = 1$; $\alpha_1 > 1, \alpha_2 > 1$.

§ 2. Общий случай

2.1. Операторные уравнения и модельные операторы. Приступим к изучению операторного или, как еще говорят, дифференциально-операторного уравнения (1). Пусть A — модельный оператор, действующий в $\mathfrak{H}$, т.е. линейный, замкнутый, вообще говоря, неограниченный оператор с плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения, система $\{\varphi_s\}$, $s \in S$, собственных элементов φ_s которого образует базис Рисса в $\mathfrak{H}$ [12; гл. II, § 5, п. 3]. Пусть также $H = H_t \otimes \mathfrak{H}$; $\mathfrak{D}$ — линейное многообразие, состоящее из функций $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{H}$ вида: $u(t) = \sum_s v_s(t) \varphi_s$,³ где $v_s(t)$ — из $\mathfrak{D}_t$ и суммирование проводится для конечного набора индексов $s \in S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элемент $u \in H$ называется (обобщенным) *решением уравнения* (1), если существует последовательность $\{u_n\}$ из $\mathfrak{D}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - u, H| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a(t) \cdot D_t u_n + A u_n - f, H| = 0.$$

³Функция $u(t)$ (так же как и операция $L(D_t, A)$) в формализме тензорных произведений [10; гл. IV, § 1, п. 1.2] требует записи вида: $u(t) = \sum_s v_s(t) \otimes \varphi_s$ ($L(D_t, A) = a(t) \cdot D_t \otimes I + I \otimes A$), которой, ради простоты, мы не следуем.

Изучим функциональную зависимость спектра оператора $L: H \rightarrow H$, $L = L(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2, A)$, порожденного определением 2, от “параметров” $\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2, A$. Обозначим символом $\widehat{L}_s$ сужение (“проекцию”) оператора L на подпространство $H_s = H_t \otimes \varphi_s$ пространства H . Отметим, что H_s – инвариантное подпространство оператора $\widehat{L}_s$. Поскольку основным объектом, интересующим нас, является граничная задача, в дальнейшем роль $\mathfrak{H}$ будет играть пространство $H_x = H(V_x)$, где V_x – ограниченная область пространства переменных $x \in \mathbb{R}_x^n \equiv \mathbb{R}^n$. Более того, при переходе к изучению операторного уравнения (1) удобно считать, что A принадлежит специальному классу модельных операторов, а именно A является Π -оператором. Опишем интересующий нас класс операторов.

2.2. Π -операторы. Обозначим символом V_x n -мерный куб с ребром 2π из пространства $\mathbb{R}_x^n$; пусть $H_x = H(V_x)$ – гильбертово пространство комплекснозначных функций $w: \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{C}$ с интегрируемым квадратом над V_x ; $\mathscr{P}^\infty$ – линейное многообразие гладких ($\mathscr{P}^\infty \subset C^\infty(\overline{V_x})$) периодических по всем переменным $(x_1, \dots, x_n) \in \overline{V_x}$ комплекснозначных функций, плотное в H_x ; $S = \{s : s = (s_1, \dots, s_n), s_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$. Полиному $A(s)$ с постоянными комплексными коэффициентами:

$$A(s) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha s^\alpha, \quad a_\alpha = a_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \in \mathbb{C}, \quad s^\alpha = s_1^{\alpha_1} \dots s_n^{\alpha_n},$$

$\alpha_k = 0, 1, 2, \dots, |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, поставим в соответствие дифференциальную операцию $A(-iD_x)$ таким образом, что будет выполняться равенство

$$A(-iD_x) \exp(is \cdot x) = A(s) \exp(is \cdot x), \quad s \cdot x = s_1 x_1 + \dots + s_n x_n.$$

Под оператором $A: H_x \rightarrow H_x$ понимается замыкание в H_x первоначально заданной на функциях из $\mathscr{P}^\infty$ операции $A(-iD_x)$. Совокупность экспонент $\{\exp(is \cdot x)\}$, $s \in S$, образует, очевидно, ортогональный базис и является одновременно набором собственных элементов оператора A , соответствующих набору собственных чисел $A(S) = \{A(s), s \in S\}$.

В дальнейшем мы увидим, что регулярность (см. п. 2.5) задачи (1)–(2) зависит от структуры спектра σA оператора A и, в частности, от поведения его точечного спектра $P\sigma A$. Нижеследующая теорема 1 дает исчерпывающую характеристику σA .

ТЕОРЕМА 1 [10]. *Спектр σA оператора A совпадает с $\overline{A(S)}$ – замыканием на $\mathbb{C}$ множества $A(S)$, образующего точечный спектр $P\sigma A$ оператора A . При этом непрерывный спектр $C\sigma A$ совпадает с разностью $\overline{A(S)} \setminus A(S)$.*

2.3. Операционное исчисление для оператора L . Введенное пространство H_x будет играть роль пространства $\mathfrak{H}$. Пространство $H = H_t \otimes H_x$ можно рассматривать как гильбертово пространство комплекснозначных функций $u: \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{C}$ с интегрируемым квадратом над $V = V_t \times V_x$. Оператор L можно рассматривать как замыкание в H на множестве функций $u = u(t, x)$ из $\mathfrak{D}$, где $\varphi_s = \varphi_s(x) = \exp(is \cdot x)$, операции $a(t)D_t + A(-iD_x)$, т.е. u принадлежит области определения $\mathfrak{D}(L)$ (замкнутого) оператора $L: H \rightarrow H$ и $Lu = f$, если существует последовательность $\{u_n\}$ функций $u_n = u_n(t, x) \in \mathfrak{D}$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - u, H| = \lim_{n \rightarrow \infty} |L(D_t, A)u_n - f, H| = 0$. Пусть $u \in \mathfrak{D}$

и $u = v(t) \cdot \varphi_s(x)$, т.е. $u \in H_s \cap \mathfrak{D}$. Тогда имеем $Lu = \widehat{L}_s u = \varphi_s \cdot L_s v$; $|\widehat{L}_s u, H| = |L_s v, H_t| \cdot |\varphi_s, H_x|$, где $v = v(t)$. Следовательно, операторы $\widehat{L}_s$ в рамках наших исследований можно заменить операторами L_s и наоборот. Этим мы воспользуемся при изучении спектральных свойств оператора L . А именно справедливы нижеследующие теоремы 2 и 3.

ТЕОРЕМА 2. *Резольвентные множества операторов L и L_s , $s \in S$, связаны между собой следующим образом:*

$$(\lambda \in \rho L) \Leftrightarrow \left(\lambda \in \bigcap_s \rho L_s \right) \wedge \left(\sup_s \|(L_s - \lambda)^{-1}\| < +\infty \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость* вытекает из определения операторов $\widehat{L}_s \subset L$ и установленной взаимозаменяемости операторов $\widehat{L}_s$ и L_s .

Достаточность. Для произвольного элемента $f \in H$ его представление в виде ряда $f = \sum_s \widehat{f}_s$, $\widehat{f}_s \in H_s$, единственно. Из неравенства

$$|u, H|^2 = \sum_s |(\widehat{L}_s - \lambda)^{-1} \widehat{f}_s, H|^2 \leq \sup_s \|(L_s - \lambda)^{-1}\|^2 \cdot |f, H|^2$$

следует, что элемент $u = \sum_s (\widehat{L}_s - \lambda)^{-1} \widehat{f}_s$ является единственным решением уравнения $Lu = \lambda u + f$.

ТЕОРЕМА 3. *Справедливы следующие высказывания:*

$$\begin{aligned} (\lambda \in P\sigma L) &\Leftrightarrow (\exists s \in S (\lambda \in P\sigma L_s)), \\ (\lambda \in C\sigma L) &\Leftrightarrow \begin{cases} (\forall s \in S (\lambda \in \rho L_s)) \wedge \left(\sup_s \|(L_s - \lambda)^{-1}\| = +\infty \right), \\ \left\{ \begin{array}{l} (\forall s \in S (\lambda \notin P\sigma L_s \wedge \lambda \notin R\sigma L_s)), \\ (\exists s \in S (\lambda \in C\sigma L_s)). \end{array} \right. \end{cases} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Если $\lambda \in P\sigma L$, то из единственности разложения $u = \sum_s \widehat{u}_s$, $\widehat{u}_s \in H_s$, справедливого для любого $u \in H$, вытекает, что $\exists s \in S (\lambda \in P\sigma \widehat{L}_s)$. В силу сделанного ранее замечания $\lambda \in P\sigma L_s$. Если $\lambda \in C\sigma L$, то оператор $(\widehat{L}_s - \lambda)^{-1}$ существует при любом $s \in S$, откуда

$$(\forall s \in S (\lambda \in \rho L_s)) \vee (\forall s \in S (\lambda \notin P\sigma L_s \wedge \lambda \notin R\sigma L_s)) \wedge (\exists s \in S (\lambda \in C\sigma L_s)).$$

Если $\sup_s \|(L_s - \lambda)^{-1}\| < +\infty$, то из теоремы 1 имеем $\lambda \notin C\sigma L$.

Достаточность вытекает из определения операторов $\widehat{L}_s$: $\widehat{L}_s \subset L$, $s \in S$, и установленной взаимозаменяемости операторов $\widehat{L}_s$ и L_s .

2.4. Нелокальная задача; спектр оператора $L = L(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2, A)$, $\mu \neq 0, \infty$. Этот пункт посвящен изучению спектра оператора L . Очевидно, что структура спектра зависит от параметров μ , $a(t)$, A . Отметим особую роль сингулярного коэффициента $a(t)$. Желая подчеркнуть зависимость структуры спектра σL оператора L от значений параметров α_1 , α_2 , удобно выделить полученные результаты отдельными предложениями. Отметим также явные формулы, с одной стороны показывающие зависимость спектра σL оператора L от параметров μ , α_1 ,

α_2, a_1, a_2, A задачи (1)–(2), а с другой – позволяющие провести классификацию рассматриваемых задач.

Следуя [10], будем говорить, что оператор A обладает В-свойством, если $A \in B_1 \cup B_2$, где

$$B_1 = \{A : \inf_{s \in S} \operatorname{Re} A(s) > -\infty\}, \quad B_2 = \{A : \sup_{s \in S} \operatorname{Re} A(s) < +\infty\}.$$

Как известно, условие $A \in B_1$ ($A \in B_2$) равносильно регулярности прямой (обратной) задачи Коши для операции $L(D_t, A)$, где $a(t) = 1$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1 &= \{\varphi : (-\pi < \varphi \leq \pi) \wedge (Q + q \cos \varphi > 0)\}, \\ \mathcal{O}_2 &= \{\varphi : (-\pi < \varphi \leq \pi) \wedge (Q \cos \varphi + q > 0)\}, \\ A_1 &= a_1^{-1} \cdot A, \quad A_2 = a_2^{-1} \cdot A, \quad A_J = J \cdot A. \end{aligned}$$

Отметим, что $A_2 = -qA_1$, если $J = 0$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\alpha \in \mathcal{A}_1$, т.е. $\alpha_1 < \frac{1}{2}$, $\alpha_2 < \frac{1}{2}$. Для оператора $L = L(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2, A)$, $\mu \neq 0, \infty$, при $J(T_1, T_2) = 0$ справедливы следующие высказывания:

$$\begin{aligned} (\mu = 1) &\Rightarrow (L_s \in qM) \wedge (P\sigma L = \mathbb{C}), \\ (A_1 \in B_1 \cap B_2) \wedge (\mu \neq 1) &\Rightarrow (L \in qC), \\ (A_1 \notin B_1 \cap B_2) \wedge (\mu \neq 1) &\Rightarrow (C\sigma L = \mathbb{C}). \end{aligned}$$

В противном случае, т.е. при $J = J(T_1, T_2) \neq 0$, будем иметь:

$$\begin{aligned} (A_J \in B_1 \cap B_2) &\Rightarrow (L \in qM), \\ (A_J \notin B_1 \cap B_2) \wedge (\varphi \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2) &\Rightarrow (L \in qM), \\ (A_J \notin B_1 \cap B_2) \wedge (\varphi \in \mathcal{O}_1 \Delta \mathcal{O}_2) &\Rightarrow (C\sigma L = \mathbb{C} \setminus P\sigma L), \\ P\sigma L &= \mathbb{Z}_\mu + A(S). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\varrho \in \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } (J = 0) \wedge (\mu = 1), \\ \mathbb{Z}_\mu, & \text{если } (J \neq 0). \end{cases}$$

Тогда собственному значению (12) оператора L соответствует собственная функция

$$u_{\varrho, s}(t, x) = v_{\varrho}(t) \cdot \varphi_s(x), \quad (33)$$

где $v_{\varrho}(t)$ имеет вид (13). В силу теоремы 3 и предложения 1 других собственных значений оператор L не имеет. Отметим, что при $J(T_1, T_2) \neq 0$ точечный спектр $P\sigma L$ оператора L допускает более наглядное представление

$$\lambda_{k, s} = \varrho_k + A(s), \quad \varrho_k = \frac{\ln |\mu| + i \arg \mu + i 2\pi k}{J(T_1, T_2)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пусть теперь

$$\lambda \in \begin{cases} \mathbb{C}, & \text{если } (J = 0) \wedge (\mu \neq 1), \\ \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{Z}_\mu + A(S)\}, & \text{если } (J \neq 0), \end{cases}$$

т.е. $\lambda \notin P\sigma L$. В силу теоремы 3 и предложения 1 для любого $s \in S$ единственное решение уравнения (14) дается формулой $v = (L_s - \lambda)^{-1}g$, где резольвента $(L_s - \lambda)^{-1}$ оператора L_s имеет вид (20). Далее, из теорем 2, 3 вытекает включение $\lambda \in \rho L \cup C\sigma L$. Выясним условия, при выполнении которых либо $\lambda \in C\sigma L$, либо $\lambda \in \rho L$. В силу теорем 2, 3 достаточно будет найти числа $m(s)$ либо $M(s)$ ($s \in S$) такие, что

$$m(s) \leq \|(L_s - \lambda)^{-1}\| \leq M(s), \quad (34)$$

причем если

$$\sup m(S') = +\infty, \quad (35)$$

то $\lambda \in C\sigma L$, а если

$$\sup M(S) < +\infty, \quad (36)$$

то $\lambda \in \rho L$.⁴ Здесь $S' \subset S$, а множества вида $m(S')$, $M(S)$ определяются так же, как множество $A(S)$ (см. п. 2.2). Займемся изучением представлений чисел $m(s)$ либо $M(s)$.

Пусть $J = 0$ и $\mu \neq 1$. Если $A_1 \in B_1 \cap B_2$, то в (34), очевидно, можно положить

$$M(s) = 2 \frac{|\mu| + 1}{|\mu - 1|} \sqrt{\int_{T_1}^{T_2} dt \int_{T_1}^{T_2} \left| \frac{\exp\{\varrho J(\tau, t)\}}{a(\tau)} \right|^2 d\tau}. \quad (37)$$

В силу равенства $J = 0$ векторы a_1, a_2 коллинеарны: $a_1 = -qa_2$. Следовательно, $A_2 \in B_1 \cap B_2$. Теперь из (37) получим (36), а с ним и включение $\lambda \in \rho L$.

Если $A_1 \notin B_1$, то, полагая в определении нормы резольвенты (20) $g = 1$, последовательно получаем представление

$$m(s) = \frac{1}{\sqrt{T_2 - T_1} \cdot |\varrho|} \sqrt{\int_{T_1}^{T_2} |\exp\{\varrho J(T_1, t)\} - 1|^2 dt},$$

равенство (35) и включение $\lambda \in C\sigma L$.

Если $A_1 \notin B_2$, то положим $g = \chi_1$. При $t < 0$ будем иметь

$$v(t) = R_{\lambda, s} g(t) = \frac{1}{\mu - 1} \left[\mu \frac{\exp\{\varrho J(T_1, t)\} - 1}{\varrho} - \frac{\exp\{\varrho J(0, t)\} - 1}{\varrho} \right]. \quad (38)$$

Из (38) в силу равенства $\sup_s \operatorname{Re} \exp\{\varrho J(0, t)\} = +\infty$, очевидно, следует равенство (35), а с ним и включение $\lambda \in C\sigma L$.

Пусть, наконец, $J \neq 0$. Положим

$$r_s = \min_k |(\lambda - \lambda_{k, s})J| = \min_k |(\varrho - \varrho_k)J|.$$

⁴Более точные значения $m(s)$, $M(s)$ могут понадобиться, например, при исследовании дифференциальных свойств обобщенного решения уравнения (1). Этим мы заниматься не будем.

Очевидно, что $r_s > 0$ и $(\inf_s r_s = 0) \Leftrightarrow (\lambda \in \overline{P\sigma L} \setminus P\sigma L)$. Выберем $m = m_s(\lambda) \in \mathbb{Z}$ так, чтобы выполнялись условия

$$r_s = |(\varrho - \varrho_m)J|, \quad -\pi < \operatorname{Im}\{(\varrho - \varrho_m)J\}. \quad (39)$$

Условия (39) позволяют определить однозначную функцию $z_s: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ комплексного переменного λ : $z_s = z_s(\lambda)$,

$$z_s(\lambda) = (\varrho - \varrho_m)J, \quad m = m_s(\lambda) \in \mathbb{Z}, \quad \varrho = \lambda - A(s), \quad (40)$$

множество значений $\Re(z_s)$ которой совпадает (с точностью до $z = 0$) с полосой $\mathfrak{C} = \{z : (z \in \mathbb{C}) \wedge (-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi)\}$. Используем функцию (40) для оценки резольвенты $(L_s - \lambda)^{-1}$ оператора L_s . Так как $\varrho = \varrho_m + z_s/J(T_1, T_2)$, то

$$\Delta(\varrho) = \mu \cdot (1 - \exp z_s), \quad \exp\{\varrho J(\tau, t)\} = \exp\left\{z_s \frac{J(\tau, t)}{J(T_1, T_2)}\right\} \cdot \mu^{\frac{J(\tau, t)}{J(T_1, T_2)}}. \quad (41)$$

Следовательно, изучение поведения функции Грина (16) оператора $L_s - \lambda$ для значений $\varrho \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_\mu$ свелось к исследованию функций (41) в полосе $\mathfrak{C}$, которую удобно представить в виде объединения $\mathfrak{C} = \bigcup_{k=1}^4 \mathfrak{C}_k$ четырех попарно непересекающихся множеств $\mathfrak{C}_k$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 &= \{z : |z| < 1\}, \\ \mathfrak{C}_2 &= \{z : (-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi) \wedge (\pi |\operatorname{Re} z| \leq |\operatorname{Im} z|)\} \setminus \mathfrak{C}_1, \\ \mathfrak{C}_3 &= \{z : (-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi) \wedge (\pi \operatorname{Re} z > |\operatorname{Im} z|)\} \setminus \mathfrak{C}_1, \\ \mathfrak{C}_4 &= \{z : (-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi) \wedge (\pi \operatorname{Re} z < -|\operatorname{Im} z|)\} \setminus \mathfrak{C}_1. \end{aligned}$$

Рассмотрим вначале функцию $1 - \exp z$.

ЛЕММА 8. *Справедливы следующие высказывания:*

1. для любого комплексного числа $z \in \mathfrak{C}_1$ справедливо неравенство $|1 - \exp z| \geq |z|/(3\sqrt{2})$; коротко: $\forall z \in \mathfrak{C}_1 \quad (|1 - \exp z| \geq |z|/(3\sqrt{2}))$;
2. найдется число $m > 0$ такое, что $\forall z \in \mathfrak{C}_2 \quad (|1 - \exp z| \geq m)$;
3. $\forall z \in \mathfrak{C}_3 \quad \left(|1 - \exp z| \geq \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\right\}\right) \cdot |\exp z|\right)$;
4. $\forall z \in \mathfrak{C}_4 \quad \left(|1 - \exp z| \geq 1 - \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{1+\pi^2}}\right\}\right)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $0 < r < 1$, $-\pi < \varphi \leq \pi$. Тогда

$$|1 - \exp z|^2 \geq 1 - 2 \exp\{r \cos \varphi\} \cdot \cos\{r \sin \varphi\} + \exp\{2r \cos \varphi\},$$

откуда $|1 - \exp z|^2 \geq \max\{(1 - \exp\{r \cos \varphi\})^2, \sin^2\{r \sin \varphi\}\}$. Учитывая, что $|1 - \exp x| \geq |x|/3$, $|\sin x| \geq |x|/3$ при $-1 < x < 1$, получаем неравенство

$$|1 - \exp z|^2 \geq \max\left\{\frac{|r \cos \varphi|^2}{9}, \frac{|r \sin \varphi|^2}{9}\right\},$$

из которого следует необходимое нам неравенство.

2. Пусть $\mathbb{C}_k$ — k -й квадрант координатной плоскости $\mathbb{C}$, $\mathfrak{C}_{k,2} = \mathbb{C}_k \cap \mathfrak{C}_2$, $k = 1, 2, 3, 4$. Покажем справедливость высказывания

$$\forall k \ (k = 1, 2, 3, 4) \ \exists m_k > 0 \ \forall z \in \overline{\mathfrak{C}_{k,2}} \ (|1 - \exp z| > m_k). \quad (42)$$

Рассмотрим, например, $k = 1$, т.е. $\mathfrak{C}_{1,2}$. Обозначим через $T = T(\varepsilon)$ криволинейный четырехугольник, граница ∂T которого состоит из отрезков $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ соответствующих прямых и дуги $A_4 A_1$ окружности $|z| = 1$, где $A_1 = A_1(\varepsilon; \sqrt{1 - \varepsilon^2})$, $A_2 = A_2(\varepsilon; \pi)$, $A_3 = A_3(1; \pi)$, $A_4 = A_4\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2}}; \frac{\pi}{\sqrt{1 + \pi^2}}\right)$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2}}$. Так как $|\exp z|_{z \in \partial T} > 1$, то в силу теоремы Руше функция $1 - \exp z$ в замкнутом четырехугольнике $\overline{T(\varepsilon)}$ нулей иметь не может при любом ε $\left(0 < \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2}}\right)$. Пусть $B_1 B_2$ — кусок границы множества $\mathfrak{C}_{1,2}$, совпадающий с осью OY . Отметим, что $B_k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_k$, $k = 1, 2$. Имеем $|\exp z|_{z \in B_1 B_2} > \sqrt{2(1 - \cos 1)}$. Следовательно, в силу вышесказанного и теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях высказывание (42) для $k = 1$ доказано. Аналогично разбирается неравенство (42) для значений $k = 2, 3, 4$. Пусть $m = \min_k m_k$. Так как $\mathfrak{C}_2 = \bigcup_{k=1}^4 \overline{\mathfrak{C}_{k,2}}$, то требуемое доказано.

3. Заметим, что $\forall z \in \mathfrak{C}_3 \ \left(\operatorname{Re} z \geq \frac{1}{\sqrt{1 + \pi^2}}\right)$. Воспользовавшись свойствами модуля комплексных чисел, получим требуемое.

4. Доказательство аналогично доказательству высказывания 3 леммы 8.

Положим $S_k = S_k(\lambda)$, $S_k(\lambda) = \{s : (s \in S) \wedge (z_s(\lambda) \in \mathfrak{C}_k)\}$. Если $\lambda \in \overline{P\sigma L} \setminus P\sigma L$, то $\inf_{s \in S} |z_s(\lambda)| = 0$. Следовательно, в силу (41), (16) и леммы 8 имеем

$$\inf_{s \in S} |\Delta(\varrho)| = \inf_{s \in S_1} |\Delta(\varrho)| = 0, \quad |\exp\{\varrho J(\tau, t)\}| > C, \quad (43)$$

где $\tau, t \in \overline{V}_t$, C — некоторая положительная постоянная, не зависящая от $s \in S_1$. Учитывая (43) при получении неравенства (34), последовательно получаем равенство (35), где $S' = S_1$, и включение $\lambda \in C\sigma L$.

Пусть $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{P\sigma L}$. Тогда $\inf_{s \in S} |z_s(\lambda)| > 0$. Для $s \in S_1$ из леммы 8 и равенств (41) будем иметь неравенства $|\Delta(\varrho)| > \frac{|z_s(\lambda)|}{3\sqrt{2}}|\mu|$, $|\exp\{\varrho J(\tau, t)\}| < C$, в силу которых получаем равномерную ограниченность по $\tau, t \in \overline{V}_t$, $s \in S_1$ функции Грина (16) оператора $L_s - \lambda$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\sup_{s \in S'} M(s) < +\infty, \quad (44)$$

где $S' = S_1$. Неравенство (44) очевидным образом имеет место в случае, когда $S' = S_2$. Для проверки достаточно воспользоваться представлениями (41), структурой множества $\mathfrak{C}_2$, формулой (16) и леммой 8.

Исследуем теперь вопрос о соотношениях (34)–(36) для $s \in S_3, S_4$. Выпишем функцию Грина (16) оператора $L_s - \lambda$ в виде, удобном для исследования. Воспользовавшись представлениями (40), получим

$$G_s(\tau, t, \lambda) = \frac{\exp\left\{z_s \frac{J(\tau, t)}{J(T_1, T_2)}\right\} \exp\{\varrho_m J(\tau, t)\}}{a(\tau) \cdot (1 - \exp z_s)} \cdot \begin{cases} 1, & \text{если } \tau \leq t, \\ \exp z_s, & \text{если } t \leq \tau. \end{cases} \quad (45)$$

Очевидно также представление

$$\operatorname{Re} \frac{J(\tau, t)}{J(T_1, T_2)} = \mathcal{D} \cdot \begin{cases} \frac{(-\tau)^{1-\alpha_1} - (-t)^{1-\alpha_1}}{1-\alpha_1} (Q + q \cos \varphi), \\ \text{если } T_1 \leq \tau \leq t \leq 0, \\ \frac{(-\tau)^{1-\alpha_1}}{1-\alpha_1} (Q + q \cos \varphi) + q \frac{t^{1-\alpha_2}}{1-\alpha_2} (Q \cos \varphi + q), \\ \text{если } T_1 \leq \tau \leq 0 \leq t \leq T_2, \\ q \frac{t^{1-\alpha_2} - \tau^{1-\alpha_2}}{1-\alpha_2} (Q \cos \varphi + q), \\ \text{если } 0 \leq \tau \leq t \leq T_2, \end{cases} \quad (46)$$

$$\text{где } \mathcal{D} = \frac{1}{|a_2|^2} \cdot \frac{T_2^{1-\alpha_2}}{1-\alpha_2} \cdot \frac{1}{|J(T_1, T_2)|^2}.$$

Пусть $A_J \in B_1 \cap B_2$. Тогда $\sup_{s \in S} |\operatorname{Re} z_s(\lambda)| < +\infty$, откуда в силу структуры множества $\mathfrak{C}$ и из леммы 8 получим неравенства

$$\sup_{s \in S} \left| \operatorname{Re} \left\{ z_s \frac{J(\tau, t)}{J(T_1, T_2)} \right\} \right| < +\infty, \quad \sup_{s \in S} |G_s(\tau, t, \lambda)| < +\infty,$$

справедливые для любых $\tau, t \in \overline{V}_t$. Следовательно, имеет место неравенство (36), т.е. $\lambda \in \rho L$.

Пусть $(A_J \notin B_1 \cap B_2) \wedge (\varphi \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2)$.⁵ Тогда $\sup_{s \in S} |\operatorname{Re} z_s(\lambda)| = \infty$, а из представления (46) для каждого фиксированного $\tau, t \in \overline{V}_t$ очевидным образом вытекает неравенство

$$0 \leq \operatorname{sign}(t - \tau) \cdot \operatorname{Re} \frac{J(\tau, t)}{J(T_1, T_2)} \leq 1. \quad (47)$$

Более того, для каждого фиксированного $t \in \overline{V}_t$ из неравенства (47) и в силу структуры множеств $\mathfrak{C}_3, \mathfrak{C}_4$ имеем

$$\begin{aligned} \sup_{T_1 \leq \tau \leq t} \operatorname{Re} \left\{ z_s \frac{J(\tau, t)}{J(T_1, T_2)} \right\} &\leq \begin{cases} \operatorname{Re} z_s + C, & \text{если } s \in S_3, \\ C, & \text{если } s \in S_4, \end{cases} \\ \sup_{t \leq \tau \leq T_2} \operatorname{Re} \left\{ z_s \frac{J(\tau, t)}{J(T_1, T_2)} \right\} &\leq \begin{cases} C, & \text{если } s \in S_3, \\ -\operatorname{Re} z_s + C, & \text{если } s \in S_4, \end{cases} \end{aligned} \quad (48)$$

где C — некоторая положительная постоянная, не зависящая от $s \in S_3 \cup S_4$. Теперь, учитывая неравенство (48) и лемму 8 при оценке функции Грина (16), немедленно получаем неравенство (44), в котором $S' = S_3 \cup S_4$. Следовательно, $\lambda \in \rho L$.

Пусть $(A_J \notin B_1 \cap B_2) \wedge (\varphi \in \mathcal{O}_1 \setminus \mathcal{O}_2)$. Если $g = \chi_2$, то решение $v = v(t)$ уравнения (14) при $0 \leq t \leq T_2$ имеет вид

$$v(t) = \frac{1}{1 - \exp z_s} \cdot \frac{\exp\{\varrho J(0, t)\} - 1}{\varrho} + \frac{\exp z_s}{1 - \exp z_s} \cdot \frac{1 - \exp\{\varrho J(T_2, t)\}}{\varrho}. \quad (49)$$

⁵ Отметим, что условие $A_J \notin B_1 \cap B_2$ влечет равенства $\sup_{s \in S_3} \operatorname{Re}\{J \cdot A(s)\} = +\infty$ или $\inf_{s \in S_4} \operatorname{Re}\{J \cdot A(s)\} = -\infty$.

Имеем $\sup_{s \in S_3} \operatorname{Re} \left\{ z_s \frac{J(T_2, t)}{J(T_1, T_2)} \right\} = +\infty$ для любого $t, 0 < t < T_2$. Следовательно, из (49) в силу (41) будем иметь равенство (35), а с ним и включение $\lambda \in C\sigma L$.

Пусть, наконец, $(A_J \notin B_1 \cap B_2) \wedge (\varphi \in \theta_2 \setminus \theta_1)$. Если $g = \chi_1$, то решение $v = v(t)$ уравнения (14) при $0 \leq t \leq T_2$ имеет вид

$$v(t) = \frac{1}{1 - \exp z_s} \cdot \frac{\exp\{\varrho J(T_1, t)\} - 1}{\varrho} + \frac{\exp z_s}{1 - \exp z_s} \cdot \frac{1 - \exp\{\varrho J(0, t)\}}{\varrho}.$$

Далее, рассуждая как и в предыдущем случае, получаем включение $\lambda \in C\sigma L$.

Следующая лемма показывает полноту проведенного исследования структуры спектра оператора L при $\alpha_1 < \frac{1}{2}$ и $\alpha_2 < \frac{1}{2}$ относительно взаимного расположения векторов a_1 и a_2 : $a_1 = q \exp\{i\varphi\}a_2$, $0 < q < +\infty$, $-\pi < \varphi \leq \pi$.

ЛЕММА 9. *Если $\varphi \notin \theta_1 \cup \theta_2$, то $J = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие $q \neq Q$ (см. п. 1.3) влечет равенство $\theta_1 \cup \theta_2 = (-\pi, \pi]$, т.е. $\varphi \in \theta_1 \cup \theta_2$. Так как $\varphi \notin \theta_1 \cup \theta_2$, то $q = Q$, откуда вытекает равенство $\theta_1 = \theta_2 = (-\pi, \pi)$, т.е. $\varphi = \pi$. Следовательно, $J = 0$.

Приведенные ниже утверждения 2, 3 являются прямым следствием теоремы 3 и предложений 2, 3.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если $\alpha \in \mathcal{A}_2 \setminus \overset{\circ}{\mathcal{A}}_2$, то любая точка λ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ является либо точкой точечного $P\sigma L$, либо точкой непрерывного $C\sigma L$ спектра оператора $L = L(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2)$, $\mu \neq 0, \infty$, т.е.*

$$(\alpha \in \mathcal{A}_2 \setminus \overset{\circ}{\mathcal{A}}_2) \Rightarrow (P\sigma L \cup C\sigma L = \mathbb{C}).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Если $\alpha \in \overset{\circ}{\mathcal{A}}_2$, то оператор $L = L(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2)$, $\mu \neq 0, \infty$, является qM -оператором, точечный спектр $P\sigma L$ которого заполняет всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$, т.е.*

$$(\alpha \in \overset{\circ}{\mathcal{A}}_2) \Rightarrow (L \in qM) \wedge (P\sigma L = \mathbb{C}).$$

Прежде чем сформулировать следующие утверждения, введем необходимые обозначения:

$$P(\alpha_1) = \begin{cases} a_1 \cdot (\mathbb{C}_- + \frac{1}{2} + A_1(S)), & \text{если } \alpha_1 = 1, \\ a_1 \cdot (\overline{\mathbb{C}}_- + A_1(S)), & \text{если } \alpha_1 > 1, \end{cases}$$

$$P(\alpha_2) = \begin{cases} a_2 \cdot (\mathbb{C}_+ - \frac{1}{2} + A_2(S)), & \text{если } \alpha_2 = 1, \\ a_2 \cdot (\overline{\mathbb{C}}_+ + A_2(S)), & \text{если } \alpha_2 > 1. \end{cases}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *При $\alpha \in \mathcal{A}_3$, т.е. при $\alpha_1 \geq 1$ и $\alpha_2 < 1$, структура спектра σL оператора $L = L(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2)$, $\mu \neq 0, \infty$, раскрывается следующими высказываниями:*

$$(A_1 \in B_2) \wedge (A_2 \in B_2) \Rightarrow (L \in qM) \wedge (P\sigma L = P(\alpha_1)),$$

$$(A_1 \in B_2) \wedge (A_2 \notin B_2) \Rightarrow (C\sigma L = \mathbb{C} \setminus P\sigma L) \wedge (P\sigma L = P(\alpha_1)),$$

$$(A_1 \notin B_2) \Rightarrow (L \in qM) \wedge (P\sigma L = \mathbb{C}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство $P\sigma = P(\alpha_1)$, не зависящее от наличия В-свойства у операторов A_1 и A_2 , следует из теоремы 3 и предложения 6. Отметим только равенство $P(\alpha_1) = \mathbb{C}$, вытекающее из условия $A_1 \notin B_2$.

Далее считаем, что $A_1 \in B_2$. Пусть $\lambda \notin P\sigma L$. Полагая в (17) $g = \chi_2$, получаем для решения $v = v(t)$ уравнения (14) при $t > 0$ представление $v(t) = (\exp\{\varrho J(T_2, t)\} - 1)/\varrho$. Следовательно, в (34) можем считать, что

$$m(s) = \frac{1}{\sqrt{T_2}} \cdot \frac{1}{|\varrho|} \cdot \sqrt{\int_0^{T_2} |\exp\{\varrho J(T_2, t)\} - 1|^2 dt}. \quad (50)$$

Если $A_2 \notin B_2$, то из (50) последовательно получим равенство (35) и включение $\lambda \in C\sigma L$.

Пусть теперь $\lambda \notin \overline{P\sigma L}$. Если $A_2 \in B_2$, то из (27) вытекает неравенство (36) и включение $\lambda \in \rho L$. Наконец, равенство $C\sigma L = \overline{P\sigma L} \setminus P\sigma L$ есть прямое следствие предложения 4 и теоремы 3.

Аналогично доказывается следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. При $\alpha \in \mathcal{A}_4$, т.е. при $\alpha_1 < 1$ и $\alpha_2 \geq 1$, структура спектра σL оператора $L = L(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2)$, $\mu \neq 0, \infty$, раскрывается следующими высказываниями:

$$\begin{aligned} (A_2 \in B_1) \wedge (A_1 \in B_1) &\Rightarrow (L \in qM) \wedge (P\sigma L = P(\alpha_2)), \\ (A_2 \in B_1) \wedge (A_1 \notin B_1) &\Rightarrow (C\sigma L = \mathbb{C} \setminus P\sigma L) \wedge (P\sigma L = P(\alpha_2)), \\ (A_2 \notin B_1) &\Rightarrow (L \in qM) \wedge (P\sigma L = \mathbb{C}). \end{aligned}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6. При $\alpha \in \mathcal{A}_5$, т.е. при $\alpha_1 \geq 1$ и $\alpha_2 \geq 1$, структура спектра σL оператора $L = L(\mu, \alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2)$, $\mu \neq 0, \infty$, раскрывается следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \rho L &= \bigcap_{s \in S} \overset{\circ}{P}_s(\alpha), & C\sigma L &= \overline{\rho L} \setminus \rho L, \\ R\sigma L &= \bigcup_{s \in S} \{\mathbb{C} \setminus \overline{P_s(\alpha_1) \cup P_s(\alpha_2)}\} \setminus P\sigma L, & P\sigma L &= \bigcup_{s \in S} P_s(\alpha_1) \cap P_s(\alpha_2). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выписанные равенства являются прямым следствием предложения 6, теорем 2, 3 и структуры множеств $P_s(\alpha_k)$, $k = 1, 2$.

Отметим очевидное следствие утверждения 6, вытекающее из структуры множеств $P_s(\alpha_k)$, $k = 1, 2$:

$$(A_1 \notin B_2) \wedge (A_2 \notin B_1) \Rightarrow (P\sigma L = \mathbb{C}).$$

На этом исследование спектра закончим. Перейдем к рассмотрению примеров.

2.5. Некоторые примеры. Предварительно отметим, что задачу (1)–(2) называют также *задачей сопряжения*. С одной стороны, это связано с тем, что при $t < 0$ и $t > 0$ операция $L(D_t, A)$ может быть отнесена к различным типам (параболический, эллиптический и т.д.) операций математической физики. С другой – с наличием условия “склейки” решения уравнения (1) на гиперплоскости $t = 0$.

Следуя [10; гл. V, § 3], условимся рассматриваемую задачу (1)–(2) называть *регулярной*, если нуль принадлежит резольвентному множеству соответствующего оператора L , т.е. $0 \in \rho L$, и *регулярной в широком смысле*, если $\rho L \neq \emptyset$.

Пусть $\mathfrak{H} = \mathcal{L}_2(0, 2\pi)$. Рассмотрим в области $\Omega = (T_1, T_2) \times (0, 2\pi)$ задачи сопряжения операций классических типов.

I. Пусть $A = D_x$ при условиях периодичности.

а) Полагая в уравнении (1) $\text{Im } a_1 = 0$, $\text{Re } a_2 = 0$, получаем простейшую модель изменения типа: L_1 – гиперболический оператор; L_2 – оператор Коши–Римана. Нелокальная задача регулярна в широком смысле при $\alpha_1 < \frac{1}{2}$, $\alpha_2 < \frac{1}{2}$ и иррегулярна, т.е. $\rho L = \emptyset$, при всех остальных значениях α .

б) Полагая $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, получаем задачу сопряжения двух гиперболических операций $L_1(D_t, A)$, $L_2(D_t, A)$, возможно, с противоположным направлением времени ($a_1 \cdot a_2 < 0$). Зависимость регулярности рассматриваемой задачи от знаков (и значений) a_1, a_2 лучше всего проанализировать на формулах, приведенных в теоремах, где $A_k(s) = is/a_k$, $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Отметим только, что рассматриваемая задача может оказаться иррегулярной при $\alpha_1 \geq 1$, $\alpha_2 \geq 1$.

в) Полагая $a_1 = -a_2 = i$, получаем задачу сопряжения “сопряженных” операторов Коши–Римана. Имеем: $\forall \alpha$ ($\rho L = \emptyset$).

II. Пусть $A = -D_x^2$ при условиях Дирихле.

а) Полагая $a_1 < 0$, $\text{Re } a_2 = 0$, получаем задачу сопряжения в области Ω операции “обратной теплопроводности” $L_1(D_t, A)$ и операции Шрёдингера $L_2(D_t, A)$. Имеем: $\forall \alpha$ ($\alpha \notin \mathcal{A}_2 \Rightarrow \rho L \neq \emptyset$), где, напомним, $\mathcal{A}_2 = \{\alpha : (\frac{1}{2} \leq \alpha_1 < 1) \wedge (\alpha_2 < 1) \vee (\alpha_1 < 1) \wedge (\frac{1}{2} \leq \alpha_2 < 1)\}$.

б) Полагая $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, получаем задачу сопряжения в Ω операций параболического типа. Рассматриваемая задача для уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени ($a_1 \cdot a_2 < 0$) заведомо иррегулярна при любых значениях α .

Задача сопряжения операций прямой ($a_1 > 0, a_2 > 0$) (или обратной: $a_1 < 0, a_2 < 0$) теплопроводности регулярна в широком смысле, если $\alpha_1 < \frac{1}{2}$, $\alpha_2 < \frac{1}{2}$, и иррегулярна, если $\alpha \in \mathcal{A}_2$. При остальных значениях α она может оказаться либо регулярной, либо иррегулярной.

Очевидно, что выписанные формулы спектра оператора L позволяют более детально разобраться с вопросом регулярности любой из предложенных задач. На этом мы останавливаться не будем. Отметим только, что проведенные исследования нетрудно перенести на тот случай, когда a_k , так же как и A , является M -оператором, $a_k: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$, $k = 1, 2$. Заинтересованного читателя мы отсылаем к монографии [10].

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность А. А. Дезину и В. К. Романко за внимание к исследованиям автора.

Список литературы

1. Дезин А. А. Операторы с первой производной во “времени” и нелокальные граничные условия // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 1. С. 61–86.
2. Корниенко В. В. О спектре задачи Коши для иррегулярных уравнений // Материалы международной конференции “Актуальные проблемы теоретической и прикладной математики”. Самарканд: СамГУ, 1997. С. 63–68.
3. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
4. Дезин А. А. О слабой и сильной иррегулярности // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 10. С. 1851–1858.
5. Романко В. К. Трехточечные граничные задачи для уравнений с разрывными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15. № 3. С. 479–491.
6. Кислов Н. В. Неоднородные граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений // Дис. . . . докт. физ.-матем. наук. Москва, 1988.
7. Корниенко В. В. К слабой и сильной иррегулярности // Сиб. матем. журн. 1996. Т. 37. № 3. С. 599–609.
8. Соболев С. Л. Некоторые приложения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
9. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1960.
10. Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980.
11. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77. № 2. С. 181–183.
12. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969.

Самаркандский государственный университет им. А. Навои,
Республика Узбекистан
E-mail: info@samuni.silk.org

Поступила в редакцию
03.08.1999