Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Садовничий, Поднятие функторов U_τ и U_R на категорию ограниченных метрических пространств и категорию равномерных пространств, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 11, 79–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm522>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 05:56:56

УДК 515.12

Ю. В. Садовничий

**Поднятие функторов U_τ и U_R на категорию
ограниченных метрических пространств
и категорию равномерных пространств**

Исследуются метрические и равномерные свойства функторов единичного шара U_β , U_R , U_τ мер с компактными носителями, радоновых мер, τ -аддитивных мер соответственно. Доказывается, что эти функторы поднимаются на категории **BMetr** ограниченных метрических пространств, **BMetr_u** ограниченных метрических пространств и равномерно непрерывных отображений, **Unif** равномерных пространств. Кроме того, доказано, что функтор U_τ сохраняет полноту метрических пространств.

Библиография: 17 названий.

Введение

В последние годы выяснилось, что τ -аддитивные борелевские меры являются наибольшим естественным объектом исследования топологической теории меры в категории **Tych** тихоновских пространств. Систематическое изучение τ -аддитивных мер было начато еще В. С. Варадарайном [1]. Среди прочего он доказал, что для всякого (топологически полного) метризуемого пространства X пространство $P_\tau(X)$ всех τ -аддитивных вероятностных мер метризуемо (и топологически полно). Само понятие τ -аддитивной меры (под названием τ -гладкой) ввел Ле-Кам [2] в 1957 году. Он же определил и слабо радоновы (плотные) меры. А годом ранее Ю. В. Прохоров [3] получил два результата, которые сейчас могут быть сформулированы следующим образом:

- 1) всякая регулярная борелевская мера на польском пространстве является радоновой (знаменитая теорема Прохорова);
- 2) функтор P_R переводит польские пространства в польские (метрика Прохорова порождает $*$ -слабую топологию и сохраняет полноту сепарабельных метрических пространств).

В настоящей работе исследуются метрические и равномерные свойства функторов единичного шара U_β , U_R , U_τ мер с компактными носителями, радоновых мер, τ -аддитивных мер соответственно. Доказывается, что эти функторы поднимаются на категории **BMetr** ограниченных метрических пространств (теорема 2.13), **BMetr_u** ограниченных метрических пространств и равномерно непрерывных отображений (теорема 2.20), **Unif** равномерных пространств (теорема 3.6). Кроме

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00357).

того, отметим, что функтор U_τ сохраняет полноту метрических пространств (теорема 2.15).

Аналогичные задачи были решены для функторов вероятностных мер P_β автором [4], [5] и P_R, P_τ Т. О. Банахом [6]. В [7], [8] были исследованы общекатегорные свойства функторов U_R и U_τ .

В основе приведенных выше результатов о поднятии функторов лежит одна старая (1942 г.) конструкция Л. В. Канторовича, сопоставляющая метрике ρ на компакте K норму $\|\cdot\|$ на векторном пространстве $M^s(K)$ всех знакопеременных регулярных мер на K , которая порождает $*$ -слабую топологию на ограниченных (относительно нормы полной вариации) подмножествах $M^s(K)$ [9]. Эта конструкция обобщается и на произвольные ограниченные метрические пространства, что и было сделано в [1], [4], [5] и что делается в настоящей работе (§ 2), но только для неотрицательных мер. Что касается знакопеременных мер, то уже на единичном шаре $U_\beta^s(X, \rho)$ знакопеременных мер с компактными носителями норма Канторовича $\|\cdot\|$ порождает $*$ -слабую топологию, только если X — компакт [10]. И чисто топологические свойства пространств знакопеременных мер не слишком удовлетворительны. Так, например, функтор U_β^s не сохраняет топологические вложения [11].

В § 1 приводятся необходимые для дальнейшего понятия и факты, касающиеся мер и топологии на пространствах мер. Основные результаты о метрических и равномерных пространствах мер содержатся в § 2 и § 3 соответственно.

Все пространства предполагаются тихоновскими. Бикомпакты называются компактными пространствами или компактными. Символ $\bar{A}$ используется, как правило, для обозначения замыкания множества A в объемлющем пространстве. Через βX обозначается стоун-чеховская компактификация пространства X . Дополнительную информацию из теории меры и общей топологии можно найти, например, в монографиях [12]–[14].

§ 1. Предварительные сведения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. *Борелевской мерой* на пространстве X называется неотрицательная счетноаддитивная функция μ , определенная на σ -алгебре $\mathcal{B}(X)$ всех борелевских подмножеств пространства X . Множество всех борелевских мер на X обозначается через $M(X)$. Для $\mu \in M(X)$ мы полагаем $\|\mu\| = \mu(X)$. Если $\|\mu\| = 1$, то μ называется *вероятностной мерой*. В дальнейшем *мерой* мы будем называть борелевскую меру.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Мера μ на X называется

- а) *радоновой*, если $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B \text{ и } K \text{ есть компакт}\}$ для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(X)$;
- б) *τ -аддитивной*, если $\mu(G_0) = \sup\{\mu(G) : G \in \mathcal{G}_0\}$ для любого открытого множества G_0 и любого направленного вверх семейства $\mathcal{G}_0$ открытых подмножеств X , дающего в сумме множество G_0 ;
- в) *регулярной*, если $\mu(B) = \sup\{\mu(F) : F \subset B \text{ и } F \text{ замкнуто}\}$.

Ясно, что всякая радонова мера τ -аддитивна. Каждая τ -аддитивная мера не только регулярна, но и обладает более сильным свойством.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть μ – τ -аддитивная мера на пространстве X . Тогда для любого открытого множества $G_0 \subset X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество G , что $\overline{G} \subset G_0$ и $\mu(G_0 \setminus \overline{G}) < \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу регулярности X для каждой точки $x \in G_0$ существует такая окрестность Ox , что $\overline{Ox} \subset G_0$. Обозначим через $\mathcal{G}_0$ множество всех конечных объединений этих окрестностей. Ясно, что $\overline{G} \subset G_0$ для каждого элемента $G \in \mathcal{G}_0$ и что $G_0 = \bigcup \mathcal{G}_0$. По определению τ -аддитивности существует такое $G \in \mathcal{G}_0$, что $\mu(G_0 \setminus G) < \varepsilon$. Тем более $\mu(G_0 \setminus \overline{G}) < \varepsilon$.

Теперь на некоторое время предположим, что Y есть подпространство пространства X . Пусть $B \in \mathcal{B}(Y)$. Для $\mu \in M(X)$ положим

$$r_Y^X(\mu)(B) = \inf\{\mu(C) : C \in \mathcal{B}(X) \text{ и } B \subset C\}. \quad (1.1)$$

Известно, что $\mathcal{B}(Y) = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}(X)\}$ (см. [15; предложение 3.4]). Следовательно, (1.1) может быть переписано в виде

$$r_Y^X(\mu)(B) = \inf\{\mu(C) : C \in \mathcal{B}(X) \text{ и } C \cap Y = B\}. \quad (1.1_0)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4 (см. [15]). *Определенная формулой (1.1₀) $r_Y^X(\mu)$ есть мера на Y .*

Таким образом, мы имеем отображение $r_Y^X : M(X) \rightarrow M(Y)$. Мету $r_Y^X(\mu)$ будем называть *ограничением* меры μ на множество Y .

Пусть теперь $\mu \in M(Y)$ и $B \in \mathcal{B}(X)$. Положим

$$e_X^Y(\mu)(B) = \mu(B \cap Y). \quad (1.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5 (см. [15]). *Определенная формулой (1.2) $e_X^Y(\mu)$ есть мера на X , причем $\|e_X^Y(\mu)\| = \|\mu\|$.*

Таким образом, мы имеем отображение $e_X^Y : M(Y) \rightarrow M(X)$. Мету $e_X^Y(\mu)$ будем называть *продолжением* меры μ с множества Y на множество X . Следующее равенство очевидно

$$r_Y^X \circ e_X^Y = \text{id}_{M(Y)}. \quad (1.3)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6 (см. [15]). *Мера $\mu \in M(Y)$ τ -аддитивна тогда и только тогда, когда τ -аддитивна мера $e_X^Y(\mu)$.*

Пусть теперь Y – борелевское подмножество пространства X и $\mu \in M(X)$. Положим

$$\mu|Y = (e_X^Y \circ r_Y^X)(\mu). \quad (1.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. *Если мера $\mu \in M(X)$ τ -аддитивна, то мера $\mu|Y$ также τ -аддитивна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G_0 открыто в X и $\mathcal{G}_0$ – такое направленное вверх семейство открытых множеств, что $G_0 = \bigcup \mathcal{G}_0$. Берем произвольно $\varepsilon > 0$. В силу τ -аддитивности меры μ существует такое $G \in \mathcal{G}_0$, что $\mu(G_0 \setminus G) < \varepsilon$. Тогда $(\mu|Y)(G_0 \setminus G) = \mu(Y \cap (G_0 \setminus G)) \leq \mu(G_0 \setminus G) < \varepsilon$. Следовательно, $(\mu|Y)(G_0) = \sup\{(\mu|Y)(G) : G \in \mathcal{G}_0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.8. Из предложений 1.6 и 1.7 вытекает, что ограничение τ -аддитивной меры на борелевское множество является τ -аддитивной мерой. Прямое доказательство этого утверждения, не использующее меру $\mu|_Y$, менее тривиально.

Обозначим через $M_\tau(X)$, $U_\tau(X)$ и $P_\tau(X)$ соответственно множество всех τ -аддитивных мер на X , множество всех τ -аддитивных мер на X с $\|\mu\| \leq 1$ и множество всех τ -аддитивных вероятностных мер на X . Символы $M_R(X)$, $U_R(X)$ и $P_R(X)$ будут обозначать соответствующие множества радоновых мер на X .

Пространство X называется *абсолютно борелевским множеством*, если оно является борелевским подмножеством любого (какого-нибудь) своего компактного расширения. Следующее утверждение хорошо известно и имеет простое доказательство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. *Если X – абсолютно борелевское множество, то $M_R(X) = M_\tau(X)$ и, следовательно, $U_R(X) = U_\tau(X)$ и $P_R(X) = P_\tau(X)$.*

В силу предложения 1.6 отображение $e_X^Y: M(Y) \rightarrow M(X)$ порождает основные для нас отображения $e_X^Y: U_\tau(Y) \rightarrow U_\tau(X)$ и $e_X^Y: P_\tau(Y) \rightarrow P_\tau(X)$. Использование одного и того же символа e_X^Y не должно привести к недоразумению, поскольку имеется отображение наибольших множеств $e_X^Y: M(Y) \rightarrow M(X)$.

Положим $U_Y^*(X) = \{\mu \in U_\tau(X) : \mu(B) = 0 \text{ для любого } B \in \mathcal{B}(X) \text{ такого, что } B \cap Y = \emptyset\}$. Аналогично определяется и множество $P_Y^*(X) \subset U_Y^*(X)$. Следующее утверждение непосредственно вытекает из определений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. *Верны следующие равенства:*

$$e_X^Y \circ r_Y^X|_{U_Y^*(X)} = \text{id} \quad \text{и} \quad e_X^Y \circ r_Y^X|_{P_Y^*(X)} = \text{id}.$$

Из предложений 1.6 и 1.10 вытекает

$$e_X^Y(U_\tau(Y)) = U_Y^*(X). \quad (1.5)$$

Из (1.3) и (1.5) следует

$$r_Y^X(U_Y^*(X)) = U_\tau(Y). \quad (1.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.11. Для пространства X через $\mathcal{A}_0(X)$ обозначим наименьшую алгебру, содержащую все нуль-множества X , через $M^{0,f}(X)$ – множество всех регулярных конечно аддитивных мер на $\mathcal{A}_0(X)$, через $C_b(X)$ – банахово пространство всех ограниченных непрерывных вещественных функций на X . Отметим, что множество $M^{0,f}(X)$ является *конусом*, т.е. содержит все аффинные комбинации своих элементов. Для меры $\mu \in M^{0,f}(X)$ и функции $\varphi \in C_b(X)$ стандартным образом посредством верхних и нижних интегральных сумм относительно всех конечных $\mathcal{A}_0$ -разбиений множества X (т.е. дизъюнктивных покрытий X элементами семейства $\mathcal{A}_0$) определен интеграл Римана $\int \varphi d\mu \equiv \int^{\mathcal{A}_0} \varphi d\mu$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.12. Если мера μ определена на большей алгебре, например на $\mathcal{B}(X)$, то определенный конечными $\mathcal{B}$ -разбиениями интеграл $\int^{\mathcal{B}} \varphi d\mu$ совпадает с $\int^{\mathcal{A}_0} \varphi d\mu$. В самом деле, при увеличении числа разбиений нижний интеграл увеличивается, а верхний — уменьшается. Но они совпадают уже для алгебры $\mathcal{A}_0$.

При фиксированной мере μ ее интегральное представление является функционалом $\int_\mu : C_b(X) \rightarrow \mathbb{R}$. Этот функционал линеен, непрерывен ($\|\int_\mu\| = \|\mu\|$) и неотрицателен.

Через $C_b(X)^*$ обозначим сопряженное к $C_b(X)$ пространство, т.е. линейное пространство всех непрерывных линейных функционалов на $C_b(X)$, через $C_b(X)_+^*$ — его положительный конус. Функционал $l \in C_b(X)_+^*$ называется σ -гладким, если $\lim l(\varphi_n) = 0$ для всякой убывающей последовательности функций φ_n , $\varphi_n \downarrow 0$.

ТЕОРЕМА РИССА [1]. Для любого пространства X интегральное представление $\int : M^{0,f}(X) \rightarrow C_b(X)_+^*$ является метрическим и аффинным изоморфизмом. При этом счетноаддитивным мерам соответствуют в точности σ -гладкие функционалы.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.13. В дальнейшем мы не будем различать меру μ и соответствующий ей линейный функционал $\int_\mu$, который будем обозначать той же буквой μ . В соответствии с этим интеграл $\int \varphi d\mu$ будем обозначать символом $\mu(\varphi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.14. Пусть $\mu \in M_\tau(X)$ и $F_0 \subset X$ — замкнутое множество. Тогда существует такое нуль-множество $F \supset F_0$, что $\mu(F_0) = \mu(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\mathcal{F}$ семейство всех нуль-множеств, содержащих F_0 . Ясно, что семейство $\mathcal{F}$ направлено вниз и $F_0 = \bigcap \mathcal{F}$. По двойственному определению τ -аддитивности $\mu(F_0) = \inf \{\mu(F) : F \in \mathcal{F}\}$. Следовательно, для каждого $n \geq 1$ существует такое $F_n \in \mathcal{F}$, что $\mu(F_n \setminus F_0) < 1/n$. Положим $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n$. Тогда F есть нуль-множество и $\mu(F) = \mu(F_0)$ в силу счетной аддитивности меры μ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.15. Согласно предложению 1.14 всякая τ -аддитивная мера однозначно определяется своими значениями на нуль-множествах. Поэтому отображение ограничения $M_\tau(X) \rightarrow M^{0,f}(X)$, ставящее в соответствие функции $\mu : \mathcal{B}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ функцию $\mu|_{\mathcal{A}_0(X)}$, инъективно. Следовательно, мы можем считать, что $M_\tau(X) \subset M^{0,f}(X)$.

На множестве $\mathbb{R}^{C_b(X)}$ рассмотрим топологию тихоновского произведения. Тогда включения $M_\tau(X) \subset M^{0,f}(X) = C_b(X)_+^* \subset \mathbb{R}^{C_b(X)}$ индуцируют на множестве $M_\tau(X)$ и его подмножествах так называемую $*$ -слабую топологию. Предбазу этой топологии образуют множества вида

$$O(a, \varphi, \varepsilon) = \{\mu \in M_\tau(X) : |a - \mu(\varphi)| < \varepsilon\}, \quad (1.7)$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C_b(X)$, $\varepsilon > 0$. Множества $O(a_1, \dots, a_k, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \varepsilon) = \{\mu \in M_\tau(X) : |a_i - \mu(\varphi_i)| < \varepsilon; i = 1, \dots, k\}$ образуют базу. Наконец, множества $O(\mu_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \varepsilon) \equiv O(\mu_0(\varphi_1), \dots, \mu_0(\varphi_k), \varphi_1, \dots, \varphi_k, \varepsilon)$ образуют базу окрестностей меры μ_0 .

Вложения $P_\tau(X) \subset U_\tau(X) \subset M_\tau(X)$ индуцируют $*$ -слабую топологию на множествах $P_\tau(X)$ и $U_\tau(X)$. Поскольку в компактном случае понятия регулярности, τ -аддитивности и радоновости совпадают, множества $P_\tau(K)$ и $U_\tau(K)$, где K – компакт, будем обозначать через $P(K)$ и $U(K)$ соответственно. Известно, что $P(K)$ и $U(K)$ компактны в $*$ -слабой топологии.

ЛЕММА 1.6. Пусть $Y \subset X$, $\mu \in M_\tau(Y)$, $\varphi \in C_b(X)$ и $\tilde{\varphi} = \varphi|_Y$. Тогда

$$\int_Y \tilde{\varphi} d\mu = \int_X \varphi d(e_X^Y(\mu)).$$

Доказательство состоит в рутинной расшивке определений. При этом используется равенство (1.5) (вернее, “половина” этого равенства: левая часть содержится в правой) и то, что всякое конечное борелевское разбиение пространства Y является следом конечного борелевского разбиения пространства X .

ЛЕММА 1.7. Пусть $Y \subset X$, $\varphi \in C_b(X)$ и $\tilde{\varphi} = \varphi|_Y$. Пусть $O\langle a, \tilde{\varphi}, \varepsilon \rangle$ и $O\langle a, \varphi, \varepsilon \rangle$ – предбазисные множества пространств $U_\tau(Y)$ и $U_\tau(X)$ соответственно. Тогда $e_X^Y(O\langle a, \tilde{\varphi}, \varepsilon \rangle) = O\langle a, \varphi, \varepsilon \rangle \cap U_Y^*(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 1.16 вытекает, что $\mu(\tilde{\varphi}) = e_X^Y(\mu)(\varphi)$ для всякой меры $\mu \in U_\tau(Y)$. Следовательно, $|\mu(\tilde{\varphi}) - a| < \varepsilon$ тогда и только тогда, когда $|e_X^Y(\mu)(\varphi) - a| < \varepsilon$. Поэтому $\mu \in O\langle a, \tilde{\varphi}, \varepsilon \rangle$ тогда и только тогда, когда $e_X^Y(\mu) \in O\langle a, \varphi, \varepsilon \rangle$. Остается применить равенство (1.5).

Отображения $e_{\beta X}^X: U_\tau(X) \rightarrow U_X^*(\beta X)$ и $r_X^{\beta X}: U_X^*(\beta X) \rightarrow U_\tau(X)$ обозначим через e^X и r_X соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.18. Для любого пространства X отображения $e^X: U_\tau(X) \rightarrow U_X^*(\beta X)$ и $r_X: U_X^*(\beta X) \rightarrow U_\tau(X)$ являются взаимно обратными гомеоморфизмами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 1.10 указанные выше отображения взаимно обратны как отображения множеств. Но в силу леммы 1.17 e^X отображает предбазу пространства $U_\tau(X)$ на предбазу пространства $U_X^*(\beta X)$. Следовательно, e^X – гомеоморфизм, откуда вытекает, что r_X – также гомеоморфизм.

Пусть $f: X \rightarrow Z$ – непрерывное отображение и $\mu \in U_\tau(X)$. Считая μ линейным функционалом, определим функционал $U_\tau^1(f)(\mu): C_b(Z) \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$U_\tau^1(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f). \quad (1.8)$$

Ясно, что этот функционал линеен, неотрицателен и непрерывен: $\|U_\tau^1(f)(\mu)\| = \|\mu\|$. Последнее равенство вытекает из того, что норма неотрицательного функционала равна его значению на единичной функции.

Напомним одно определение. Пусть S – топологическое пространство и $l \in C_b(S)_+^*$. Функционал l называется τ -гладким, если для любой направленной вниз системы функций $\{\varphi_\alpha \in C_b(S) : \alpha \in A\}$ такой, что $\varphi_\alpha \downarrow 0$, имеем $l(\varphi_\alpha) \rightarrow 0$.

В интегральном представлении из теоремы Рисса τ -гладкие функционалы и только они соответствуют τ -аддитивным мерам (см. [1; часть I, теорема 24]). Непосредственная проверка показывает, что функционал $U_\tau^1(f)(\mu)$ является τ -гладким.

Таким образом, равенство (1.8) определяет отображение $U_\tau^1(f): U_\tau(X) \rightarrow U_\tau(Z)$. Это отображение непрерывно, поскольку $U_\tau^1(f)(O \langle a, \varphi \circ f, \varepsilon \rangle) \subset O \langle a, \varphi, \varepsilon \rangle$ в силу (1.8).

Рассмотрим теперь меру $\mu \in U_\tau(X)$ как функцию борелевских множеств. Определим меру $U_\tau^2(f)(\mu)$, полагая

$$U_\tau^2(f)(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)). \quad (1.9)$$

Ясно, что $U_\tau^2(f)(\mu)$ — мера, $\|U_\tau^2(f)(\mu)\| = U_\tau^2(f)(\mu)(Z) = \mu(f^{-1}(Z)) = \mu(X) = \|\mu\|$. Наконец, непосредственная проверка показывает, что $U_\tau^2(f)(\mu)$ — τ -аддитивная мера. Таким образом, равенство (1.9) определяет отображение $U_\tau^2(f): U_\tau(X) \rightarrow U_\tau(Z)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.19. *Имеет место равенство $U_\tau^1(f) = U_\tau^2(f)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $U_\tau^i(f)(\mu) = \nu_i$. Поскольку отображение $U_\tau^i(f)$ сохраняет нормы мер, достаточно показать, что $\nu_2 \leq \nu_1$, или, более точно, $\int \nu_2 \leq \int \nu_1$.

Таким образом, надо доказать, что $\int \varphi d\nu_2 \leq \int (\varphi \circ f) d\mu$. Для этого достаточно проверить это неравенство для нижних интегралов. Нижний интеграл $\int_* \varphi d\nu_2$ определяется нижними интегральными суммами по всем конечным $\mathcal{B}$ -разбиениям пространства Z . Согласно (1.9) им соответствуют $\mathcal{B}$ -разбиения пространства X , элементы которых имеют вид $f^{-1}(B)$. Но конечные $\mathcal{B}$ -разбиения пространства X вида $f^{-1}(\pi)$ составляют только часть его конечных $\mathcal{B}$ -разбиений. Следовательно, $\int_* \varphi d\nu_2 \leq \int_* (\varphi \circ f) d\mu$.

Отображение $U_\tau^1(f) = U_\tau^2(f)$ будем обозначать символом $U_\tau(f)$. Поскольку отображение $U_\tau(f)$ сохраняет норму мер, оно порождает отображение $P_\tau(f): P_\tau(X) \rightarrow P_\tau(Z)$. Если X и Z — компакты, будем писать $U(f)$ и $P(f)$ вместо $U_\tau(f)$ и $P_\tau(f)$.

Каждое из определений (1.8) и (1.9) показывает, что $U_\tau(f \circ g) = U_\tau(f) \circ U_\tau(g)$. Итак, мы имеем ковариантный функтор $U_\tau: \mathbf{Tych} \rightarrow \mathbf{Tych}$, действующий в категории тихоновских пространств и их непрерывных отображений. Этот функтор порождает много других функторов, например U_R, U, P_τ, P_R, P .

Из определения (1.9) вытекает, что если $i_X^Y: Y \rightarrow X$ — тождественное вложение, то

$$U_\tau(i_X^Y) = e_X^Y: U_\tau(Y) \rightarrow U_\tau(X). \quad (1.10)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.20. *Пусть γX — произвольная компактификация пространства X . Тогда $e_{\gamma X}^X: U_\tau(X) \rightarrow U(\gamma X)$ есть топологическое вложение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f_\gamma: \beta X \rightarrow \gamma X$ — естественная проекция. Тогда $i_{\gamma X}^X = f_\gamma \circ i_{\beta X}^X$. В силу (1.10) и функториальности U_τ это равенство переходит в

$$e_{\gamma X}^X = U(f_\gamma) \circ e^X. \quad (1.11)$$

Но согласно предложению 1.18 отображение $e^X: U_\tau(X) \rightarrow U_X^*(\beta X)$ является гомеоморфизмом. Поэтому согласно (1.11) достаточно показать, что $U(f_\gamma)|U_X^*(\beta X)$

есть гомеоморфизм. Но из (1.3) и (1.5) вытекает биективность отображения $e_{\gamma X}^X$. Следовательно, в силу (1.11) отображение $U(f_\gamma)|U_X^*(\beta X)$ также биективно. Поэтому оно будет гомеоморфизмом, если мы покажем, что это — замкнутое отображение. Для этого достаточно проверить, что $U_X^*(\beta X) = U(f_\gamma)^{-1}(U_X^*(\gamma X))$. Включение $\subset$ имеет место в силу (1.5) и (1.11). Пусть теперь $\mu \in U(\beta X)$ и

$$U(f_\gamma)(\mu) \subset U_X^*(\gamma X). \quad (1.12)$$

Надо показать, что $\mu(K) = 0$ для любого компакта $K \subset \beta X \setminus X$. Но $f_\gamma(\beta X \setminus X) = \gamma X \setminus X$. Значит, $f_\gamma(K) \subset \gamma X \setminus X$ и $U(f_\gamma)(\mu)(f_\gamma(K)) = 0$ согласно (1.12). Тогда по определению (1.9) имеет место равенство $\mu(f_\gamma^{-1}(f_\gamma(K))) = 0$. Следовательно, $\mu(K) = 0$.

Из предложений 1.20, 1.10 и равенства (1.5) вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.21. Пусть γX — компактификация пространства X . Тогда отображения $e_{\gamma X}^X: U_\tau(X) \rightarrow U_X^*(\gamma X)$ и $r_X^{\gamma X}: U_X^*(\gamma X) \rightarrow U_\tau(X)$ являются взаимно обратными гомеоморфизмами.

Сделаем еще один вывод из предложения 1.20. При его доказательстве мы убедились, что отображение $U(f_\gamma)|U_X^*(\beta X)$ — гомеоморфизм. Но образ этого гомеоморфизма есть $U_X^*(\gamma X)$ согласно (1.5) и (1.11). Таким образом, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.22. Пусть $f_\gamma: \beta X \rightarrow \gamma X$ есть естественная проекция на компактификацию γX . Тогда $U(f_\gamma)|U_X^*(\beta X)$ гомеоморфно отображает множество $U_X^*(\beta X)$ на множество $U_X^*(\gamma X)$.

Вернемся теперь к определению топологии на $U_\tau(X)$. В определении (1.7) предбазисных множеств требование, чтобы φ пробегало все множество $C_b(X)$, избыточно. Начнем с компактного случая.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.23. Пусть K — компакт и $C \subset C(K)$ — семейство функций, которое разделяет точки компакта K , — замкнуто относительно конечных произведений и содержит единицу. Тогда множества $\mathcal{B}_C = \{O(\mu, \varphi, \varepsilon) : \varphi \in C\}$ есть предбаза топологии компакта $U(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с того, что в определении (1.7) предбазисных множеств достаточно ограничиться функциями φ из какого-нибудь всюду плотного в $C_b(K) = C(K)$ множества D . Тогда множество $\mathcal{B}_D$ будет предбазой компакта $U(K)$. Следовательно, достаточно показать, что для некоторого плотного в $C(K)$ множества D произвольная окрестность $O(\mu, \psi, \varepsilon) \in \mathcal{B}_D$ содержит окрестность меры μ , являющуюся пересечением конечного числа окрестностей из $\mathcal{B}_C$. В качестве D возьмем наименьшее подкольцо кольца $C(K)$, содержащее множество C и все константы. Множество D плотно в $C(K)$ по теореме Вейерштрасса–Стоуна. Поскольку C содержит все конечные произведения своих элементов, любая функция $\psi \in D$ имеет вид $\psi = r_1\varphi_1 + \dots + r_k\varphi_k + r_{k+1}$, где $\varphi_i \in C$, $r_i \in \mathbb{R}$. Положим $r = \max\{|r_i| : i = 1, \dots, k+1\}$, $\delta = \varepsilon/(r+1)$ и покажем, что $\bigcap_{i=1}^{k+1} O(\mu, \varphi_i, \delta) \subset O(\mu, \psi, \varepsilon)$, где $\varphi_{k+1} = 1_K$. Пусть $\nu \in \bigcap_{i=1}^{k+1} O(\mu, \varphi_i, \delta) \equiv$

$O(\mu, \varphi_1, \dots, \varphi_{k+1}, \delta)$. Тогда

$$\begin{aligned} |\mu(\psi) - \nu(\psi)| &= \left| \sum_{i=1}^k r_i(\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)) + \mu(r_{k+1}) - \nu(r_{k+1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k |r_i| \cdot |\mu(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| + |r_{k+1}| \cdot |\mu(1_K) - \nu(1_K)| \\ &< (\text{поскольку } \nu \in O(\mu, \varphi_i, \delta)) < \sum_{i=1}^k |r_i| \cdot \frac{\varepsilon}{r} + |r_{k+1}| \cdot \frac{\varepsilon}{r} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим общий случай. Скажем, что семейство Φ непрерывных функций $\varphi: X \rightarrow [0, 1]$ *правильно разделяет* точки и замкнутые множества пространства X , если для всякого замкнутого множества $F \subset X$ и точки $x \in X \setminus F$ существует такая функция $\varphi \in \Phi$, что $\varphi(F) = 0$ и $\varphi(x) = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.24. *Если семейство $\Phi \subset C_b(X)$ правильно разделяет точки и замкнутые множества пространства X , содержит все конечные произведения своих элементов и единицу, то множества $O\langle a, \varphi, \varepsilon \rangle$, $\varphi \in \Phi$, образуют предбазу пространства $U_\tau(X)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства второй теоремы Тихонова (см. [13; гл. 2]) вытекает, что диагональное произведение $f: X \rightarrow I^\Phi$ функций $\varphi \in \Phi$ является вложением пространства X в тихоновский куб I^Φ . Положим $\gamma X = f(X)$. Обозначим через $C_\gamma(X)$ множество всех функций из $C_b(X)$, которые продолжаются на γX . Из определения отображения f следует, что $\Phi \subset C_\gamma(X)$. Обозначим через $\overline{\varphi}$ продолжение функции $\varphi \in \Phi$ на γX . Пусть $\overline{f}: \gamma X \rightarrow I^\Phi$ — диагональное произведение функций $\overline{\varphi}$, $\varphi \in \Phi$. Очевидно, что $\overline{f}$ — тождественное вложение. Это означает, что $\overline{\Phi} = \{\overline{\varphi} : \varphi \in \Phi\}$ разделяет точки компакта γX . Кроме того, $\overline{\Phi}$ содержит произведения своих элементов ($\overline{\varphi_1} \cdot \overline{\varphi_2} = \overline{\varphi_1 \cdot \varphi_2}$) и единицу ($\overline{1_X} = 1_{\gamma X}$). Значит, согласно предложению 1.23 множества $O\langle a, \overline{\varphi}, \varepsilon \rangle$, $\varphi \in \Phi$, образуют предбазу компакта $U(\gamma X)$. Следовательно, следы $O\langle a, \overline{\varphi}, \varepsilon \rangle \cap U_X^*(\gamma X)$ этих множеств на $U_X^*(\gamma X)$ образуют предбазу пространства $U_X^*(\gamma X)$. В силу предложения 1.21 утверждения леммы 1.17 применительно к нашему случаю можно переписать следующим образом:

$$O\langle a, \varphi, \varepsilon \rangle = r_X^{\gamma X}(O\langle a, \overline{\varphi}, \varepsilon \rangle \cap U_X^*(\gamma X)). \quad (1.13)$$

Следовательно, гомеоморфизм $r_X^{\gamma X}: U_X^*(\gamma X) \rightarrow U_\tau(X)$ отображает предбазисное множество $O\langle a, \overline{\varphi}, \varepsilon \rangle \cap U_X^*(\gamma X)$ пространства $U_X^*(\gamma X)$ на множество $O\langle a, \varphi, \varepsilon \rangle$. Но всякий гомеоморфизм $g: S \rightarrow T$ отображает всякую предбазу пространства S на предбазу пространства T . Следовательно, множества $O\langle a, \varphi, \varepsilon \rangle$, $\varphi \in \Phi$, образуют предбазу пространства $U_\tau(X)$.

Пусть $\mu_0 \in U_\tau(X)$ и $V_1, \dots, V_k$ — открытые подмножества пространства X . Для $\varepsilon > 0$ положим $N(\mu_0, V_1, \dots, V_k, \varepsilon) = \{\mu \in U_\tau(X) : \mu(V_i) > \mu_0(V_i) - \varepsilon, |\mu(X) - \mu_0(X)| < \varepsilon\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.25 [1; часть II, п. 2, замечание III]. *Множества $N(\mu_0, V_1, \dots, V_k, \varepsilon)$ образуют базу пространства $U_\tau(X)$.*

Приведем еще один способ задания топологии на $U_\tau(X)$ посредством непрерывных псевдометрик на X . Псевдометрика ρ на X называется *непрерывной*, если она непрерывна как функция на $X \times X$. Это эквивалентно открытости ε -шаров $O_\varepsilon^\rho(x)$ с центрами в точке x . В дальнейшем предполагается, что все изначально заданные псевдометрики непрерывны. Скажем, что семейство R псевдометрик на X *разделяет точки и замкнутые множества* пространства X , если для каждого замкнутого множества $F \subset X$ и точки $x \in X \setminus F$ существует такая псевдометрика $\rho \in R$, что $\rho(x, F) > 0$. Семейство R псевдометрик на X называется *направленным*, если для любых $\rho_1, \rho_2 \in R$ существует такая псевдометрика $\rho \in R$, что $\max\{\rho_1, \rho_2\} \leq \rho$. Для семейства R псевдометрик на X через $\Phi(R)$ обозначается множество всех функций $\varphi \in C_b(X)$, каждая из которых равномерно непрерывна относительно некоторой псевдометрики $\rho \in R$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.26. *Пусть R – направленное семейство псевдометрик на X , разделяющее точки и замкнутые множества пространства X . Тогда семейство*

$$O(\mu_0, \varphi, 1), \quad \varphi \in \Phi(R), \quad (1.14)$$

образует предбазу окрестностей меры $\mu_0 \in U_\tau(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим сначала, что $\Phi(R)$ есть кольцо над $\mathbb{R}$. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(R)$, φ_i равномерно непрерывны относительно $\rho_i \in R$. Возьмем $\rho \in R$ так, что $\rho \geq \max\{\rho_1, \rho_2\}$. Тогда φ_1, φ_2 равномерно непрерывны относительно ρ . Следовательно, равномерно непрерывны функции $r\varphi_i$, где $r \in \mathbb{R}$, $\varphi_1 + \varphi_2$ и $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ (в последнем случае ограниченность φ_i существенна). Значит, $\Phi(R)$ является кольцом над $\mathbb{R}$, содержащим все константы.

Далее, $\Phi(R)$ правильно разделяет точки и замкнутые подмножества X . В самом деле, пусть $x_0 \in X \setminus F$. Существует такая псевдометрика $\rho \in R$, что $\rho(x_0, F) = a > 0$. Положим $\varphi(x) = \min\{1, \rho(x, F)/a\}$. Ясно, что функция φ равномерно непрерывна относительно ρ и удовлетворяет условию правильного разделения точки x_0 и множества F . Следуя доказательству предложения 1.24, мы найдем такое компактное расширение γX , что $\Phi(R) \subset C_\gamma(X)$ и $\overline{\Phi} = \{\overline{\varphi} : \varphi \in \Phi(R)\}$ разделяет точки компакта X . Поскольку $\overline{\Phi}$, как и $\Phi(R)$, содержит все константы и является кольцом, $\overline{\Phi}$ всюду плотно в $C(\gamma X)$ по теореме Вейерштрасса–Стоуна. Следовательно, семейство $O(e_{\gamma X}^X(\mu_0), \overline{\varphi}, \varepsilon)$, $\overline{\varphi} \in \overline{\Phi}$, $\varepsilon > 0$, является предбазой окрестностей меры $e_{\gamma X}^X(\mu_0)$. Поскольку $\overline{\Phi}$ замкнуто относительно умножения на константы, семейство $O(e_{\gamma X}^X(\mu_0), \overline{\varphi}, 1)$, $\overline{\varphi} \in \overline{\Phi}$, также является предбазой окрестностей меры $e_{\gamma X}^X(\mu_0)$ в $U_\tau(\gamma X)$. Следовательно, семейство $O(e_{\gamma X}^X(\mu_0), \overline{\varphi}, 1) \cap U_X^*(\gamma X)$, $\overline{\varphi} \in \overline{\Phi}$, является предбазой окрестностей меры $e_{\gamma X}^X(\mu_0)$ в $U_X^*(\gamma X)$. Тогда семейство $r_X^{\gamma X}(O(e_{\gamma X}^X(\mu_0), \overline{\varphi}, 1) \cap U_X^*(\gamma X))$, $\overline{\varphi} \in \overline{\Phi}$, есть предбаза окрестностей меры $r_X^{\gamma X}(e_{\gamma X}^X(\mu_0))$ в $r_X^{\gamma X}(U_X^*(\gamma X))$, так как $r_X^{\gamma X} : U_X^*(\gamma X) \rightarrow U_\tau(X)$ является гомеоморфизмом согласно предложению 1.21. Наконец, $r_X^{\gamma X}(e_{\gamma X}^X(\mu_0)) = \mu_0$ согласно (1.3), а $r_X^{\gamma X}(O(e_{\gamma X}^X(\mu_0), \overline{\varphi}, 1) \cap U_X^*(\gamma X)) = O(\mu_0, \varphi, 1)$ согласно (1.13).

СЛЕДСТВИЕ 1.27. Если (X, ρ) – метрическое пространство, то семейство $\{O(\mu_0, \varphi, 1)\}$, где φ пробегает множество равномерно непрерывных функций, образует предбазу окрестностей меры $\mu_0 \in U_\tau(X)$.

Из теоремы Фубини и равенства (1.5) для пары $(\gamma X, X)$ вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.28. Если $\mu, \nu \in U_\tau(X)$, то $\mu \otimes \nu \in U_\tau(X \times X)$.

Более подробное доказательство можно найти в [12; гл. 3]. Следующие утверждения достаточно очевидны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.29. Аффинная комбинация τ -аддитивных мер τ -аддитивна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.30. Для всякого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Z$ отображение $U_\tau(f)$ аффинно, т.е.

$$U_\tau(f)(t_1\mu_1 + t_2\mu_2) = t_1U_\tau(f)(\mu_1) + t_2U_\tau(f)(\mu_2)$$

при $t_1, t_2 \geq 0$ и $\mu_1, \mu_2 \in U_\tau(X)$.

Для пространства X через $U_\omega(X)$ (соответственно $U_\beta(X)$) обозначим множество всех мер $\mu \in U_\tau(X)$ с конечными (соответственно компактными) носителями. Следующее утверждение широко известно, но его доказательство не совсем тривиально.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.31. Если Y всюду плотно в X , то $U_\omega(Y)$ всюду плотно в $U_\tau(X)$.

Поскольку $U_\omega(Y) \subset U_\beta(Y) \subset U_\tau(X)$, то из предложения 1.31 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.32. Если Y всюду плотно в X , то $U_\beta(Y)$ всюду плотно в $U_\tau(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.33. Пусть γX – компактификация пространства X , $p_1: X \times X \rightarrow X$ и $\pi_1: \gamma X \times \gamma X \rightarrow \gamma X$ – проектирования на первый сомножитель, $\text{pr}_1 = P_\tau(p_1)$, $\text{pr}'_1 = P_\tau(\pi_1)$. Пусть $\lambda \in P_\tau(X \times X)$, $\mu \in P_\tau(X)$ – такие меры, что $\text{pr}_1(\lambda) = \mu$. Положим $\lambda' = e_{\gamma X \times \gamma X}^{\lambda}(\lambda)$, $\mu' = e_{\gamma X}^{\mu}(\mu)$. Тогда $\text{pr}'_1(\lambda') = \mu'$.

Наоборот, пусть $\nu \in P_{X \times X}^*(\gamma X \times \gamma X)$ и $\text{pr}'_1(\nu) = \mu'$. Тогда $\text{pr}_1(r_{X \times X}^{\gamma X \times \gamma X}(\nu)) = \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B \in \mathcal{B}(\gamma X)$. Тогда $\lambda'(\pi_1^{-1}(B)) = (\text{по определению } \lambda') = \lambda(X \times X \cap \pi_1^{-1}(B)) = \lambda(P_1^{-1}(B \cap X)) = (\text{поскольку } \text{pr}_1(\lambda) = \mu) = \mu(B \cap X) = \mu'(B)$. Следовательно, $\text{pr}'_1(\lambda') = \mu'$ по определению отображения pr'_1 .

Теперь докажем второе утверждение. Обозначим $r_{X \times X}^{\gamma X \times \gamma X}(\nu)$ через $r(\nu)$. Согласно предложению 1.21 имеем $r(\nu) \in P_\tau(X \times X)$. Пусть $B \in \mathcal{B}(X)$. Возьмем произвольно множество $C \in \mathcal{B}(\gamma X)$ со свойством $B = X \cap C$. Тогда $\mu(B) = \mu'(C) = (\text{поскольку } \text{pr}'_1(\nu) = \mu') = \nu(\pi_1^{-1}(C)) \geq r(\nu)(X \times X \cap \pi_1^{-1}(C)) = r(\nu)(p_1^{-1}(B)) = \text{pr}_1(r(\nu))(B)$. Итак, $\mu \geq \text{pr}_1(r(\nu))$. Отсюда вытекает равенство $\mu = \text{pr}_1(r(\nu))$, поскольку μ и $\text{pr}_1(r(\nu))$ – вероятностные меры.

§ 2. Метрические пространства

Пусть $\mu, \nu \in P_\tau(X)$. Положим $\Lambda(\mu, \nu) = \{\lambda \in P_\tau(X \times X) : \text{pr}_1(\lambda) = \mu, \text{pr}_2(\lambda) = \nu\}$, где $\text{pr}_i: P_\tau(X \times X) \rightarrow P_\tau(X)$ — отображение, порожденное проектированием на i -й сомножитель.

Множество $\Lambda(\mu, \nu)$ непусто. В самом деле, по предложению 1.28 $\mu \otimes \nu \in P_\tau(X \times X)$ и очевидно, что $\mu \otimes \nu \in \Lambda(\mu, \nu)$.

Пусть ρ — ограниченная непрерывная псевдометрика на X . Определим функцию $P_\tau(\rho): P_\tau(X) \times P_\tau(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ следующим образом:

$$P_\tau(\rho)(\mu, \nu) = \inf \left\{ \int_{X \times X} \rho d\lambda : \lambda \in \Lambda(\mu, \nu) \right\}. \quad (2.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Поскольку определение множества $\Lambda(\mu, \nu)$ не зависит от конкретной псевдометрики ρ , из определения (2.1) непосредственно вытекает, что для пропорциональной псевдометрики $t\rho$, где $t > 0$, имеем $P_\tau(t\rho) = tP_\tau(\rho)$.

ЛЕММА 2.2. *Существует такая мера $\lambda \in \Lambda(\mu, \nu)$, что $P_\tau(\rho)(\mu, \nu) = \lambda(\rho)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению функции $P_\tau(\rho)$ существует такая последовательность $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty \subset \Lambda(\mu, \nu)$, что

$$P_\tau(\rho)(\mu, \nu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\rho). \quad (2.2)$$

Пусть cX — некоторая компактификация пространства X . Не перегружая доказательство ненужными подробностями, обозначим через μ', ν', λ'_n продолжения мер μ, ν, λ_n соответственно на cX и $cX \times cX$. Тогда согласно предложению 1.21 меры μ', ν' и λ'_n будут принадлежать $P_X^*(cX)$ и $P_{X \times X}^*(cX \times cX)$. При этом

$$\lambda'_n \in \Lambda(\mu', \nu') \quad (2.3)$$

в силу предложения 1.33. Поскольку $P(cX \times cX)$ — компакт, существует мера $\lambda' \in P(cX \times cX)$, являющаяся предельной точкой последовательности $\{\lambda'_n\}_{n=1}^\infty$. Из (2.3) и непрерывности отображений $\text{pr}'_i: P(cX \times cX) \rightarrow P(cX)$ (см. обозначения предложения 1.33) получаем

$$\lambda' \in \Lambda(\mu', \nu'). \quad (2.4)$$

Далее, $\lambda'_n \in P_{X \times X}^*(cX \times cX)$ влечет

$$\lambda' \in P_{X \times X}^*(cX \times cX). \quad (2.5)$$

Положим $\lambda = r_{X \times X}^{cX \times cX}(\lambda')$. Согласно (2.5) и предложению 1.21 имеем $\lambda \in P_\tau(cX \times cX)$. А из предложения 1.33 вытекает, что $\lambda \in \Lambda(\mu, \nu)$. Поскольку λ' является предельной точкой последовательности $\{\lambda'_n\}_{n=1}^\infty$, из предложения 1.21 получаем, что λ является предельной точкой последовательности $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$. Поэтому из (2.2) вытекает равенство $P_\tau(\rho)(\mu, \nu) = \lambda(\rho)$.

Теперь по схеме доказательства леммы 6 из [16] получаем следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Если ρ – ограниченная непрерывная (псевдо)метрика на X , то $P_\tau(\rho)$ – ограниченная (псевдо)метрика на $P_\tau(X)$, причем $\text{diam } P_\tau(\rho) = \text{diam } \rho$.

Пусть снова ρ – ограниченная непрерывная псевдометрика на X и $d = \text{diam } \rho$. Для мер $\mu, \nu \in U_\tau(X)$ положим

$$U_\tau(\rho)(\mu, \nu) = \min\{\|\mu\|, \|\nu\|\} \cdot P_\tau(\rho)\left(\frac{\mu}{\|\mu\|}, \frac{\nu}{\|\nu\|}\right) + d \cdot \|\mu\| - \|\nu\|, \quad \mu, \nu \neq \bar{0}, \quad (2.6)$$

$$U_\tau(\rho)(\mu, \bar{0}) = d \cdot \|\mu\|. \quad (2.6_0)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Из определений (2.6), (2.6₀) и замечания 2.1 вытекает, что для пропорциональной псевдометрики $t\rho$ имеем $U_\tau(t\rho) = tU_\tau(\rho)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Для любой ограниченной непрерывной (псевдо)метрики ρ на X функция $U_\tau(\rho)$ является (псевдо)метрикой на $U_\tau(X)$, причем $\text{diam } U_\tau(\rho) = \text{diam } \rho$ и $U_\tau(\rho)|_X = \rho$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $U_\tau(\rho)$ неотрицательна. Аксиома симметрии выполнена очевидным образом. Проверим аксиому тождества, когда ρ – метрика. Пусть $U_\tau(\rho)(\mu, \nu) = 0$. Если $\nu = \bar{0}$, то $\mu = \bar{0}$ согласно (2.6₀). Если же $\mu \neq \bar{0} \neq \nu$, то из (2.6) вытекает, что $\|\mu\| = \|\nu\|$ и $P_\tau(\rho)(\mu/\|\mu\|, \nu/\|\nu\|) = 0$. Следовательно, $\mu = \nu$ в силу предложения 2.3.

Остается проверить аксиому треугольника. Пусть $\lambda, \mu, \nu \in U_\tau(X)$ – попарно различные меры. Обозначим $U_\tau(\rho)(\lambda, \mu) + U_\tau(\rho)(\mu, \nu)$ через a . В силу аксиомы симметрии можно предполагать, что $\|\lambda\| \geq \|\nu\|$. Надо рассмотреть следующие случаи.

I. Одна из мер μ или ν нулевая.

1) Если $\mu = \bar{0}$, то

$$\begin{aligned} a &= d \cdot (\|\lambda\| + \|\nu\|) = d \cdot (2 \min\{\|\lambda\|, \|\nu\|\} + \|\lambda\| - \|\nu\|) \\ &> d \cdot \min\{\|\lambda\|, \|\nu\|\} + d \cdot \|\lambda\| - \|\nu\| \geq (\text{согласно предложению 2.3}) \\ &\geq \min\{\|\lambda\|, \|\nu\|\} \cdot P_\tau(\rho)\left(\frac{\lambda}{\|\lambda\|}, \frac{\nu}{\|\nu\|}\right) + d \cdot \|\lambda\| - \|\nu\| = U_\tau(\rho)(\lambda, \nu). \end{aligned}$$

2) Если $\nu = \bar{0}$, то

$$\begin{aligned} a &= \min\{\|\lambda\|, \|\mu\|\} \cdot P_\tau(\rho)\left(\frac{\lambda}{\|\lambda\|}, \frac{\mu}{\|\mu\|}\right) + d \cdot \|\lambda\| - \|\mu\| + d \cdot \|\mu\| \\ &\geq (\text{согласно предложению 2.3}) \geq d \cdot \|\lambda\| - \|\mu\| + d \cdot \|\mu\|. \end{aligned}$$

Итак, $a \geq d \cdot (\|\lambda\| - \|\mu\| + \|\mu\|)$. Надо проверить, что правая часть этого неравенства больше либо равна $d \cdot \|\lambda\| = U_\tau(\rho)(\lambda, \nu)$. Если $\|\lambda\| \geq \|\mu\|$, то

$$d \cdot (\|\lambda\| - \|\mu\| + \|\mu\|) = d \cdot \|\lambda\|.$$

Если же $\|\lambda\| < \|\mu\|$, то

$$d \cdot (\|\lambda\| - \|\mu\| + \|\mu\|) = d \cdot (2\|\mu\| - \|\lambda\|) > d \cdot (2\|\lambda\| - \|\lambda\|) = d \cdot \|\lambda\|.$$

II. Все меры ненулевые.

3) Если $\|\lambda\| \geq \|\mu\| \geq \|\nu\|$, то

$$\begin{aligned} a &= \|\mu\| \cdot P_\tau(\rho) \left(\frac{\lambda}{\|\lambda\|}, \frac{\mu}{\|\mu\|} \right) + \|\nu\| \cdot P_\tau(\rho) \left(\frac{\mu}{\|\mu\|}, \frac{\nu}{\|\nu\|} \right) + d \cdot (\|\lambda\| - \|\nu\|) \\ &\geq \|\nu\| \cdot \left(P_\tau(\rho) \left(\frac{\lambda}{\|\lambda\|}, \frac{\mu}{\|\mu\|} \right) + P_\tau(\rho) \left(\frac{\mu}{\|\mu\|}, \frac{\nu}{\|\nu\|} \right) \right) + d \cdot (\|\lambda\| - \|\nu\|) \\ &\geq (\text{согласно предложению 2.3}) \\ &\geq \|\nu\| \cdot P_\tau(\rho) \left(\frac{\lambda}{\|\lambda\|}, \frac{\nu}{\|\nu\|} \right) + d \cdot \|\lambda\| - \|\nu\| = U_\tau(\rho)(\lambda, \nu). \end{aligned}$$

4) Если $\|\lambda\| \geq \|\mu\| \leq \|\nu\|$, то

$$\begin{aligned} a &= \|\mu\| \cdot \left(P_\tau(\rho) \left(\frac{\lambda}{\|\lambda\|}, \frac{\mu}{\|\mu\|} \right) + P_\tau(\rho) \left(\frac{\mu}{\|\mu\|}, \frac{\nu}{\|\nu\|} \right) \right) + d \cdot (\|\lambda\| + \|\nu\| - 2\|\mu\|) \\ &\geq (\text{согласно предложению 2.3}) \\ &\geq \|\mu\| \cdot P_\tau(\rho) \left(\frac{\lambda}{\|\lambda\|}, \frac{\nu}{\|\nu\|} \right) + d \cdot (\|\lambda\| - \|\nu\|) + 2d \cdot (\|\nu\| - \|\mu\|) \\ &= \|\nu\| \cdot P_\tau(\rho) \left(\frac{\lambda}{\|\lambda\|}, \frac{\nu}{\|\nu\|} \right) + d \cdot (\|\lambda\| - \|\nu\|) \\ &\quad + (\|\mu\| - \|\nu\|) \cdot P_\tau(\rho) \left(\frac{\lambda}{\|\lambda\|}, \frac{\nu}{\|\nu\|} \right) + 2d \cdot (\|\nu\| - \|\mu\|) \\ &= U_\tau(\rho)(\lambda, \nu) + (\|\nu\| - \|\mu\|) \left(2d - P_\tau(\rho) \left(\frac{\lambda}{\|\lambda\|}, \frac{\nu}{\|\nu\|} \right) \right) \\ &\geq (\text{согласно предложению 2.3}) \\ &\geq U_\tau(\rho)(\lambda, \nu) + d \cdot (\|\nu\| - \|\mu\|) \geq U_\tau(\rho)(\lambda, \nu). \end{aligned}$$

5) Наконец, если $\|\lambda\| \leq \|\mu\| \geq \|\nu\|$, то

$$\begin{aligned} a &= \|\lambda\| \cdot P_\tau(\rho) \left(\frac{\lambda}{\|\lambda\|}, \frac{\mu}{\|\mu\|} \right) + \|\nu\| \cdot P_\tau(\rho) \left(\frac{\mu}{\|\mu\|}, \frac{\nu}{\|\nu\|} \right) + d \cdot (2\|\mu\| - \|\lambda\| - \|\nu\|) \\ &\geq \|\nu\| \cdot \left(P_\tau(\rho) \left(\frac{\lambda}{\|\lambda\|}, \frac{\mu}{\|\mu\|} \right) + P_\tau(\rho) \left(\frac{\mu}{\|\mu\|}, \frac{\nu}{\|\nu\|} \right) \right) \\ &\quad + d \cdot (\|\lambda\| - \|\nu\|) + 2d \cdot (\|\mu\| - \|\lambda\|) \\ &\geq (\text{согласно предложению 2.3}) \geq U_\tau(\rho)(\lambda, \nu). \end{aligned}$$

Равенства $U_\tau(\rho)|_X = \rho$ и $\text{diam } U_\tau(\rho) = \text{diam } \rho$ проверяются тривиальным образом.

Из определений (2.1), (2.6) и (2.6₀) непосредственно вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Если ρ_1, ρ_2 — ограниченные непрерывные псевдометрики на X и $\rho_1 \leq \rho_2$, то $U_\tau(\rho_1) \leq U_\tau(\rho_2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Для любой ограниченной непрерывной псевдометрики ρ на X псевдометрика $P_\tau(\rho)$ непрерывна на $P_\tau(X)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Прежде чем доказывать предложение 2.7, напомним, что другое определение псевдометрики на $P_\tau(X)$ было предложено Т. О. Банахом [6] (см. также [17]). Эта псевдометрика была определена как продолжение псевдометрики $P_R(\rho)$ на $P_\tau(X)$. При этом псевдометрика $P_R(\rho)$ задавалась равенством (2.1). Следовательно, псевдометрика Банаха и псевдометрика $P_\tau(\rho)$ совпадают на плотном в $P_\tau(X)$ множестве $P_R(X)$. Поэтому они будут совпадать и на $P_\tau(X)$, как только мы докажем, что функция $P_\tau(\rho)$ непрерывна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.7. Зафиксируем меру $\mu_0 \in P_\tau(X)$, число $\varepsilon > 0$ и положим $D = d + 1$, где $d = \text{diam } \rho$. В ε -окрестности $O_\varepsilon(\mu_0)$ меры μ_0 надо найти окрестность вида $N(\mu_0, W_1, \dots, W_n, \delta) \cap P_\tau(X)$ (см. предложение 1.25). Возьмем покрытие пространства X открытыми (по отношению к псевдометрике ρ) $\frac{\varepsilon}{4}$ -шарами V . В силу τ -аддитивности меры μ_0 существует такое конечное семейство $\{V_1, \dots, V_n\}$ этих шаров, что $\mu_0(V_1 \cup \dots \cup V_n) > 1 - \varepsilon/(8D)$. Согласно предложению 1.3 существует такое открытое множество $W_1 \subset \overline{W}_1 \subset V_1$, что $\mu_0(W_1) > \mu_0(V_1) - \varepsilon/(8Dn)$. Далее по индукции строим такие открытые множества W_k , $1 < k \leq n$, что $W_k \subset \overline{W}_k \subset V_k \setminus \bigcup_{i < k} \overline{W}_i$ и

$$\mu_0(W_k) > \mu_0\left(V_k \setminus \bigcup_{i < k} \overline{W}_i\right) - \frac{\varepsilon}{8Dn}. \quad (2.7)$$

Отметим, что множества $W_1, \dots, W_n$ дизъюнкты. Кроме того, из (2.7) и включений $\overline{W}_i \subset V_i$ вытекает неравенство

$$\mu_0(W_k) > \mu_0\left(V_k \setminus \bigcup_{i < k} V_i\right) - \frac{\varepsilon}{8Dn}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \mu_0(W_1) + \mu_0(W_2) + \dots + \mu_0(W_n) \\ & > \mu_0(V_1) + \mu_0(V_2 \setminus V_1) + \dots + \mu_0\left(V_n \setminus \bigcup_{i < n} V_i\right) - \frac{\varepsilon}{8D} \\ & = \mu_0\left(\bigcup_{i \leq n} V_i\right) - \frac{\varepsilon}{8D} > 1 - \frac{\varepsilon}{8D} - \frac{\varepsilon}{8D} = 1 - \frac{\varepsilon}{4D}. \end{aligned}$$

Положим $W_0 = X \setminus \bigcup_{i \leq n} W_i$. Из дизъюнктности множеств W_i и только что доказанного неравенства

$$\sum_{i=1}^n \mu_0(W_i) > 1 - \frac{\varepsilon}{4D} \quad (2.8)$$

вытекает $\mu_0(W_0) < \varepsilon/(4D)$.

Положим

$$O = N\left(\mu_0, W_1, \dots, W_n, \frac{\varepsilon}{4Dn}\right) \cap P_\tau(X)$$

и покажем, что $O \subset O_\varepsilon(\mu_0)$. Пусть $\mu \in O$. Тогда

$$\mu(W_i) > \mu_0(W_i) - \frac{\varepsilon}{4Dn}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.9)$$

Рассмотрим меру $\lambda = \sum_{i,j=0}^n \alpha_{ij}(\mu_0|W_i) \otimes (\mu|W_j)$ на $X \times X$ (см. определение (1.4)), где коэффициенты $\alpha_{ij} \geq 0$ подобраны с учетом следующих условий: для любых $0 \leq i, j \leq n$ выполняются равенства

$$\sum_{i=0}^n \alpha_{ij} \mu_0(W_i) = 1, \quad (2.10)$$

$$\sum_{j=0}^n \alpha_{ij} \mu(W_j) = 1, \quad (2.11)$$

$$\alpha_{ii} \mu_0(W_i) \mu(W_i) = \min\{\mu_0(W_i), \mu(W_i)\}. \quad (2.12)$$

Существование таких коэффициентов доказать нетрудно (подробности см. в [16]). Из предложений 1.7, 1.28 и 1.29 вытекает τ -аддитивность меры λ . Условия (2.10) и (2.11) влекут соответственно равенства $\text{pr}_2(\lambda) = \mu$, $\text{pr}_1(\lambda) = \mu_0$, т.е. $\lambda \in \Lambda(\mu_0, \mu)$.

Для завершения доказательства достаточно получить, что $\lambda(\rho) < \varepsilon$. Отметим сначала, что

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^n W_i \times W_i\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{2D}. \quad (2.13)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \lambda\left(\bigcup_{i=1}^n W_i \times W_i\right) &= (\text{согласно (2.12)}) = \sum_{i=1}^n \min\{\mu_0(W_i), \mu(W_i)\} > (\text{согласно (2.9)}) \\ &> \sum_{i=1}^n \left(\mu_0(W_i) - \frac{\varepsilon}{4Dn}\right) = \sum_{i=1}^n \mu_0(W_i) - \frac{\varepsilon}{4D} > (\text{согласно (2.9)}) \\ &> 1 - \frac{\varepsilon}{4D} - \frac{\varepsilon}{4D} = 1 - \frac{\varepsilon}{2D}. \end{aligned}$$

Далее, поскольку каждое множество W_i содержится в некотором $\frac{\varepsilon}{4}$ -шаре, то

$$\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для любых } (x, y) \in \bigcup_{i=1}^n W_i \times W_i. \quad (2.14)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \lambda(\rho) &= \int_{X \times X \setminus \bigcup_{i=1}^n W_i \times W_i} \rho \, d\lambda + \int_{\bigcup_{i=1}^n W_i \times W_i} \rho \, d\lambda \\ &< (\text{согласно (2.13) и (2.14)}) < D \cdot \frac{\varepsilon}{2D} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_{\bigcup_{i=1}^n W_i \times W_i} d\lambda \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \int_{X \times X} d\lambda = \varepsilon. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Для любой ограниченной непрерывной псевдометрики ρ на X псевдометрика $U_\tau(\rho)$ непрерывна на $U_\tau(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем меру $\mu_0 \in U_\tau(X)$ и $\varepsilon > 0$. В ε -окрестности $O_\varepsilon(\mu_0)$ меры μ_0 надо найти базисную окрестность вида $N(\mu_0, V_1, \dots, V_n, \delta)$. Предположим сначала, что $\mu_0 = \bar{0}$. Тогда $O_\varepsilon(\bar{0}) = N(\bar{0}, 1_X, \varepsilon/d)$, где $d = \text{diam } \rho$. В самом деле, $N(\bar{0}, 1_X, \varepsilon/d)$ состоит из таких мер μ , что $|\|\mu\| - \|\bar{0}\|| < \varepsilon/d$, т.е. $d \cdot \|\mu\| < \varepsilon$. А эти меры по определению (2.6) и образуют ε -окрестность нулевой меры.

Пусть теперь $\|\mu_0\| = m > 0$. Положим $\mu_1 = \mu_0/\|\mu_0\|$. Согласно предложению 2.7 существуют такие открытые множества $V_1, \dots, V_n \subset X$ и $\delta_1 > 0$, что

$$N(\mu_1, V_1, \dots, V_n, \delta_1) \cap P_\tau(X) \subset O_{\varepsilon/2}(\mu_1), \quad (2.15)$$

где $\frac{\varepsilon}{2}$ -окрестность меры μ_1 берется относительно псевдометрики $P_\tau(\rho)$. Считая $\delta_1 \leq 1$, положим

$$\delta_0 = \min \left\{ \frac{m\delta_1}{4}, \frac{\varepsilon}{2d} \right\} \quad (2.16)$$

и покажем, что $O \equiv N(\mu_0, V_1, \dots, V_n, \delta_0) \subset O_\varepsilon(\mu_0)$. Пусть $\mu \in O$. Отметим прежде всего, что $\mu \neq \bar{0}$ в силу (2.16): $\|\mu\| > \|\mu_0\| - \delta_0 \geq m - m/4 = 3m/4$. Далее, поскольку $|\|\mu\| - \|\mu_0\|| < \delta_0 \leq \varepsilon/(2d)$, из (2.6) вытекает, что для справедливости включения $\mu \in O_\varepsilon(\mu_0)$ достаточно проверить неравенство

$$\min\{\|\mu_0\|, \|\mu\|\} \cdot P_\tau(\rho) \left(\mu_1, \frac{\mu}{\|\mu\|} \right) < \varepsilon.$$

Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что

$$P_\tau(\rho) \left(\mu_1, \frac{\mu}{\|\mu\|} \right) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.17)$$

В силу (2.15) неравенство (2.17) будет выполнено, если мы покажем, что

$$\frac{\mu}{\|\mu\|}(V_i) > \mu_1(V_i) - \delta_1. \quad (2.18)$$

Поскольку $\mu \in O$, имеем $\mu(V_i) > \mu_0(V_i) - \delta_0$. Значит,

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{\|\mu\|}(V_i) &> \frac{\mu_0}{\|\mu\|}(V_i) - \frac{\delta}{\|\mu\|} = \frac{\mu}{\|\mu_0\|}(V_i) - \left[\left(\frac{\mu_0}{\|\mu_0\|} - \frac{\mu_0}{\|\mu\|} \right)(V_i) + \frac{\delta}{\|\mu\|} \right] \\ &= \mu_1(V_i) - \left[\frac{\|\mu\| - \|\mu_0\|}{\|\mu_0\| \cdot \|\mu\|} \mu_0(V_i) + \frac{\delta_0}{\|\mu\|} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, для выполнения неравенства (2.18) достаточно, чтобы

$$c \equiv \frac{\|\mu\| - \|\mu_0\|}{\|\mu_0\| \cdot \|\mu\|} \mu_0(V_i) + \frac{\delta_0}{\|\mu\|} < \delta_1. \quad (2.19)$$

Но $\mu_0 \in O$ влечет $\|\mu\| - \|\mu_0\| < \delta_0$. По тем же причинам

$$\|\mu\| > \frac{m}{2}. \quad (2.20)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} c &< \frac{\delta_0}{\|\mu_0\| \cdot \|\mu\|} \mu_0(V_i) + \frac{\delta_0}{\|\mu\|} \leq \frac{\delta_0}{\|\mu\|} + \frac{\delta_0}{\|\mu\|} \\ &< (\text{в силу (2.20)}) < \frac{4\delta_0}{m} \leq (\text{согласно (2.16)}) \leq \delta_1. \end{aligned}$$

Итак, неравенство (2.19) проверено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. Если ρ – совместимая ограниченная метрика на X , то $U_\tau(\rho)$ – совместимая метрика на $U_\tau(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложений 2.3 и 2.7 вытекает, что $U_\tau(\rho)$ – непрерывная метрика на $U_\tau(X)$. Покажем, что эта метрика порождает топологию $U_\tau(X)$. В силу замечания 2.4 можно предполагать, что $d = \text{diam } \rho = 1$. Согласно предложению 1.27 множества вида $O\langle\mu_0, \varphi, 1\rangle$, где φ – равномерно непрерывная ограниченная функция на X , образуют предбазу открытых окрестностей меры μ_0 . Покажем, что для любой такой функции φ найдется $\varepsilon > 0$, для которого $O_\varepsilon(\mu_0) \subset O\langle\mu_0, \varphi, 1\rangle$. Пусть $M = \|\varphi\| + 1$. Если $\mu_0 = \bar{0}$, положим $\varepsilon = 1/M$. Тогда для $\mu \in O_\varepsilon(\mu_0)$ из (2.6₀) вытекает, что $\|\mu\| < \varepsilon$. Следовательно, $|\mu(\varphi) - \mu_0(\varphi)| = |\mu(\varphi)| \leq \|\varphi\| \cdot \|\mu\| < M \cdot \varepsilon = 1$.

Пусть теперь $\|\mu_0\| = m_0 > 0$. Поскольку функция φ равномерно непрерывна, существует такое δ , что

$$0 < \delta < \frac{m_0}{10M} \quad (2.21)$$

и

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{1}{2}, \quad \text{как только } \rho(x, y) < \delta. \quad (2.22)$$

Положим $\varepsilon = \delta^2$. Пусть $\mu \in O_\varepsilon(\mu_0)$ и $m = \|\mu\|$. Из определений (2.6) и (2.6₀) вытекает, что $|m - m_0| < \varepsilon$. Поэтому в силу (2.21) имеем

$$|m - m_0| < \frac{m_0^2}{100M^2}. \quad (2.23)$$

Но $m_0 \leq 1$, $M \geq 1$. Следовательно, $|m - m_0| < m_0/2$, а

$$\min\{m, m_0\} > \frac{m_0}{2}. \quad (2.24)$$

Обозначим вероятностные меры μ/m и μ_0/m_0 через μ' и μ'_0 соответственно. Из (2.6) и $\mu \in O_\varepsilon(\mu_0)$ вытекает, что $\min\{m, m_0\} \cdot P_\tau(\rho)(\mu', \mu'_0) < \varepsilon$. Значит, $P_\tau(\rho)(\mu', \mu'_0) < 2\varepsilon/m_0$ согласно (2.24). Поэтому в силу леммы 2.2 существует такая мера $\lambda \in \Lambda(\mu', \mu'_0)$, что

$$\lambda(\rho) < \frac{2\varepsilon}{m_0}. \quad (2.25)$$

Положим $A = \{(x, y) \in X \times X : \rho(x, y) \geq \delta\}$. Тогда

$$\lambda(A) < \frac{2\delta}{m_0}. \quad (2.26)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \int_A d\lambda = \frac{1}{\delta} \cdot \int_A \delta d\lambda \leq \frac{1}{\delta} \cdot \int_A \rho d\lambda \leq \frac{1}{\delta} \cdot \int_{X \times X} \rho d\lambda = \frac{1}{\delta} \cdot \lambda(\rho) \\ &< (\text{согласно (2.25)}) < \frac{1}{\delta} \cdot \frac{2\varepsilon}{m_0} = \frac{2\delta}{m_0}. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что $\mu \in O \langle \mu_0, \varphi, 1 \rangle$. Имеем

$$\begin{aligned} |\mu(\varphi) - \mu_0(\varphi)| &= |m\mu'(\varphi) - m_0\mu'_0(\varphi)| = |(m - m_0)\mu'(\varphi) + m_0(\mu'(\varphi) - \mu'_0(\varphi))| \\ &\leq |m - m_0| \cdot |\mu'(\varphi)| + m_0|\mu'(\varphi) - \mu'_0(\varphi)|. \end{aligned}$$

Но $|\mu'(\varphi)| \leq M$. Значит, $|m - m_0| \cdot |\mu'(\varphi)| < 1/100$ согласно (2.23). Поэтому включение $\mu \in O \langle \mu_0, \varphi, 1 \rangle$ будет проверено, как только мы докажем, что

$$|\mu'(\varphi) - \mu'_0(\varphi)| \leq \frac{99}{100m_0}. \quad (2.27)$$

Итак,

$$|\mu'(\varphi) - \mu'_0(\varphi)| = \left| \int_X \varphi(x) d\mu' - \int_X \varphi(y) d\mu'_0 \right|.$$

Но в силу теоремы Фубини и условия $\lambda \in \Lambda(\mu', \mu'_0)$ имеем

$$\int_X \varphi(x) d\mu' = \int_{X \times X} \varphi(x) d\lambda, \quad \int_X \varphi(y) d\mu'_0 = \int_{X \times X} \varphi(y) d\lambda.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} |\mu'(\varphi) - \mu'_0(\varphi)| &= \left| \int_{X \times X} (\varphi(x) - \varphi(y)) d\lambda \right| \leq \int_{X \times X} |\varphi(x) - \varphi(y)| d\lambda \\ &= \int_A |\varphi(x) - \varphi(y)| d\lambda + \int_{X \times X \setminus A} |\varphi(x) - \varphi(y)| d\lambda \\ &\leq (\text{согласно (2.22)}) \leq 2M\lambda(A) + \frac{1}{2} \\ &\leq (\text{согласно (2.26)}) \leq 2M \cdot \frac{2\delta}{m_0} + \frac{1}{2} \\ &\leq (\text{согласно (2.21)}) < \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10} \leq \frac{9}{10m_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (2.27) проверено.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.11. Предложение 2.10 определяет функтор U_τ^m , действующий в категории **BMetr** ограниченных метрических пространств и их непрерывных отображений. Поскольку функторы U_β и U_R являются подфункторами функтора U_τ , функтор U_τ^m автоматически определяет функторы U_β^m и U_R^m , действующие в той же категории **BMetr** и являющиеся подфункторами функтора U_τ^m . Нас не должно при этом беспокоить, что мы даем внешнее определение функторов U_β^m и U_R^m . На самом деле оно является внутренним. Дело в том, что множество $\Lambda(\mu, \nu)$, лежащее в основе определения метрики $U_\tau(\rho)$, обладает следующим свойством: если меры μ и ν имеют компактные носители (соответственно радоновы), то $\Lambda(\mu, \nu) \subset U_\beta(X \times X)$ (соответственно $\Lambda(\mu, \nu) \subset U_R(X \times X)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.12. Пусть $\mathcal{O}$ – некоторая категория, объектами которой являются тихоновские пространства с дополнительной структурой (метрической, равномерной, групповой и т. д.), и пусть $\mathcal{F}: \mathcal{O} \rightarrow \mathbf{Tych}$ – “забывающий” функтор. Говорят, что функтор $\mathcal{G}: \mathbf{Tych} \rightarrow \mathbf{Tych}$ *поднимается* на категорию $\mathcal{O}$, если существует такой функтор $\bar{\mathcal{G}}: \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}$, что $\mathcal{F} \circ \bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \circ \mathcal{F}$.

Из предложения 2.10 и замечания 2.11 вытекает

ТЕОРЕМА 2.13. *Функторы U_τ , U_R и U_β поднимаются на категорию $\mathbf{BMetr}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2.14. Из определения метрики $U_\tau(\rho)$ непосредственно вытекает, что функтор P_β^m , построенный автором в [4], и функторы P_R^m и P_τ^m , построенные Т. О. Банахом в [6], являются соответственно подфункторами функторов U_β^m , U_R^m и U_τ^m .

Рассмотрим некоторые свойства только что построенного поднятия.

ТЕОРЕМА 2.15. *Функтор U_τ^m сохраняет полноту метрических пространств.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (X, ρ) – полное ограниченное метрическое пространство, и пусть $\{\mu_k : k \in \omega\}$ – фундаментальная последовательность мер из $U_\tau^m(X)$. Пусть $m_k = \|\mu_k\|$. Из определения метрики $U_\tau(\rho)$ вытекает, что числовая последовательность $\{m_k\} \subset [0, 1]$ также фундаментальна. Следовательно, она сходится к какому-то числу $a \in [0, 1]$. Если $a = 0$, то из (2.6₀) вытекает, что $\{\mu_k\}$ сходится к $\bar{0}$.

Пусть теперь $a > 0$. Тогда почти все элементы последовательности $\{\mu_k\}$ лежат в отрезке $[a/2, 1]$. Без ограничения общности можно считать, что вся эта последовательность лежит в отрезке $[a/2, 1]$. Для чисел $0 \leq b \leq c \leq 1$ положим $U_{\tau, [b, c]}(X) = \{\mu \in U_\tau(X) : b \leq \|\mu\| \leq c\}$. Множество $U_{\tau, [b, b]}(X)$ будем обозначать через $U_{\tau, b}(X)$. Определим отображение $f_a: U_{\tau, [a/2, 1]}(X) \rightarrow U_{\tau, a}(X)$ следующим образом: $f_a(\mu) = a \cdot \mu / \|\mu\|$. Пусть $\mu, \nu \in U_{\tau, [a/2, 1]}(X)$. Тогда $a = \|f_a(\mu)\| = \|f_a(\nu)\|$ и, следовательно,

$$U_\tau(\rho)(f_a(\mu), f_a(\nu)) = a \cdot P_\tau(\rho)\left(\frac{\mu}{\|\mu\|}, \frac{\nu}{\|\nu\|}\right).$$

Но $a \leq 2 \min\{\|\mu\|, \|\nu\|\}$. Следовательно,

$$U_\tau(\rho)(f_a(\mu), f_a(\nu)) \leq 2U_\tau(\rho)(\mu, \nu). \quad (2.28)$$

Отсюда вытекает, что последовательность $\{f_a(\mu_k)\}$ также фундаментальна.

Т. О. Банах доказал, что для полного пространства X пространство $P_\tau(X)$ также полно. Но полное метрическое пространство является абсолютным G_δ -множеством. Поэтому $P_R(X) = P_\tau(X)$. Далее, отображение $f_a|_{P_\tau(X)}: P_\tau(X) \rightarrow U_{\tau, a}(X)$ является гомотетией с коэффициентом сжатия a . Следовательно, пространство $U_{\tau, a}(X)$ также полно, и фундаментальная последовательность $\{f_a(\mu_k)\}$ сходится к некоторой мере $\mu' \in U_{\tau, a}(X)$. Но тогда из (2.28) вытекает, что последовательность $\{\mu_k\}$ также сходится к мере μ' .

СЛЕДСТВИЕ 2.16. Если (X, ρ) – ограниченное метрическое пространство, то пополнения пространств $(U_\beta(X), U_\beta(\rho))$ и $(U_R(X), U_R(\rho))$ совпадают с пространством $(U_\tau(\overline{X}), U_\tau(\overline{\rho}))$ τ -аддитивных мер на пополнении $(\overline{X}, \overline{\rho})$ пространства (X, ρ) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $U_\beta(X)$ всюду плотно в $U_R(X)$, достаточно доказать утверждение следствия 2.16 только для пополнения $\overline{U_\beta(X)}$ пространства $U_\beta(X)$. Но $U_\beta(X)$ всюду плотно в $U_\tau(\overline{X})$ согласно предложению 1.32. Следовательно, $\overline{U_\beta(X)} = \overline{U_\tau(\overline{X})}$. Поэтому наше утверждение вытекает из теоремы 2.15.

ЛЕММА 2.17. Пусть $f: (X, \rho_1) \rightarrow (Y, \rho_2)$ – (ε, δ) -равномерно непрерывное отображение псевдометрических пространств, причем $\text{diam } Y \leq d$. Тогда $P_\tau(f)$ является $(2\varepsilon, \varepsilon\delta/d)$ -равномерно непрерывным отображением.

Это утверждение было доказано В. В. Федорчуком [16] для метрических компактных пространств. Но доказательство с учетом леммы 2.2 дословно переносится на наш случай.

Следующее утверждение является аналогом леммы 2.17 для отображения $U_\tau(f)$.

ЛЕММА 2.18. Пусть $f: (X, \rho_1) \rightarrow (Y, \rho_2)$ – (ε, δ) -равномерно непрерывное отображение псевдометрических пространств диаметра d_1 и d_2 соответственно. Пусть, кроме того,

$$\delta < d_1^2, \quad (2.29)$$

$$\delta < \frac{d_1 \varepsilon}{2d_2}. \quad (2.30)$$

Тогда $U_\tau(f)$ является $\left(3\varepsilon, \frac{\varepsilon\delta^2}{d_1 d_2}\right)$ -равномерно непрерывным отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим сразу, что условия (2.29) и (2.30) не являются реальными ограничениями. Этого всегда можно добиться, уменьшая δ . Далее, естественно предполагать, что $\delta_1 \leq d_1$, а $\varepsilon \leq d_2$. Последнее неравенство и (2.30) влечет

$$\delta < d_1. \quad (2.31)$$

Итак, пусть $\mu_1, \mu_2 \in U_\tau(X)$ и $m_i = \|\mu_i\|$. Ввиду симметричности псевдометрики можно предположить, что $m_1 \leq m_2$. Меры $U_\tau(f)(\mu_i)$ обозначим через ν_i . Поскольку отображение $U_\tau(f)$ сохраняет норму мер, имеем $\|\nu_i\| = m_i$. Три следующих варианта покрывают все возможные соотношения между m_1 и m_2 :

- 1) $d_1 m_i < 2\delta$;
- 2) $d_1 m_i \geq \delta$;
- 3) $d_1 m_1 < \delta \leq 2\delta \leq d_1 m_2$.

Рассмотрим эти случаи последовательно.

- 1) По неравенству треугольника (проходим через $\overline{0}$)

$$\begin{aligned} U_\tau(\rho_2)(\nu_1, \nu_2) &\leq d_2(m_1 + m_2) \leq (\text{поскольку } d_1 m_i < 2\delta) \\ &\leq \frac{4\delta d_2}{d_1} < (\text{согласно (2.30)}) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Отметим, что здесь мы не пользуемся условием $U_\tau(\rho_1)(\mu_1, \mu_2) < \frac{\varepsilon\delta^2}{d_1d_2}$. Для дальнейшего нам важно отметить, что имеет место неравенство

$$\frac{\varepsilon\delta^2}{d_1d_2} < d_1\delta. \quad (2.32)$$

В самом деле,

$$\delta < (\text{согласно (2.29)}) < d_1^2 \leq (\text{поскольку } \varepsilon \leq d_2) \leq \frac{d_1^2d_2}{\varepsilon}.$$

Следовательно, $\frac{\varepsilon}{d_1^2d_2} < \frac{1}{\delta}$. Умножая последнее неравенство на $d_1\delta^2$, получаем неравенство (2.32).

2) Пусть $U_\tau(\rho_1)(\mu_1, \mu_2) < \frac{\varepsilon\delta^2}{d_1d_2}$. Вероятностные меры μ_i/m_i и ν_i/m_i обозначим соответственно через μ'_i и ν'_i . Тогда согласно (2.6) с учетом условия $m_1 \leq m_2$ выполнены следующие неравенства:

$$m_1P_\tau(\rho_1)(\mu'_1, \mu'_2) < \frac{\varepsilon\delta^2}{d_1d_2}, \quad (2.33)$$

$$d_1(m_2 - m_1) < \frac{\varepsilon\delta^2}{d_1d_2}. \quad (2.34)$$

В силу аффинности отображения $U_\tau(f)$ (предложение 1.29) $P_\tau(f)(\mu'_i) = \nu'_i$. Поскольку $m_1 \geq \delta/d_1$, из (2.33) получаем $P_\tau(\rho_1)(\mu'_1, \mu'_2) < \varepsilon\delta/d_2$. Тогда согласно лемме 2.17 имеем $P_\tau(\rho_2)(\nu'_1, \nu'_2) < 2\varepsilon$. Следовательно,

$$U_\tau(\rho_2)(\nu_1, \nu_2) < 2m_1\varepsilon + d_2(m_2 - m_1). \quad (2.35)$$

Из (2.34) получаем, что $d_2(m_2 - m_1) < \varepsilon\delta^2/d_1^2$. Следовательно, $d_2(m_2 - m_1) < \varepsilon$ в силу (2.31). Поэтому из (2.35) получаем $U_\tau(\rho_2)(\nu_1, \nu_2) < 3\varepsilon$, поскольку $m_1 \leq 1$.

3) Случай, когда $U_\tau(\rho_1)(\mu_1, \mu_2) < \frac{\varepsilon\delta^2}{d_1d_2}$, невозможен. В самом деле,

$$U_\tau(\rho_1)(\mu_1, \mu_2) \geq d_1(m_2 - m_1) > d_1\delta > (\text{согласно (2.32)}) > \frac{\varepsilon\delta^2}{d_1d_2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.19. *Функтор U_τ , а значит, и функторы U_R и U_β сохраняют равномерно непрерывные отображения ограниченных метрических пространств.*

Обозначим через $\mathbf{BMetr}_u$ подкатегорию категории $\mathbf{BMetr}$, состоящую из ограниченных метрических пространств и их равномерно непрерывных отображений. Из теоремы 2.13 и следствия 2.19 вытекает

ТЕОРЕМА 2.20. *Функторы U_τ , U_R и U_β поднимаются на категорию $\mathbf{BMetr}_u$.*

§3. Равномерные пространства

Равномерное пространство есть пара $(X, \mathcal{U})$, где X — множество, а $\mathcal{U}$ — семейство окружений E диагонали $\Delta_X \subset X \times X$, удовлетворяющее аксиоме равномерности. С основами теории равномерных пространств читатель может познакомиться в [14; гл. 8]. Мы рассматриваем только отделимые равномерности. Следовательно, топологически мы по-прежнему остаемся в пределах тихоновских пространств. Теперь напомним лишь простейшие понятия и факты, с которыми мы постоянно будем работать.

Говорят, что $\mathcal{U}$ есть равномерность на топологическом пространстве X (или равномерность $\mathcal{U}$ совместима с топологией пространства X), если топология равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ совпадает с топологией пространства X . Псевдометрика $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной* (по отношению к равномерности $\mathcal{U}$), если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое окружение диагонали $E \in \mathcal{U}$, что $\rho(E) \subset [0, \varepsilon)$.

Если $(X, \mathcal{U})$ — равномерное пространство, то семейство $R_{\mathcal{U}}$ всех ограниченных псевдометрик на X , которые равномерно непрерывны по отношению к равномерности $\mathcal{U}$, обладает следующими свойствами:

(UP1) $R_{\mathcal{U}}$ направленно вверх;

(UP2) $R_{\mathcal{U}}$ разделяет точки пространства X .

Наоборот, для всякого семейства R (ограниченных) псевдометрик на множестве X , обладающего свойствами (UP1) и (UP2), семейство $\mathcal{B}_R$ всех окружений диагонали вида $E_{2^{-n}}^\rho \equiv \{(x, y) : \rho(x, y) < 2^{-n}\}$, $\rho \in R$, $n \in \mathbb{N}$, есть база некоторой равномерности на X , по отношению к которой всякая псевдометрика из R равномерно непрерывна.

Для дальнейшего нам потребуется еще одно утверждение о топологии пространства X . Говорят, что семейство R псевдометрик на X *порождает топологию* пространства X , если семейство ε -шаров

$$O_\varepsilon^\rho(x), \quad x \in X, \quad \rho \in R, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.1)$$

образует открытую предбазу пространства X . В этом случае все псевдометрики из R необходимо непрерывны. Если же R направлено, то семейство (3.1), будучи предбазой, является базой пространства X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть R — направленное семейство ограниченных непрерывных псевдометрик на X , которое разделяет точки и замкнутые множества пространства X . Тогда семейство псевдометрик $U(R) = \{U_\tau(\rho) : \rho \in R\}$ порождает топологию пространства $U_\tau(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 1.26 семейство (1.14), состоящее из множеств $O(\mu_0, \varphi, 1)$, образует предбазу окрестностей меры μ_0 . По предложению 2.9 псевдометрики $U_\tau(\rho)$, $\rho \in R$, непрерывны. Следовательно, ε -шары $O_\varepsilon^{U_\tau(\rho)}(\mu_0)$ открыты. Поэтому нам достаточно показать, что в предбазисной окрестности $O(\mu_0, \varphi, 1)$, где φ равномерно непрерывна относительно $\rho \in R$, содержится ε -шар $O_\varepsilon^{U_\tau(\rho)}(\mu_0)$. Но в точности это и было сделано при доказательстве предложения 2.10. При этом никак не было использовано то, что ρ — метрика.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $(X, \mathcal{U})$ – равномерное пространство и $R_{\mathcal{U}}$ – семейство всех ограниченных равномерно непрерывных псевдометрик. Тогда семейство $U_{\tau}(R_{\mathcal{U}}) = \{U_{\tau}(\rho) : \rho \in R_{\mathcal{U}}\}$ порождает равномерность на $U_{\tau}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Семейство $U_{\tau}(R_{\mathcal{U}})$ обладает свойством (UP1) в силу предложения 2.6. Далее, семейство $R_{\mathcal{U}}$ разделяет точки и замкнутые множества пространства X . В самом деле, пусть $x \in X \setminus F$. Существует такая равномерно непрерывная функция $\varphi: X \rightarrow [0, 1]$, что $\varphi(x) = 0$ и $\varphi(F) = 1$. Положим $\rho(x_1, x_2) = |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|$. Ясно, что ρ есть равномерно непрерывная ограниченная псевдометрика и $\rho(x, F) = 1$.

Итак, семейство $R_{\mathcal{U}}$ удовлетворяет условиям предложения 3.1. Следовательно, семейство $U_{\tau}(R_{\mathcal{U}})$ порождает топологию пространства $U_{\tau}(X)$. В частности, $U_{\tau}(R_{\mathcal{U}})$ разделяет точки пространства $U_{\tau}(X)$, т.е. удовлетворяет условию (UP2).

Обозначим равномерность, порожденную семейством псевдометрик $U_{\tau}(R_{\mathcal{U}})$, через $U_{\tau}(\mathcal{U})$. Будем называть семейство R ограниченных равномерно непрерывных псевдометрик на равномерном пространстве $(X, \mathcal{U})$ *базисным*, если для всякого окружения диагонали $E \in \mathcal{U}$ существует такая псевдометрика $\rho \in R$, что $E \supset \rho^{-1}[0, \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Если R – базисное семейство псевдометрик равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$, то $U_{\tau}(R)$ является базисным семейством псевдометрик равномерного пространства $(U_{\tau}(X), U_{\tau}(\mathcal{U}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть E – произвольное окружение диагонали из равномерности $U_{\tau}(\mathcal{U})$. По определению этой равномерности (теорема 3.2) существуют такая псевдометрика $\rho \in R_{\mathcal{U}}$ и $\varepsilon > 0$, что $U_{\tau}(\rho)^{-1}[0, \varepsilon) \subset E$. Поскольку R – базисное семейство равномерности $\mathcal{U}$, существуют такие $\rho_1 \in R$ и $\delta > 0$, что $\rho_1^{-1}[0, \delta) \subset \rho^{-1}[0, \varepsilon/3)$. Это включение влечет $(\varepsilon/3, \delta)$ -равномерную непрерывность тождественного отображения $(X, \rho_1) \rightarrow (X, \rho)$. Пусть $d = \max\{\text{diam } \rho_1, \text{diam } \rho\}$. Тогда согласно лемме 2.18 тождественное отображение $(U_{\tau}(X), U_{\tau}(\rho_1)) \rightarrow (U_{\tau}(X), U_{\tau}(\rho))$ является $\left(\varepsilon, \frac{\varepsilon \delta^2}{3d^2}\right)$ -равномерно непрерывным. Следовательно, $U_{\tau}(\rho_1)^{-1}\left[0, \frac{\varepsilon \delta^2}{3d^2}\right) \subset U_{\tau}(\rho)^{-1}[0, \varepsilon) \subset E$.

Для метрического пространства (X, ρ) через $\mathcal{U}(\rho)$ обозначим равномерность на X , порожденную метрикой ρ . Из предложения 3.3 непосредственно вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Если (X, ρ) – ограниченное метрическое пространство, то равномерности $U_{\tau}(\mathcal{U}(\rho))$ и $\mathcal{U}(U_{\tau}(\rho))$ на $U_{\tau}(X)$ совпадают.

Следующее утверждение также вытекает из леммы 2.18.

ТЕОРЕМА 3.5. Если $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ – равномерно непрерывное отображение, то отображение $U_{\tau}(f): (U_{\tau}(X), U_{\tau}(\mathcal{U})) \rightarrow (U_{\tau}(Y), U_{\tau}(\mathcal{V}))$ также равномерно непрерывно.

Из теорем 3.2, 3.5 и предложения 3.4 вытекает

ТЕОРЕМА 3.6. Функтор $U_{\tau}: \mathbf{Tych} \rightarrow \mathbf{Tych}$ и, следовательно, его подфункторы U_R и U_{β} поднимаются на категорию $\mathbf{Unif}$ равномерных пространств и равномерно непрерывных отображений.

Напомним, что через $\delta(X)$ обозначается множество всех мер Дирака на X . Это множество замкнуто в $U_\tau(X)$ и гомеоморфно X . Из предложения 2.5 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. *Для всякого равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ отображение $\delta: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (U_\tau(X), U_\tau(\mathcal{U}))$ является равномерным вложением.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. *Если $f: (X, \mathcal{U}) \rightarrow (Y, \mathcal{V})$ – равномерное вложение, то отображение $U_\tau(f): (U_\tau(X), U_\tau(\mathcal{U})) \rightarrow (U_\tau(Y), U_\tau(\mathcal{V}))$ также является равномерным вложением.*

Это утверждение вытекает из того, что всякая ограниченная равномерно непрерывная псевдометрика на подпространстве X равномерного пространства $(Y, \mathcal{V})$ продолжается до ограниченной псевдометрики на Y , которая равномерно непрерывна относительно $\mathcal{V}$ (см. [14; 8.5.6]).

ТЕОРЕМА 3.9. *Равномерное пространство $(X, \mathcal{U})$ прекомпактно тогда и только тогда, когда прекомпактно пространство $(U_\tau(X), U_\tau(\mathcal{U}))$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость вытекает из предложения 3.7 и того, что подпространство прекомпактного пространства прекомпактно. Пусть теперь $(X, \mathcal{U})$ – прекомпактное пространство. Тогда его пополнение $(\overline{X}, \overline{\mathcal{U}})$ является компактом. Согласно предложению 3.8 пространство $(U_\tau(X), U_\tau(\mathcal{U}))$ равномерно вкладывается в компактное пространство $U_\tau(\overline{X}) = U(\overline{X})$ и, следовательно, прекомпактно.

СЛЕДСТВИЕ 3.10. *Метрическое пространство (X, ρ) вполне ограничено тогда и только тогда, когда вполне ограничено пространство $(U_\tau(X), U_\tau(\rho))$.*

Для равномерного пространства $(X, \mathcal{U})$ через $S_{\mathcal{U}}(X)$ обозначим его сэмюэлевскую компактификацию, т.е. пополнение пространства $(X, \mathcal{U}^p)$, где $\mathcal{U}^p$ – максимальная прекомпактная равномерность, содержащаяся в $\mathcal{U}$. Сэмюэлевская компактификация $S_{\mathcal{U}}$ продолжается до ковариантного функтора $S: \mathbf{Unif} \rightarrow \mathbf{Comp}$.

Существует естественное преобразование $T: S \circ U_\tau \rightarrow U \circ S$, компоненты $T_{\mathcal{U}}$ которого определяются следующим образом. Тожественное отображение $(X, \mathcal{U}) \rightarrow (X, \mathcal{U}^p)$ равномерно непрерывно. Следовательно, равномерно непрерывно вложение $i_{\mathcal{U}}: (X, \mathcal{U}) \rightarrow S_{\mathcal{U}}(X)$. Значит, равномерно непрерывно отображение $U_\tau(i_{\mathcal{U}}): (U_\tau(X), U_\tau(\mathcal{U})) \rightarrow U(S_{\mathcal{U}}(X))$. Но операция прекомпактификации $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}^p$ является ковариантным функтором. Следовательно, отображение $U_\tau(i_{\mathcal{U}})^p: (U_\tau(X), U_\tau(\mathcal{U})^p) \rightarrow U(S_{\mathcal{U}}(X))$ также равномерно непрерывно. Это отображение продолжается до отображения $T_{\mathcal{U}}: S_{U_\tau(\mathcal{U})}(U_\tau(X)) \rightarrow U(S_{\mathcal{U}}(X))$ пополнений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.11. *Если равномерность $\mathcal{U}$ прекомпактна, то отображение $T_{\mathcal{U}}$ является гомеоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если равномерность $\mathcal{U}$ прекомпактна, то отображение $i_{\mathcal{U}}$ является равномерным вложением. Поэтому согласно предложению 3.8 отображение $U_\tau(i_{\mathcal{U}})$, которое совпадает с $U_\tau(i_{\mathcal{U}})^p$ в силу теоремы 3.9, является равномерным вложением. Следовательно, $T_{\mathcal{U}}$ является гомеоморфизмом, будучи пополнением равномерного вложения всюду плотного подпространства.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. Предложение 3.11 является частичным аналогом следствия 2.16 для равномерных пространств. Но это следствие не может быть обобщено на произвольные (не прекомпактные) равномерности, поскольку В. В. Федорчук доказал [17], что равномерное пространство $P_\tau(\mathbb{R}^c)$ неполно. А поскольку $P_\tau(\mathbb{R}^c)$ замкнуто в $U_\tau(\mathbb{R}^c)$, пространство $U_\tau(\mathbb{R}^c)$ также неполно.

Список литературы

1. *Варадарайн В. С.* Меры на топологических пространствах // Матем. сб. 1961. Т. 55. №1. С. 35–100.
2. *Ле-Кам Л.* Сходимость по распределению случайных процессов // Математика. 1960. Т. 4. №3. С. 107–142.
3. *Прохоров Ю. В.* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее прим. 1956. Т. 138. №1. С. 177–238.
4. *Садовничий Ю. В.* О метрике на пространствах вероятностных мер // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1994. №4. С. 31–35.
5. *Садовничий Ю. В.* О равномерности на пространствах вероятностных мер // Общая топология. Отображения, произведения и размерность пространств. М.: Изд-во МГУ, 1994. С. 119–131.
6. *Банах Т. О.* Топология пространств вероятностных мер. II. Барицентры вероятностных радоновских мер и метризация функторов P_τ и $\bar{P}$ // Матем. студ. Праці Львівського матем. т-ва. 1995. №5. С. 88–106.
7. *Садовничий Ю. В.* О некоторых категорных свойствах функтора U^τ // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1999. №3. С. 38–42.
8. *Sadovnichy Yu. V.* On some categorical properties of the functor U_R // Topology Appl. 2000. V. 107. №1–2. P. 131–145.
9. *Канторович Л. В.* О перемещении масс // Докл. АН СССР. 1942. Т. 37. №7–8. С. 227–229.
10. *Садовничий Ю. В.* О норме Канторовича для знакопеременных мер // Докл. РАН. 1999. Т. 368. №4. С. 459–461.
11. *Садовничий Ю. В., Федорчук В. В.* О некоторых топологических и категорных свойствах знакопеременных мер // Фундамент. и прикл. матем. 1999. Т. 5. №2. С. 597–618.
12. *Вазанян Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985.
13. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
14. *Engelking R.* General topology. Berlin: Heldermann Verlag, 1989.
15. *Gardner R. J., Pfeffer W. F.* Borel measures // Handbook of set-theoretic topology. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1984. P. 961–1043.
16. *Федорчук В. В.* Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. №2. С. 394–418.
17. *Fedorchuk V. V.* On a preservation of completeness of uniform spaces by the functor P_τ // Topology Appl. 1999. V. 91. P. 25–45.