Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Тимофеева, Группы гомологий многообразия полных пар X_{13} нульмерных подсхем длины 1 и 3 проективной плоскости, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 11, 105–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm523>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:03:12

УДК 517.2

Н. В. Тимофеева

Группы гомологий многообразия полных пар X_{13} нульмерных подсхем длины 1 и 3 проективной плоскости

В работе с помощью действия одномерной диагональной группы тора получены числа Бетти (ранги групп гомологий как свободных модулей) многообразия X_{13} полных пар нульмерных подсхем длины 1 и 3 комплексной проективной плоскости.

Библиография: 9 названий.

1. Конструкция многообразия. Пусть $\mathcal{S}$ – гладкая неприводимая проективная алгебраическая поверхность над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики и H_d – схема Гильберта нульмерных подсхем длины d в $\mathcal{S}$, где длина нульмерной подсхемы Z определяется как эйлерова характеристика ее структурного пучка: $l(Z) = \chi(\mathcal{O}_Z)$. Образует произведение $H_{d_1} \times H_{d_2}$ и рассмотрим в нем график инциденции

$$\Gamma_{d_1 d_2} = \{(z_{d_1}, z_{d_2}) \in H_{d_1} \times H_{d_2} : Z_{d_1} \cap Z_{d_2} \neq \emptyset\}$$

со структурой приведенной подсхемы. Здесь z_d означает точку в схеме Гильберта H_d , $d = d_1, d_2$, соответствующую подсхеме Z_d длины d в $\mathcal{S}$.

Следуя работе А. С. Тихомирова [1], назовем *многообразием полных пар* $X_{d_1 d_2}$ раздутие $H_{d_1} \times H_{d_2}$ с центром $\Gamma_{d_1 d_2}$, и пусть $\sigma: X_{d_1 d_2} \rightarrow H_{d_1} \times H_{d_2}$ – соответствующий морфизм раздутия.

Так как $\text{codim } \Gamma_{d_1 d_2} = 2$, то

$$D := \{(z_{d_1}, z_{d_2}) \in H_{d_1} \times H_{d_2} : \text{Supp } Z_{d_1} \cap \text{Supp } Z_{d_2} = \emptyset\}$$

– плотное открытое множество в $H_{d_1} \times H_{d_2}$, и точка прообраза этого множества при морфизме σ соответствует следующей тройке подсхем поверхности $\mathcal{S}$:

$$(Z_{d_1}, Z_{d_2}, Z_{d_1+d_2}), \text{ при этом } Z_{d_1+d_2} = Z_{d_1} \cup Z_{d_2}.$$

Многообразие полных пар $X_{d_1 d_2}$ 0-подсхем длины d_1 и d_2 интересно тем, что оно является разрешением рационального отображения сложения точек

$$f: H_{d_1} \times H_{d_2} \dashrightarrow H_{d_1+d_2}$$

Работа частично поддержана фондом INTAS-OPEN (грант № 97-2072).

в общей точке множества D , определенного посредством объединения наборов из d_1 и d_2 различных точек поверхности $\mathcal{S}$, отвечающих схемам Z_{d_1} и Z_{d_2} соответственно:

$$(x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_{d_1}, y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_{d_2}) \mapsto x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_{d_1} \cup y_1 \cup y_2 \cup \dots \cup y_{d_2}.$$

Термин “разрешение рационального морфизма сложения точек” имеет следующий точный смысл: это значит, что существует единственный морфизм $\tilde{f}: X_{d_1 d_2} \rightarrow H_{d_1+d_2}$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & X_{d_1 d_2} & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \tilde{f} \\ H_{d_1} \times H_{d_2} & \xrightarrow{f} & H_{d_1+d_2} \end{array}.$$

Пусть $U = \text{Спец } \mathbb{C}[x, y] \subset \mathbb{P}^2$ – открытое аффинное подмножество, содержащее подсхемы Z_{d_1} и Z_{d_2} , и пусть I_{d_1} и I_{d_2} – их идеалы в кольце $\mathbb{C}[x, y]$. Тогда I_{d_1} , I_{d_2} связаны с идеалом I подсхемы $Z_{d_1+d_2}$ следующими отношениями включения:

$$I_{d_1} I_{d_2} \subset I \subset I_{d_1} \cap I_{d_2}. \quad (1)$$

Это необходимые условия принадлежности тройки $(z_{d_1}, z_{d_2}, z_{d_1+d_2}) \in H_{d_1} \times H_{d_2} \times H_{d_1+d_2}$ многообразию $X_{d_1 d_2}$. Заметим, что если Z_{d_1} и Z_{d_2} приведены, то первое из включений в формуле (1) выполнено тривиально. Более того, в любом случае это есть необходимое условие того, что схема $Z_{d_1+d_2}$ является “объединением” подсхем Z_{d_1} и Z_{d_2} .

Проверим, что включение $I_{d_1} I_{d_2} \subset I$ дает замкнутое условие принадлежности точки произведения $H_{d_1} \times H_{d_2} \times H_{d_1+d_2}$ многообразию $X_{d_1 d_2}$.

Обозначим через X произведение $H_{d_1} \times H_{d_2} \times H_{d_1+d_2}$ и рассмотрим проекции

$$\mathcal{S} \xleftarrow{q} \mathcal{S} \times X \xrightarrow{p} X.$$

Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma$ – универсальные циклы в $\mathcal{S} \times X$ с пучками идеалов $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}$, соответствующие сомножителям $H_{d_1}, H_{d_2}, H_{d_1+d_2}$. Согласно теоремам А и В Серра (относительный вариант) существует обильный пучок $\mathcal{L}$ на $\mathcal{S}$ такой, что $R^i p_*(\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \otimes q^* \mathcal{L}) = 0$ при $i > 0$ и морфизм вычисления $p^* p_*(\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \otimes q^* \mathcal{L}) \xrightarrow{\text{ev}} \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \otimes q^* \mathcal{L}$ сюръективен. Заметим, что пучок $F := p_*(\mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \otimes q^* \mathcal{L})$ локально свободен как $\mathcal{O}_X$ -модуль. Пусть ψ – сквозное отображение:

$$p^* F \xrightarrow{\text{ev}} \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2 \otimes q^* \mathcal{L} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_\Gamma \otimes q^* \mathcal{L}.$$

Применяя к нему функтор p_* , получаем $p_* \psi: F \rightarrow p_*(\mathcal{O}_\Gamma \otimes q^* \mathcal{L})$. Здесь пучок $E := p_*(\mathcal{O}_\Gamma \otimes q^* \mathcal{L})$ локально свободен ранга $d_1 + d_2$.

Для дальнейшего удобно ввести следующие обозначения: $\psi_x := \psi|_{\mathcal{S} \times \{x\}}$, $F(x) := F \otimes k(x)$, $Z_x := \Gamma|_{\mathcal{S} \times \{x\}}$.

Надо проверить замкнутость множества

$$\begin{aligned} M &:= \{x \in X : \psi_x: F(x) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_x} \otimes \mathcal{L} - \text{нулевой морфизм}\} \\ &= \{x \in X : \varphi|_{\mathcal{S} \times \{x\}}: \mathcal{I}_1 \mathcal{I}_2|_{\mathcal{S} \times \{x\}} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_x} - \text{нулевой морфизм}\}. \end{aligned}$$

Отображение ψ_x включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} F(x) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\bar{\psi}_x} & H^0(\mathcal{O}_{Z_x} \otimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}} \\ \searrow \psi_x & & \downarrow \text{ev} \\ & & \mathcal{O}_{Z_x} \otimes \mathcal{L} \end{array}.$$

При этом $\psi_x = 0$ эквивалентно $\bar{\psi}_x = 0$. Применяя к $H^0(\mathcal{O}_{Z_x} \otimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ изоморфизм замены базы, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} F(x) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}} & \xrightarrow{\bar{\psi}_x} & H^0(\mathcal{O}_{Z_x} \otimes \mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{S}} \\ \parallel & & \text{bch} \uparrow \simeq \\ p^*F|_{\mathcal{S} \times \{x\}} & \xrightarrow{p^*(p_*\psi|_{\{x\}})} & p^*E|_{\mathcal{S} \times \{x\}} \end{array}.$$

Отсюда следует, что $\bar{\psi}_x = 0$ эквивалентно $p_*\psi|_{\{x\}} = 0$. Морфизм $p_*\psi|_{\{x\}}$ представляет собой морфизм локально свободных пучков, множество нулей которого M замкнуто.

Второе включение в формуле (1) отражает тот факт, что обе подсхемы Z_{d_1} и Z_{d_2} являются замкнутыми подсхемами в подсхеме $Z_{d_1+d_2}$.

Условия (1) справедливы глобально на $\mathbb{P}^2 = \text{Proj } \mathbb{C}[x_0 : x_1 : x_2]$, если под I_{d_1} , I_{d_2} и I понимать однородные идеалы в кольце $\mathbb{C}[x_0 : x_1 : x_2]$.

Ограничимся интересующим нас случаем многообразия X_{13} полных пар 0-подсхем длины 1 и 3 комплексной проективной плоскости $\mathcal{S} = \mathbb{P}^2$.

2. Клеточные разбиения и действия тора. Мы используем стандартное определение клеточного разбиения схемы [2; гл. 1, §9, пример 1.9.1].

(i) Будем говорить, что проективное многообразие X над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики (в нашем случае $k = \mathbb{C}$) обладает клеточным разбиением, если существует фильтрация $X = X_n \supset X_{n-1} \supset \dots \supset X_1 \supset X_0 \supset X_{-1} = \emptyset$ замкнутыми подсхемами, причем $\forall i, i = 0, \dots, n$, $X_i - X_{i-1} = \coprod_j U_{ij}$, $U_{ij} \simeq \mathbb{A}^{n_{ij}}$. Известно, что замыкания $\bar{U}_{ij}$ клеток U_{ij} образуют базис в группе классов циклов A_*X по модулю рациональной эквивалентности, и для схем с клеточным разбиением она изоморфна как градуированная группа группе гомологий Бореля–Мура H_*X локально компактного топологического пространства X . Изоморфизм задается отображением цикла $\text{cl}_X: A_qX \rightarrow H_{2q}X$, и имеет место обращение в нуль нечетномерных гомологий многообразия X .

(ii) Пусть гладкое проективное алгебраическое многообразие X допускает действие одномерного тора $T \simeq \mathbb{C}^*$, причем все неподвижные точки этого действия изолированы. Тогда согласно результатам А. Бялыницкого–Бирюли [3], [4] имеется клеточное разбиение многообразия X в смысле (i) такое, что каждой клетке отвечает одна и только одна неподвижная точка.

Согласно (i) и (ii) если число неподвижных точек при действии тора T на X конечно, то это число дает топологическую эйлерову характеристику χ_{top} многообразия X , а число q -мерных клеток равно рангу q -й компоненты A_qX группы Чжоу и $2q$ -й группы гомологий $H_{2q}X$, т.е. $2q$ -му числу Бетти b_{2q} .

Цель настоящей работы – вычисление клеточного разбиения многообразия X_{13} . Это дает его числа Бетти, а значит, и ранги a_q групп Чжоу как свободных $\mathbb{Z}$ -модулей. Числа Чжоу a_q многообразия X_{22} полных пар двоеточий были вычислены А. С. Тихомировым и Т. Л. Тропиной в [5]. Они использовали метод бирациональных перестроек многообразия X_{22} , опирающийся на геометрию раздутия σ . В частности, в их работе существенно то, что для цикла инциденции Γ в произведении $H_2 \times H_2$ существует морфизм десингуляризации $p: \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$, описываемый как раздутие схемы Γ в подсхеме ее особенностей.

Использование конструкций, подобных примененным авторами статьи [5], в случае, когда хотя бы одно из чисел $d_1, d_2 \geq 3$, сопряжено с большими техническими трудностями ввиду того, что подсхема Γ в $\mathcal{S} \times H_3$ особа и построить морфизм десингуляризации $p: \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ не представляется возможным.

Излагаемый в настоящей работе алгоритм не использует геометрической структуры графика инциденции Γ и может быть применен при единственном условии – если известно, что $X_{d_1 d_2}$ неособо. Гладкость многообразий полных пар $X_{d_1 d_2}$ составляет содержание гипотезы А. С. Тихомирова [1], доказанной им в той же работе в случае $d_1 = d_2 = 2$. Неособость многообразий X_{1d} доказывалась независимо различными методами Г. Эллингсрудом [6], Дж. Чи [7], А. С. Тихомировым [1]. Гладкость многообразия X_{23} доказана автором настоящей статьи [8].

Рассмотрим действие однопараметрической группы T с параметром t на множестве элементов кольца $\mathbb{C}[x_0 : x_1 : x_2]$, заданное на мономах следующим образом:

$$\forall \tau \in T \quad \tau * x_0^i x_1^j x_2^k = t^{jm+kn} x_0^i x_1^j x_2^k. \quad (2)$$

Тогда имеется индуцированное действие группы T на множестве идеалов кодлины d в кольце $\mathbb{C}[x_0 : x_1 : x_2]$ и, тем самым, на схеме Гильберта H_d и произведении $Y = \mathbb{P}^2 \times H_d \times H_{d+1}$.

Более того, многообразие полных пар X_{1d} инвариантно относительно действий полного тора $\bar{T} = T \cup \{0\}$, где $\{0\}$ – матрица, отвечающая нулевому значению параметра t . Очевидно, что $\forall \tau \in T, \forall x \in X_{1d} \quad \tau * x \in X_{1d}$. Действие всякой алгебраической группы G на многообразии X – это морфизм $\alpha: G \times X \rightarrow X$. Образ морфизма $\alpha: T \times X_{1d} \rightarrow Y$ содержит открытое подмножество, плотное в замыкании $\alpha(T \times X_{1d})$. Отсюда $\alpha(\bar{T} \times X_{1d}) \subset X_{1d}$ и $\bar{T}$ – инвариантность X_{1d} .

Неподвижные точки X_{1d} изолированы и число их конечно в силу следующего простого факта.

ЛЕММА. *Существует такое действие тора (2) на $\mathbb{P}^2$ с параметрами m, n , что точка $z_d \in H_d$ неподвижна тогда и только тогда, когда идеал подсхемы Z_d порожден мономами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образующая идеала I_d подсхемы длины d имеет степень не выше d ; при $m = 1, n > d$ всякая точка z_d , отвечающая подсхеме с немономиальным идеалом, перемещается под действием тора.

Таким образом, поскольку многообразие X_{13} имеет естественную проекцию на схему Гильберта H_4 , достаточно взять $m = 1, n = 5$ и вычислить явно клеточные разбиения схем Гильберта H_1, H_3 и многообразия X_{13} .

3. Клеточные разбиения схем Гильберта H_d вычисляются индуктивно; если найдены клеточные разбиения для схем Гильберта в длинах до $d - 1$ включительно, то для получения клеточного разбиения H_d остается построить лишь такие семейства подсхем, каждое из которых имеет своей неподвижной точкой схему Z_d с носителем в одной из неподвижных точек p_i на $\mathbb{P}^2$. Клетки U_{Z_d} , отвечающие другим неподвижным точкам, подчиняются условию $U_{Z_d} = \prod_{p_i = \text{Supp } Z_{l_i}} U_{Z_{l_i}}$, где $\prod$ означает декартово произведение, $U_{Z_{l_i}}$ – клетку, отвечающую неподвижной точке Z_{l_i} .

СОГЛАШЕНИЕ. Далее всюду символ $\{I\}$ будет означать подсхему в $\mathbb{P}^2$, заданную идеалом I .

Случай H_1 тривиален в силу очевидного изоморфизма $H_1 \simeq \mathbb{P}^2$ (см. таблицу 1).

ТАБЛИЦА 1. Клеточное разбиение многообразия H_1

Неподвижная точка	Семейство	Размерность
$(1 : 0 : 0)$	$\{(x_1, x_2)\}$	0
$(0 : 1 : 0)$	$\{(x_0 - ax_1, x_2)\}$	1
$(0 : 0 : 1)$	$\{(x_0 - ax_1, x_1 - bx_2)\}$	2

Всякая подсхема Z_d , отвечающая неподвижной точке в H_d , представляет собой несвязное объединение подсхем с носителями в неподвижных точках $\mathbb{P}^2$. Поэтому для вычисления клеточных разбиений многообразий H_3 и X_{13} рассмотрим сначала многообразие H_2 .

3.1. Клеточное разбиение многообразия H_2 . Для его вычисления следует продеформировать на $\mathbb{P}^2$ неприведенную подсхему длины 2 с носителем в точке p_i , $i = 0, 1, 2$. Деформация $\{I_d^v\}$ подсхемы $\{I_d^0\}$ – это подсхема в $\mathbb{P}^2$, переводимая действием тора (2) при $t = 0$ в подсхему $\{I_d^0\}$.

ПРИМЕР 3.1. Подсхема $\{(x_1^2, x_2)\}$ не имеет нетривиальных деформаций, а подсхема $\{(x_1, x_2^2)\}$ обладает однопараметрическим их семейством: $\{I_d^v\} = \{(x_1 - ax_2, x_2^2)\}$. Геометрически это – неприведенные подсхемы длины 2 с носителем в точке p_0 и различными направлениями касательного вектора.

ПРИМЕР 3.2. Подсхема $\{(x_0^2, x_2)\}$ имеет семейство деформаций $\{((x_0 - a_1x_1) \times (x_0 - a_2x_1), x_2)\}$ – две точки подсхемы “разводятся” вдоль T -инвариантной прямой, заданной уравнением $x_2 = 0$. Подсхема $\{(x_0, x_2^2)\}$ имеет семейство деформаций $\{(x_0 - ax_1 - bx_2, x_2^2)\}$. Это подсхема с носителем на прямой $x_2 = 0$, с “координатой” a и “угловым коэффициентом” касательного вектора b .

ПРИМЕР 3.3. Подсхема $\{(x_0^2, x_1)\}$ имеет семейство деформаций $\{((x_0 - a_1x_2) \times (x_0 - a_2x_2), x_1 - bx_2)\}$ – две произвольные точки на любой прямой однопараметрического семейства $\{(x_1 - bx_2)\}$. Подсхема $\{(x_0, x_1^2)\}$ имеет семейство деформаций $\{(x_0 - ax_1 - bx_2, (x_1 - a_1x_2)(x_1 - a_2x_2))\}$ – две произвольные точки на плоскости.

Итак, получено клеточное разбиение многообразия H_2 (см. таблицу 2) с числами Бетти $b_0 = b_8 = 1$, $b_2 = b_6 = 2$, $b_4 = 3$, $b_{2i+1} = 0$, $i = 0, \dots, 3$; $\chi_{\text{top}} = 9$, что согласуется с результатом Г. Эллинсруда и С. А. Стремме [9].

ТАБЛИЦА 2. Клеточное разбиение многообразия H_2

Неподвижная точка	Размерность	Неподвижная точка	Размерность
$\{(x_0, x_1)\} \cup \{(x_0, x_2)\}$	3	$\{(x_0^2, x_1)\}$	3
$\{(x_0, x_1^2)\}$	4	$\{(x_0, x_1)\} \cup \{(x_1, x_2)\}$	2
$\{(x_1^2, x_2)\}$	0	$\{(x_1, x_2^2)\}$	1
$\{(x_0, x_2)\} \cup \{(x_1, x_2)\}$	1	$\{(x_0^2, x_2)\}$	2
$\{(x_0, x_2^2)\}$	2		

3.2. *Клеточное разбиение многообразия H_3 .* Для его вычисления нам осталось исследовать деформации подсхем длины 3 с носителем в точке на проективной плоскости.

ПРИМЕР 3.4. Подсхема $\{(x_1^3, x_2)\}$ не имеет деформаций; подсхема $\{(x_1, x_2^3)\}$ обладает семейством деформаций $\{(x_0x_1 - ax_0x_2 - bx_2^2, x_2^3)\}$ – “криволинейные” схемы длины 3 с “направлением” касательного вектора a и “кривизной” b . Схема $\{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)\}$ имеет семейство деформаций $\{(x_0x_2 - ax_1^2, x_1^3)\}$.

ПРИМЕР 3.5. Подсхема $\{(x_0^3, x_2)\}$ имеет деформации вида $\{(\prod_{i=1}^3 (x_0 - a_i x_1), x_2)\}$ – 3 точки на прямой $\{(x_2)\}$, а схема $\{(x_0, x_2^3)\}$ обладает деформациями вида $\{(x_0x_1 - ax_1^2 - bx_1x_2 - cx_2^2, x_2^3)\}$ – “криволинейная” схема длины 3 с носителем в точке a на прямой $\{(x_2)\}$, “направлением” b и “кривизной” c . Схема $\{(x_0^2, x_0x_2, x_2^2)\}$ имеет деформации вида $\{((x_0 - a_1x_1 - bx_2)(x_0 - a_2x_1), (x_0 - a_1x_1)x_2, x_2^2)\}$ – точка на прямой $\{(x_2)\}$ с “координатой” a_2 и неприведенная 2-схема с носителем в точке на прямой $\{(x_2)\}$ с “координатой” a_1 и “направлением” b .

ПРИМЕР 3.6. Подсхема $\{(x_0^3, x_1)\}$ обладает семейством деформаций $\{(\prod_{i=1}^3 (x_0 - a_i x_2), x_1 - bx_2)\}$ – 3 точки на любой прямой однопараметрического семейства $\{(x_1 - bx_2)\}$; подсхема $\{(x_0, x_1^3)\}$ обладает семейством деформаций $\{(x_0 - ax_1 - bx_2, \prod_{i=1}^3 (x_1 - c_i x_2))\}$ – 3 точки на прямой общего положения в $\mathbf{A}^2$; 3-подсхема $\{(x_0^2, x_0x_1, x_1^2)\}$ имеет семейство деформаций $\{((x_0 - a_1x_1 - b_1x_2)(x_0 - a_2x_1 - b_2x_2), (x_0 - a_1x_1 - b_1x_2)(x_0 - a_3x_1 - b_3x_2), (x_0 - a_2x_1 - b_2x_2)(x_0 - a_3x_1 - b_3x_2))\}$ – 3 точки общего положения в $\mathbf{A}^2$.

Таким образом, получено клеточное разбиение многообразия H_3 (см. таблицу 3) с числами Бетти $b_0 = b_{12} = 1$, $b_2 = b_{10} = 2$, $b_4 = b_8 = 5$, $b_6 = 6$, $b_{2i+1} = 0$, $i = 0, \dots, 5$; $\chi_{\text{top}} = 22$, что согласуется с результатом [9].

4. Клеточное разбиение многообразия полных пар. Пусть I_d^v – семейство идеалов, отвечающих точкам клетки в клеточном разбиении схемы Гильберта H_d , I_d^0 – идеал предельной схемы Z_d^0 при $t = 0$ – подсхемы, отвечающей неподвижной точке этой клетки. Будем считать, что $\text{Supp } Z_d^0 = p$ – одна из неподвижных точек $\mathbb{P}^2$. Предположим, что I_d^v – идеал подсхемы Z_d^v в $\mathbb{P}^2$ такой, что $\text{Supp } Z_d^0 = p$.

Если подсхемы $Z_{d_1}^v$ и $Z_{d_2}^v$ лежат в открытом подмножестве D , то искомая подсхема $Z_{d_1+d_2}^v$ есть их объединение. Нетривиальная ситуация возникает, когда деформации имеют носитель в единственной точке.

ТАБЛИЦА 3. Клеточное разбиение многообразия H_3

Неподвижная точка	Размерность	Неподвижная точка	Размерность
$\{(x_1, x_2)\} \cup \{(x_0, x_2)\} \cup \{(x_0, x_1)\}$	3	$\{(x_1, x_2^2)\} \cup \{(x_0, x_2)\}$	2
$\{(x_1, x_2^2)\} \cup \{(x_0, x_1)\}$	3	$\{(x_1^2, x_2)\} \cup \{(x_0, x_2)\}$	1
$\{(x_1^2, x_2)\} \cup \{(x_0, x_1)\}$	2	$\{(x_1, x_2)\} \cup \{(x_0, x_2^2)\}$	2
$\{(x_0, x_2^2)\} \cup \{(x_0, x_1)\}$	4	$\{(x_1, x_2)\} \cup \{(x_0^2, x_2)\}$	2
$\{(x_0^2, x_2)\} \cup \{(x_0, x_1)\}$	4	$\{(x_1, x_2)\} \cup \{(x_0^2, x_1)\}$	3
$\{(x_0, x_2)\} \cup \{(x_0^2, x_1)\}$	4	$\{(x_1, x_2)\} \cup \{(x_0, x_1^2)\}$	4
$\{(x_0, x_2)\} \cup \{(x_0, x_1^2)\}$	5	$\{(x_1, x_2^3)\}$	2
$\{(x_1^3, x_2)\}$	0	$\{(x_0, x_2^3)\}$	3
$\{(x_0^3, x_2)\}$	3	$\{(x_0^3, x_1)\}$	4
$\{(x_0, x_1^3)\}$	5	$\{(x_1^2, x_1 x_2, x_2^2)\}$	1
$\{(x_0^2, x_0 x_2, x_2^2)\}$	3	$\{(x_0^2, x_0 x_1, x_1^2)\}$	6

Образует произведение $I_{d_1}^v I_{d_2}^v$. Очевидно, что $\text{colength } I_{d_1}^v I_{d_2}^v \geq d_1 + d_2$, поэтому искомая подсхема длины $l + 1$ является подсхемой в $Z^v = \{I_{d_1}^v I_{d_2}^v\}$. Задача сводится к тому, чтобы выделить подсхему $Z_{d_1+d_2}^v$ в Z^v так, чтобы тройка $(I_{d_1}^v, I_{d_2}^v, I_{d_1+d_2}^v)$ имела максимальное число независимых параметров и удовлетворяла условию

$$I_{d_1+d_2}^v \subset I_{d_1}^v I_{d_2}^v. \quad (3)$$

Искомая подсхема $Z_{d_1+d_2}^v$ лежит в пересечении подсхемы Z^v с одной или несколькими (возможно, приводимыми либо кратными) кривыми на $\mathbb{P}^2$, заданными в окрестности точки p и содержащими подсхемы $Z_{d_1}^v$ и $Z_{d_2}^v$.

Для удобства нахождения таких кривых полезно ввести вспомогательные множества мономов, ассоциированные с деформациями $\{I_{d_1}^v\}$ и $\{I_{d_2}^v\}$ подсхем $\{I_{d_1}^0\}$ и $\{I_{d_2}^0\}$: “внешние” мономы

$$\text{Ex} := \{\text{мономы, обращающиеся в нуль по модулю } I_{d_1}^v I_{d_2}^v\};$$

и “внутренние” мономы

$$\text{In} := \{\text{мономы, обращающиеся в нуль по модулю } I_{d_1}^v \text{ и по модулю } I_{d_2}^v\}.$$

Также введем множество (состоящее не только из мономов)

$$\text{In}' := \{x_0^i x_1^j x_2^k \mathbf{g} \pmod{I_{d_1}^v I_{d_2}^v} : \mathbf{g} - \text{образующая } I_{d_1}^v \text{ либо } I_{d_2}^v\}$$

и соответствующее ему

$$\text{In}^+ := \text{In} \cup \{\text{мономы, входящие в элементы } \text{In}'\} - \text{Ex}.$$

Множество In^+ содержит мономы, которые могут входить в уравнение кривой, высекающей искомую деформацию подсхемы длины $d_1 + d_2$.

Пусть полученное таким образом семейство $(Z_{d_1}^v, Z_{d_2}^v, Z_{d_1+d_2}^v)$ обладает q независимыми параметрами; назовем это число q размерностью семейства $(Z_{d_1}^v, Z_{d_2}^v, Z_{d_1+d_2}^v)$. Рассмотрим все такие семейства, переводимые тором в одну и ту же неподвижную точку многообразия $X_{d_1 d_2}$. Число их, как видно из построения, конечно. Пусть $\bar{q}$ – максимальная из размерностей этих семейств. Она (в силу возможной неполноты условий (1)) мажорирует размерность клетки.

Семейства подсхем (Z_1^v, Z_3^v, Z_4^v) , отвечающие клеткам в разбиении X_{13} , получаются из семейств вида $(Z_1^v, Z_l^v, Z_{l+1}^v)$, $l = 1, 2, 3$, переводимых тором в тройки с носителем в неподвижной точке $\mathbb{P}^2$. Приведенные ниже примеры 4.1, 4.2 поясняют описанный способ вычислений.

ПРИМЕР 4.1. Для пары точек $(\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1, x_2)\})$ множество мономов In^+ состоит из двух элементов x_1, x_2 , поэтому имеют место следующие семейства: $(\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^2, x_2)\})$, отвечающее “жесткой” тройке подсхем, и $(\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1, x_2)\}, \{(x_1 - ax_2, x_2^2)\})$, отвечающее одномерному семейству подсхем.

ТАБЛИЦА 4. Семейства подсхем для $l = 1$

Неподвижная точка	Семейство	Размерность
$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^2, x_2)\}$	$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^2, x_2)\}$	0
$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1, x_2)\}, \{(x_1, x_2^2)\}$	$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1, x_2)\}, \{(x_1 - ax_2, x_2^2)\}$	1
$\{(x_0, x_2)\}, \{(x_0, x_2)\}, \{(x_0^2, x_2)\}$	$\{(x_0 - a_1 x_1, x_2)\}, \{(x_0 - a_2 x_1, x_2)\}, \{(x_0 - a_1 x_1)(x_0 - a_2 x_1), x_2)\}$	2
$\{(x_0, x_2)\}, \{(x_0, x_2)\}, \{(x_0, x_2^2)\}$	$\{(x_0 - ax_1, x_2)\}, \{(x_0 - ax_1, x_2)\}, \{(x_0 - ax_1 - bx_2, x_2^2)\}$	2
$\{(x_0, x_1)\}, \{(x_0, x_1)\}, \{(x_0^2, x_1)\}$	$\{(x_0 - a_1 x_1, x_1 - bx_2)\}, \{(x_0 - a_2 x_1, x_1 - bx_2)\}, \{(x_0 - a_1 x_1)(x_0 - a_2 x_1), x_1 - bx_2)\}$	3
$\{(x_0, x_1)\}, \{(x_0, x_1)\}, \{(x_0, x_1^2)\}$	$\{(x_1 - a_1 x_2, x_0 - ax_1 - bx_2)\}, \{(x_1 - a_2 x_2, x_0 - ax_1 - bx_2)\}, \{(x_0 - ax_1 - bx_2, (x_1 - a_1 x_2)(x_1 - a_2 x_2))\}$	4

ПРИМЕР 4.2. (i) Рассмотрим идеалы $I_1^v = (x_1, x_2)$, $I_2^v = (x_1^2, x_2)$. Образует произведение $I_1^v I_2^v = (x_1^3, x_1 x_2, x_2^2)$. В этом случае множество In^+ состоит из трех элементов

$$\text{In}^+ = \{x_0 x_1, x_0 x_2, x_1^2\},$$

что дает две возможности получить в сечении схемы $\{I_1^v I_2^v\}$ подсхему длины 3.

Первая возможность $\{I_3^v\} = \{(x_1^3, x_1 x_2, x_2^2, x_0 x_2 - ax_1^2)\} = \{(x_1^3, x_0 x_2 - ax_1^2)\}$ – приводит к однопараметрической деформации тройки подсхем $(\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^2, x_2)\}, \{(x_1^2, x_1 x_2, x_2^2)\})$.

Таблица 5. Семейства подсхем для $l = 2$

Неподвижная точка	Семейство	Размерность
$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^2, x_2)\}, \{(x_1^3, x_2)\}$	$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^2, x_2)\}, \{(x_1^3, x_2)\}$	0
$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^2, x_2)\}, \{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)\}$	$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^2, x_2)\}, \{(x_1^3, x_0x_2 - ax_1^2)\}$	1
$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1, x_2^2)\}, \{(x_1, x_2^3)\}$	$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1 - ax_2, x_2^2)\}, \{(x_0x_1 - ax_0x_2 - bx_2^2, x_2^3)\}$	2
$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1, x_2^2)\}, \{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)\}$	$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^2, x_1 - ax_2)\}, \{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)\}$	1
$\{(x_0, x_2)\}, \{(x_0^2, x_2)\}, \{(x_0^3, x_2)\}$	$\{(x_0 - ax_1, x_2)\}, \{((x_0 - a_1x_1)(x_0 - a_2x_1), x_2)\}, \{((x_0 - ax_1)(x_0 - a_1x_1)(x_0 - a_2x_1), x_2)\}$	3
$\{(x_0, x_2)\}, \{(x_0^2, x_2)\}, \{(x_0^2, x_0x_2, x_2^2)\}$	$\{(x_0 - ax_1, x_2)\}, \{((x_0 - ax_1)(x_0 - a_1x_1), x_2)\}, \{((x_0 - ax_1 - bx_2)(x_0 - a_1x_1), (x_0 - ax_1)x_2, x_2^2)\}$	3
$\{(x_0, x_2)\}, \{(x_0, x_2^2)\}, \{(x_0, x_2^3)\}$	$\{(x_0 - ax_1, x_2)\}, \{(x_0 - ax_1 - bx_2, x_2^2)\}, \{(x_0x_1 - ax_1^2 - bx_1x_2 - cx_2^2, x_2^3)\}$	3
$\{(x_0, x_2)\}, \{(x_0, x_2^2)\}, \{(x_0^2, x_0x_2, x_2^2)\}$	$\{(x_0 - a_1x_1, x_2)\}, \{(x_0 - ax_1 - bx_2, x_2^2)\}, \{((x_0 - ax_1 - bx_2)(x_0 - a_1x_1), (x_0 - ax_1)x_2, x_2^2)\}$	3
$\{(x_0, x_1)\}, \{(x_0^2, x_1)\}, \{(x_0^3, x_1)\}$	$\{(x_0 - ax_1, x_1 - bx_2)\}, \{((x_0 - a_1x_1)(x_0 - a_2x_1), x_1 - bx_2)\}, \{((x_0 - ax_1)(x_0 - a_1x_1)(x_0 - a_2x_1), x_1 - bx_2)\}$	4
$\{(x_0, x_1)\}, \{(x_0^2, x_1)\}, \{(x_0^2, x_0x_1, x_1^2)\}$	$\{(x_0 - a_1x_1 - b_1x_2, x_1 - b_2x_2)\}, \{((x_0 - a_1x_1 - b_1x_2)(x_0 - a_2x_1), x_1 - bx_2)\}, \{((x_0 - a_1x_1 - b_1x_2)(x_0 - a_2x_1), (x_0 - a_1x_1 - b_1x_2)(x_1 - bx_2), (x_1 - b_2x_2)(x_1 - bx_2))\}$	5
$\{(x_0, x_1)\}, \{(x_0, x_1^2)\}, \{(x_0, x_1^3)\}$	$\{(x_1 - ax_2, x_0 - bx_1 - cx_2)\}, \{((x_1 - a_1x_2)(x_1 - a_2x_2), x_0 - bx_1 - cx_2)\}, \{((x_1 - ax_2)(x_1 - a_1x_2)(x_1 - a_2x_2), x_0 - bx_1 - cx_2)\}$	5
$\{(x_0, x_1)\}, \{(x_0, x_1^2)\}, \{(x_0^2, x_0x_1, x_1^2)\}$	$\{A\}, \{B, C\}, \{A, B, C\},$ где A, B, C — точки общего положения	6

Таблица 6. Семейства подсхем для $l = 3$

Неподвижная точка	Семейство	Размерность
$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^3, x_2)\}, \{(x_1^4, x_2)\}$	$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^3, x_2)\}, \{(x_1^4, x_2)\}$	0
$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^3, x_2)\}, \{(x_1^3, x_1x_2, x_2^2)\}$	$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^3, x_2)\}, \{(x_0^2x_2 - ax_1^3, x_1^4)\}$	1
$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1, x_2^3)\}, \{(x_1, x_2^4)\}$	$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_0x_1 - ax_0x_2 - bx_2^2, x_2^3)\}, \{(x_0^2x_1 - ax_0^2x_2 - bx_0x_2^2 - cx_2^3, x_2^4)\}$	3
$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1, x_2^3)\}, \{(x_1^2, x_1x_2, x_2^3)\}$	$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_0x_1 - ax_0x_2 - bx_2^2, x_2^3)\}, \{(x_1(x_0x_1 - ax_0x_2 - bx_2^2), x_2(x_0x_1 - ax_0x_2 - bx_2^2), x_2^3)\}$	2
$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)\}, \{(x_1^3, x_1x_2, x_2^3)\}$	$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_0x_2 - ax_1^2, x_1^3)\}, \{(x_1^3, x_1x_2, x_2^2)\}$	1
$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)\}, \{(x_1^2, x_2^2)\}$	$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_0x_2 - ax_1^2, x_1^3)\}, \{(x_0^2 - ax_0x_1^2 - bx_1^3, x_1^4)\}$	2
$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)\}, \{(x_1^2, x_1x_2, x_2^3)\}$	$\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)\}, \{(x_1^2 - ax_2^2, x_1x_2 - bx_2^2, x_2^3)\}$	2
$\{(x_0, x_2)\}, \{(x_0^3, x_2)\}, \{(x_0^4, x_2)\}$	$\{(x_0 - ax_1, x_2)\}, \{((x_0 - a_1x_1)(x_0 - a_2x_1)(x_0 - a_3x_1), x_2)\}, \{((x_0 - ax_1)(x_0 - a_1x_1)(x_0 - a_2x_1)(x_0 - a_3x_1), x_2)\}$	4
$\{(x_0, x_2)\}, \{(x_0^3, x_2)\}, \{(x_0^3, x_0x_2, x_2^2)\}$	$\{(x_0 - ax_1, x_2)\}, \{((x_0 - ax_1)(x_0 - a_1x_1)(x_0 - a_2x_1), x_2)\}, \{((x_0 - ax_1 - bx_2)(x_0 - a_1x_1)(x_0 - a_2x_1), (x_0 - ax_1 - bx_2)x_2, x_2^2)\}$	4
$\{(x_0, x_2)\}, \{(x_0, x_2^3)\}, \{(x_0, x_2^4)\}$	$\{(x_0 - ax_1, x_2)\}, \{(x_0x_1 - ax_1^2 - bx_1x_2 - cx_2^2, x_2^3)\}, \{(x_0x_1^2 - ax_1^3 - bx_1^2x_2 - cx_1x_2^2 - dx_2^3, x_2^4)\}$	4
$\{(x_0, x_2)\}, \{(x_0, x_2^3)\}, \{(x_0^2, x_0x_2, x_2^3)\}$	$\{(x_0 - a_1x_1, x_2)\}, \{((x_0x_1 - ax_1^2 - bx_1x_2 - cx_2^2, x_2^3)\}, \{((x_0 - a_1x_1)(x_0x_1 - ax_1^2 - bx_1x_2 - cx_2^2), (x_0x_1 - ax_1^2 - bx_1x_2 - cx_2^2)x_2, x_2^3)\}$	4
$\{(x_0, x_2)\}, \{(x_0^2, x_0x_2, x_2^2)\}, \{(x_0^3, x_0x_2, x_2^2)\}$	$\{(x_0 - ax_1, x_2)\}, \{((x_0 - a_1x_1 - bx_2)(x_0 - a_2x_1), (x_0 - a_1x_1 - bx_2)x_2, x_2^2)\}, \{((x_0 - ax_1)(x_0 - a_1x_1 - bx_2)(x_0 - a_2x_1), (x_0 - a_1x_1 - bx_2)x_2, x_2^2)\}$	4
$\{(x_0, x_2)\}, \{(x_0^2, x_0x_2, x_2^2)\}, \{(x_0^2, x_2^2)\}$	$\{(x_0 - a_2x_1, x_2)\}, \{((x_0 - a_1x_1 - b_1x_2)(x_0 - a_2x_1), (x_0 - a_1x_1 - b_1x_2)x_2, x_2^2)\}, \{((x_0 - a_1x_1 - b_1x_2)(x_0 - a_2x_1 - b_2x_2), x_2^2)\}$	4

ТАБЛИЦА 6. Семейства подсхем для $l = 3$ (продолжение)

Неподвижная точка	Семейство	Размерность
$\{(x_0, x_2)\},$ $\{(x_0^2, x_0 x_2, x_2^2)\},$ $\{(x_0^2, x_0 x_2, x_2^2)\}$	$\{(x_0 - a_1 x_1, x_2)\},$ $\{((x_0 - a_1 x_1 - b x_2)(x_0 - a_2 x_1),$ $(x_0 - a_1 x_1 - b x_2)x_2, x_2^2)\},$ $\{((x_0 x_1 - a_1 x_1^2 - b x_0 x_2 - c x_2^2)(x_0 - a_2 x_1),$ $(x_0 x_1 - a_1 x_1^2 - b x_0 x_2 - c x_2^2)x_2, x_2^2)\}$	4
$\{(x_0, x_1)\},$ $\{(x_0^3, x_1)\},$ $\{(x_0^4, x_1)\}$	$\{(x_0 - a_1 x_1, x_1 - b x_2)\},$ $\{((x_0 - a_2 x_1)(x_0 - a_3 x_1)(x_0 - a_4 x_1), x_1 - b x_2)\},$ $\{(\prod_{i=1}^4 (x_0 - a_i x_1), x_1 - b x_2)\}$	5
$\{(x_0, x_1)\},$ $\{(x_0^3, x_1)\},$ $\{(x_0^3, x_0 x_1, x_1^2)\}$	$\{(x_0 - a_1 x_1 - b_1 x_2, x_1 - b_2 x_2)\},$ $\{((x_0 - a_1 x_1 - b_1 x_2)(x_0 - a_2 x_1)(x_0 - a_3 x_1),$ $x_1 - b_3 x_2)\},$ $\{((x_0 - a_1 x_1 - b_1 x_2)(x_0 - a_2 x_1)(x_0 - a_3 x_1),$ $(x_0 - a_1 x_1 - b_1 x_2)(x_1 - b_3 x_2),$ $(x_1 - b_2 x_2)(x_1 - b_3 x_2))\}$	6
$\{(x_0, x_1)\},$ $\{(x_0, x_1^3)\},$ $\{(x_0, x_1^4)\}$	$\{(x_0 - a x_1 - b x_2, x_1 - a_1 x_2)\},$ $\{(x_0 - a x_1 - b x_2,$ $(x_1 - a_2 x_2)(x_1 - a_3 x_2)(x_1 - a_4 x_2))\},$ $\{(x_0 - a x_1 - b x_2, \prod_{i=1}^4 (x_1 - a_i x_2))\}$	6
$\{(x_0, x_1)\},$ $\{(x_0, x_1^3)\},$ $\{(x_0^2, x_0 x_1, x_1^3)\}$	$\{(x_0 - a' x_1, x_0 - a_1 x_1 - b_1 x_2)\},$ $\{(x_0 - a x_1 - b x_2,$ $(x_0 - a_1 x_1 - b_1 x_2)(x_0 - a_2 x_1)(x_1 - b_2 x_2))\},$ $\{((x_0 - a x_1 - b x_2)(x_0 - a' x_1),$ $(x_0 - a_1 x_1 - b_1 x_2)(x_0 - a_2 x_1)(x_1 - b_2 x_2),$ $(x_0 - a x_1 - b x_2)(x_0 - a_1 x_1 - b_1 x_2))\}$	7
$\{(x_0, x_1)\},$ $\{(x_0^2, x_0 x_1, x_1^2)\},$ $\{(x_0^3, x_0 x_1, x_1^2)\}$	$\{(x_0 - a x_1 - b x_2, x_1 - b_2 x_2)\},$ $\{((x_0 - a x_1 - b x_2)(x_1 - a_1 x_2)(x_1 - a_2 x_2),$ $x_1 - b_1 x_2)\},$ $\{((x_0 - a x_1 - b x_2)(x_0 - a_1 x_1)(x_0 - a_2 x_1),$ $(x_0 - a x_1 - b x_2)(x_1 - b_1 x_2),$ $(x_1 - b_1 x_2)(x_1 - b_2 x_2))\}$	6
$\{(x_0, x_1)\},$ $\{(x_0^2, x_0 x_1, x_1^2)\},$ $\{(x_0^2, x_0 x_1, x_1^3)\}$	$\{(x_0 - a_1 x_1 - b_1 x_2, x_0 - a_3 x_1 - b_3 x_2)\},$ $\{((x_0 - a_1 x_1 - b_1 x_2)(x_0 - a_2 x_1 - b_2 x_2),$ $(x_0 - a_3 x_1 - b_3 x_2)(x_0 - a_4 x_1 - b_4 x_2),$ $(x_0 - a_2 x_1 - b_2 x_2)(x_0 - a_4 x_1 - b_4 x_2))\},$ $\{((x_0 - a_1 x_1 - b_1 x_2)(x_0 - a_2 x_1 - b_2 x_2),$ $(x_0 - a_3 x_1 - b_3 x_2)(x_0 - a_4 x_1 - b_4 x_2))\}$	8
$\{(x_0, x_1)\},$ $\{(x_0^2, x_0 x_1, x_1^2)\},$ $\{(x_0^2, x_1^2)\}$	Предыдущее семейство при $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$	7

Вторая возможность — $\{I_3^v\} = \{(x_1^3, x_1x_2, x_2^2, x_2)\} = \{(x_1^3, x_2)\}$ — определяет “жесткую” тройку $(\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1^2, x_2)\}, \{(x_1^3, x_2)\})$.

(ii) Теперь рассмотрим пару подсхем $(\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1 - ax_2, x_2^2)\})$. Образует произведение идеалов $I_1^v I_2^v = (x_1(x_1 - ax_2), x_1x_2^2, (x_1 - ax_2)x_2, x_2^3)$. Соответствующее множество мономов In^+ имеет вид $\text{In}^+ = \{x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2, x_2^2\}$. Заметим, что при $a \neq 0$ имеют место следующие сравнения по модулю $I_1^v I_2^v$:

$$x_1^2 \equiv x_1x_2 \equiv x_2^2 \pmod{I_1^v I_2^v}.$$

Принимая это во внимание, получаем следующие идеалы подсхем длины 3.

Во-первых, сечение кривой, заданной уравнением $x_0x_1 - ax_0x_2 - bx_2^2 = 0$, приводит к подсхеме с идеалом $I_3^v = (x_0x_1 - ax_0x_2 - bx_2^2, x_1(x_1 - ax_2), x_1x_2^2, (x_1 - ax_2)x_2, x_2^3) = (x_0x_1 - ax_0x_2 - bx_2^2, x_2^3)$, что определяет деформацию тройки подсхем $(\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1, x_2^2)\}, \{(x_1, x_2^3)\})$.

Во-вторых, сечение сдвоенной прямой, заданной уравнением $x_1^2 = 0$, приводит к подсхеме $\{(x_1^2, x_1(x_1 - ax_2), x_1x_2^2, (x_1 - ax_2)x_2, x_2^3)\} = \{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)\}$, что задает однопараметрическую деформацию тройки подсхем $(\{(x_1, x_2)\}, \{(x_1, x_2^2)\}, \{(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)\})$.

Аналогичные вычисления приводят к результатам, представленным в таблицах 5, 6.

Таким образом, вычислено клеточное разбиение многообразия X_{13} и доказана

ТЕОРЕМА. Числа Бетти и топологическая эйлерова характеристика многообразия X_{13} равны $b_0 = b_{16} = 1$, $b_2 = b_{14} = 4$, $b_4 = b_{12} = 12$, $b_6 = b_{10} = 22$, $b_8 = 27$, $b_{2k+1} = 0$, $k = 0, \dots, 7$, $\chi_{\text{top}} = 105$.

Список литературы

1. Тихомиров А. С. Многообразие полных пар нульмерных подсхем алгебраической поверхности // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. №6. С. 153–180.
2. Фултон У. Теория пересечений. М.: Мир, 1989.
3. Białynicki-Birula A. Some theorems on actions of algebraic groups // Ann. of Math. (2). 1973. V. 98. P. 480–497.
4. Białynicki-Birula A. Some properties of the decompositions of algebraic varieties determined by actions of a torus // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. Astron. Phys. 1976. V. 24. №9. P. 667–674.
5. Тихомиров А. С., Трошина Т. Л. Бирациональная и численная геометрия многообразия полных пар двоеточий алгебраической поверхности // Матем. заметки. 1999. Т. 65. №3. С. 412–419.
6. Ellingsrud G. Smoother of $\widetilde{H_n \times S}$ // Preprint: Univ. of Oslo, 1991.
7. Cheah J. The cohomology of smooth nested Hilbert schemes of points // Thesis. Univ. of Chicago, 1994.
8. Тимофеева Н. В. Гладкость и эйлерова характеристика многообразия полных пар X_{23} нульмерных подсхем длины 2 и 3 алгебраической поверхности // Матем. заметки. 2000. Т. 67. №2. С. 276–287.
9. Ellingsrud G., Strømme S. A. On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane // Invent. Math. 1987. V. 87. P. 343–352.

Ярославский государственный
педагогический университет им. К. Д. Ушинского
E-mail: timof@yspu.yar.ru

Поступила в редакцию
11.06.1999 и 24.01.2000