Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Тимофеева, О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности. II, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 3, 95–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm5234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 13:08:38

УДК 512.722+512.723

Н. В. Тимофеева

О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности. II

Проводится построение новой компактификации схемы модулей стабильных по Гизекеру векторных расслоений, имеющих заданный многочлен Гильберта на гладкой проективной поляризованной поверхности (S, H) , определенной над полем $k = \mathbb{C}$. Семейства локально свободных пучков на поверхности S пополнены локально свободными пучками на поверхностях, являющихся модификациями поверхности S . Новая схема обладает бирациональным морфизмом на пространство модулей Гизекера–Маруямы. Рассматривается случай, когда пространство Гизекера–Маруямы является грубым пространством модулей.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: пространство модулей, полустабильные когерентные пучки, псевдосемейство, алгебраическая поверхность.

Введение

Пусть S – гладкая неприводимая проективная алгебраическая поверхность над полем $k = \mathbb{C}$, H – фиксированный очень обильный класс дивизоров в группе Пикара $\text{Pic } S$. Для краткости будем называть фиксированный класс дивизоров H *поляризацией* поверхности S и для любого $\mathcal{O}_S$ -пучка E обозначим

$$E(tH) := E \otimes \mathcal{O}_S(H)^{\otimes t}.$$

Рассматриваются когерентные пучки без кручения E фиксированного ранга $\text{rank } E = r$ и с фиксированным многочленом Гильберта $\chi(E(tH))$. При этом символ $\chi(\cdot)$ обозначает эйлерову характеристику. Следуя Д. Гизекеру (см. [1]), используем следующее понятие стабильности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.1. Когерентный $\mathcal{O}_S$ -пучок E *стабилен* (соответственно *полустабилен*), если для любого собственного подпучка $F \subsetneq E$

$$\frac{\chi(F(tH))}{\text{rank } F} < \frac{\chi(E(tH))}{\text{rank } E}$$

(соответственно $\frac{\chi(F(tH))}{\text{rank } F} \leq \frac{\chi(E(tH))}{\text{rank } E}$).

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Института Миттаг-Леффлера (г. Дьюрскольм, Швеция) во время участия автора в программе “Moduli Spaces 2006–2007” (январь–февраль 2007).

Согласно М. Маруяме (см. [2; следствие 5.9.1]), схема M_0 модулей рассматриваемых стабильных локально свободных пучков (векторных расслоений) является квазипроективным многообразием. Она обладает канонической компактификацией (Гизекера–Маруямы) $\bar{M}$, которая является схемой модулей полустабильных когерентных пучков без кручения с теми же рангом и многочленом Гильберта на той же поляризованной поверхности (S, H) .

Как показано Г. Эллингсрудом и Л. Гёттше (см. [3]), понятие стабильности и структура схемы модулей стабильных пучков сильно зависят от выбора поляризации H . Из определения 0.1 ясно, что пространства модулей для пучков, стабильных относительно поляризаций H и H' , изоморфны, если класс H' кратен классу H .

Схема модулей стабильных локально свободных пучков $M_0 \subset \bar{M}$ образует открытое подмножество в проективном алгебраическом многообразии $\bar{M}$ (см. [2; следствие 5.9.1]). Как и в [4], мы работаем в предположении, что $\bar{M}$ – нормальная схема. Это так при достаточно больших значениях второго класса Чжэня. Однако даже если при данном значении c_2 схема $\bar{M}$ не нормальна, все рассуждения и построения в [4] и в настоящей работе остаются верными при замене схемы $\bar{M}$ ее нормализацией.

В настоящей статье проводится построение другой компактификации $\tilde{M}$ схемы M_0 , в которой семейства локально свободных пучков на поверхности S пополнены локально свободными пучками на поверхностях, являющихся некоторыми модификациями поверхности S . Все построение проводится в предположении о неприводимости схемы $\bar{M}$. Если это не так, вся процедура может быть выполнена отдельно для каждой из неприводимых компонент схемы $\bar{M}$, содержащей непустое открытое подмножество локально свободных пучков.

Рассматривается случай, когда схема $\bar{M}$ является грубым пространством модулей. В частности, отсюда следует, что она, возможно, содержит точки, соответствующие классам S -эквивалентности полустабильных пучков. Часть технических средств для такого рассмотрения была развита автором в предыдущих работах [4], [5], посвященных тонкому случаю. В противоположность тонкому случаю, в котором существует универсальное семейство пучков, в грубом случае приходится работать с псевдосемейством. Как доказано в настоящей работе, оно существует для подходящего бирационального прообраза любого грубого пространства модулей полустабильных пучков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 0.2 (см. [3; определение 2.3]). *Псевдосемейство пучков* на поверхности S , параметризованное схемой X , состоит из:

- (i) этального покрытия $\{B_i, \beta_i: B_i \rightarrow X\}_{i \in I}$,
- (ii) набора $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I}$ когерентных $\mathcal{O}_{B_i \times_S S}$ -пучков, плоских над B_i ,

таких, что для любых двух элементов покрытия $B_i, B_{i'}$ найдется $\mathcal{O}_{B_i \times_X B_{i'}}$ -линейное расслоение $L_{ii'}$ такое, что для расслоенного произведения

$$\begin{array}{ccc} B_i \times_X B_{i'} & \xrightarrow{\beta_{i'}} & B_i \\ \beta_i \downarrow & & \downarrow \beta_i \\ B_{i'} & \xrightarrow{\beta_{i'}} & X \end{array}$$

имеет место изоморфизм пучков

$$(\beta^i, \text{id}_S)^* \mathbb{E}_{i'} = (\beta^{i'}, \text{id}_S)^* \mathbb{E}_i \otimes \text{pr}_1^* L_{ii'}.$$

Здесь используется обозначение для проекции $X \times S \xrightarrow{\text{pr}_1} X$.

Пусть $\mathbb{E} = \{B_i, \beta_i: B_i \rightarrow \bar{M}, \mathbb{E}_i\}_{i \in I}$ – псевдосемейство пучков на схеме $\bar{M} \times S$ и $E_{i,y}$ – пучок, соответствующий точке $y \in B_i$, т.е. $E_{i,y} = \mathbb{E}_i|_{\{y\} \times S}$. Обозначим через $\mathbb{E}_0 = \{B_{0i}, \beta_{0i}: B_{0i} \rightarrow M_0, \mathbb{E}_{0i}\}_{i \in I}$ псевдосемейство локально свободных пучков, определенное следующим образом:

$$B_{0i} := \beta_i^{-1}(\beta_i(B_i) \cap M_0) \subset B_i, \quad \beta_{0i} := \beta_i|_{B_{0i}}, \quad \mathbb{E}_{0i} := \mathbb{E}_i|_{B_{0i} \times S}.$$

Обозначим $\Sigma_i := B_i \times S$ и $\Sigma_{0i} := B_{0i} \times S$. Пусть $\pi_i: \Sigma_i \rightarrow B_i$ – естественная проекция.

Основные результаты настоящей статьи содержатся в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 0.3. *Существуют:*

- (1) проективная алгебраическая схема $\tilde{M}$;
- (2) атласное покрытие $\{\tilde{B}_i, \tilde{\beta}_i: \tilde{B}_i \rightarrow \tilde{M}\}_{i \in I}$ квазипроективными многообразиями;
- (3) набор квазипроективных многообразий $\{\tilde{\Sigma}_i\}_{i \in I}$;
- (4) набор морфизмов $\{\tilde{\pi}_i: \tilde{\Sigma}_i \rightarrow \tilde{B}_i\}_{i \in I}$, которые являются плоскими относительной размерности 2 над своими образами;
- (5) набор семейств $\{\mathcal{H}_i\}_{i \in I}$ поляризации на слоях каждого $\tilde{\Sigma}_i$ таких, что для каждого i многочлен Гильберта $\chi(\mathcal{O}_{\tilde{\pi}_i^{-1}(\tilde{y})}(t\mathcal{H}_i|_{\tilde{\pi}_i^{-1}(\tilde{y})}))$ слоя $\tilde{\pi}_i^{-1}(\tilde{y})$ не зависит от точки $\tilde{y} \in \tilde{B}_i$;
- (6) набор локально свободных пучков $\{\tilde{\mathbb{E}}_i\}_{i \in I}$ на схемах $\tilde{\Sigma}_i$;
- (7) морфизм алгебраических схем $\varphi: \tilde{M} \rightarrow \bar{M}$;
- (8) морфизмы схем покрытий $\varphi_i: \tilde{B}_i \rightarrow B_i$;
- (9) морфизмы семейств $\Phi_i: \tilde{\Sigma}_i \rightarrow \Sigma_i$;

такие, что:

- (i) морфизм φ бирационален и проективен;
- (ii) схема $\tilde{M}$ содержит открытую подсхему $\tilde{M}_0$ такую, что ограничение $\varphi|_{\tilde{M}_0}: \tilde{M}_0 \rightarrow M_0$ является изоморфизмом;
- (iii) морфизмы φ_i бирациональны и проективны;
- (iv) каждая схема $\tilde{B}_i$ содержит открытую подсхему $\tilde{B}_{0i}$ такую, что ограничение $\varphi_i|_{\tilde{B}_{0i}}$ является изоморфизмом;
- (v) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B}_i & \xrightarrow{\varphi_i} & B_i \\ \tilde{\beta}_i \downarrow & & \downarrow \beta_i \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\varphi} & \bar{M} \end{array}$$

коммутативна;

- (vi) морфизмы Φ_i бирациональны;
- (vii) каждый морфизм Φ_i отображает открытое подмножество $\tilde{\Sigma}_{0i} = \tilde{\pi}_i^{-1}\tilde{B}_{0i}$ изоморфно на подсхему Σ_{0i} ;

- (viii) имеет место изоморфизм псевдосемейств пучков, задаваемый формулой $(\Phi_{i*}\tilde{\mathbb{E}}_i)^{\vee\vee} = \mathbb{E}_i$.

Это означает, что построена коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc}
 & \{\tilde{\Sigma}_{0i}, \tilde{\mathbb{E}}_{0i}\} & \xrightarrow{\sim} & \{\Sigma_{0i}, \mathbb{E}_{0i}\} & \\
 & \swarrow & & \swarrow & \\
 \{\tilde{\Sigma}_i, \tilde{\mathbb{E}}_i\} & \xrightarrow{\Phi=\{\Phi_i\}} & \{\Sigma_i, \mathbb{E}_i\} & & \\
 \downarrow \tilde{\pi}=\{\tilde{\pi}_i\} & & \downarrow & & \downarrow \pi=\{\pi_i\} \\
 & \tilde{M}_0 & \xrightarrow{\sim} & M_0 & \\
 & \swarrow & & \swarrow & \\
 \tilde{M} & \xrightarrow{\varphi} & \bar{M} & &
 \end{array}$$

плоских семейств поверхностей, оснащенных псевдосемействами пучков, в которой все наклонные стрелки – открытые вложения, а все грани, кроме прямоугольников, расслоены для каждого i .

В § 1 проводится конструкция раздутия $\sigma_i: \hat{\Sigma}_i \rightarrow \Sigma_i$, полностью аналогичная конструкции § 1 работы [4]. При этом множество фундаментальных точек раздутия не пересекает открытое подмножество Σ_{0i} . Также получен локально свободный пучок $\hat{\mathbb{E}}_i$ на схеме $\hat{\Sigma}_i$ такой, что $(\sigma_{i*}\hat{\mathbb{E}}_i)^{\vee\vee} = \mathbb{E}_i$. Выбор основного поля $k = \mathbb{C}$ продиктован использованием здесь результатов Ф.К. Кирван [6], полученных над полем комплексных чисел. Все остальные рассуждения этого и последующих параграфов остаются верными над произвольным алгебраическим замкнутым полем нулевой характеристики.

В § 2 построен набор плоских семейств поверхностей $\tilde{\Sigma}_i$ и семейств локально свободных пучков $\tilde{\mathbb{E}}_i$ на схемах $\tilde{\Sigma}_i$. Это сделано с использованием локально свободных пучков $\hat{\mathbb{E}}_i$ из § 1.

В § 3 вводится отношение эквивалентности на множестве точек дизъюнктного объединения $\coprod_{i \in I} \tilde{B}_i$ и исследуются его свойства. В частности, доказываются, что оно является этальным отношением эквивалентности.

В § 4 проводится построение компактификации $\tilde{M}$ как алгебраического пространства. Также доказываются, что имеет место бирациональный морфизм компактификаций $\varphi: \tilde{M} \rightarrow \bar{M}$, совместимый с композицией морфизмов семейств $\Phi_i: \tilde{\Sigma}_i \xrightarrow{\tilde{\pi}_i} \hat{\Sigma}_i \xrightarrow{\sigma_i} \Sigma_i$, ограничение которого на открытую подсхему $\tilde{\Sigma}_{0i}$ является изоморфизмом. Таким образом, имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc}
 \{\tilde{\Sigma}_i, \tilde{\mathbb{E}}_i\} & \xrightarrow{\{\tilde{\pi}_i\}} & \{\hat{\Sigma}_i, \hat{\mathbb{E}}_i\} & \xrightarrow{\{\sigma_i\}} & \{\Sigma_i, \mathbb{E}_i\} \\
 \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \tilde{M} & \xrightarrow{\varphi} & \bar{M} & \xrightarrow{=} & \bar{M}
 \end{array}$$

§ 1. Промежуточное раздутие

Сначала снабдим подходящий бирациональный прообраз многообразия модулей $\bar{M}$ псевдосемейством полустабильных пучков. В произвольном случае многообразие $\bar{M}$ может содержать непустое множество классов собственно полустабильных пучков. В этом случае можно обратиться к теоретико-инвариантной конструкции (см. [7]) пространства модулей как фактора подходящего квазипроективного многообразия по действию алгебраической группы G . Пусть Q – открытая подсхема схемы Quot , параметризующая при фиксированном $m \gg 0$ эпиморфизмы

$$H^0(S, E(mH)) \otimes \mathcal{O}_S \rightarrow E(mH),$$

где пучок E полустабильен с предписанным многочленом Гильберта $\chi(E(tH))$. Такое $m \gg 0$ существует согласно ограниченности семейств полустабильных когерентных пучков без кручения с постоянным многочленом Гильберта, равным $\chi(E(tH))$. При этом пучок $E(mH)$ порожден глобальными сечениями и $H^i(S, E(mH)) = 0$ при $i > 0$.

Согласно геометрической теории инвариантов квазипроективная схема Q естественным образом снабжена действием группы $G = \text{PGL}(H^0(S, E(mH)))$, индуцированным линейными преобразованиями векторного пространства $H^0(S, E(mH))$, и $Q^s \subset Q$ – геометрическое место точек, стабильных относительно действия группы G . Как хорошо известно, на схеме $\text{Quot} \times S$ имеется универсальный факторпучок $\mathbb{E}_{\text{Quot}}$. Пусть $\mathbb{E}_Q$ – его ограничение на подсхему Q .

Согласно Ф. К. Кирван (см. [6; пп. 6.3, 6.6, 6.7]), существуют:

- бирациональное отображение $\kappa_Q: Q' \rightarrow Q$,
- действие группы G на схеме Q' ,
- факторсхема $\bar{M}' = Q'/G$,
- морфизм частичного разрешения $\kappa: \bar{M}' \rightarrow \bar{M}$,

такие, что:

- ограничение морфизма κ_Q на прообраз множества стабильных точек $\kappa_Q: (\kappa_Q)^{-1}(Q^s) \rightarrow Q^s$ является изоморфизмом,
- каждая G -полустабильная точка схемы Q' является G -стабильной.

Поскольку все точки схемы Q' являются G -стабильными, то все G -орбиты замкнуты и $Q' \rightarrow \bar{M}'$ – главное G -расслоение. Пусть $G(x)$ – G -орбита точки $x \in Q'$.

Согласно Ф. К. Кирван, частичная десингуляризация $\kappa_Q: Q' \rightarrow Q$ – это морфизм композиции $\kappa_Q: Q' \rightarrow \cdots \rightarrow Q_{j+1} \xrightarrow{\kappa_j} Q_j \rightarrow \cdots \rightarrow Q_0 = Q$ морфизмов раздутия κ_j в последовательности подмногообразий $T_j \subset Q_j$ некоторого специального вида. Нам потребуется прямое продолжение конструкции Кирван на всю схему Quot . Пусть $\bar{\kappa}: \text{Quot}' \rightarrow \text{Quot}$ – соответствующий морфизм композиции

$$\bar{\kappa}: \text{Quot}' \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Quot}_{j+1} \xrightarrow{\bar{\kappa}_j} \text{Quot}_j \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Quot}$$

раздутий $\bar{\kappa}_j$ с последовательностью центров в теоретико-схемных замыканиях $\bar{T}_j \subset \text{Quot}_j$ многообразий T_j , образованных в предыдущих прообразах Quot_j схемы Quot .

Тогда “частичная десингуляризация” Quot' схемы Quot несет индуцированное плоское семейство пучков $\mathbb{E}' := (\bar{\kappa}, \text{id}_S)^* \mathbb{E}_{\text{Quot}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Частичная десингуляризация Кирван схемы Гизекера–Маруямы может быть снабжена псевдосемейством полустабильных пучков.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку схема Q' квазипроективна, то существует класс обильных дивизоров $D \in \text{Pic } Q'$ такой, что индуцированное вложение в проективное пространство $i_D: Q' \hookrightarrow \mathbb{P} = P(H^0(\text{Quot}', \mathcal{O}_{\text{Quot}'}(D)))^\vee$ обладает следующим свойством.

Пусть ρ – гиперплоскость в проективном пространстве $\mathbb{P}$, соответствующая дивизору в классе D . Рассмотрим схему пересечения $i_D(Q') \cap \rho \cap \dots \cap \rho =: i_D(Q') \cap \rho^d$ образа $i_D(Q')$ с $d = \dim G(x)$ общими гиперплоскими сечениями и индуцированный морфизм $\beta_D: i_D(Q') \cap \rho^d \rightarrow \bar{M}$. Если дивизоры в классе D достаточно общего положения, то найдется открытая подсхема $B_D \subset i_D(Q') \cap \rho^d$ такая, что ограничение $\beta_D|_{B_D}$ этально над своим образом в схеме $\bar{M}'$.

Чтобы получить псевдосемейство, выберем одну точку x в каждой G -орбите схемы Q' . Для каждой такой точки выполним предыдущее построение с гиперплоскими сечениями таким образом, что соответствующий морфизм $\beta_D|_{B_D}$ этален над некоторой открытой окрестностью образа в $\bar{M}$ точки x . По квазикompактности квазипроективной схемы Q' можно свести бесконечный набор морфизмов β_D к его конечному подмножеству. Пусть $\{\beta_i: B_i \rightarrow \bar{M}'\}$ – конечный набор этальных морфизмов требуемого вида. Для существования этального покрытия всей схемы $\bar{M}'$ важно следующее. Так как все точки схемы Q' являются G -стабильными, то все орбиты замкнуты и $Q' \rightarrow \bar{M}'$ – главное G -расслоение. Этим обеспечивается то, что в каждом слое отображения факторизации $Q' \rightarrow \bar{M}'$ находится по одной орбите.

Пусть $j_i: B_i \hookrightarrow Q'$ – естественные вложения. По построению элементы полученного этального покрытия несут семейства пучков $\mathbb{E}_i := (j_i, \text{id}_S)^* \mathbb{E}'$, где $\mathbb{E}'$ – обратный образ универсального факторпучка при раздутии по Кирван.

Для условия склейки возьмем два элемента этального покрытия $(\beta_1, B_1, \mathbb{E}_1)$ и $(\beta_2, B_2, \mathbb{E}_2)$ и рассмотрим декартово произведение

$$B_{12} := \begin{array}{ccc} B_1 \times_{\bar{M}'} B_2 & \xrightarrow{\beta'_2} & B_1 \\ \beta'_1 \downarrow & & \downarrow \beta_1 \\ B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & \bar{M}' \end{array}$$

с этальным морфизмом $\beta_{12}: B_{12} \rightarrow \bar{M}'$, определенным как диагональная композиция.

Для любого декартова произведения $X \xleftarrow{\text{pr}_1} X \times_Z Y \xrightarrow{\text{pr}_2} Y$ схем X и Y , снабженных пучками $\mathcal{O}_Z$ -модулей $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ соответственно, определим $\mathcal{F} \boxtimes_Z \mathcal{G} := \text{pr}_1^* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \text{pr}_2^* \mathcal{G}$.

Очевидно, существует локально замкнутое вложение $j_{12}: B_{12} \hookrightarrow Q' \times_{\bar{M}'} Q'$, индуцированное вложениями $j_i: B_i \hookrightarrow Q'$ на сомножителях. Пусть $\text{pr}_i: Q' \times_{\bar{M}'} Q' \rightarrow Q'$, $i = 1, 2$, – проекции на первый и второй сомножители соответственно.

По коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 B_{12} & \xrightarrow{\beta'_2} & B_2 & & \\
 \downarrow \beta'_1 & \searrow j_{12} & \downarrow j_2 & & \\
 & Q' \times_{\bar{M}'} Q' & \xrightarrow{\text{pr}_2} & Q' & \\
 & \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow & \\
 B_1 & & Q' & \xrightarrow{\quad} & \bar{M}' \\
 & \searrow j_1 & & & \\
 & & & &
 \end{array}$$

имеют место изоморфизмы $\mathcal{O}_{B_{12}}$ -пучков

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}_1 \boxtimes_{\bar{M}'} \mathcal{O}_{B_2} &= j_1^* \mathbb{E}' \boxtimes_{\bar{M}'} j_2^* \mathcal{O}_{Q'} = j_{12}^* \text{pr}_1^* \mathbb{E}' \otimes_{B_{12}} j_{12}^* \text{pr}_2^* \mathcal{O}_{Q'} = j_{12}^* (\mathbb{E}' \boxtimes_{\bar{M}'} \mathcal{O}_{Q'}), \\
 \mathcal{O}_{B_1} \boxtimes_{\bar{M}'} \mathbb{E}_2 &= j_1^* \mathcal{O}_{Q'} \boxtimes_{\bar{M}'} j_2^* \mathbb{E}' = j_{12}^* \text{pr}_1^* \mathcal{O}_{Q'} \otimes_{B_{12}} j_{12}^* \text{pr}_2^* \mathbb{E}' = j_{12}^* (\mathcal{O}_{Q'} \boxtimes_{\bar{M}'} \mathbb{E}').
 \end{aligned}$$

Правые части равенств изоморфны; изоморфизм осуществляется перестановкой сомножителей произведения $Q' \times_{\bar{M}'} Q'$. Таким образом, в нашем случае имеет место изоморфизм $\mathcal{O}_{B_{12}}$ -пучков $\mathbb{E}_1 \boxtimes_{\bar{M}'} \mathcal{O}_{B_2} = \mathcal{O}_{B_1} \boxtimes_{\bar{M}'} \mathbb{E}_2$.

Пусть $\bar{M}^s$ – множество точек в схеме $\bar{M}$, соответствующих классам стабильных пучков. Если $\bar{M} \setminus \bar{M}^s \neq \emptyset$, заменим схему $\bar{M}$ ее частичной десингуляризацией по Кирван $\bar{M}'$. В любом случае используется обозначение $\bar{M}$ для проективной схемы с псевдосемейством пучков.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Существует пучок идеалов $\mathcal{I}_i \subset \mathcal{O}_{\Sigma_i}$ такой, что соответствующее раздутие $\hat{\Sigma}_i$ с морфизмом $\sigma_i: \hat{\Sigma}_i \rightarrow \Sigma_i$ обладает локально свободным пучком $\hat{\mathbb{E}}_i$ таким, что $(\sigma_{i*} \hat{\mathbb{E}}_i)^{\vee\vee} = \mathbb{E}_i$.*

Для доказательства предложения необходимы следующие две леммы.

ЛЕММА 1.3 (см. [4; лемма 1.2]). *Пусть $\mathbb{E}$ – плоское семейство полустабильных пучков без кручения на поверхности S , параметризованное равноразмерной схемой X . Тогда пучок $\mathbb{E}$ имеет гомологическую размерность $\text{hd } \mathbb{E} = 1$.*

Для любого $\mathcal{O}_X$ -модуля $\mathcal{F}$ на алгебраической схеме X обозначим множество точек схемы X , в которых пучок $\mathcal{F}$ не локально свободен, через $\text{Sing } \mathcal{F}$.

ЛЕММА 1.4 (см. [4; лемма 1.3]). *Если пучок $\mathbb{E}$ на гладкой схеме X удовлетворяет условиям:*

- i) $\text{hd } \mathbb{E} = 1$,
- ii) $\text{codim } \text{Sing } \mathbb{E} > 2$,

то $\mathbb{E}$ рефлексивен, т.е. $\mathbb{E}^{\vee\vee} = \mathbb{E}$.

Если схема $\bar{M}$ неособа, применим леммы 1.3, 1.4 непосредственно к семейству $\mathbb{E}_i$. Если $\bar{M}$ особа, возьмем ее разрешение особенностей $\xi: \bar{M}' \rightarrow \bar{M}$ по Хиронаке (см. [8]) с семействами пучков $(\xi, \text{id}_S)^* \mathbb{E}_i$, параметризованными схемами $B'_i = B_i \times_{\bar{M}} \bar{M}'$. В остальной части статьи используется обозначение $\bar{M}$

как для гладкой схемы модулей, так и, если необходимо, для разрешения особенностей схемы модулей. То же относится и к обозначению схем этального покрытия: во всем остальном тексте статьи символом B_i обозначены схемы $B_i \times_{\bar{M}} \bar{M}'$, образующие этальное покрытие гладкой схемы $\bar{M}$, несущие псевдосемейство пучков. Точно так же, как для семейства пучков в гладком случае, мы заменяем полное обозначение $(\xi, \text{id}_S)^* \mathbb{E}_i$ для обратного образа семейства пучков символом $\mathbb{E}_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. В особом случае утверждение теоремы 0.3 должно быть переписано в виде $(\Phi_{i*} \tilde{\mathbb{E}}_i)^{\vee\vee} = (\xi, \text{id}_S)^* \mathbb{E}_i$. Но, поскольку пучки плоские над базой $\bar{M}$, имеем равенство $(\xi, \text{id}_S)_*(\xi, \text{id}_S)^* \mathbb{E}_i = \mathbb{E}_i$ и, следовательно,

$$(\xi, \text{id}_S)_*(\Phi_{i*} \tilde{\mathbb{E}}_i)^{\vee\vee} = \mathbb{E}_i.$$

Для доказательства предложения 1.2 необходимо следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6 (пучковый аналог определения из [9; 20.2]). Пусть X – алгебраическая схема, F_0, F_1 – локально свободные $\mathcal{O}_X$ -пучки, $\psi: F_1 \rightarrow F_0$ – гомоморфизм $\mathcal{O}_X$ -модулей. Введем обозначения $\mathcal{F} = \text{coker } \psi$, $r_0 = \text{rank } F_0$. Пучок нулевых идеалов Фиттинга $\mathcal{O}_X$ -модуля $\mathcal{F}$ – это

$$\mathcal{Fitt}^0(\mathcal{F}) = \text{image} \left(\psi': \bigwedge^{r_0} F_1 \otimes \bigwedge^{r_0} F_0^\vee \rightarrow \mathcal{O}_X \right),$$

где ψ' – морфизм, ассоциированный с морфизмом ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.2. Образует пучок нулевых идеалов Фиттинга $\mathcal{I}_i = \mathcal{Fitt}^0 \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\Sigma_i}}^1(\mathbb{E}_i, \mathcal{O}_{\Sigma_i})$. Пусть $\sigma_i: \widehat{\Sigma}_i \rightarrow \Sigma_i$ – морфизм раздутия схемы Σ_i в пучке идеалов $\mathcal{I}_i$. Согласно лемме 1.3 имеет место точная последовательность $\mathcal{O}_{\Sigma_i}$ -пучков $0 \rightarrow E_{1i} \rightarrow E_{0i} \rightarrow \mathbb{E}_i \rightarrow 0$, в которой пучки E_{0i} и E_{1i} локально свободны. Применим обратный образ σ_i^* к двойственной последовательности:

$$\sigma_i^* \mathbb{E}_i^\vee \longrightarrow \sigma_i^* E_{0i}^\vee \longrightarrow \sigma_i^* \mathcal{R}_i \longrightarrow 0, \quad (1.1)$$

$$\sigma_i^* \mathcal{R}_i \longrightarrow \sigma_i^* E_{1i}^\vee \longrightarrow \sigma_i^* \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\Sigma_i}}^1(\mathbb{E}_i, \mathcal{O}_{\Sigma_i}) \longrightarrow 0. \quad (1.2)$$

Здесь $\mathcal{R}_i := \text{coker}(\mathbb{E}_i^\vee \rightarrow E_{0i}^\vee)$. Обозначим в (1.2)

$$\mathcal{A}_i := \ker(\sigma_i^* E_{1i}^\vee \rightarrow \sigma_i^* \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\Sigma_i}}^1(\mathbb{E}_i, \mathcal{O}_{\Sigma_i})).$$

Пучок $\mathcal{Fitt}^0(\sigma_i^* \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\Sigma_i}}^1(\mathbb{E}_i, \mathcal{O}_{\Sigma_i}))$ обратим по функториальному свойству идеалов $\mathcal{Fitt}$:

$$\mathcal{Fitt}^0(\sigma_i^* \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\Sigma_i}}^1(\mathbb{E}_i, \mathcal{O}_{\Sigma_i})) = (\sigma_i^{-1} \mathcal{Fitt}^0(\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\Sigma_i}}^1(\mathbb{E}_i, \mathcal{O}_{\Sigma_i}))) \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_i} = (\sigma_i^{-1} \mathcal{I}_i) \cdot \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_i},$$

где Σ_i – целая схема. Теперь необходима следующая лемма, принадлежащая А. С. Тихомирову.

ЛЕММА 1.7 (см. [10; лемма 1]). Пусть X – целая нётерова схема и $\mathcal{F}$ – ненулевой когерентный $\mathcal{O}_X$ -пучок кручения. Тогда пучок нулевых идеалов Фиттинга $\mathcal{Fitt}^0(\mathcal{F})$ является обратимым $\mathcal{O}_X$ -пучком тогда и только тогда, когда гомологическая размерность пучка $\mathcal{F}$ равна 1.

Следовательно, $\text{hd } \sigma_i^* \mathcal{E}xt_{\mathcal{O}_{\Sigma_i}}^1(\mathbb{E}_i, \mathcal{O}_{\Sigma_i}) = 1$, и пучок $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \mathcal{R}_i / \text{torsion}(\sigma_i^* \mathcal{R}_i)$ локально свободен. Отсюда следует, что $\mathcal{A}_i^\vee = (\sigma_i^* \mathcal{R}_i)^\vee$.

Из (1.1) получаем точную тройку

$$0 \longrightarrow \sigma_i^* \mathbb{E}_i^\vee / \text{torsion}(\sigma_i^* \mathbb{E}_i^\vee) \longrightarrow \sigma_i^* E_{0i}^\vee \longrightarrow \sigma_i^* \mathcal{R}_i \longrightarrow 0. \quad (1.3)$$

Введем обозначение $\widehat{\mathbb{E}}_i := (\ker(\sigma_i^* E_{0i}^\vee \rightarrow \mathcal{A}_i))^\vee$. Этот пучок локально свободен. Согласно (1.3) и лемме о змее имеем точную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \text{torsion}(\sigma_i^* \mathcal{R}_i) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \sigma_i^* \mathbb{E}_i^\vee / \text{torsion}(\sigma_i^* \mathbb{E}_i^\vee) & \longrightarrow & \sigma_i^* E_{0i}^\vee & \longrightarrow & \sigma_i^* \mathcal{R}_i \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{E}}_i^\vee & \longrightarrow & \sigma_i^* E_{0i}^\vee & \longrightarrow & \mathcal{A}_i \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & & & \downarrow \\ & & \text{torsion}(\sigma_i^* \mathcal{R}_i) & & & & 0 \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Дуализация левой вертикальной тройки и применение функтора прямого образа при морфизме σ_i приводит к вложению рефлексивных оболочек

$$(\sigma_{i*}(\sigma_i^* \mathbb{E}_i^\vee)^\vee)^{\vee\vee} \hookrightarrow (\sigma_{i*} \widehat{\mathbb{E}}_i)^{\vee\vee}.$$

Теперь напомним следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8 (см. [11]). Когерентный $\mathcal{O}_X$ -пучок $\mathcal{F}$ *нормален*, если отображение ограничения $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U \setminus A)$ биективно для каждого открытого по Зарискому подмножества $U \subset X$ и каждого замкнутого подмногообразия $A \subset U$ коразмерности $\text{codim}_U A \geq 2$.

ЛЕММА 1.9 ([12; предложение 1.6.]). Когерентный пучок на нормальной целой схеме X рефлексивен тогда и только тогда, когда он нормален и не имеет кручения.

СЛЕДСТВИЕ 1.10. Пусть $A \subset X$ – замкнутое подмногообразие коразмерности $\text{codim}_X A \geq 2$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – когерентные рефлексивные пучки. Если $\mathcal{F}|_{X \setminus A} = \mathcal{G}|_{X \setminus A}$, то $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого открытого подмножества $U \subset X$ согласно нормальности пучков $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ имеем равенства $\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U \setminus (A \cap U)) = \mathcal{G}(U \setminus (A \cap U)) = \mathcal{G}(U)$ и, следовательно, изоморфизм $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1.2. Пучки

$$(\sigma_{i*}(\sigma_i^* \mathbb{E}_i^\vee)^\vee)^{\vee\vee} \hookrightarrow (\sigma_{i*} \widehat{\mathbb{E}}_i)^{\vee\vee}$$

и пучок $\mathbb{E}_i$ совпадают вне подмножества коразмерности ≥ 3 . Следовательно, $(\sigma_{i*} \widehat{\mathbb{E}}_i)^{\vee\vee} = (\sigma_{i*}(\sigma_i^* \mathbb{E}_i^\vee)^\vee)^{\vee\vee} = \mathbb{E}_i$, как и требовалось.

§ 2. Основная конструкция: разрешение в плоские семейства

В этом параграфе проводится построение разрешения схем этального покрытия B_i схемы модулей $\bar{M}$ как базы некоторых плоских семейств $\tilde{\Sigma}_i$ поверхностей. Семейство $\tilde{\Sigma}_i$ получено с использованием промежуточного раздутия $\widehat{\Sigma}_i$ с локально свободным пучком $\widehat{\mathbb{E}}_i$.

Для применения метода, развитого в [4], необходимо вложение схемы $\widehat{\Sigma}_i$ в подходящее многообразие Грассмана. Это требует построения проективно-замыкания схемы $\widehat{\Sigma}_i$, снабженного локально свободным продолжением пучка $\widehat{\mathbb{E}}_i$. Способом сделать это является возврат к теоретико-инвариантной конструкции пространства модулей пучков.

По предложению 1.1 имеют место локально замкнутые вложения $j_i: B_i \hookrightarrow Q'$ и изоморфизмы пучков $\mathbb{E}_i := (j_i, \text{id}_S)^* \mathbb{E}'$, верные в силу конструкции псевдосемейства. Пусть $\tilde{j}_i: \bar{B}_i \hookrightarrow \text{Quot}'$ – соответствующее замкнутое вложение замыканий, $\bar{\Sigma}_i = \bar{B}_i \times S$ – прямое произведение и $\bar{\mathbb{E}}_i = (\tilde{j}_i, \text{id}_S)^* \mathbb{E}'$ – продолжение плоского семейства пучков $\mathbb{E}_i$ на схему $\bar{\Sigma}_i$. Теперь можно повторить все сделанное в § 1. Получим точную тройку $0 \rightarrow \bar{E}_{1i} \rightarrow \bar{E}_{0i} \rightarrow \bar{\mathbb{E}}_i \rightarrow 0$, в которой пучки $\bar{E}_{0i}|_{\Sigma_i}$ и $\bar{E}_{1i}|_{\Sigma_i}$ локально свободны, и морфизм раздутия $\bar{\sigma}_i: \widehat{\Sigma}_i \rightarrow \bar{\Sigma}_i$, где раздутое многообразие $\widehat{\Sigma}_i$ снабжено пучком $\widehat{\mathbb{E}}_i$. При этом многообразие $\widehat{\Sigma}_i$ является открытым подмножеством в схеме $\widehat{\Sigma}_i$ и пучок $\widehat{\mathbb{E}}_i = \widehat{\mathbb{E}}_i|_{\widehat{\Sigma}_i}$ локально свободен.

Зафиксируем очень обильный обратимый пучок $\widehat{\mathcal{L}}_i$ на схеме $\widehat{\Sigma}_i$. Все действия, проведенные в этом параграфе со схемой $\bar{B}_i$, полностью аналогичны тому, что сделано в [4] с пространством модулей $\bar{M}$. В [4; § 4] доказано, что проведенное построение не зависит от выбора очень обильного обратимого пучка $\widehat{\mathcal{L}} \in \text{Pic}(\widehat{\Sigma})$ на промежуточном раздутии $\widehat{\Sigma}$, если только последний достаточно велик. В рассматриваемом случае мы работаем с очень обильными обратимыми пучками $\widehat{\mathcal{L}}_i$ такими, что для любого i окончательный результат не обнаруживает зависимости от выбора пучков $\widehat{\mathcal{L}}_i$. Пусть $\mathcal{E}_i$ – подкрученный пучок $\widehat{\mathbb{E}}_i \otimes \widehat{\mathcal{L}}_i$. Подходящим выбором пучка $\widehat{\mathcal{L}}_i$ (а именно заменой его на тензорную степень) можно добиться того, что имеет место короткая точная последовательность $\mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_i}$ -пучков

$$0 \rightarrow \left(\left(\bigwedge^r \mathcal{E}_i \right) / \text{torsion} \right) \otimes \mathcal{L}_i^\vee \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_i} \rightarrow \mathcal{O}_{Z_i} \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

для подходящего обратимого пучка $\mathcal{L}_i \in \text{Pic}(\widehat{\Sigma}_i)$ и соответствующей подсхемы Z_i .

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. *Обратимый пучок $\mathcal{L}_i$ может быть выбран так, что $\text{Supp}(Z_i) \subset \widehat{\Sigma}_i \setminus \widehat{\Sigma}_i$.*

Действительно, пусть имеется некоторая последовательность вида (2.1). Если подсхема Z_i содержит некоторый дивизор $D_i \subset \widehat{\Sigma}_i$ такой, что $D_i \cap \widehat{\Sigma}_i \neq \emptyset$, то найдется подсхема $Z'_i \subset Z_i$, определяемая с помощью точной диаграммы пучков

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathcal{I}_{D_i/Z_i} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_{Z_i} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_i} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{Z_i} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_i}(-D_i) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_i} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{D_i} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & \mathcal{O}_{Z'_i}(-D_i) & & & & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Тогда имеют место изоморфизмы

$$\mathcal{I}_{Z'_i} = \mathcal{I}_{Z_i} \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_i}(D_i) = \left(\bigwedge^r \mathcal{E}_i / \text{torsion} \right) \otimes \mathcal{L}_i^\vee \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_i}(D_i)$$

и точная тройка

$$0 \rightarrow \left(\bigwedge^r \mathcal{E}_i / \text{torsion} \right) \otimes \mathcal{L}_i^\vee \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_i}(D_i) \rightarrow \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_i} \rightarrow \mathcal{O}_{Z'_i} \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Теперь заменим в (2.2) обозначение $\mathcal{L}_i \otimes \mathcal{O}_{\widehat{\Sigma}_i}(-D_i)$ на $\mathcal{L}_i$ и Z'_i на Z_i .

Итерируя процесс, если нужно, приходим к последовательности (2.1), в которой $\text{Supp}(Z_i) \subset \widehat{\Sigma}_i \setminus \widehat{\Sigma}_i$.

Согласно выбору обильных обратимых пучков $\widehat{\mathcal{L}}_i$ и $\mathcal{L}_i$ по теореме Серра имеем изоморфизм пространств глобальных сечений

$$H^0(\widehat{\Sigma}_i, \mathcal{L}_i) \cong H^0\left(\widehat{\Sigma}_i, \bigwedge^r \mathcal{E}_i / \text{torsion}\right) \oplus H^0(\widehat{\Sigma}_i, \mathcal{O}_{Z_i} \otimes \mathcal{L}_i). \quad (2.3)$$

Для дальнейшего необходимо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ – когерентные пучки на проективной алгебраической схеме X , $\mathcal{L}$ – обильный обратимый пучок на X . При $l, m \gg 0$ естественное отображение

$$H^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) \otimes H^0(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{\otimes l}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{\otimes(m+l)}),$$

задаваемое умножением сечений, сюръективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем целочисленные параметры l', l, n так, что:

- пучок $\mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{\otimes l'}$ порожден глобальными сечениями, т.е. имеет место эпиморфизм

$$\bigoplus \mathcal{O}_X \twoheadrightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{\otimes l'};$$

- имеет место эпиморфизм пространств глобальных сечений

$$\bigoplus H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \twoheadrightarrow H^0(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{\otimes l}).$$

Из теоремы Мамфорда (см. [13; теорема 1.8.5]) непосредственно следует, что при $m, n \gg 0$ естественное отображение

$$H^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) \otimes H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes(m+n)})$$

сюрьективно. Тогда в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus H^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) \otimes H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) & \xrightarrow{d} & \bigoplus H^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes(m+n)}) \\ \downarrow b & & \downarrow c \\ H^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) \otimes H^0(X, \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{\otimes l}) & \xrightarrow{a} & H^0(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \otimes \mathcal{L}^{\otimes(m+l)}) \end{array}$$

отображения b, d сюрьективны. Заметим, что, увеличив, если необходимо, степень m , легко добиться сюрьективности отображения c . Отсюда следует, что a – эпиморфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Выбором очень обильного обратимого пучка $\overline{\widehat{\mathcal{L}}}_i$ (заменяв его достаточно большой тензорной степенью) получим сюрьективность отображения

$$\bigotimes^r H^0(\overline{\widehat{\Sigma}}_i, \mathcal{E}_i) \rightarrow H^0\left(\overline{\widehat{\Sigma}}_i, \bigotimes^r \mathcal{E}_i\right),$$

включающегося в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \bigotimes^r H^0(\overline{\widehat{\Sigma}}_i, \mathcal{E}_i) & \longrightarrow & H^0\left(\overline{\widehat{\Sigma}}_i, \bigotimes^r \mathcal{E}_i\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigwedge^r H^0(\overline{\widehat{\Sigma}}_i, \mathcal{E}_i) & \longrightarrow & H^0\left(\overline{\widehat{\Sigma}}_i, \bigwedge^r \mathcal{E}_i\right) \end{array}$$

Правая вертикальная стрелка – эпиморфизм при подходящем выборе пучка $\overline{\widehat{\mathcal{L}}}_i$. Тогда нижняя горизонтальная стрелка – также эпиморфизм.

Образуем композицию

$$\bigwedge^r H^0(\overline{\widehat{\Sigma}}_i, \mathcal{E}_i) \twoheadrightarrow H^0\left(\overline{\widehat{\Sigma}}_i, \bigwedge^r \mathcal{E}_i\right) \twoheadrightarrow H^0\left(\overline{\widehat{\Sigma}}_i, \bigwedge^r \mathcal{E}_i / \text{torsion}\right).$$

Переходя к проективным пространствам и образу многообразие Грассмана r -подпространств $G_i := G(r, H^0(\widehat{\Sigma}_i, \mathcal{E}_i)^\vee)$, получим диаграмму замкнутых вложений (отображения проективных пространств линейные)

$$\begin{array}{ccc} P(H^0(\widehat{\Sigma}_i, \mathcal{L}_i)^\vee) & \longrightarrow & P\left(\left(\bigwedge^r H^0(\widehat{\Sigma}_i, \mathcal{E}_i)\right)^\vee \oplus H^0(\widehat{\Sigma}_i, \mathcal{O}_{Z_i} \otimes \mathcal{L}_i)^\vee\right) \\ & & \uparrow \\ G_i & \xrightarrow{\text{Pl}_i} & P\left(\bigwedge^r H^0(\widehat{\Sigma}_i, \mathcal{E}_i)^\vee\right) \end{array} \quad (2.4)$$

где символ Pl_i означает плюккерово вложение, верхняя горизонтальная стрелка индуцирована эпиморфизмом $\mathcal{E}_i \twoheadrightarrow \mathcal{E}_i/\text{torsion}$ и изоморфизмом (2.3), вертикальная – проекцией на прямое слагаемое. Подходящей подкруткой обратимый пучок $\mathcal{L}_i$ может быть сделан очень обильным, и получаем замкнутое вложение $\widehat{\Sigma}_i \hookrightarrow P(H^0(\widehat{\Sigma}_i, \mathcal{L}_i)^\vee)$. Поскольку пучок $\mathcal{E}_i|_{\widehat{\Sigma}_i} = \widehat{\mathbb{E}}_i \otimes \widehat{\mathcal{L}}_i$ локально свободен, любая точка $\varsigma \in \widehat{\Sigma}_i$ отображается в многообразии Грассмана G_i . Следовательно, имеется локально замкнутое вложение $\widehat{j}_i: \widehat{\Sigma}_i \hookrightarrow G_i$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Взятие замыкания образа $\widehat{j}_i(\widehat{\Sigma}_i)$ приводит к замкнутому вложению $\widehat{j}_i: \widehat{\Sigma}_i \hookrightarrow G_i$, дополняющему (2.4) до коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccccc} P(H^0(\widehat{\Sigma}_i, \mathcal{L}_i)^\vee) & \longrightarrow & P\left(\left(\bigwedge^r H^0(\widehat{\Sigma}_i, \mathcal{E}_i)\right)^\vee \oplus H^0(\widehat{\Sigma}_i, \mathcal{O}_{Z_i} \otimes \mathcal{L}_i)^\vee\right) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \widehat{\Sigma}_i & \xrightarrow{\widehat{j}_i} & G_i & \xrightarrow{\text{Pl}_i} & P\left(\bigwedge^r H^0(\widehat{\Sigma}_i, \mathcal{E}_i)^\vee\right) \end{array}$$

Пусть $\mathcal{S}_i$ – тавтологическое подрасслоение ранга r на грассманиане G_i . Имеют место изоморфизмы пучков

$$\mathcal{E}_i|_{\widehat{\Sigma}_i} = \widehat{\mathbb{E}}_i \otimes \widehat{\mathcal{L}}_i = \widehat{j}_i^* \mathcal{S}_i. \quad (2.5)$$

Пусть $\mathcal{O}_i(1)$ – положительная образующая в группе Пикара пространства $P(\bigwedge^r H^0(\widehat{\Sigma}_i, \mathcal{E}_i)^\vee)$. Тогда положительная образующая $\mathcal{O}_{G_i}(1)$ группы Пикара грассманиана G_i дается равенством $\mathcal{O}_{G_i}(1) = \text{Pl}_i^* \mathcal{O}_i(1)$. Локально замкнутое вложение $\widehat{j}_i: \widehat{\Sigma}_i \rightarrow G_i$ индуцирует изоморфизм пучков $\bigwedge^r (\widehat{\mathbb{E}}_i \otimes \widehat{\mathcal{L}}_i) = \widehat{j}_i^* \mathcal{O}_{G_i}(1)$.

Обозначим символом $\mathbb{H}_i$ схему Гильберта $\text{Hilb}^{\mu_i(t)} G_i$ подсхем в многообразии G_i , многочлен Гильберта которых равен $\mu_i(t)$. Будем говорить, что подсхема $j: Z \hookrightarrow G_i$ имеет многочлен Гильберта $\mu_i(t)$, если $\chi(j^* \mathcal{O}_{G_i}(k)) = \mu_i(t)$. В соответствии с общей теорией схем Гильберта существует универсальная подсхема $\text{Univ}(\mathbb{H}_i) \subset \mathbb{H}_i \times G_i$. Универсальная подсхема $\text{Univ}(\mathbb{H}_i)$ снабжена двумя проекциями: $G_i \xleftarrow{\text{pr}_G} \text{Univ}(\mathbb{H}_i) \xrightarrow{\text{pr}_{\mathbb{H}}} \mathbb{H}_i$, индуцированными соответствующими проекциями прямого произведения $\mathbb{H}_i \times G_i$. Проекция $\text{pr}_{\mathbb{H}}: \text{Univ}(\mathbb{H}_i) \rightarrow \mathbb{H}_i$ – плоский морфизм.

Рассмотрим слой композиции морфизмов $\widehat{\Sigma}_i \xrightarrow{\sigma_i} \Sigma_i \xrightarrow{\pi_i} B_i$ над точкой y , соответствующей локально свободному пучку: $\beta_i(y) \in M_0$. Согласно изоморфизму $\widehat{\Sigma}_i \supset \widehat{\Sigma}_{0i} \cong B_{0i} \times S$ этот слой изоморфен исходной поверхности S и будет обозначаться как $\{y\} \times S$. Заметим, что для каждой точки $y \in B_{0i}$ многочлен Гильберта $\mu_i(t) = \chi(\widehat{j}_i^* \mathcal{O}_{G_i}(t)|_{\{y\} \times S})$ образа слоя при морфизме $\widehat{j}_i$ не зависит от выбора точки $y \in B_{0i}$. Следовательно, по универсальному свойству схемы Гильберта имеет место сохраняющее слои вложение семейства $\widehat{\Sigma}_{0i}$ в универсальную подсхему схемы Гильберта подсхем многообразия G_i с тем же многочленом Гильберта $\mu_i(t)$:

$$H_{0i}: \widehat{\Sigma}_{0i} \hookrightarrow \text{Univ}(\mathbb{H}_i).$$

Введем обозначение $\widetilde{\Sigma}_{0i} = H_{0i}(\widehat{\Sigma}_{0i}) \cong \Sigma_{0i}$. Теперь имеется локально замкнутое вложение $h_{0i}: B_{0i} \hookrightarrow \mathbb{H}_i$ схемы B_{0i} в схему Гильберта $\mathbb{H}_i$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} G_i & \xleftarrow{\text{pr}_G} & \text{Univ}(\mathbb{H}_i) & \xrightarrow{\text{pr}_{\mathbb{H}}} & \mathbb{H}_i \\ \widehat{j}_i \uparrow & & H_{0i} \uparrow & & \uparrow h_{0i} \\ \widehat{\Sigma}_{0i} & \xleftarrow{\sim} & \widetilde{\Sigma}_{0i} & \xrightarrow{\widetilde{\pi}_{0i}} & B_{0i} \end{array} \quad (2.6)$$

коммутативна и правый ее квадрат расслоенный. Здесь введены обозначения $\widetilde{B}_{0i} = h_{0i}(B_{0i})$ и $\widetilde{\pi}_{0i}: \widetilde{\Sigma}_{0i} \rightarrow \widetilde{B}_{0i}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Существуют:*

- (i) *подсемейство $\widetilde{\Sigma}_i \subset \text{Univ}(\mathbb{H}_i)$,*
- (ii) *замкнутая подсхема $\widetilde{B}_i \subset \mathbb{H}_i$,*

такие, что:

- 1) *имеет место коммутативная диаграмма с правым расслоенным квадратом*

$$\begin{array}{ccccc} G_i & \xleftarrow{\text{pr}_G} & \text{Univ}(\mathbb{H}_i) & \xrightarrow{\text{pr}_{\mathbb{H}}} & \mathbb{H}_i \\ \widehat{j}_i \uparrow & & \widehat{H}_i \uparrow & & \uparrow \widehat{h}_i \\ \widetilde{\Sigma}_i & \xleftarrow{\widetilde{\pi}_i} & \widetilde{\Sigma}_i & \xrightarrow{\widetilde{\pi}_i} & \widetilde{B}_i \end{array} \quad (2.7)$$

- 2) *схема $\widetilde{\Sigma}_i$ содержит открытое подмножество $\widetilde{\Sigma}_{0i}$, изоморфное Σ_{0i} ;*
- 3) *диаграмма (2.7) при ограничении на подсхему $\widetilde{\Sigma}_{0i}$ принимает вид (2.6).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\widetilde{B}_i$ – замыкание образа схемы B_{0i} в схеме Гильберта $\mathbb{H}_i$. Семейство $\widetilde{\Sigma}_i$ представляет собой расслоенное произведение $\widetilde{\Sigma}_i = \text{Univ}(\mathbb{H}_i) \times_{\mathbb{H}_i} \widetilde{B}_i$. Это дает правый расслоенный квадрат диаграммы (2.7). Теперь необходима следующая

ЛЕММА 2.6. *$\widetilde{\Sigma}_i$ – приведенная неприводимая схема.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что схема $\widetilde{\Sigma}_i$ изоморфна теоретико-схемному замыканию образа $H_{0i}(\widetilde{\Sigma}_{0i})$. Пусть C_0 – гладкая пунктированная

кривая в подсхеме $\widetilde{B}_{0i} \subset \widetilde{B}_i$ и C – ее теоретико-схемное замыкание в $\widetilde{B}_i$. Тогда $\widetilde{\pi}_{0i}^{-1}C_0$ – ее прообраз в $\text{Univ}(\mathbb{H}_i)$. Согласно [14; гл. III, предложение 9.8] ее теоретико-схемное замыкание $\overline{\widetilde{\pi}_{0i}^{-1}C_0}$ – плоская над C подсхема в $\text{Univ}(\mathbb{H}_i)$ и $\overline{\widetilde{\pi}_{0i}^{-1}C_0} = \overline{\widetilde{\pi}_i^{-1}C}$. Имеем замкнутое вложение, определенное композицией $\overline{\widetilde{\pi}_i^{-1}C} \hookrightarrow \overline{H_{0i}(\Sigma_{0i})} \hookrightarrow \overline{\widetilde{H}_i(\widetilde{\Sigma}_i)}$, и слои схемы $\overline{\widetilde{\pi}_i^{-1}C}$ совпадают с соответствующими слоями замыкания образа $\overline{\widetilde{H}_i(\widetilde{\Sigma}_i)}$. Следовательно, схемы $\overline{H_{0i}(\Sigma_{0i})}$ и $\overline{\widetilde{H}_i(\widetilde{\Sigma}_i)}$ послойно совпадают. Пусть $\iota: \overline{H_{0i}(\Sigma_{0i})} \hookrightarrow \overline{\widetilde{H}_i(\widetilde{\Sigma}_i)}$ – замкнутое вложение. Возьмем ассоциированную точную $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_i}$ -тройку

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_i} \rightarrow \iota_* \mathcal{O}_{\overline{H_{0i}(\Sigma_{0i})}} \rightarrow 0.$$

Многочлены Гильберта слоев схем $\overline{H_{0i}(\Sigma_{0i})}$ и $\overline{\widetilde{H}_i(\widetilde{\Sigma}_i)}$ равны, следовательно, схема $\overline{H_{0i}(\Sigma_{0i})}$ является плоской над базой $\widetilde{B}_i$. Тогда оба пучка $\mathcal{O}_{\widetilde{\Sigma}_i}$ и $\iota_* \mathcal{O}_{\overline{H_{0i}(\Sigma_{0i})}}$ плоски над $\widetilde{B}_i$. Следовательно, пучок $\mathcal{K}$ плоский с нулевым общим слоем. Таким образом, имеем $\mathcal{K} = 0$ и ι – изоморфизм.

ОКОНЧАНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.5. Поскольку морфизм rg_G собственный, очевидно, образ $\text{rg}_G(\widetilde{H}_i(\widetilde{\Sigma}_i))$ замкнут в схеме $\widehat{j}_i(\widehat{\Sigma}_i)$. Также имеется равенство на открытых подмножествах $\text{rg}_G(H_{0i}(\widetilde{\Sigma}_{0i})) = \widehat{j}_i(\widehat{\Sigma}_{0i})$. По лемме 2.6 имеем равенство образов $\text{rg}_G(\widetilde{H}_i(\widetilde{\Sigma}_i)) = \widehat{j}_i(\widehat{\Sigma}_i)$ и, следовательно, индуцированный морфизм $\widetilde{\pi}_i: \widetilde{\Sigma}_i \rightarrow \widehat{\Sigma}_i$, что доказывает предложение.

Обозначим через $(\widetilde{h}_i, \widetilde{j}_i): \widetilde{B}_i \times \widetilde{\Sigma}_i \hookrightarrow \mathbb{H}_i \times G_i$ морфизм вложения, индуцированный вложениями на сомножителях.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Подсхема $\widetilde{H}_i(\widetilde{\Sigma}_i)$ в схеме $\text{Univ}(\mathbb{H}_i)$ может быть представлена следующим образом:

$$\widetilde{H}_i(\widetilde{\Sigma}_i) = (\widetilde{h}_i(\widetilde{B}_i) \times G_i) \cap \text{Univ}(\mathbb{H}_i) = (\widetilde{h}_i, \widetilde{j}_i)(\widetilde{B}_i \times \widetilde{\Sigma}_i) \cap \text{Univ}(\mathbb{H}_i).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое равенство следует непосредственно из построения схемы $\widetilde{\Sigma}_i$. Второе равенство следует из первого с использованием равенства $\text{rg}_G(\widetilde{H}_i(\widetilde{\Sigma}_i)) = \widehat{j}_i(\widehat{\Sigma}_i)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8 (см. [5; предложение 9]). *Имеет место бирациональный морфизм разрешения $\widetilde{\varphi}_i: \widetilde{B}_i \rightarrow \widehat{B}_i$ такой, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\Sigma}_i & \xrightarrow{\widetilde{\pi}_i} & \widetilde{\Sigma}_i & \xrightarrow{\overline{\sigma}_i} & \overline{\Sigma}_i \\ \widetilde{\pi}_i \downarrow & & & & \downarrow \pi_i \\ \widetilde{B}_i & \xrightarrow{\widetilde{\varphi}_i} & & & \widehat{B}_i \end{array} \quad (2.8)$$

коммутативна.

Ограничение вложения $\widehat{j}_i: \widehat{\Sigma}_i \hookrightarrow G_i$ и диаграммы (2.8) на прообразы $\Sigma_i = \pi_i^{-1}(B_i)$ и $\widetilde{B}_i = \overline{\varphi}_i^{-1}(B_i)$ открытого множества B_i приводит к локально замкнутому вложению $\widehat{j}_i: \widehat{\Sigma}_i \hookrightarrow G_i$ и диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\Sigma}_i & \xrightarrow{\widehat{\pi}_i} & \widehat{\Sigma}_i & \xrightarrow{\sigma_i} & \Sigma_i \\ \widehat{\pi}_i \downarrow & & & & \downarrow \pi_i \\ \widetilde{B}_i & \xrightarrow{\varphi_i} & & & B_i \end{array} \quad (2.9)$$

с морфизмом $\varphi_i = \overline{\varphi}_i|_{\widetilde{B}_i}$.

Семейство поверхностей $\widetilde{\Sigma}_i$ естественным образом снабжено локально свободным пучком $\widetilde{\mathbb{E}}_i = \widetilde{H}^* \mathrm{pr}_G^* \mathcal{S}_i \otimes \widehat{\pi}_i^* \widehat{\mathcal{L}}_i^\vee$. Очевидно, по коммутативности левого квадрата в (2.7) и изоморфизму (2.5) имеем

$$\widetilde{\mathbb{E}}_i = \widehat{\pi}_i^* \widehat{j}_i^* \mathcal{S}_i \otimes \widehat{\pi}_i^* \widehat{\mathcal{L}}_i^\vee = \widehat{\pi}_i^* \widehat{\mathbb{E}}_i.$$

Будем использовать обозначение $\Phi_i = \sigma_i \circ \widehat{\pi}_i: \widetilde{\Sigma}_i \rightarrow \Sigma_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. *Имеет место изоморфизм пучков $(\Phi_{i*} \widetilde{\mathbb{E}}_i)^{\vee\vee} = \mathbb{E}_i$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу того, что пучок $\widehat{\mathbb{E}}_i$ локально свободен, и по определению морфизма Φ_i

$$\Phi_{i*} \widetilde{\mathbb{E}}_i = \Phi_{i*} (\widehat{\pi}_i^* \widehat{\mathbb{E}}_i) = (\sigma_i \circ \widehat{\pi}_i)_* \widehat{\pi}_i^* \widehat{\mathbb{E}}_i \hookrightarrow \sigma_{i*} \widehat{\mathbb{E}}_i.$$

Следовательно, применяя следствие 1.10 и предложение 1.2, имеем

$$(\Phi_{i*} \widetilde{\mathbb{E}}_i)^{\vee\vee} = (\sigma_{i*} \widehat{\mathbb{E}}_i)^{\vee\vee} = \mathbb{E}_i.$$

Обозначим символом Δ_i теоретико-схемный образ композиции

$$\widetilde{\Sigma}_i \xrightarrow{(\mathrm{id}_{\widetilde{\Sigma}_i}, \Phi_i)} \widetilde{\Sigma}_i \times \Sigma_i \xrightarrow{(\widehat{\pi}_i, \mathrm{id}_{\Sigma_i})} \widetilde{B}_i \times \Sigma_i.$$

Согласно [4; предложение 2.7] имеет место изоморфизм $\Delta_i \cong \widetilde{B}_i \times S$.

СЛЕДСТВИЕ 2.10. *Морфизм φ_i имеет следующее явное описание:*

$$\varphi_i: \widetilde{B}_i \rightarrow B_i, \quad \widetilde{y} \mapsto ((\mathrm{id}_{\widetilde{B}_i}, \Phi_i)_* \mathcal{O}_{\widetilde{B}_i} \boxtimes \widetilde{\mathbb{E}}_i)^{\vee\vee}|_{\Delta_i}|_{\widetilde{y} \times S},$$

с учетом изоморфизма $\Delta_i \cong \widetilde{B}_i \times S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2.9 имеем

$$((\mathrm{id}_{\widetilde{B}_i}, \Phi_i)_* \mathcal{O}_{\widetilde{B}_i} \boxtimes \widetilde{\mathbb{E}}_i)^{\vee\vee} = \mathcal{O}_{\widetilde{B}_i} \boxtimes (\Phi_{i*} \widetilde{\mathbb{E}}_i)^{\vee\vee} = \mathcal{O}_{\widetilde{B}_i} \boxtimes \mathbb{E}_i.$$

Образует ограничение и применим изоморфизм $\Delta_i \cong \widetilde{B}_i \times S$:

$$\begin{aligned} ((\mathrm{id}_{\widetilde{B}_i}, \Phi_i)_* \mathcal{O}_{\widetilde{B}_i} \boxtimes \widetilde{\mathbb{E}}_i)^{\vee\vee}|_{\Delta_i}|_{\{\widetilde{y}\} \times S} &= (\mathcal{O}_{\widetilde{B}_i} \boxtimes \mathbb{E}_i)|_{\Delta_i}|_{\{\widetilde{y}\} \times S} \\ &= k_{\widetilde{y}} \boxtimes \mathbb{E}_i|_{\{\varphi_i(\widetilde{y})\} \times S} = k_{\widetilde{y}} \boxtimes E_{i, \varphi(\widetilde{y})}. \end{aligned}$$

§ 3. Отношение эквивалентности и его этальность

Обозначим символом $\tilde{B}$ дизъюнктное объединение $\coprod_i \tilde{B}_i$ и символом B – дизъюнктное объединение $\coprod_i B_i$. Напомним, что грубое пространство модулей $\bar{M}$ может быть построено как алгебраическое пространство B/R , где $R \subset B \times B$ – подсхема, представляющая отношение эквивалентности с отображениями композиций $p_l: R \hookrightarrow B \times B \xrightarrow{\text{pr}_l} B$ при $l = 1, 2$, которые этальны.

Введем отношение $\sim$ на множестве точек объединения $\tilde{B}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. (i) Если $\tilde{y}_i \in \tilde{B}_{0i}$ и $\tilde{y}_{i'} \in \tilde{B}_{0i'}$, то $\tilde{y}_i \sim \tilde{y}_{i'}$ в том и только том случае, когда $\beta_i \circ \varphi_i(\tilde{y}_i) = \beta_{i'} \circ \varphi_{i'}(\tilde{y}_{i'})$.

(ii) Если $\tilde{y}_i \in \tilde{B}_i \setminus \tilde{B}_{0i}$ и $\tilde{y}_{i'} \in \tilde{B}_{i'} \setminus \tilde{B}_{0i'}$, то $\tilde{y}_i \sim \tilde{y}_{i'}$, когда существуют:

- некоторая кривая C ,
- открытое подмножество $C_0 \subset C$,
- два вложения кривой $\iota_i: C \rightarrow \tilde{B}_i$ и $\iota_{i'}: C \rightarrow \tilde{B}_{i'}$,

такие, что:

- $\tilde{y}_i \in \iota_i(C)$, $\tilde{y}_{i'} \in \iota_{i'}(C)$,
- для каждой точки $p \in C_0$ справедливо $\iota_i(p) \in \tilde{B}_{0i}$ и $\iota_{i'}(p) \in \tilde{B}_{0i'}$;
- диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \tilde{B}_i & \xleftarrow{\iota_i} C & \xrightarrow{\iota_{i'}} \tilde{B}_{i'} \\ \varphi_i \downarrow & & \downarrow \varphi_{i'} \\ B_i & \xrightarrow{\beta_i} \bar{M} & \xleftarrow{\beta_{i'}} B_{i'} \end{array}$$

коммутативна.

Рассмотрим бирациональное отображение $\varphi := \coprod_i \varphi_i$, индуцированное бирациональными морфизмами $\varphi_i: \tilde{B}_i \rightarrow B_i$ на компонентах. Имеет место бирациональный морфизм $\varphi \times \varphi: \tilde{B} \times \tilde{B} \rightarrow B \times B$.

Определим $\tilde{R} \subset \tilde{B} \times \tilde{B}$ как собственный прообраз подсхемы $R \subset B \times B$ при морфизме раздутья $\varphi \times \varphi$:

$$\tilde{R} := \overline{(\varphi \times \varphi)^{-1}(R \cap (B_0 \times B_0))}.$$

Из определения 3.1 понятно, что подсхема $\tilde{R}$ имеет теоретико-множественное описание

$$\tilde{R} = \{(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in \tilde{B} \times \tilde{B} \mid \tilde{y}_1 \sim \tilde{y}_2\}.$$

Обозначим символами $\tilde{p}_l$, $l = 1, 2$, композиции

$$\tilde{p}_l: \tilde{R} \hookrightarrow \tilde{B} \times \tilde{B} \xrightarrow{\text{pr}_l} \tilde{B}.$$

ЛЕММА 3.2. *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отношение $\sim$ рефлексивно, поскольку подсхема $\tilde{R}$ содержит образ диагонального вложения $\text{diag}: \tilde{B} \rightarrow \tilde{B} \times \tilde{B}$.

Отношение $\sim$ симметрично. Возьмем $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2) \in \partial \tilde{R} = \tilde{R} \setminus (\tilde{R} \cap (\tilde{B}_0 \times \tilde{B}_0))$. Это означает, что существует кривая C вместе с двумя вложениями $\iota_l: C \hookrightarrow \tilde{B}$,

$l = 1, 2$, такими, что образы $\varphi(\iota_1(C) \cap \tilde{B}_0)$ и $\varphi(\iota_2(C) \cap \tilde{B}_0)$ поточечно эквивалентны согласно отношению эквивалентности $R \subset B \times B$. Тогда то же самое имеет место для пары $(\tilde{y}_2, \tilde{y}_1)$.

Отношение $\sim$ транзитивно. Это означает, что для расслоенного произведения

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R} \times_{\tilde{B}} \tilde{R} & \longrightarrow & \tilde{R} \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{p}_1 \\ \tilde{R} & \xrightarrow{\tilde{p}_2} & \tilde{B} \end{array}$$

и композиции $p_{13}: \tilde{R} \times_{\tilde{B}} \tilde{R} \hookrightarrow \tilde{B} \times \tilde{B} \times \tilde{B} \xrightarrow{\text{pr}_{13}} \tilde{B} \times \tilde{B}$ определено включение $p_{13}(\tilde{R} \times_{\tilde{B}} \tilde{R}) \subset \tilde{R}$. Это справедливо для открытых подмножеств над $\tilde{B}_0$. Введем обозначение $\tilde{R}_0 = \tilde{R} \cap (\tilde{B}_0 \times \tilde{B}_0)$. Очевидно, истинны следующие утверждения: $p_{13}(\tilde{R}_0 \times_{\tilde{B}_0} \tilde{R}_0) \subset \tilde{R}_0$ и $p_{13}(\tilde{R}_0 \times_{\tilde{B}_0} \tilde{R}_0) = p_{13}(\tilde{R} \times_{\tilde{B}} \tilde{R}) \subset \tilde{R}$, как и требовалось.

ЛЕММА 3.3. *Имеет место бирациональный проективный морфизм $f: \tilde{R} \rightarrow R$ такой, что $f|_{\tilde{R}_0}$ – изоморфизм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Образ композиции $\tilde{R} \hookrightarrow \tilde{B} \times \tilde{B} \xrightarrow{\varphi \times \varphi} B \times B$ совпадает с подсхемой $R \subset B \times B$. Следовательно, имеем индуцированный морфизм $f: \tilde{R} \rightarrow R$, являющийся изоморфизмом на открытой подсхеме $\tilde{R}_0 \subset \tilde{R}$.

Образуем расслоенное произведение $\tilde{R}' := (\tilde{B} \times \tilde{B}) \times_{B \times B} R$. По универсальному свойству расслоенных произведений имеем замкнутое вложение $\tilde{R} \hookrightarrow \tilde{R}'$. Рассмотрение открытых подмножеств $\tilde{R}_0$ и $R_0 := R \cap (B_0 \times B_0)$ показывает, что схема $\tilde{R}$ состоит из тех компонент схемы $\tilde{R}'$, которые доминируют соответствующие компоненты схемы R .

ЛЕММА 3.4. $\tilde{p}_i$ – неразветвленный морфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Морфизмы $\tilde{p}_i$ являются морфизмами конечного типа по определению схемы $\tilde{R}$. Согласно [15; гл. I, предложение 3.5] достаточно показать, что индуцированный диагональный морфизм $\tilde{\delta}: \tilde{R} \rightarrow \tilde{R} \times_{\tilde{B}} \tilde{R}$ является открытым вложением. Пусть $g: \tilde{R} \times_{\tilde{B}} \tilde{R} \rightarrow R \times_B R$ – морфизм, индуцированный очевидными бирациональными отображениями на сомножителях. Теперь образуем расслоенное произведение

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R}_\delta & \longrightarrow & \tilde{R} \times_{\tilde{B}} \tilde{R} \\ \downarrow & & \downarrow g \\ R & \longrightarrow & R \times_B R \end{array}$$

в котором горизонтальные морфизмы – открытые вложения. Имеет место вложение $\tilde{R} \hookrightarrow \tilde{R}_\delta$, существующее по универсальному свойству расслоенных произведений. Эти две приведенные схемы совпадают на открытых подмножествах. По построению они содержат одинаковое число компонент, следовательно, $\tilde{R} = \tilde{R}_\delta$, что доказывает лемму.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Отношение $\sim$ является этальным отношением эквивалентности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения обозначений заменим схему $\tilde{R}$ любой из ее компонент $\tilde{R}_{ii'} \subset \tilde{B}_i \times \tilde{B}_{i'}$ и морфизм $\tilde{p}_l$ – его ограничением $\tilde{p}_l|_{\tilde{R}_{ii'}}$, поскольку доказательство проводится для каждой компоненты отдельно. Согласно [15; гл. I, теорема 3.14, замечание 3.15] неразветвленный морфизм $\tilde{p}_l$ допускает разложение

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R} & \xrightarrow{\tilde{p}_l} & \tilde{B} \\ & \searrow f' & \nearrow g' \\ & Y & \end{array}$$

где f' – замкнутое вложение, а g' – этальный морфизм. Согласно доказательству теоремы 3.14 из [15; гл. I] степень стандартного этального морфизма g' равна степени морфизма $\tilde{p}_l|_{\tilde{R}_0}$ над $\tilde{B}_0$. Следовательно, f' – изоморфизм на открытой подсхеме $\tilde{R}_0 \subset \tilde{R}$. Отсюда следует, что f' – изоморфизм на всей схеме $\tilde{R}$ и морфизм $\tilde{p}_l$ этален.

ЛЕММА 3.6. *Квадрат*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R} & \xrightarrow{\tilde{p}_l} & \tilde{B} \\ f \downarrow & & \downarrow \varphi \\ R & \xrightarrow{p_l} & B \end{array}$$

декартов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим схему R' как расслоенное произведение вдоль любой из проекций p_l

$$\begin{array}{ccc} R' & \xrightarrow{p'_l} & \tilde{B} \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ R & \xrightarrow{p_l} & B \end{array}$$

По универсальности расслоенных произведений существует морфизм $u: \tilde{R} \rightarrow R'$. Поскольку проекции p_l , $\tilde{p}_l$ этальны и композиция $\tilde{p}_l = p'_l \circ u: \tilde{R} \rightarrow \tilde{B}$ этальна той же степени над каждой компонентой, то заключаем, что морфизм u – изоморфизм и $\tilde{R} \cong R'$.

§ 4. Алгебраическое пространство $\tilde{M}$ и его схемность

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *φ – проективный морфизм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим соответствующий морфизм проективных замыканий

$$\overline{\varphi}: \overline{\tilde{B}} \rightarrow \overline{B}$$

и его график $\bar{\gamma}: \bar{B} \rightarrow \bar{B} \times \bar{B}$. Заметим, что образ вложения $\bar{\gamma}$ является замкнутой подсхемой. Существует (тривиальное) проективное расслоение $\bar{p}: \mathbb{P}_{\bar{B}} \rightarrow \bar{B}$ вместе с замкнутым вложением $j_{\times}: \bar{B} \times \bar{B} \hookrightarrow \mathbb{P}_{\bar{B}}$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \bar{B} \times \bar{B} & \xrightarrow{j_{\times}} & \mathbb{P}_{\bar{B}} \\ \bar{\gamma} \uparrow & & \downarrow \bar{p} \\ \bar{B} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \bar{B} \end{array}$$

коммутативна.

Морфизм композиции $j_{\times} \circ \bar{\gamma}$ является замкнутым вложением и, следовательно, $\bar{\varphi}$ – проективный морфизм. Теперь остается ограничить проективный морфизм $\bar{\varphi}$ на прообраз $\tilde{B}$ открытого множества $B \subset \bar{B}$ и ограничить проективное расслоение $\bar{p}: \mathbb{P}_{\bar{B}} \rightarrow \bar{B}$ на прообраз $\mathbb{P}_B := \bar{p}^{-1}(B)$ схемы B :

$$p = \bar{p}|_{\mathbb{P}_B}: \mathbb{P}_B \rightarrow B.$$

Поскольку проективность морфизма совместима с заменой базы, получим, что морфизм $\varphi = \bar{\varphi}|_{\tilde{B}}: \tilde{B} \rightarrow B$ проективен.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Очевидно, согласно квазикompактности схемы $\bar{M}$ можно выбрать неприводимые компоненты проективного расслоения $\mathbb{P}_B$ так, чтобы они имели одинаковые размерности над различными компонентами схемы B . Зафиксируем такое расслоение $\mathbb{P}_B$ вместе с замкнутым вложением $j: \tilde{B} \hookrightarrow \mathbb{P}_B$.

Введем специальное отношение эквивалентности $\mathbb{P}_R$ на расслоении $\mathbb{P}_B$ такое, что его ограничение на подсхему $\tilde{B}$ равно $\tilde{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Определим схему $\mathbb{P}_R$ как расслоенное произведение

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_R & \xrightarrow{p_{l,R}} & \mathbb{P}_B \\ p_R \downarrow & & \downarrow p \\ R & \xrightarrow{p_l} & B \end{array} \quad (4.1)$$

В силу симметричности подсхемы R схемы $\mathbb{P}_R$, определенные с помощью диаграммы (4.1) в случае $l = 1$ и в случае $l = 2$, изоморфны. Поскольку определены морфизмы $f: \tilde{R} \rightarrow R$ и $\zeta_l: \tilde{R} \hookrightarrow \tilde{B} \times \tilde{B} \xrightarrow{pr_l} \tilde{B} \hookrightarrow \mathbb{P}_B$, то по универсальному свойству расслоенного произведения имеем морфизм $q: \tilde{R} \rightarrow \mathbb{P}_R$ такой, что $p_{l,R} \circ q = \zeta_l$ и $p_R \circ q = f$.

Так как квадрат

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R} & \xrightarrow{\tilde{p}_l} & \tilde{B} \\ f \downarrow & & \downarrow \varphi \\ R & \xrightarrow{p_l} & B \end{array}$$

декартов и морфизмы $p_l, \tilde{p}_l, p_{l,R}$ этальные одинаковой степени над соответствующими компонентами, то квадрат

$$\begin{array}{ccc} \tilde{R} & \xrightarrow{\tilde{p}_l} & \tilde{B} \\ q \downarrow & & \downarrow j \\ \mathbb{P}_R & \xrightarrow{p_{l,R}} & \mathbb{P}_B \end{array}$$

также декартов. Поскольку j – замкнутое вложение, то и q – замкнутое вложение.

Далее, по универсальности расслоенного произведения

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_B \times \mathbb{P}_B & \longrightarrow & \mathbb{P}_B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{P}_B & \longrightarrow & \mathrm{Spec} k \end{array}$$

определен морфизм $\eta: \mathbb{P}_R \rightarrow \mathbb{P}_B \times \mathbb{P}_B$, включающийся в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}_R & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{P}_B \times \mathbb{P}_B & \xrightarrow{\mathrm{pr}_l} & \mathbb{P}_B \\ p_R \downarrow & & \downarrow (p,p) & & \downarrow p \\ R & \longrightarrow & B \times B & \longrightarrow & B \end{array}$$

где $\mathrm{pr}_l \circ \eta = p_{l,R}$. В силу равенства относительных размерностей расслоенных схем $\mathbb{P}_R$ и $\mathbb{P}_B$ заметим, что образ $\eta(\mathbb{P}_R)$ имеет ту же относительную размерность над своим образом, что и $\mathbb{P}_R$. Следовательно, η – замкнутое вложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Подсхема $\mathbb{P}_R \subset \mathbb{P}_B \times \mathbb{P}_B$ представляет отношение эквивалентности на $\mathbb{P}_B$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из построения непосредственно следует, что отношение, представленное подсхемой $\mathbb{P}_R$, рефлексивно и симметрично. Для транзитивности необходимо убедиться в том, что если $\mathbb{P}_R \times_{\mathbb{P}_B} \mathbb{P}_R$ – расслоенное произведение относительно проекций $p_{l,R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_R \times_{\mathbb{P}_B} \mathbb{P}_R & \longrightarrow & \mathbb{P}_R \\ \downarrow & & \downarrow p_{2,R} \\ \mathbb{P}_R & \xrightarrow{p_{1,R}} & \mathbb{P}_B \end{array}$$

то $p_{13}(\mathbb{P}_R \times_{\mathbb{P}_B} \mathbb{P}_R) \subset \mathbb{P}_R$, где $p_{13}(\mathbb{P}_R \times_{\mathbb{P}_B} \mathbb{P}_R)$ – это схемный образ композиции $\mathbb{P}_R \times_{\mathbb{P}_B} \mathbb{P}_R \hookrightarrow \mathbb{P}_B \times \mathbb{P}_B \times \mathbb{P}_B \xrightarrow{\mathrm{pr}_{13}} \mathbb{P}_B \times \mathbb{P}_B$.

Заметим, что имеют место морфизмы композиции $p_{13}(\mathbb{P}_R \times_{\mathbb{P}_B} \mathbb{P}_R) \subset \mathbb{P}_B \times \mathbb{P}_B \xrightarrow{\mathrm{pr}_l} \mathbb{P}_B$, $l = 1, 2$. Также определен морфизм $p_{13}(\mathbb{P}_{R_0} \times_{\mathbb{P}_{B_0}} \mathbb{P}_{R_0}) \rightarrow R_0$, где введены очевидные обозначения $\mathbb{P}_{B_0} = \mathbb{P}_B|_{B_0}$ и $\mathbb{P}_{R_0} = \mathbb{P}_R|_{R_0}$. Образуя замыкания и замечая, что p_{13} – собственный морфизм, получим морфизм

$p_{13}(\mathbb{P}_R \times_{\mathbb{P}_B} \mathbb{P}_R) \rightarrow R$, причем коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p_{13}(\mathbb{P}_R \times_{\mathbb{P}_B} \mathbb{P}_R) & \longrightarrow & \mathbb{P}_B \\ \downarrow & & \downarrow p \\ R & \xrightarrow{p_l} & B \end{array}$$

По универсальности расслоенного квадрата (4.1) определены морфизмы $\theta_l: p_{13}(\mathbb{P}_R \times_{\mathbb{P}_B} \mathbb{P}_R) \rightarrow \mathbb{P}_R$, $l = 1, 2$, включающиеся в коммутативный треугольник

$$\begin{array}{ccc} p_{13}(\mathbb{P}_R \times_{\mathbb{P}_B} \mathbb{P}_R) & \longrightarrow & \mathbb{P}_B \times \mathbb{P}_B \\ & \searrow \theta_l & \nearrow \eta \\ & \mathbb{P}_R & \end{array} \quad (4.2)$$

Поскольку в (4.2) горизонтальная стрелка – замкнутое вложение, то θ_l – замкнутое вложение.

Образует алгебраическое пространство $\underline{\mathbb{P}} := \mathbb{P}_B/\mathbb{P}_R$. Существует индуцированный проективный морфизм алгебраических пространств $\underline{\pi}: \underline{\mathbb{P}} \rightarrow \bar{M}$. Известно, что $\bar{M} = B/R$ – проективная схема. Следовательно, расслоение $\underline{\mathbb{P}}$ также является проективной схемой.

Образует алгебраическое пространство $\tilde{M} := \tilde{B}/\tilde{R}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. $\tilde{M}$ – проективная схема с проективным морфизмом $\underline{\varphi}: \tilde{M} \rightarrow \bar{M}$ на схему Гизекера–Маруямы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно расслоенной диаграмме

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{P}_B & & \\ & \nearrow j & \uparrow & \searrow p & \\ \tilde{B} & & \varphi & & B \\ & \uparrow & \downarrow & \uparrow & \\ & & \mathbb{P}_R & & \\ \tilde{R} & \nearrow & \downarrow & \searrow & R \\ & \uparrow & & \uparrow & \end{array}$$

имеет место коммутативный треугольник алгебраических пространств

$$\begin{array}{ccc} & \underline{\mathbb{P}} & \\ \underline{j} \nearrow & & \searrow \underline{p} \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\underline{\varphi}} & \bar{M} \end{array}$$

с замкнутым вложением $\underline{j}$. Следовательно, отображение $\underline{\varphi}$ – проективный морфизм, и по [16; гл. II, п. 7.6] $\tilde{M}$ – проективная алгебраическая схема.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. В силу очевидных изоморфизмов $\tilde{B}_0 \cong B_0$ и $\tilde{R}_0 \cong R_0$, осуществляемых бирациональными морфизмами $\varphi: \tilde{B} \rightarrow B$ и $f: \tilde{R} \rightarrow R$, схема $\tilde{M}$ содержит открытое подмножество $\tilde{M}_0 = \tilde{B}_0/\tilde{R}$, причем $\varphi|_{\tilde{M}_0}: \tilde{M}_0 \rightarrow M_0$ – изоморфизм.

Автор благодарит Институт Миттаг-Леффлера (г. Дьюрскольм, Швеция), в котором была получена основная часть результатов настоящей работы, за гостеприимство, поддержку и вдохновляющую атмосферу. Также автор глубоко признательна Торстену Экедалу в Университете Стокгольма и Рою Чилнесу в Королевской Высшей технической школе (г. Стокгольм, Швеция) за плодотворные обсуждения. Кроме того, автор благодарна Александру Сергеевичу Тихомирову в Ярославском государственном педагогическом университете, предложившему способ получения этального покрытия множества стабильных точек схемы модулей с помощью гиперплоских сечений.

Список литературы

- [1] D. Gieseker, “On the moduli of vector bundles on an algebraic surface”, *Ann. of Math.* (2), **106**:1 (1977), 45–60.
- [2] M. Maruyama, “Moduli of stable sheaves. II”, *J. Math. Kyoto Univ.*, **18**:3 (1978), 557–614.
- [3] G. Ellingsrud, L. Göttsche, “Variation of moduli space and Donaldson invariants under change of polarization”, *J. Reine Angew. Math.*, **467** (1995), 1–49.
- [4] Н. В. Тимофеева, “О новой компактификации модулей векторных расслоений на поверхности”, *Матем. сб.*, **199**:7 (2008), 103–122; англ. пер.: N. V. Timofeeva, “On a new compactification of the moduli of vector bundles on a surface”, *Sb. Math.*, **199**:7 (2008), 1051–1070.
- [5] Н. В. Тимофеева, “Компактификация в схеме Гильберта многообразия модулей стабильных 2-векторных расслоений на поверхности”, *Матем. заметки*, **82**:5 (2007), 756–769; англ. пер.: N. V. Timofeeva, “A compactification of the moduli variety of stable vector 2-bundles on a surface in the Hilbert scheme”, *Math. Notes*, **82**:5–6 (2007), 677–690.
- [6] F. C. Kirwan, “Partial desingularisations of quotients of nonsingular varieties and their Betti numbers”, *Ann. of Math.* (2), **122**:1 (1985), 41–85.
- [7] *The geometry of moduli spaces of sheaves*, Aspects Math., **E31**, Vieweg, Braunschweig, 1997.
- [8] H. Hironaka, “Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I”, *Ann. of Math.* (2), **79**:1 (1964), 109–203.
- [9] D. Eisenbud, *Commutative algebra. With a view toward algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., **150**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1995.
- [10] А. С. Тихомиров, “Многообразие полных пар нульмерных подсхем алгебраической поверхности”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:6 (1997), 153–180; англ. пер.: A. S. Tikhomirov, “The variety of complete pairs of zero-dimensional subschemes of an algebraic surface”, *Izv. Math.*, **61**:6 (1997), 1265–1291.
- [11] W. Barth, “Some properties of stable rank-2 vector bundles on $\mathbb{P}_n$ ”, *Math. Ann.*, **226**:2 (1977), 125–150.
- [12] R. Hartshorne, “Stable reflexive sheaves”, *Math. Ann.*, **254**:2 (1980), 121–176.
- [13] R. Lazarsfeld, *Positivity in algebraic geometry. I. Classical setting: line bundles and linear series*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* (3), **48**, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

- [14] Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, **52**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.
- [15] Дж. Милн, *Этальные когомологии*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: J. S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Math. Ser., **33**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.
- [16] D. Knutson, *Algebraic spaces*, Lecture Notes in Math., **203**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.

Н. В. Тимофеева (N. V. Timofeeva)

Ярославский государственный педагогический
университет им. К. Д. Ушинского;

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: ntimofeeva@list.ru

Поступила в редакцию

08.04.2008 и 24.11.2008