Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Царев, Сервантные подкольца колец $\mathbb{Z}_\chi$, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 10, 123–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm5235>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 15:42:21

УДК 512.541+512.552.1+512.553.5

А. В. Царёв

Сервантные подкольца колец $\mathbb{Z}_\chi$

Рассматриваются сервантные подкольца конечного ранга в $\mathbb{Z}$ -адическом пополнении кольца целых чисел и в его гомоморфных образах. Исследованы некоторые свойства этих колец (существование единичного элемента, разложимость в прямую сумму существенно неразложимых идеалов, условие вложимости в *csp*-кольцо и др.). Описаны аддитивные группы этих колец и условия, при которых они являются подкольцами полей алгебраических чисел.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: кольцо целых универсальных чисел, кольцо псевдорациональных чисел, *csp*-кольцо, факторно делимая группа.

Введение

Под “группой” в работе подразумевается абелева группа, записанная аддитивно, под “кольцом” – ассоциативное коммутативное кольцо (не обязательно с единицей); $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ – кольца целых, рациональных и целых p -адических чисел соответственно или их аддитивные группы, $\mathbb{Z}_m$ – кольцо классов вычетов по модулю m , P – множество всех простых чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Если S – подмножество K -модуля M , то через $\langle S \rangle$ и $\langle S \rangle_K$ обозначим соответственно подгруппу и подмодуль, порожденные множеством S , а через $\langle S \rangle_*$ – сервантную оболочку множества S , состоящую из всех таких $r \in M$, что $nr \in \langle S \rangle$ при некотором $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что $\langle S \rangle_*$ содержит все элементы из M , имеющие конечные порядки. Элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$ группы A назовем *линейно независимыми* (над $\mathbb{Z}$), если равенство $m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n = 0$ выполняется только при $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0$. Бесконечное множество называется *линейно независимым*, если линейно независимо любое его конечное подмножество. *Рангом группы* A называется мощность максимального линейно независимого подмножества в A (обозначается через $r(A)$); *p -рангом группы* A называется размерность $\mathbb{Z}_p$ -пространства A/pA (обозначается через $r_p(A)$). *Рангом (p -рангом) кольца или модуля* назовем ранг (p -ранг) его аддитивной группы. Через $t(A)$ и $\text{div } A$ обозначим соответственно периодическую и делимую часть группы A , а через $K[u]$ – кольцо многочленов от одной переменной над кольцом K . Кольцо и группу эндоморфизмов группы A обозначим через $E(A)$ и $\text{End } A$ соответственно. Если K – кольцо, то через K^+ обозначим его аддитивную группу. Групповая терминология, применяемая к кольцам, относится к их аддитивным группам.

Другие используемые в работе понятия и обозначения можно найти в [1].

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-3345.2007.1.

§ 1. Кольца R_χ и факторно делимые группы

Под характеристикой $\chi = (m_p)$ всюду далее подразумевается последовательность из целых неотрицательных чисел и символов ∞ , занумерованных простыми индексами. Характеристике χ поставим в соответствие набор колец K_p , где $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ или $K_p = \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$ соответственно при $m_p = \infty$ и $m_p < \infty$. Кольцо $\prod_{p \in P} K_p$ обозначим через $\mathbb{Z}_\chi$. Если $\chi = (\infty, \infty, \dots)$, то кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ является $\mathbb{Z}$ -адическим пополнением кольца целых чисел $\mathbb{Z}$. Его обычно обозначают через $\widehat{\mathbb{Z}}$ и называют *кольцом целых универсальных чисел*. Нетрудно видеть, что для любой характеристики χ кольцо $\mathbb{Z}_\chi$ является гомоморфным образом кольца $\widehat{\mathbb{Z}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть χ содержит бесконечно много ненулевых p -компонент. Рассмотрим подкольцо R_χ кольца $\mathbb{Z}_\chi = \prod_{p \in P} K_p$, сервантно порожденное идеалом $\bigoplus_{p \in P} K_p$ и единицей кольца:

$$R_\chi = \left\langle 1, \bigoplus_{p \in P} K_p \right\rangle_* \subset \prod_{p \in P} K_p.$$

Если все p -компоненты характеристики χ , за исключением $p_1, \dots, p_n$, равны нулю, то определим $R_\chi = \mathbb{Q} \oplus K_{p_1} \oplus \dots \oplus K_{p_n}$. Если $\chi = (\infty, \infty, \dots)$ – характеристика группы рациональных чисел, то кольцо R_χ будем называть *кольцом псевдорациональных чисел* и обозначать через R .

Кольца R_χ были введены П. А. Крыловым [2] и А. А. Фоминым [3] для изучения некоторых sr -групп. В частном случае, когда характеристика χ локально свободная, кольца R_χ ранее уже использовались в работах Л. Фукса, И. Гальперина и К. Рангасвами [4], [5] для изучения аддитивных групп регулярных и π -регулярных колец (см. также [1; § 124, 125]).

Кольца R_χ имеют следующие свойства.

- 1) Если характеристика χ содержит бесконечно много ненулевых компонент, то элемент $r = (\alpha_p) \in \prod_{p \in P} K_p$ принадлежит кольцу R_χ тогда и только тогда, когда существует такое рациональное число $|r| = m/n$, что $n\alpha_p = m$ для почти всех простых p .
- 2) Обозначим через ε_p элемент кольца R_χ такой, что его p -компонента равна единице, а все остальные компоненты (включая и рациональную, если такая содержится) равны нулю. Тогда элементы вида

$$\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \dots + \varepsilon_{p_n}, \quad (\text{a})$$

где $p_1, \dots, p_n$ – различные простые числа, и элементы вида

$$1 - \varepsilon, \quad (\text{b})$$

а также единица и нуль, составляют множество всех идемпотентов кольца R_χ .

- 3) Если характеристика χ содержит бесконечно много ненулевых компонент, то для элемента $r \in R_\chi$ обозначим через $|r|$ рациональное число, определенное в п. 1), а если χ – почти нулевая, то через $|r|$ обозначим рациональную компоненту элемента r . Тогда число $|r|$ определено однозначно и

$$|r_1 \pm r_2| = |r_1| \pm |r_2|, \quad |r_1 \cdot r_2| = |r_1| \cdot |r_2|$$

для любых $r_1, r_2 \in R_\chi$, т.е. существует сюръективный гомоморфизм колец $R_\chi \rightarrow \mathbb{Q}$ с ядром $\bigoplus_{p \in P} K_p$.

- 4) Если для характеристик χ и ψ справедливо неравенство $\chi \geq \psi$, то существует сюръективный гомоморфизм $R_\chi \rightarrow R_\psi$ и, следовательно, любой R_ψ -модуль является R_χ -модулем. В частности, любой R_χ -модуль является модулем над кольцом псевдорациональных чисел R .

Пусть M – произвольный модуль над кольцом псевдорациональных чисел R . Так как $R/T \cong \mathbb{Q}$, где $T = \bigoplus_{p \in P} \hat{\mathbb{Z}}_p$, то фактормодуль M/TM является векторным пространством над полем $\mathbb{Q}$. Величина $\dim_{\mathbb{Q}} M/TM$ называется *псевдорациональным рангом* R -модуля M и обозначается через $r^*(M)$. Этот числовой инвариант в теории R -модулей играет такую же важную роль, как и обычный ранг в теории абелевых групп.

Теория модулей над кольцом псевдорациональных чисел тесно связана с теорией (смешанных) факторно делимых групп. Сами R_χ -модули были введены П. А. Крыловым и А. А. Фоминым для изучения групп из класса $\mathcal{G}$ (введенного С. Глаз и У. Уиклессом [6]), обобщение которого привело к построению класса факторно делимых групп У. Уиклессом и А. А. Фоминым [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Группа G называется *факторно делимой*, если она не содержит периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что G/F – периодическая делимая группа.

Факторно делимая группа G принадлежит классу $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда $G/t(G)$ – делимая группа. Заметим также, что любая группа $G \in \mathcal{G}$ квазиизоморфна некоторой факторно делимой группе $G' \in \mathcal{G}$ (более того, G и G' отличаются только конечными прямыми слагаемыми). Стоит также отметить, что любая группа из класса $\mathcal{G}$ является конечно порожденным R -модулем.

Пусть G – редуцированная факторно делимая группа. Рассмотрим ее $\mathbb{Z}$ -адическое пополнение $\hat{G}$. Канонический гомоморфизм $\alpha: G \rightarrow \hat{G}$ является мономорфизмом, так как $\ker \alpha = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} nG = 0$. Группа $\hat{G}$ является $\hat{\mathbb{Z}}$ -модулем, а значит, и модулем над кольцом псевдорациональных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. R -модуль $\mathcal{R}(G) = \operatorname{div} G \oplus \langle \alpha(G) \rangle_R$ называется *псевдорациональной оболочкой* (или *псевдорациональным типом*) факторно делимой группы G . *Псевдорациональным рангом* группы G называется псевдорациональный ранг ее псевдорациональной оболочки, $r^*(G) = r^*(\mathcal{R}(G))$.

Нетрудно видеть, что существует вложение факторно делимой группы G в ее псевдорациональную оболочку $\mathcal{R}(G)$. В связи с этим всюду далее будем отождествлять группу G с ее образом в $\mathcal{R}(G)$.

ТЕОРЕМА 1 (см. [8]). Если F – такая свободная подгруппа факторно делимой группы G , что G/F – делимая периодическая группа, то $\mathcal{R}(G) = \langle F \rangle_R$. В частности, $\mathcal{R}(G)$ – конечно порожденный R -модуль.

ТЕОРЕМА 2 (см. [8]). Пусть M – произвольный модуль над кольцом целых универсальных чисел $\widehat{\mathbb{Z}}$ и $x_1, \dots, x_n$ – независимая над $\mathbb{Z}$ система образующих модуля M . Тогда группа $G = \langle x_1, \dots, x_n \rangle_* \subseteq M$ является факторно делимой.

ТЕОРЕМА 3 (см. [3]). Если L – редуцированный R -модуль, то

$$\text{Hom}_R(M, L) = \text{Hom}_{\widehat{\mathbb{Z}}}(M, L).$$

Факторно делимые группы интересны еще и потому, что категория $\mathcal{D}$, объектами которой являются факторно делимые группы, а морфизмами – квазигомоморфизмы, двойственна категории групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов [7].

Для факторно делимой группы G рассмотрим ее $\widehat{\mathbb{Z}}$ -адическое пополнение $\widehat{G}$. А. А. Фоминым доказано, что $\widehat{\mathbb{Z}}$ -модуль $\widehat{G}$ раскладывается в конечную прямую сумму циклических $\widehat{\mathbb{Z}}$ -модулей, $\widehat{G} \cong \mathbb{Z}_{\chi_1} \oplus \mathbb{Z}_{\chi_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\chi_s}$. Набор характеристик $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_s$ назовем *обобщенной кохарактеристикой* группы G . Это понятие аналогично типу Ричмена для групп без кручения конечного ранга.

Если факторно делимая группа G имеет идемпотентную обобщенную кохарактеристику (все характеристики χ_i состоят только из символов 0 и ∞), то G принадлежит классу факторно делимых групп без кручения конечного ранга, введенного Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом в [9]. Если же G имеет локально свободную обобщенную кохарактеристику (ни одна из характеристик χ_i не содержит символов ∞), то G лежит в классе $\mathcal{S}$.

§ 2. *csp*-кольца

Пусть $\chi = (m_p)$ – произвольная характеристика, содержащая бесконечно много ненулевых элементов, и $K_p = \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$ или $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ при $m_p < \infty$ и при $m_p = \infty$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Кольцо K , для которого выполняются следующие условия:

- 1) $\bigoplus_{p \in P} K_p \subset K \subset \prod_{p \in P} K_p$;
- 2) факторкольцо $K / \bigoplus_{p \in P} K_p = F$ является полем;

называется *csp-кольцом*. Характеристика χ называется *кохарактеристикой csp-кольца* K , $\chi = \text{sochar}(K)$, а поле F – его *базовым полем*, $F = \text{bf}(K)$.

Далее нас будут интересовать не все *csp*-кольца, а только те, для которых дополнительно выполняется такое условие:

- 3) поле F является конечным расширением поля $\mathbb{Q}$.

Кольца, для которых выполняются условия 1)–3), называются *кольцами псевдоалгебраических чисел*. Из определения следует, что кохарактеристика

любого кольца псевдоалгебраических чисел содержит бесконечно много ненулевых элементов. Для характеристики χ , все p -компоненты которой, за исключением $p_1, \dots, p_n$, равны нулю, и поля алгебраических чисел F рассмотрим кольцо $F \oplus K_{p_1} \oplus \dots \oplus K_{p_n}$, которое также будем называть *кольцом псевдоалгебраических чисел*.

csp -кольца ввел в рассмотрение П. А. Крылов как естественное обобщение колец R_χ . Действительно, если в определении 4 поле F – это поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, то кольцо K – это в точности кольцо R_χ .

Рассмотрим следующие элементарные свойства csp -колец.

- 1) csp -кольцо K кохарактеристики χ содержит в качестве подкольца кольцо R_χ . В частности, любой K -модуль является R_χ -модулем, а значит, и R -модулем.
- 2) Множества следующего вида и только они являются идеалами csp -кольца K кохарактеристики χ :

$$\bigoplus_{p \in P_1} p^{s_p} K_p, \quad P_1 \subseteq P;$$

$$(1 - \varepsilon_{p_1} - \dots - \varepsilon_{p_n})K \oplus \bigoplus_{p \in P_1} p^{s_p} K_p, \quad P_1 \subseteq \{p_1, \dots, p_n\}.$$

- 3) Любой конечно порожденный идеал csp -кольца является главным.
- 4) csp -кольцо K кохарактеристики χ является наследственным тогда и только тогда, когда χ состоит только из символов 0, 1 и ∞ .
- 5) csp -кольцо K кохарактеристики χ является регулярным (π -регулярным) тогда и только тогда, когда χ состоит только из символов 0 и 1 (χ является локально свободной характеристикой).
- 6) Если csp -кольцо L является гомоморфным образом csp -кольца K , то $\text{bf}(L) = \text{bf}(K)$ и $\text{cochar}(L) \leq \text{cochar}(K)$.

Доказательства этих утверждений, в основном, повторяют доказательства аналогичных утверждений для колец R_χ (см. [2], [3]); для csp -колец эти свойства были доказаны в [10].

ТЕОРЕМА 4. *Если кохарактеристика χ кольца псевдоалгебраических чисел K содержит бесконечно много ненулевых элементов, то в кольце K существует такой элемент x , что*

$$K = \left\langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, \bigoplus_{p \in P} K_p \right\rangle_* \subset \mathbb{Z}_\chi,$$

где n – степень расширения поля $F = \text{bf}(K)$ над полем $\mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим естественный гомоморфизм колец

$$\varphi: K \rightarrow K / \bigoplus_{p \in P} K_p.$$

Так как $F = K / \bigoplus_{p \in P} K_p$ – конечное расширение поля $\mathbb{Q}$, $F = \mathbb{Q}(\alpha)$, то для любого его элемента $\bar{r}$ имеет место равенство

$$m\bar{r} = m_0 + m_1\alpha + m_2\alpha^2 + \dots + m_{n-1}\alpha^{n-1},$$

где $m \in \mathbb{N}$, $m_0, m_1, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{Z}$ и $n = \dim_{\mathbb{Q}} F$. Значит, для любого элемента $r \in K$, принадлежащего классу $\bar{r}$, справедливо равенство

$$mr = m_0 + m_1x + m_2x^2 + \dots + m_{n-1}x^{n-1} + t, \quad (1)$$

где x – некоторый прообраз элемента α при отображении φ и $t \in \bigoplus_{p \in P} K_p$. Тогда из равенства (1) следует, что $r \in \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, \bigoplus_{p \in P} K_p \rangle_*$, т.е.

$$K \subseteq \left\langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, \bigoplus_{p \in P} K_p \right\rangle_*.$$

Обратно, если $r \in \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, \bigoplus_{p \in P} K_p \rangle_*$, то элемент r представим в виде (1). Пусть $m = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \dots p_t^{s_t}$ – каноническое разложение числа m . Рассмотрим идемпотент $\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \dots + \varepsilon_{p_t} \in R_\chi$. Домножив равенство (1) на элемент $(1 - \varepsilon)/m$, очевидно, принадлежащий R_χ , получим

$$(1 - \varepsilon)r = r_0 + r_1x + r_2x^2 + \dots + r_{n-1}x^{n-1} + t_1,$$

где $r_i = (1 - \varepsilon)(m_i/m) \in R_\chi$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, и $t_1 = (1 - \varepsilon)(t/m) \in \bigoplus_{p \in P} K_p$. Поскольку $x \in K$, $\bigoplus_{p \in P} K_p \subset K$ и $R_\chi \subseteq K$, то $(1 - \varepsilon)r \in K$. Тогда, учитывая, что $\varepsilon r \in \bigoplus_{p \in P} K_p$, получаем, что $r \in K$. Следовательно,

$$\left\langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, \bigoplus_{p \in P} K_p \right\rangle_* \subseteq K.$$

Заметим, что если K – кольцо псевдоалгебраических чисел, кохарактеристики χ которого почти нулевая, то в K существует такой элемент x , что

$$K = \left\langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, \bigoplus_{p \in P} K_p \right\rangle_* \subseteq F \oplus \mathbb{Z}_\chi,$$

где F – базовое поле кольца K .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть K – кольцо псевдоалгебраических чисел кохарактеристики χ с базовым полем F . Тогда в нем существует такой элемент x , что

$$K = \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle_{R_\chi},$$

где n – степень расширения поля F над полем $\mathbb{Q}$.

§ 3. Кольца $L(x)$

Как и выше, через ε_p будем обозначать единицу кольца K_p ($K_p = \mathbb{Z}_{p^m}$ или $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$) и ее образ при естественном вложении $K_p \rightarrow \mathbb{Z}_\chi$.

Пусть $x = (x_p)$ – произвольный ненулевой элемент кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Ему соответствует идемпотент $\xi = (\xi_p) \in \mathbb{Z}_\chi$ такой, что $\xi_p = \varepsilon_p$ при $x_p \neq 0$ и $\xi_p = 0$ при $x_p = 0$. Рассмотрим группу $L(x)$, сервантно порожденную множеством всех натуральных степеней элемента x в идеале $\xi\mathbb{Z}_\chi$:

$$L(x) = \langle x^k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_* \subseteq \xi\mathbb{Z}_\chi.$$

Нетрудно видеть, что множество $L(x)$ замкнуто относительно операций $+$ и $\cdot$, определенных в кольце $\mathbb{Z}_\chi$, и удовлетворяет всем условиям, входящим в определение кольца.

ПРИМЕР 1. Пусть $x = (x_p)$ – элемент кольца $\mathbb{Z}_\chi$, имеющий конечный порядок. Рассмотрим идемпотент $\xi = (\xi_p) \in \mathbb{Z}_\chi$ такой, что $\xi_p = \varepsilon_p$ при $x_p \neq 0$ и $\xi_p = 0$ при $x_p = 0$. Тогда $L(x) = \xi \mathbb{Z}_\chi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если x – нильпотентный элемент бесконечного порядка из кольца $\mathbb{Z}_\chi$, то $L(x)$ – кольцо конечного ранга без единицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x^k = 0$. Тогда $L(x) = \langle x, x^2, \dots, x^{k-1} \rangle_*$. Следовательно, $r(L(x)) \leq k - 1$. Если же $L(x)$ содержит единичный элемент ξ , то

$$m\xi = m_1x + m_2x^2 + \dots + m_{k-1}x^{k-1}$$

для некоторых $m_1, m_2, \dots, m_{k-1} \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{N}$, откуда $(m\xi)^k = 0$. Из последнего равенства следует, что ξ содержит лишь конечное число ненулевых p -компонент и все они имеют конечный порядок. Тогда ξ – элемент конечного порядка, а значит, и x – элемент конечного порядка. Получили противоречие. Следовательно, $L(x)$ не содержит единичного элемента.

ПРИМЕР 2. Пусть $\chi = (2, 2, 2, \dots)$. Тогда $\mathbb{Z}_\chi = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^2}$. В кольце $\mathbb{Z}_\chi$ рассмотрим элемент $x = (p\varepsilon_p)_{p \in P}$. Так как $x^2 = (p^2\varepsilon_p) = 0$, то x – нильпотентный элемент, а значит, $L(x) = \langle x \rangle_*$ – кольцо без единицы ранга один.

ЛЕММА 1. Если $L(x)$ – кольцо конечного ранга, то существует такой идемпотент $\xi \in \mathbb{Z}_\chi$, что ξx – нильпотентный элемент, а $(1 - \xi)x$ не имеет ненулевых нильпотентных p -компонент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $L(x)$ – кольцо конечного ранга, то существует равенство с целыми коэффициентами вида

$$a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0. \quad (2)$$

Если (2) содержит лишь одно ненулевое слагаемое, то, очевидно, для кольца $L(x)$ лемма справедлива. Предположим, что (2) содержит по меньшей мере два ненулевых слагаемых. Пусть a_k – отличный от нуля коэффициент с наименьшим индексом. Тогда равенство (2) можно переписать в следующем виде:

$$x^k(a_k 1_{\mathbb{Z}_\chi} + a_{k+1}x + \dots + a_nx^{n-k}) = 0. \quad (3)$$

Для каждого простого p равенство (3) индуцирует равенство

$$x_p^k(a_k\varepsilon_p + a_{k+1}x_p + \dots + a_nx_p^{n-k}) = 0, \quad (4)$$

где $x_p = \varepsilon_p x$. Рассмотрим множество

$$P_1 = \{p \in P \mid x_p - \text{ненулевой нильпотентный элемент}\}.$$

Если $p \in P_1$ (в частности, p делит x) и p не делит a_k , то

$$\text{НОД}(a_k\varepsilon_p + a_{k+1}x_p + \dots + a_nx_p^{n-k}, p) = \text{НОД}(a_k, p) = 1.$$

Следовательно, $a_k \varepsilon_p + a_{k+1} x_p + \dots + a_n x_p^{n-k}$ – обратимый элемент кольца K_p . Тогда из (4) получаем, что $x_p^k = 0$. Так как число a_k имеет конечное число простых делителей, то $x_p^k = 0$ почти для всех $p \in P_1$. Из этого следует, что существует идемпотент $\xi \in \mathbb{Z}_\chi$ такой, что ξx – нильпотентный элемент, а $(1-\xi)x$ не имеет ненулевых нильпотентных p -компонент.

ТЕОРЕМА 5. *$L(x)$ является кольцом с единицей тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

- 1) $L(x)$ имеет конечный ранг;
- 2) элемент x почти не имеет ненулевых нильпотентных p -компонент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим необходимость условий 1) и 2).

Если $L(x)$ содержит единичный элемент $1_{L(x)}$, то для некоторых $n, m_0 \in \mathbb{N}$ и $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство

$$m_0 \cdot 1_{L(x)} = m_1 x + m_2 x^2 + \dots + m_n x^n. \quad (5)$$

Следовательно, справедливо равенство $m_0 x - m_1 x^2 - m_2 x^3 - \dots - m_n x^{n+1} = 0$, а значит, кольцо $L(x)$ имеет конечный ранг.

Предположим, что условие 2) не выполняется. По доказанному выше кольцо $L(x)$ имеет конечный ранг. Следовательно, по лемме 1 существует идемпотент $\xi \in \mathbb{Z}_\chi$ такой, что ξx является нильпотентным элементом бесконечного порядка. Тогда, домножив (5) на ξ , получим равенство

$$m_0 \xi = m_1 (\xi x) + m_2 (\xi x)^2 + \dots + m_n (\xi x)^n,$$

из которого следует, что ξ является единичным элементом кольца $L(\xi x)$, что противоречит предложению 1.

Пусть выполняются условия 1) и 2). Покажем, что $L(x)$ – кольцо с единицей.

Если x – элемент конечного порядка, то, очевидно, $L(x)$ содержит единичный элемент. Пусть x имеет бесконечный порядок. Так как $L(x)$ – кольцо конечного ранга, то существует равенство с целыми коэффициентами вида

$$a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0, \quad (6)$$

а так как для x выполняется условие 2), то (6) содержит по крайней мере два ненулевых слагаемых.

Пусть a_k – отличный от нуля коэффициент с наименьшим индексом. Тогда равенство (6) можно переписать в виде

$$x^k (a_k 1_{\mathbb{Z}_\chi} + a_{k+1} x + \dots + a_n x^{n-k}) = 0. \quad (7)$$

Для каждого простого p равенство (7) индуцирует равенство

$$x_p^k (a_k \varepsilon_p + a_{k+1} x_p + \dots + a_n x_p^{n-k}) = 0, \quad (8)$$

где $x_p = \varepsilon_p x$. В соответствии с условием 2) из (8) следует, что

$$a_k \varepsilon_p + a_{k+1} x_p + \dots + a_n x_p^{n-k} = 0 \quad (9)$$

почти для всех простых p таких, что $x_p \neq 0$.

Учитывая, что (9) справедливо для всех ненулевых $x_p \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$, получаем, что для всех простых p таких, что $x_p \neq 0$, имеет место равенство

$$ma_k \varepsilon_p + ma_{k+1} x_p + \dots + ma_n x_p^{n-k} = 0,$$

где m – некоторое натуральное число.

Пусть $\xi = (\xi_p)$ – такой элемент кольца $\mathbb{Z}_\chi$, что $\xi_p = 0$ при $x_p = 0$ и $\xi_p = \varepsilon_p$ при $x_p \neq 0$. Тогда верно равенство

$$ma_k \xi + ma_{k+1} x + \dots + ma_n x^{n-k} = 0. \quad (10)$$

Так как $ma_k \neq 0$, то из (10) следует, что $\xi \in L(x) = \langle x^k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_*$. Нетрудно видеть, что именно ξ является единичным элементом кольца $L(x)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $L(x)$ – кольцо с единицей, то p не делит x почти при всех простых p .

ЛЕММА 2. Если L – прямое слагаемое кольца $L(x)$ и ξ – соответствующий этому слагаемому идемпотент кольца $\mathbb{Z}_\chi$, то $L = \xi L(x) = L(\xi x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in \xi L(x)$. Тогда $g = \xi h$, где $h \in L(x)$. Следовательно, $mh = m_1 x + m_2 x^2 + \dots + m_n x^n$ для некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$. Отсюда $mg = m\xi h = m_1 \xi x + m_2 (\xi x)^2 + \dots + m_n (\xi x)^n$. Итак, $g \in L(\xi x)$ и $\xi L(x) \subseteq L(\xi x)$.

Обратно, пусть $g \in L(\xi x)$. Тогда

$$mg = m_1 \xi x + m_2 \xi x^2 + \dots + m_n \xi x^n = \xi(m_1 x + m_2 x^2 + \dots + m_n x^n) = v \in \xi L(x).$$

Так как $\xi L(x)$ – сервантное подкольцо кольца $L(x)$ (как прямое слагаемое), то существует элемент $h \in \xi L(x)$ такой, что $mh = v$. Следовательно, $m(g - h) = 0$ и $g - h \in t(L(\xi x))$. Но $t(L(\xi x)) = t(\xi L(x))$, поэтому $g \in \xi L(x)$ и $L(\xi x) \subseteq \xi L(x)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $L(x)$ – кольцо конечного ранга. Тогда $L(x) = L(x_1) \oplus L(x_2)$, где x_1 – нильпотентный элемент, а $L(x_2)$ – кольцо с единицей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если x – элемент конечного порядка, то $L(x)$ – кольцо с единицей. Следовательно, в качестве x_1 можно взять нуль, а в качестве x_2 – сам x .

Если же x имеет бесконечный порядок, то по лемме 1 существует идемпотент $\xi \in \mathbb{Z}_\chi$ такой, что ξx – нильпотентный элемент, а $(1 - \xi)x$ не имеет ненулевых нильпотентных p -компонент. Пусть $(\xi x)^k = 0$. Тогда кольцо $L(x^k)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 5. Следовательно, $L(x^k)$ является кольцом с единицей. Рассмотрим идемпотент $\xi' = (\xi'_p)$ такой, что $\xi'_p = 0$ при $x_p = 0$ и $\xi'_p = \varepsilon_p$ при $x_p \neq 0$. Нетрудно видеть, что идемпотент $\xi' - \xi$ является единицей кольца $L(x^k)$. Тогда

$$L(x) = \xi L(x) \oplus (\xi' - \xi)L(x) = L(\xi x) \oplus L((\xi' - \xi)x) = L(x_1) \oplus L(x_2).$$

Полученное разложение является искомым, так как $x_1^k = (\xi x)^k = 0$, а $L(x_2)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 5.

§ 4. Минимальный многочлен элемента $x \in \mathbb{Z}_\chi$

Пусть x – элемент кольца $\mathbb{Z}_\chi$, $f = a_0 + a_1u + \dots + a_nu^n$ – целочисленный многочлен. Если $a_0 = 0$, то положим $f(x) = a_1x + \dots + a_nx^n$. Если же $a_0 \neq 0$, то определим значение $f(x)$ только для таких x , для которых $L(x)$ – кольцо с единицей, следующим образом:

$$f(x) = a_0\xi + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

где ξ – единица кольца $L(x)$.

Многочлен f будем называть *минимальным многочленом элемента x* , если f – целочисленный многочлен наименьшей степени, для которого $f(x) = 0$. Минимальный многочлен не обязан быть нормированным. Поэтому он определен неоднозначно. Однако нетрудно видеть, что любые два минимальных многочлена одного и того же элемента могут отличаться только целыми множителями.

Минимальные многочлены имеют следующие свойства:

- 1) элемент $x \in \mathbb{Z}_\chi$ имеет минимальный многочлен тогда и только тогда, когда $L(x)$ – кольцо конечного ранга;
- 2) если $L(x)$ – кольцо с единицей, то минимальный многочлен элемента x имеет ненулевой свободный член;
- 3) если $L(x)$ – кольцо с единицей, f – минимальный многочлен элемента x , то $r(L(x)) = \deg f$;
- 4) если g – такой целочисленный многочлен, что $g(x) = 0$ для $x \in \mathbb{Z}_\chi$, то минимальный многочлен элемента x делит g (точнее, некоторое его натуральное кратное mg) в $\mathbb{Z}[u]$;
- 5) если элементы бесконечного порядка $x, y \in \mathbb{Z}_\chi$ покомпонентно ортогональны (т.е. если $x_p \neq 0$, то $y_p = 0$ для любого простого p), то минимальный многочлен элемента $x+y$ равен наименьшему общему кратному минимальных многочленов элементов x и y .

Напомним, что кольцо (группа) называется *существенно неразложимым(ой)*, если любое его (ее) прямое разложение содержит конечные слагаемые.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если элемент $x \in \mathbb{Z}_\chi$ имеет минимальный многочлен, являющийся степенью неприводимого над $\mathbb{Z}$ многочлена, то $L(x)$ – существенно неразложимое кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что $L(x)$ раскладывается в прямую сумму двух бесконечных идеалов. Рассмотрим соответствующие данному разложению идемпотенты ξ и $1 - \xi$ кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Тогда

$$L(x) = (1 - \xi)L(x) \oplus \xi L(x) = L((1 - \xi)x) \oplus L(\xi x).$$

Пусть $f = h^k$ – минимальный многочлен элемента x , где h – неприводимый над $\mathbb{Z}$ многочлен. Так как $f(\xi x) = \xi f(x) = 0$, то минимальный многочлен элемента ξx делит f , а значит, имеет вид h^r , где $0 < r \leq k$. Аналогично, минимальный многочлен элемента $(1 - \xi)x$ имеет вид h^s , где $0 < s \leq k$.

Поскольку элементы ξx и $(1 - \xi)x$ покомординатно ортогональны, то $f = h^k$ равен наименьшему общему кратному многочленов h^r и h^s . Следовательно, $r = k$ или $s = k$. Если $L(x)$ – кольцо с единицей, то

$$r(L(x)) = \deg f = r(L((1 - \xi)x)) + r(L(\xi x)) = \deg f + \deg h^t,$$

где $t = \min\{r, s\} > 0$. Получаем противоречие. Если же $L(x)$ – кольцо без единицы, то $h = mu$, $m \in \mathbb{N}$, и mx – нильпотентный элемент. Тогда

$$r(L(x)) = \deg f - 1 = r(L((1 - \xi)x)) + r(L(\xi x)) = \deg f - 1 + \deg h^t - 1,$$

где $t = \min\{r, s\}$. Поэтому $\deg h^t - 1 = 0$, т.е. $t = 1$, а значит, $m\xi x = 0$ или $m(1 - \xi)x = 0$. В этом случае тоже получаем противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если x – нильпотентный элемент, то $L(x)$ – существенно неразложимое кольцо.

ПРИМЕР 3. Пусть $\chi = (2, 2, 2, \dots)$ и $\mathbb{Z}_\chi = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^2}$. В кольце $\mathbb{Z}_\chi$ рассмотрим элемент $x = (p\varepsilon_p + \varepsilon_p)_{p \in P}$. Нетрудно видеть, что $L(x)$ – кольцо с единицей, а $f(u) = u^2 - 2u + 1 = (u - 1)^2$ является минимальным многочленом элемента x . Следовательно, $L(x) = \langle x, x^2 \rangle_*$ – существенно неразложимое кольцо ранга два.

ЛЕММА 3. Пусть $L(x)$ – кольцо с единицей, f – минимальный многочлен элемента x и $f = gh$, где g и h – взаимно простые целочисленные многочлены ненулевой степени. Тогда существует разложение $L(x) = L(x_1) \oplus L(x_2)$, для которого g – минимальный многочлен элемента x_1 , а h – минимальный многочлен элемента x_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим элемент $y = g(x)$. Так как $L(x)$ – кольцо с единицей, то $L(x)$ имеет конечный ранг, а так как $L(y) \subset L(x)$, то $L(y)$ тоже имеет конечный ранг. Тогда из леммы 1 и теоремы 5 следует, что $L(y^k)$ является кольцом с единицей для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Единица ξ кольца $L(y^k)$, очевидно, является идемпотентом кольца $L(x)$. Следовательно, она задает разложение

$$L(x) = (1 - \xi)L(x) \oplus \xi L(x) = L((1 - \xi)x) \oplus L(\xi x). \quad (11)$$

Найдем минимальный многочлен g_1 элемента $(1 - \xi)x$. Так как

$$g^k((1 - \xi)x) = (1 - \xi)g^k(x) = (1 - \xi)y^k = 0, \quad (12)$$

то многочлен g_1 делит g^k . А так как $f((1 - \xi)x) = (1 - \xi)f(x) = 0$, то g_1 делит $f = gh$. Но по условию g и h взаимно просты. Следовательно, g_1 делит g . Таким образом, равенство (12) выполняется при $k = 1$. Тогда $\xi y = y$ и $\xi \in L(y)$, т.е. ξ является единицей кольца $L(y)$.

Так как $f(x) = h(x)g(x) = h(x)y = 0$, то для любого простого p

$$h(x_p)y_p = 0. \quad (13)$$

Если $y_p \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$ и $y_p \neq 0$ или y_p – обратимый элемент конечного порядка (т.е. y_p не делится на p), то из (13) следует, что $h(x_p) = 0$. Но по следствию 2 элемент y_p

не делится на p почти при всех простых p таких, что y_p – ненулевой элемент конечного порядка. Отсюда следует, что $n\xi h(x) = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, т.е. $nh(\xi x) = 0$. Следовательно, минимальный многочлен h_1 элемента ξx делит h (мы можем заменить nh на h , так как минимальный многочлен нами определен с точностью до целого множителя).

Таким образом, мы получили, что минимальный многочлен g_1 элемента $(1 - \xi)x$ делит g , минимальный многочлен h_1 элемента ξx делит h , а их наименьшее общее кратное равно $f = gh$ (так как эти элементы по координатам ортогональны и их сумма дает x). Поскольку g и h взаимно просты, то такое возможно, только если $g_1 = g$ и $h_1 = h$. Следовательно, разложение (11) искомое.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Кольцо $L(x)$ конечно ненулевого ранга является существенно неразложимым тогда и только тогда, когда минимальный многочлен элемента x есть некоторая степень неприводимого над $\mathbb{Z}$ многочлена.*

ТЕОРЕМА 7. *Если $L(x)$ – бесконечное кольцо с единицей, f – минимальный многочлен x и $f = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdots f_k^{r_k}$ – его каноническое разложение в $\mathbb{Z}[u]$, то*

- 1) $L(x) = L(x_1) \oplus L(x_2) \oplus \cdots \oplus L(x_k)$, причем $f_i^{r_i}$ является минимальным многочленом элемента x_i для каждого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- 2) Слагаемые в разложении из п. 1) определяются однозначно с точностью до порядка следования и конечных прямых слагаемых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждения п. 1) непосредственно вытекает из леммы 3.

Рассмотрим теперь два произвольных разложения кольца $L(x)$:

$$L(x) = L(x_1) \oplus L(x_2) \oplus \cdots \oplus L(x_k) = L(y_1) \oplus L(y_2) \oplus \cdots \oplus L(y_m).$$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ и $\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_m$ – системы идемпотентов, задающие первое и второе прямые разложения кольца $L(x)$ соответственно. Тогда

$$L(x) = L(\xi_1 x) \oplus L(\xi_2 x) \oplus \cdots \oplus L(\xi_k x) = L(\xi'_1 x) \oplus L(\xi'_2 x) \oplus \cdots \oplus L(\xi'_m x),$$

причем $L(\xi_i x) = L(x_i)$ и $L(\xi'_j x) = L(y_j)$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m\}$. Пусть элементы $\xi_i x$ и $\xi'_j x$ имеют минимальные многочлены $f_i^{r_i}$ и $g_j^{s_j}$ соответственно, где f_i, g_j – неприводимые над $\mathbb{Z}$ многочлены.

Так как обе системы $\{\xi_1 x, \xi_2 x, \dots, \xi_k x\}$ и $\{\xi'_1 x, \xi'_2 x, \dots, \xi'_m x\}$ попарно по координатам ортогональны и $x = \xi_1 x + \xi_2 x + \cdots + \xi_k x = \xi'_1 x + \xi'_2 x + \cdots + \xi'_m x$, то $f = f_1^{r_1} f_2^{r_2} \cdots f_k^{r_k} = g_1^{s_1} g_2^{s_2} \cdots g_m^{s_m}$. Следовательно, $k = m$ и $f_1 = g_1, f_2 = g_2, \dots, f_k = g_m$, при подходящей перенумерации идемпотентов ξ_i, ξ'_j .

Рассмотрим элемент $\xi_s \xi'_t x$, где $s, t \in \{1, \dots, k\}$ и $s \neq t$. Так как

$$f_s^{r_s}(\xi_s \xi'_t x) = \xi'_t f_s^{r_s}(\xi_s x) = 0, \quad f_t^{r_t}(\xi_s \xi'_t x) = \xi_s f_t^{r_t}(\xi'_t x) = 0,$$

то элемент $\xi_s \xi'_t x$ имеет конечный порядок (иначе у него было бы два различных неассоциированных в $\mathbb{Q}[u]$ минимальных многочленов). Следовательно, и

элемент $\xi_s \xi'_t$ имеет конечный порядок. Учитывая это и принимая во внимание равенство

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k = 1 = \xi'_1 + \xi'_2 + \dots + \xi'_k,$$

получаем справедливость утверждения из п. 2).

§ 5. Кольца $L(x)$ с неприводимым минимальным многочленом элемента x

Пусть G – произвольная группа, $g \in G$. Обозначим через k_p такое наименьшее неотрицательное целое число, при котором $p^{k_p}g$ делится в G на любую степень числа p . Если такого k_p не существует, то будем считать, что $k_p = \infty$. Характеристика $\psi = (k_p)$ называется *кохарактеристикой элемента* $g \in G$, $\psi = \text{cochar}(g)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $x = (x_p) \in \mathbb{Z}_\chi$ и $\xi = (\xi_p)$ – такой идемпотент кольца $\mathbb{Z}_\chi$, что $\xi_p = \varepsilon_p$, если $x_p \neq 0$ и $\xi_p = 0$, если $x_p = 0$. *Кохарактеристикой кольца* $L(x)$ назовем кохарактеристику идемпотента ξ .

Нетрудно видеть, что если $\text{cochar}(L(x)) = \chi$, то $L(x) \subseteq \mathbb{Z}_\chi$ и $t(L(x)) = t(\mathbb{Z}_\chi)$. Если $L(x)$ – кольцо с единицей, то $\text{cochar}(L(x)) = \text{cochar}(1_{L(x)})$ и $1_{L(x)} = 1_{\mathbb{Z}_\chi}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $L(x)$ – кольцо с неприводимым минимальным многочленом f элемента x , то $L(x)$ вкладывается в кольцо псевдоалгебраических чисел кохарактеристики $\chi = \text{cochar}(L(x))$ с базовым полем $F = \mathbb{Q}[u]/(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\text{cochar}(L(x)) = \chi$, то кольцо $L(x)$ вкладывается в кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod_{p \in P} K_p$. Рассмотрим два случая.

Первый случай: χ – почти нулевая характеристика. Тогда имеют место вложения

$$L(x) \subset \mathbb{Z}_\chi \subset F \oplus \mathbb{Z}_\chi.$$

Второй случай: χ содержит бесконечно много ненулевых элементов. Рассмотрим кольцо $K = \langle L(x), \bigoplus_{p \in P} K_p \rangle_* \subset \mathbb{Z}_\chi$. Нам достаточно проверить, что K – кольцо псевдоалгебраических чисел с базовым полем F .

Из построения кольца $L(x)$ следует, что

$$K = \left\langle 1, x, \dots, x^{n-1}, \bigoplus_{p \in P} K_p \right\rangle_* \subset \mathbb{Z}_\chi,$$

где n – ранг кольца $L(x)$. Следовательно, K является модулем над кольцом псевдорациональных чисел R . Тогда факторкольцо $K / \bigoplus_{p \in P} K_p$ является векторным пространством над полем $\mathbb{Q}$. Поэтому $K / \bigoplus_{p \in P} K_p = \langle \bar{1}, \bar{x}, \dots, \bar{x}^{n-1} \rangle_{\mathbb{Q}}$, где $\bar{1} = 1 + \bigoplus_{p \in P} K_p$ и $\bar{x}^i = x^i + \bigoplus_{p \in P} K_p$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Отсюда получаем, что

$$K / \bigoplus_{p \in P} K_p = \{g(\bar{x}) \mid g \in \mathbb{Q}[u]\} \cong \mathbb{Q}[u]/(f) = F$$

и, следовательно, K является искомым кольцом, что и требовалось доказать.

Отметим, что если $L(x)$ – кольцо локально свободной кохарактеристики, то $\bigoplus_{p \in P} K_p = t(L(x))$ и поэтому $K = \langle L(x), \bigoplus_{p \in P} K_p \rangle_* = \langle L(x) \rangle_* = L(x)$. Таким образом, справедливо

СЛЕДСТВИЕ 5. Если элемент $x \in \mathbb{Z}_\chi$ имеет локально свободную кохарактеристику, содержащую бесконечно много ненулевых элементов, и неприводимый минимальный многочлен, то $L(x)$ является кольцом псевдоалгебраических чисел.

ТЕОРЕМА 8. Пусть x – произвольный элемент кольца псевдоалгебраических чисел K кохарактеристики χ с базовым полем F такой, что кольцо $L(x)$ имеет конечный ранг. Тогда

- 1) $L(x)$ – кольцо с единицей;
- 2) если $f = f_1 f_2 \cdots f_k$ – разложение минимального многочлена элемента x на неприводимые над кольцом $\mathbb{Z}$ множители, то все многочлены $f_1, f_2, \dots, f_k$ попарно различны.
- 3) $L(x) = L(x_1) \oplus L(x_2) \oplus \cdots \oplus L(x_k)$, причем f_i является минимальным многочленом элемента x_i для каждого $i \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- 4) если $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_k$ – кохарактеристики колец $L(x_1), L(x_2), \dots, L(x_k)$ соответственно, то не более чем одна из них содержит бесконечно много ненулевых элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Нам достаточно показать, что для x выполняется условие 2) теоремы 5. Предположим противное, т.е. что ξx является нильпотентным элементом бесконечного порядка для некоторого идемпотента $\xi \in \mathbb{Z}_\chi$. Заметим, что $\xi x \in \xi K$, а ξK является кольцом псевдоалгебраических чисел (как гомоморфный образ кольца K , не лежащий в $\bigoplus_{p \in P} K_p$). Но в кольцах псевдоалгебраических чисел нет нильпотентных элементов бесконечного порядка. Получаем противоречие.

2) Предположим противное, т.е. что многочлен f_i^2 делит многочлен f : $f = f_i^2 g$. Рассмотрим элемент $y = f_i(x)g(x)$, который, очевидно, принадлежит кольцу K . Элемент y имеет бесконечный порядок (иначе $n f_i g(x) = 0$, что невозможно, поскольку $f = f_i^2 g$ – минимальный многочлен элемента x) и $y^2 = f_i^2(x)g^2(x) = 0$. Таким образом, y – нильпотентный элемент бесконечного порядка кольца K . Получаем противоречие.

3) Это утверждение непосредственно следует из п. 1) теоремы 7.

4) Рассмотрим элемент $\bar{x} \in F$, являющийся образом элемента x при естественном гомоморфизме $K \rightarrow K / \bigoplus_{p \in P} K_p = F$. Так как $f(\bar{x}) = 0$, то минимальный многочлен элемента $\bar{x}$ делит f и поэтому он совпадает с одним из многочленов f_i . Тогда $f_i(x) = t \in \bigoplus_{p \in P} K_p$, т.е. $f_i(x_p) = 0$ почти для всех простых p . Отсюда следует, что $L(x_i) = (1 - \varepsilon)L(x)$ при некотором идемпотенте $\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \cdots + \varepsilon_{p_n} \in K$ и, таким образом, все кохарактеристики χ_j , $j \neq i$, почти нулевые.

ЛЕММА 4. Если $L(x)$ – кольцо с неприводимым минимальным многочленом f элемента x , то $L(x)/t(L(x))$ – область целостности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y, z \in L(x)$ такие, что $yz = 0$. Тогда

$$my = m_0 + m_1x + \cdots + m_{n-1}x^{n-1}, \quad kz = k_0 + k_1x + \cdots + k_{n-1}x^{n-1}$$

для некоторых $m, k \in \mathbb{N}$, $m_i, k_j \in \mathbb{Z}$ и $n = \deg f$. Так как $mk(yz) = 0$, то многочлен

$$(m_0 + m_1u + \cdots + m_{n-1}u^{n-1})(k_0 + k_1u + \cdots + k_{n-1}u^{n-1})$$

делится на многочлен f . Но f – неприводимый многочлен. Следовательно, или $m_0 + m_1u + \cdots + m_{n-1}u^{n-1}$ делится на f , или $k_0 + k_1u + \cdots + k_{n-1}u^{n-1}$ делится на f . Так как $\deg f = n$, то отсюда получаем, что $m_0 + m_1u + \cdots + m_{n-1}u^{n-1} = 0$ или $k_0 + k_1u + \cdots + k_{n-1}u^{n-1} = 0$. Это означает, что $my = 0$ или $kz = 0$.

Таким образом, равенство $yz = 0$ влечет $y \in t(L(x))$ или $z \in t(L(x))$. Следовательно, $L(x)/t(L(x))$ является областью целостности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если $L(x)$ – кольцо с неприводимым многочленом f элемента x , то факторкольцо $L(x)/t(L(x))$ вкладывается в поле $F = \mathbb{Q}[u]/(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4 следует, что $L(x)/t(L(x))$ – область целостности. Пусть S – поле частных кольца $L(x)/t(L(x))$ и $\bar{x} = x + t(L(x))$. Тогда для любого элемента $s \in L(x)/t(L(x))$ верно, что

$$ms = m_0\bar{1} + m_1\bar{x} + \cdots + m_k\bar{x}^k$$

при некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $m_0, m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$s = \frac{m_0}{m}\bar{1} + \frac{m_1}{m}\bar{x} + \cdots + \frac{m_k}{m}\bar{x}^k \in \mathbb{Q}[\bar{x}].$$

Убедимся, что $S \subseteq \mathbb{Q}[\bar{x}]$. Любой элемент из S можно представить в виде rs^{-1} , где $r, s \in L(x)/t(L(x))$ и $s \neq 0$. Выше показано, что $s \in \mathbb{Q}[\bar{x}]$. Тогда $s = g(\bar{x})$, где $g \in \mathbb{Q}[u]$. Так как $f(\bar{x}) = 0$ и f, g – взаимно просты, то $uf + vg = 1$ для некоторых $u, v \in \mathbb{Q}[u]$. Поэтому

$$u(\bar{x})f(\bar{x}) + v(\bar{x})g(\bar{x}) = v(\bar{x})s = \bar{1}.$$

Отсюда следует, что $s^{-1} = v(\bar{x}) \in \mathbb{Q}[\bar{x}]$, т.е. $S \subseteq \mathbb{Q}[\bar{x}]$.

Так как $f(\bar{x}) = 0$ и f – неприводимый многочлен, то $\mathbb{Q}[\bar{x}] \cong \mathbb{Q}[u]/(f) = F$ и поэтому $S \subseteq F$. Таким образом, $L(x)/t(L(x))$ вкладывается в поле F .

СЛЕДСТВИЕ 6. Если $L(x)$ – кольцо с неприводимым многочленом f элемента x , то поле частных кольца $L(x)/t(L(x))$ изоморфно полю $F = \mathbb{Q}[u]/(f)$.

Напомним, что группа без кручения G конечного ранга называется группой Мерли (Murley's group; подробнее см. [11]), если $r_p(G) \leq 1$ для всех простых p .

ТЕОРЕМА 9. Для кольца с единицей K следующие утверждения равносильны.

- 1) Кольцо K является подкольцом поля алгебраических чисел, а его аддитивная группа является редуцированной группой Мерли.

- 2) Кольцо K изоморфно кольцу $L(x)$ с идемпотентной кохарактеристикой и неприводимым минимальным многочленом элемента x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что из 1) следует 2). По условию K^+ – редуцированная группа Мерли. Следовательно, существует вложение

$$\varphi: K \rightarrow \prod_{r_p(K)=1} \widehat{\mathbb{Z}}_p = \mathbb{Z}_\chi, \quad \mathbb{Z}_\chi \cong \widehat{K}, \quad (14)$$

где $\widehat{K}$ – $\mathbb{Z}$ -адическое пополнение кольца K . Заметим, что если $\chi = (m_p)$, то $m_p = 0$ при $r_p(K) = 0$ и $m_p = \infty$ при $r_p(K) = 1$, т.е. χ – идемпотентная характеристика.

Кольцо K вкладывается в поле алгебраических чисел $F = \mathbb{Q}(\alpha)$ такое, что $r(K) = r(F) = \dim_{\mathbb{Q}} F$. Отсюда следует, что $m\alpha = r \in K$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\{r, r^2, \dots, r^n\}$, где $n = r(K)$, является максимальной независимой над $\mathbb{Z}$ системой кольца K . Поэтому

$$K = \langle r^k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_* = \langle r, r^2, \dots, r^n \rangle_* \subseteq \widehat{K}.$$

Учитывая это равенство и условие (14), получаем, что $K \cong L(x) \subset \mathbb{Z}_\chi$, где x – образ элемента r при отображении φ .

Поскольку кольцо K не содержит делителей нуля (так как $K \subset F$), то $L(x)$ – неразложимое кольцо. Поэтому согласно следствию 4 минимальный многочлен элемента x имеет вид f^n , где f – неприводимый над $\mathbb{Z}$ многочлен, а $n \in \mathbb{N}$. Но K , а значит, и $L(x)$, не содержат ненулевых нильпотентных элементов. Следовательно, $n = 1$ (иначе $f(x)$ – ненулевой нильпотентный элемент кольца $L(x)$).

Покажем, что из 2) следует 1). Так как $L(x)$ имеет идемпотентную кохарактеристику, то $L(x)$ – кольцо без кручения. А так как x имеет неприводимый минимальный многочлен f , то согласно предложению 4 кольцо $L(x)$ вкладывается в поле алгебраических чисел $\mathbb{Q}[u]/(f)$. По условию $K \cong L(x)$. Следовательно, K тоже вкладывается в поле $\mathbb{Q}[u]/(f)$.

В силу построения $L(x)$ – редуцированное кольцо и для каждого простого p имеет место одно из равенств: $r_p(L(x)) = 1$ или $r_p(L(x)) = 0$. Из этого следует, что аддитивная группа кольца K является редуцированной группой Мерли.

Заметим, что если $L(x)$ – кольцо с единицей и $r(L(x)) = 1$, то можно считать, что $x = 1$ и $L(x) = \langle 1 \rangle_* \subset \mathbb{Z}_\chi$. В [12] показано, что тогда $L(x)$ – факторно делимое кольцо ранга один. Там же показано, что такие кольца с точностью до изоморфизма задаются своими кохарактеристиками.

§ 6. Кольца $L(x)$ с нильпотентными элементами бесконечного порядка

Как и выше, в этом параграфе мы будем рассматривать только кольца $L(x)$ конечного (ненулевого) ранга.

Пусть $x = (x_p)$ – нильпотентный элемент и $\chi = (m_p)$ – кохарактеристика кольца $L(x)$. Если x_p – ненулевой элемент кольца $\widehat{\mathbb{Z}}_p$, то $x_p^n \neq 0$ для любого

$n \in \mathbb{N}$. Следовательно, характеристика χ не содержит символов ∞ , в частности,

$$\bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^{m_p}} \subset L(x) \subset \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^{m_p}}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если $L(x)$ – кольцо ранга n локально свободной кохарактеристики, то $L(x)$ является R -модулем, причем

$$L(x) = \langle x, x^2, \dots, x^n, t(L(x)) \rangle_R.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in L(x)$. Тогда $mg = m_1x + m_2x^2 + \dots + m_nx^n$ для некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим псевдорациональные числа r_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, такие, что $|r_i| = m_i/m$. Тогда $g = r_1x + r_2x^2 + \dots + r_nx^n + t$, где $t \in t(L(x))$, и, следовательно, $L(x) \subseteq \langle x, x^2, \dots, x^n, t(L(x)) \rangle_R$.

Пусть $g \in \langle x, x^2, \dots, x^n, t(L(x)) \rangle_R$. Тогда $g = r_1x + r_2x^2 + \dots + r_{n-1}x^n + t$ для некоторых $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ и $t \in t(L(x))$. Отсюда следует, что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ справедливо равенство:

$$mg = m|r_1|x + m|r_2|x^2 + \dots + m|r_n|x^n = m_1x + m_2x^2 + \dots + m_nx^n,$$

где $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$. Поэтому $g \in L(x)$ и $\langle x, x^2, \dots, x^n, t(L(x)) \rangle_R \subseteq L(x)$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Если x – нильпотентный элемент такой, что $x^n = 0$, то $L(x)$ является R -модулем, причем $L(x) = \langle x, x^2, \dots, x^{n-1}, t(L(x)) \rangle_R$.

ЛЕММА 5. Пусть x – нильпотентный элемент, степень нильпотентности которого равна n , $\text{sochar}(L(x)) = \chi$ и 1 – единица кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Тогда

- 1) $L(1+x)$ – кольцо с единицей ранга n и $\text{sochar}(L(1+x)) = \text{sochar}(L(x))$;
- 2) $L(1+x) = \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle_* \subset \mathbb{Z}_\chi$;
- 3) $L(1+x) = \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle_R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Заметим, что $((1+x) - 1)^n = 0$. Следовательно, минимальный многочлен элемента $1+x$ имеет вид $(u-1)^n$. Из этого, в частности, вытекает, что $L(1+x)$ – кольцо с единицей ранга n . Если $x_p \neq 0$, то $x_p = p\alpha_p$ (так как x_p – нильпотентный элемент кольца $\mathbb{Z}_{p^{m_p}}$). Таким образом, $x_p = 0$ тогда и только тогда, когда $(1+x)_p = 0$, т.е. $\text{sochar}(L(1+x)) = \text{sochar}(L(x))$.

2) Так как $1+x \in \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle_*$, то $L(1+x) \subseteq \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle_*$. Пусть $y \in \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle_*$. Тогда $my = m_01 + m_1x + \dots + m_{n-1}x^{n-1}$ для некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $m_0, m_1, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{Z}$. Разложим многочлен $f = m_0 + m_1u + \dots + m_{n-1}u^{n-1}$ по степеням суммы $u+1$: $f = k_0 + k_1(u+1) + \dots + k_{n-1}(u+1)^{n-1}$. Тогда

$$my = f(x) = k_01 + k_1(1+x) + \dots + k_{n-1}(1+x)^{n-1}.$$

Следовательно, $y \in L(1+x)$, т.е. $\langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle_* \subseteq L(x)$. Таким образом, $L(1+x) = \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle_*$.

3) Так как $L(1+x) = \langle 1, L(x) \rangle_R = \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, t(L(x)) \rangle_R$ и верно включение $t(L(x)) \subset \langle 1 \rangle_R$, то $L(1+x) = \langle 1, x, x^2, \dots, x^{n-1} \rangle_R$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Если кольцо с единицей $L(x)$ изоморфно кольцу $L(y)$, то $L(x) = L(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{sochar}(L(x)) = \chi$. Тогда и $\text{sochar}(L(y)) = \chi$. Следовательно, $L(x)$ и $L(y)$ являются сервантными подкольцами кольца $\mathbb{Z}_\chi$ и $1_{L(x)} = 1_{L(y)}$.

Так как $\mathbb{Z}_\chi$ – алгебраически компактное кольцо, то любой групповой гомоморфизм $\varphi: L(x) \rightarrow L(y)$ можно продолжить до группового эндоморфизма $\mathbb{Z}_\chi$. Но любой групповой эндоморфизм $\mathbb{Z}_\chi$ является умножением на некоторый элемент из $\mathbb{Z}_\chi$. Следовательно, $\varphi(z) = \alpha z$ для любого $z \in L(x)$ и некоторого $\alpha \in \mathbb{Z}_\chi$. Тогда если φ – кольцевой изоморфизм, то $\varphi(1) = \alpha$ и $\varphi^{-1}(1) = \alpha^{-1}$, т.е. α – обратимый элемент кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Поскольку $\varphi(1 \cdot 1) = \varphi(1) = \alpha = \varphi(1)\varphi(1) = \alpha^2$, то $\alpha^2 = \alpha$. Домножив это равенство на α^{-1} , получим $\alpha = 1$. Следовательно, $L(x) = L(y)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если x – нильпотентный элемент и $L(x) \cong L(y)$, то $L(x) = L(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $L(x)$ и $L(y)$ изоморфны, то $t(L(x)) = t(L(y))$. Пусть $\varphi: L(x) \rightarrow L(y)$ – изоморфизм колец. Тогда $\varphi_p = \varphi|_{t_p(L(x))}$ является автоморфизмом кольца $t_p(L(x)) = t_p(L(y)) = \mathbb{Z}_{p^m}$. Но в кольце $\mathbb{Z}_{p^m}$ любой автоморфизм является тождественным. Следовательно, $\varphi(x) = (\varphi_p(x_p)) = (x_p) = x$, т.е. $x \in L(y)$, и значит, $L(x) \subseteq L(y)$. Аналогично, рассматривая отображение φ^{-1} , получаем, что $L(y) \subseteq L(x)$.

ТЕОРЕМА 10. Если x и y – нильпотентные элементы, то $L(x) \cong L(y)$ тогда и только тогда, когда $L(1+x) \cong L(1+y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложений 6 и 7 следует, что знак изоморфизма в условиях теоремы мы везде можем заменить на знак равенства.

Если $L(x) = L(y)$, то $\text{sochar}(L(x)) = \text{sochar}(L(y))$. Поэтому кольца $L(1+x)$ и $L(1+y)$ имеют общий единичный элемент. Тогда, учитывая лемму 5, получаем, что $L(1+x) = L(1+y)$.

Обратно, пусть $L(1+x) = L(1+y)$. Тогда $mx = m_0 1 + m_1 y + \dots + m_{n-1} y^{n-1}$ для некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $m_0, m_1, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{Z}$. Поскольку x и y – нильпотентные элементы, то последнее равенство имеет место только при $m_0 = 0$, а значит, $mx = m_1 y + \dots + m_{n-1} y^{n-1}$. Отсюда следует, что $x \in L(y)$ и $L(x) \subseteq L(y)$.

Включение $L(y) \subseteq L(x)$ проверяется аналогично.

Далее подробнее рассмотрим кольца $L(x)$ с единицей такие, что минимальный многочлен элемента x имеет вид $(au + b)^n$, $n > 1$. Изучение таких колец сводится к изучению колец $L(y)$, где минимальный многочлен элемента y имеет вид $(u - 1)^n$. В самом деле, рассмотрим элемент $y = ax + b + 1$. Так как $ax + b$ – нильпотентный элемент, то $\text{sochar}(L(x)) = \text{sochar}(L(y))$, а значит, из равенства $y = ax + b + 1$ следует, что $L(x) = L(y)$.

Рассмотрим элемент $x = (x_p) \in \mathbb{Z}_\chi$, минимальный многочлен которого равен $(u - 1)^n$, $n > 1$. Тогда $(x - 1)^n = 0$. Пусть $\psi = (m_p)$ – кохарактеристика кольца $L(x)$. Если $m_p = \infty$, то x_p – ненулевой элемент кольца $\widehat{\mathbb{Z}}_p$. Следовательно, равенство $(x_p - \varepsilon_p)^n = 0$ возможно только при $x_p - \varepsilon_p = 0$, т.е. при $x_p = \varepsilon_p$. Если $m_p = 0$, то $x_p = 0$. Наконец, если $0 < m_p < \infty$, то из равенства $(x_p - \varepsilon_p)^n = 0$

следует, что $x_p = \varepsilon_p + p^{k_p} \alpha_p$, где $\alpha_p \in \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$, $k_p \in \mathbb{N}$ и $k_p n \geq m_p$. Таким образом,

$$x_p = \begin{cases} \varepsilon_p, & \text{если } m_p = \infty, \\ 0, & \text{если } m_p = 0, \\ \varepsilon_p + p^{k_p} \alpha_p, & \text{если } 0 < m_p < \infty. \end{cases} \quad (15)$$

Заметим, что характеристика ψ содержит бесконечно много ненулевых конечных элементов, так как в противном случае для $m = \prod_{0 < m_p < \infty} p^{m_p}$ имеет место равенство $m(x-1) = 0$, что противоречит тому, что $(u-1)^n$ является минимальным многочленом элемента x .

С помощью элемента x построим элемент $\hat{x} = (\hat{x}_p)$ такой, что

$$\hat{x}_p = \begin{cases} x_p, & \text{если } m_p < \infty, \\ 0, & \text{если } m_p = \infty. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Если элементы x и y имеют общий минимальный многочлен $(u-1)^n$, $n > 1$, то $L(x) \cong L(y)$ тогда и только тогда, когда $L(\hat{x}) \cong L(\hat{y})$ и $\text{cochar}(L(x)) = \text{cochar}(L(y))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что в силу предложения 6 изоморфизм в условиях предложения всюду можно заменить на равенство. Пусть $L(x) = L(y)$. Тогда, очевидно, $\text{cochar}(L(x)) = \text{cochar}(L(y)) = \chi$. Так как $x \in L(y)$, то

$$mx = m_0 1 + m_1 y + \dots + m_{n-1} y^{n-1}.$$

Следовательно, $m\hat{x} = m_0 \hat{1} + m_1 \hat{y} + \dots + m_{n-1} \hat{y}^{n-1}$, где $\hat{1}$ – единица кольца $L(\hat{x})$. Тогда $\hat{x} \in L(\hat{y})$ и $L(\hat{x}) \subseteq L(\hat{y})$. Аналогично можно показать, что $L(\hat{y}) \subseteq L(\hat{x})$. Таким образом, $L(\hat{y}) = L(\hat{x})$.

Пусть $L(\hat{x}) = L(\hat{y})$ и $\text{cochar}(L(x)) = \text{cochar}(L(y))$. Из второго условия следует, что $1_{L(x)} = 1_{L(y)}$. Так как

$$m_0 1 + m_1 x + \dots + m_{n-1} x^{n-1} = m'_0 1 + m'_1 (x-1) + \dots + m'_{n-1} (x-1)^{n-1},$$

то $L(x) = \langle 1, x, \dots, x^{n-1} \rangle_* = \langle 1, (x-1), \dots, (x-1)^{n-1} \rangle_*$. Аналогично можно показать, что $L(y) = \langle 1, (y-1), \dots, (y-1)^{n-1} \rangle_*$. Но $x-1 = \hat{x} - \hat{1}$ и $y-1 = \hat{y} - \hat{1}$, где $\hat{1}$ – единица кольца $L(\hat{x})$. Таким образом, из равенства $L(\hat{x}) = L(\hat{y})$ следует, что $L(x) = L(y)$.

Итак, изучение колец $L(x)$ с минимальным многочленом элемента x вида $(au+b)^n$, $n > 1$, сводится к изучению колец $L(y)$ с минимальным многочленом элемента y вида $(u-1)^n$, имеющих локально свободную кохарактеристику (не содержащую символов ∞).

Рассмотрим кольцо $L(x)$ локально свободной кохарактеристики $\chi = (m_p)$ с минимальным многочленом элемента x вида $(u-1)^2$. В соответствии с (15) для каждого простого p такого, что $m_p \neq 0$, имеет место равенство

$$x_p = \varepsilon_p + p^{k_p} \alpha_p, \quad (16)$$

где $\alpha_p \in \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$ и $2k_p \geq m_p$. Нетрудно видеть, что в качестве k_p можно взять число $m_p - [m_p/2]$ (всюду ниже через k_p будем обозначать именно $m_p - [m_p/2]$).

Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_{\tilde{\chi}}$, где $\tilde{\chi} = ([m_p/2])$, и элемент $\alpha = (\tilde{\alpha}_p) \in \mathbb{Z}_{\tilde{\chi}}$, который определяется следующим образом: если $m_p = 0$, то $\tilde{\alpha}_p = 0$, а если $m_p \neq 0$, то $\tilde{\alpha}_p$ — это образ элемента α_p из равенства (16) при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}_{p^{m_p}} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^{m_p-k_p}}$. Элемент x определяет элемент $\alpha \in \mathbb{Z}_{\tilde{\chi}}$, а значит, и группу

$$\Gamma(x) = \langle \alpha \rangle_* \subset \mathbb{Z}_{\tilde{\chi}}.$$

Заметим, что элемент α_p из равенства (16) определяется не однозначно, а с точностью до слагаемого из множества $p^{m_p-k_p}\mathbb{Z}_{p^{m_p}}$. Но при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}_{p^{m_p}} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^{m_p-k_p}}$ множество $p^{m_p-k_p}\mathbb{Z}_{p^{m_p}}$ отображается в нуль. Следовательно, элемент $\tilde{\alpha}_p$ определен однозначно, а значит, и группа $\Gamma(x)$ определена однозначно.

ТЕОРЕМА 11. *Если элементы x и y имеют общий минимальный многочлен $(u-1)^2$ и локально свободные кохарактеристики, то $L(x) \cong L(y)$ тогда и только тогда, когда $\text{sochar}(L(x)) = \text{sochar}(L(y))$ и $\Gamma(x) = \Gamma(y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L(x) \cong L(y)$. Тогда из предложения 6 следует, что $L(x) = L(y)$. Следовательно, $\text{sochar}(L(x)) = \text{sochar}(L(y))$. Далее, учитывая теорему 10, получаем, что $L(x-1) = L(y-1)$. Поэтому

$$n(x-1) = k(y-1) \quad (17)$$

для некоторых ненулевых $n, k \in \mathbb{Z}$. Если

$$x_p = \varepsilon_p + p^{k_p}\alpha_p, \quad y_p = \varepsilon_p + p^{k_p}\beta_p, \quad (18)$$

то из (17) и (18) следует, что $p^{k_p}(n\alpha_p) = p^{k_p}(k\beta_p)$ для любого простого p такого, что $x_p \neq 0$. Пусть $\alpha_p = a_p + p^{m_p}\mathbb{Z}$ и $\beta_p = b_p + p^{m_p}\mathbb{Z}$. Тогда $p^{k_p}(na_p) \equiv p^{k_p}(kb_p) \pmod{p^{m_p}}$, откуда $na_p \equiv kb_p \pmod{p^{m_p-k_p}}$. Отсюда следует, что

$$n\tilde{\alpha}_p = k\tilde{\beta}_p, \quad (19)$$

где $\tilde{\alpha}_p = a_p + p^{m_p-k_p}\mathbb{Z}$ и $\tilde{\beta}_p = b_p + p^{m_p-k_p}\mathbb{Z}$ — образы элементов α_p и β_p при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}_{p^{m_p}} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^{m_p-k_p}}$. Из равенства (19) вытекает, что элементы $\alpha = (\tilde{\alpha}_p), \beta = (\tilde{\beta}_p) \in \mathbb{Z}_{\tilde{\chi}}$ линейно зависимы, а значит, $\Gamma(x) = \Gamma(y)$.

Пусть теперь $\text{sochar}(L(x)) = \text{sochar}(L(y)) = \chi = (m_p)$ и $\Gamma(x) = \Gamma(y)$. Покажем, что $L(x) = L(y)$.

Из равенства $\text{sochar}(L(x)) = \text{sochar}(L(y))$ следует, что $1_{L(x)} = 1_{L(y)}$. Из равенства $\Gamma(x) = \Gamma(y)$ следует, что $n\alpha = k\beta$ для некоторых ненулевых $n, k \in \mathbb{Z}$. Если $\tilde{\alpha}_p = a_p + p^{m_p-k_p}\mathbb{Z}$ и $\tilde{\beta}_p = b_p + p^{m_p-k_p}\mathbb{Z}$, то $na_p + p^{m_p-k_p}\mathbb{Z} = kb_p + p^{m_p-k_p}\mathbb{Z}$ для всех простых p таких, что $m_p \neq 0$. Следовательно, $p^{k_p}(na_p) + p^{m_p}\mathbb{Z} = p^{k_p}(kb_p) + p^{m_p}\mathbb{Z}$, т.е. $p^{k_p}(n\alpha_p) = p^{k_p}(k\beta_p)$ для всех простых p таких, что $m_p \neq 0$. Отсюда вытекает, что $n(x-1) = k(y-1)$, а значит, $L(x-1) = L(y-1)$, откуда в силу теоремы 10 следует, что $L(x) = L(y)$.

СЛЕДСТВИЕ 8. *Множество всех неизоморфных колец $L(x)$ с одной и той же локально свободной кохарактеристикой и с одним и тем же минимальным многочленом $(u-1)^2$ элемента x имеет мощность континуума.*

§ 7. Аддитивные группы колец $L(x)$

Следующее утверждение хорошо известно в теории групп без кручения для произвольной идемпотентной характеристики χ . Мы обобщим его на случай произвольной характеристики χ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Если K – сервантное подкольцо с единицей кольца $\mathbb{Z}_\chi$, то $E(K^+) \cong K$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как K^+ – сервантная подгруппа в $\mathbb{Z}_\chi$, а $\mathbb{Z}_\chi$ – сервантно инъективная группа, то любой эндоморфизм группы K^+ единственным образом можно продолжить до эндоморфизма группы $\mathbb{Z}_\chi$ (причем тождественный эндоморфизм продолжается до тождественного). Следовательно, кольцо $E(K^+)$ вкладывается в кольцо $E(\mathbb{Z}_\chi)$.

Известно, что любой эндоморфизм группы $\mathbb{Z}_\chi$ является умножением на некоторый элемент из $\mathbb{Z}_\chi$. Тогда любой эндоморфизм α группы K^+ является умножением на некоторый элемент $r \in \mathbb{Z}_\chi$. Но группа K^+ содержит единицу кольца $\mathbb{Z}_\chi$, поэтому $\alpha(1) = r1 = r \in K^+$. Таким образом, любой эндоморфизм $\alpha \in E(K^+)$ является умножением на некоторый элемент $r \in K$, т.е. $E(K^+) \cong K$.

СЛЕДСТВИЕ 9. *Если $L(x)$ – кольцо с единицей, то $E(L(x)^+) \cong L(x)$.*

СЛЕДСТВИЕ 10. *Кольцо с единицей $L(x)$ существенно неразложимо тогда и только тогда, когда его аддитивная группа существенно неразложима.*

Пусть $L(x)$ – кольцо кохарактеристики χ . Далее нам понадобится множество

$$\text{Ann}(x) = \{\alpha \in \mathbb{Z}_\chi \mid \alpha x = 0\},$$

которое, очевидно, является идеалом кольца $\mathbb{Z}_\chi$.

ЛЕММА 6. *Справедливо следующее равенство:*

$$\text{Hom}(L(x)^+, t(L(x)^+)) = \text{Ann}(x) + t(E(L(x)^+)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in \text{Ann}(x)$. Убедимся в том, что домножение на α является гомоморфизмом из $L(x)^+$ в $t(L(x)^+)$. Так как для любого $y \in L(x)$ существуют $m \in \mathbb{N}$ и $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ такие, что $my = m_1x + m_2x^2 + \dots + m_nx^n$, то

$$m(\alpha y) = \alpha(my) = \alpha(m_1x + m_2x^2 + \dots + m_nx^n) = 0.$$

Следовательно, $\alpha y \in t(L(x))$, т.е. домножение на α задает отображение из $L(x)^+$ в $t(L(x)^+)$. А так как $\alpha(y + z) = \alpha y + \alpha z$, то домножение на α является гомоморфизмом. Итак, $\text{Ann}(x) \subseteq \text{Hom}(L(x)^+, t(L(x)^+))$. Учитывая, что $t(E(L(x)^+)) \subseteq \text{Hom}(L(x)^+, t(L(x)^+))$, получаем

$$\text{Ann}(x) + t(E(L(x)^+)) \subseteq \text{Hom}(L(x)^+, t(L(x)^+)).$$

Пусть $\varphi \in \text{Hom}(L(x)^+, t(L(x)^+))$. Тогда φ является эндоморфизмом группы $L(x)$, а значит, является домножением на некоторое $\alpha \in \mathbb{Z}_\chi$, где $\chi = \text{sochar}(L(x))$. Так как $\varphi(x) = \alpha x = t \in t(L(x))$, то $(1 - \varepsilon)\alpha x = 0$, где идемпотент ε имеет вид $\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \varepsilon_{p_2} + \dots + \varepsilon_{p_r}$, и $p \in \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ тогда и только тогда, когда $t_p \neq 0$. Отсюда следует, что $(1 - \varepsilon)\varphi \in \text{Ann}(x)$ и $\varepsilon\varphi \in t(\text{E}(L(x)^+))$. Поэтому

$$\text{Hom}(L(x)^+, t(L(x)^+)) \subseteq \text{Ann}(x) + t(\text{E}(L(x)^+)).$$

Напомним, что p -высотой элемента g группы G называется такое наибольшее натуральное k_p , для которого разрешимо уравнение $p^{k_p}x = g$ в группе G . При этом пишут $k_p = h_p(g)$. Если данное уравнение разрешимо при любом натуральном k_p , то говорят, что g имеет бесконечную p -высоту в группе G и пишут $h_p(g) = \infty$. Отметим также, что последовательность $(h_p(g))$ называется *высотной характеристикой* (или просто *характеристикой*) элемента $g \in G$ и обозначается через $\text{char}(g)$.

ТЕОРЕМА 12. Если x – нильпотентный элемент, то

$$\text{E}(L(x)^+) \cong \left\langle 1, x, \dots, x^{n-2}, \prod_{p \in P} p^{m_p - k_p} \mathbb{Z}_{p^{m_p}} \right\rangle_R,$$

где n – степень нильпотентности элемента x , $(m_p) = \text{sochar}(L(x))$, $k_p = h_p(x)$ при $m_p \neq 0$ и $k_p = 0$ при $m_p = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что домножения на $x, x^2, \dots, x^{n-2}$ являются эндоморфизмами аддитивной группы кольца $L(x)$. Так как $L(x)$ – R -модуль, то домножения на псевдорациональные числа также являются эндоморфизмами группы $L(x)$. Из этого следует, что

$$\langle \mu_1, \mu_x, \mu_{x^2}, \dots, \mu_{x^{n-2}} \rangle_R \subseteq \text{E}(L(x)^+),$$

где μ_y обозначает эндоморфизм, являющийся домножением на элемент y .

Пусть α – произвольный эндоморфизм группы $L(x)$. Так как

$$L(x) = \langle x, x^2, \dots, x^{n-1}, t(L(x)) \rangle_R,$$

то $m\alpha(x) = r_1x + r_2x^2 + \dots + r_{n-1}x^{n-1} = (r_1\mu_1 + r_2\mu_x + \dots + r_{n-1}\mu_{x^{n-2}})(x)$ для некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $r_1, r_2, \dots, r_{n-1} \in R$. Тогда

$$\begin{aligned} m\alpha(x^k) &= (m\alpha\mu_{x^{k-1}})(x) = (\mu_{x^{k-1}}m\alpha)(x) = r_1x^k + r_2x^{k+1} + \dots + r_{n-k}x^{n-1} \\ &= (r_1\mu_1 + r_2\mu_x + \dots + r_{n-1}\mu_{x^{n-2}})(x^k). \end{aligned}$$

Так как любой элемент $y \in L(x)$ представим в виде $y = s_1x + s_2x^2 + \dots + s_{n-1}x^{n-1} + t$, где $s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \in R$, $t \in t(L(x))$, то

$$(m\alpha - r_1\mu_1 - r_2\mu_x - \dots - r_{n-1}\mu_{x^{n-2}})(y) = m\alpha(t) \in t(L(x)),$$

т.е. $(m\alpha - r_1\mu_1 - r_2\mu_x - \dots - r_{n-1}\mu_{x^{n-2}}) \in \text{Hom}(L(x)^+, t(L(x)^+))$. Отсюда следует, что $\text{E}(L(x)^+) = \langle \mu_1, \mu_x, \dots, \mu_{x^{n-2}}, \text{Hom}(L(x)^+, t(L(x)^+)) \rangle_R$. Учитывая лемму 6 и то, что $t(\text{E}(L(x)^+)) \subset \langle \mu_1 \rangle_R$, последнее равенство можно переписать в виде

$$\text{E}(L(x)^+) = \langle \mu_1, \mu_x, \dots, \mu_{x^{n-2}}, \text{Ann}(x) \rangle_R.$$

Нетрудно видеть, что $\text{Ann}(x) = \prod_{p \in P} p^{m_p - k_p} \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$, где $(m_p) = \text{cochar}(L(x))$, $k_p = h_p(x)$ при $m_p \neq 0$ и $k_p = 0$ при $m_p = 0$. Поэтому

$$\mathbf{E}(L(x)^+) \cong \left\langle 1, x, \dots, x^{n-2}, \prod_{p \in P} p^{m_p - k_p} \mathbb{Z}_{p^{m_p}} \right\rangle_R.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. $L(x)$ – бесконечное кольцо с единицей тогда и только тогда, когда $L(x)^+$ – факторно делимая группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L(x)$ – бесконечное кольцо с единицей кохарактеристики χ . Тогда

$$L(x) = \langle x, x^2, \dots, x^n \rangle_* = \langle 1, x, \dots, x^{n-1} \rangle_* \subset \mathbb{Z}_\chi,$$

где $n = r(L(x))$. Но $\langle 1, x, \dots, x^{n-1} \rangle_{\widehat{\mathbb{Z}}} = \langle 1 \rangle_{\widehat{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}_\chi$. Следовательно, по теореме 2 аддитивная группа кольца $L(x)$ является факторно делимой.

Если $L(x)^+$ – факторно делимая группа, то $L(x)$ – кольцо конечного ранга. Тогда из теоремы 6 следует, что $L(x) = L(x_1) \oplus L(x_2)$, где x_1 – нильпотентный элемент, а $L(x_2)$ – кольцо с единицей. Предположим, что $L(x)$ не содержит единичного элемента, тогда x_1 имеет бесконечный порядок. Найдем псевдорациональную оболочку группы $L(x)$. Из следствия 7 вытекает, что $\mathcal{R}(L(x)^+) = L(x_1)^+ \oplus \mathcal{R}(L(x_2)^+)$. По теореме 1 R -модули $\mathcal{R}(L(x)^+)$ и $\mathcal{R}(L(x_2)^+)$ конечно порождены, а значит, и R -модуль $L(x_1)^+$ конечно порожден. Но последнее противоречит следствию 7, поэтому $L(x)$ – кольцо с единицей.

Из доказанного предложения следует, что существование в кольце $L(x)$ единичного элемента целиком определяется видом его аддитивной группы.

Будем говорить, что группа G допускает структуру кольца K , если аддитивная группа кольца K изоморфна G .

ТЕОРЕМА 13. *Группа G допускает структуру некоторого бесконечного существенно неразложимого кольца с единицей $L(x)$ тогда и только тогда, когда для нее выполняются следующие условия:*

- 1) G – редуцированная факторно делимая группа;
- 2) $r_p(G) \leq 1$ для любого $p \in P$;
- 3) $G \cong \text{End } G$;
- 4) $\mathbb{Q} \otimes \mathbf{E}(G) \cong \mathbb{Q}[u]/(f^k)$, где f – неприводимый многочлен с ненулевым свободным членом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условий 1) и 3) вытекает из предложения 10 и следствия 9 соответственно, а необходимость условия 2) следует из построения кольца $L(x)$. Покажем необходимость условия 4).

Пусть группа G изоморфна аддитивной группе бесконечного существенно неразложимого кольца с единицей $L(x)$, и пусть h – минимальный многочлен элемента x ($\deg h = r(L(x)) = n$). Согласно следствию 4 многочлен h имеет вид f^k , где f – неприводимый над $\mathbb{Z}$ многочлен. Так как $\mathbf{E}(G) \cong L(x)$, то $\mathbb{Q} \otimes \mathbf{E}(G) \cong \mathbb{Q} \otimes L(x)$. Но $\mathbb{Q} \otimes L(x)$ – $\mathbb{Q}$ -алгебра ранга n с базисом $1 \otimes 1, 1 \otimes x, 1 \otimes x^2, \dots, 1 \otimes x^{n-1}$, которая, очевидно, изоморфна алгебре $\mathbb{Q}[u]/(g)$, где g –

минимальный многочлен элемента $1 \otimes x$. Поскольку $h(1 \otimes x) = 0$ и $\deg h = \deg g$, то $(h) = (g)$, а значит, $\mathbb{Q}[u]/(g) = \mathbb{Q}[u]/(h) = \mathbb{Q}[u]/(f^k)$.

Пусть для группы G выполняются условия 1)–4). Так как G – редуцированная факторно делимая группа, то G сервантно вкладывается в свое $\mathbb{Z}$ -адическое пополнение $\hat{G}$. А из условия 2) следует, что $\hat{G} \cong \mathbb{Z}_\chi$ для некоторой характеристики χ , не принадлежащей нулевому типу (иначе G будет конечной группой). Рассмотрим кольцо $E(G)$, которое по условию 3) сервантно вкладывается в кольцо $\mathbb{Z}_\chi$. отождествим кольцо $E(G)$ с его образом в кольце $\mathbb{Z}_\chi$, т.е. будем считать, что $E(G) \subseteq \mathbb{Z}_\chi$.

Пусть $\bar{y} = 1 \otimes y$ – прообраз элемента $u + (f^k)$ в $\mathbb{Q} \otimes E(G)$ при изоморфизме $\mathbb{Q}$ -алгебр $\mathbb{Q} \otimes E(G) \rightarrow \mathbb{Q}[u]/(f^k)$. Рассмотрим кольцо $L(y) \subseteq E(G)$. Нетрудно видеть, что $r(L(y)) = \deg(f^k) = r(E(G))$. Пусть $\xi = (\xi_p)$ – такой идемпотент кольца $\mathbb{Z}_\chi$, что $\xi_p = \varepsilon_p$ при $y_p \neq 0$ и $\xi_p = 0$ при $y_p = 0$. Тогда из равенства $r(L(y)) = r(E(G))$ и определения кольца $L(y)$ следует, что $\xi E(G) = L(y)$. Так как идемпотент ξ , являясь единицей кольца $L(y)$, принадлежит кольцу $E(G)$, то и $(1 - \xi) \in E(G)$, а значит, имеет место прямое разложение $E(G) = \xi E(G) \oplus (1 - \xi)E(G)$, которое индуцирует прямое разложение

$$\mathbb{Q} \otimes E(G) = [\mathbb{Q} \otimes \xi E(G)] \oplus [\mathbb{Q} \otimes (1 - \xi)E(G)].$$

Но $\mathbb{Q} \otimes E(G) \cong \mathbb{Q}[u]/(f^k)$ – неразложимая $\mathbb{Q}$ -алгебра. Следовательно, второе слагаемое равно нулю, т.е. $(1 - \xi)E(G)$ – периодическое кольцо. Так как $\text{End } G$ – факторно делимая группа, то любое ее периодическое прямое слагаемое конечно. Тогда $(1 - \xi)E(G)$ – конечное кольцо.

Из всего вышесказанного следует, что $E(G) = L(y) \oplus (1 - \xi)\mathbb{Z}_\chi = L(x)$, где $x = y + (1 - \xi)$. Нетрудно также видеть, что минимальным многочленом элемента x является многочлен $(mf)^k$, где m – некоторое натуральное число, а значит, $E(G) = L(x)$ – существенно неразложимое кольцо.

ТЕОРЕМА 14. *Если $E(L(x)^+) \cong E(L(y)^+)$, где $L(x)$ и $L(y)$ – кольца конечного ранга, то группы $L(x)^+$ и $L(y)^+$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 6 кольцо конечного ранга $L(x)$ можно разложить в прямую сумму $L(x) = L(x_1) \oplus L(x_2)$, где x_1 – нильпотентный элемент, а $L(x_2)$ – кольцо с единицей. Так как $E(L(x)^+)$ – коммутативное кольцо, то прямые слагаемые группы $L(x)$ вполне характеристичны. Следовательно,

$$\text{Hom}(L(x_1)^+, L(x_2)^+) = \text{Hom}(L(x_2)^+, L(x_1)^+) = 0$$

и поэтому $E(L(x)^+) \cong E(L(x_1)^+) \times E(L(x_2)^+)$. Из этого следует, что данную теорему достаточно доказать для случая, когда $L(x)$ и $L(y)$ – кольца с единицей и для случая, когда $L(x)$ и $L(y)$ построены на нильпотентных элементах x и y .

Первый случай. Если $L(x)$ и $L(y)$ – кольца с единицей, то, учитывая следствие 9, имеем

$$L(x) \cong E(L(x)^+) \cong E(L(y)^+) \cong L(y)$$

и поэтому $L(x)^+ \cong L(y)^+$.

Второй случай. Пусть x и y – нильпотентные элементы. Так как $t_p(L(x)^+)$ и $t_p(L(y)^+)$ – циклические группы, то

$$t_p(L(x)) \cong t_p(\text{End } L(x)^+) \cong t_p(\text{End } L(y)^+) \cong t_p(L(y)).$$

Следовательно, $t(L(x)^+) = t(L(y)^+)$. Заметим, что из последнего равенства вытекает, что $\text{sochar}(L(x)) = \text{sochar}(L(y))$.

Построим характеристику (k_p) такую, что $k_p = h_p(x_p)$ при $x_p \neq 0$ и $k_p = 0$ при $x_p = 0$. Таким же образом, используя элемент y , построим характеристику (l_p) . Покажем, что $k_p = l_p$ почти для всех $p \in P$. Будем считать, что $L(x) \subseteq E(L(x)^+)$ и $L(y) \subseteq E(L(y)^+)$. Тогда $x \in E(L(x)^+) = E(L(y)^+)$. Учитывая теорему 12, отсюда получаем, что

$$x = r_0 1 + r_1 y + \dots + r_{n-2} y^{n-2} + \alpha$$

для некоторых $r_0, r_1, \dots, r_{n-2} \in R$ и $\alpha = (\alpha_p) \in \prod_{p \in P} p^{m_p - l_p} \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$. Так как x и y – нильпотентные элементы, то они делятся на каждое простое число p . Поэтому и r_0 делится на каждое простое p . Но r_0 – псевдорациональное число. Следовательно, $r_0 \in T = \bigoplus_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p$. Тогда

$$x_p = \alpha_p^{(1)} y_p + \dots + \alpha_p^{(n-2)} y_p^{n-2} + \alpha_p,$$

где $(\alpha_p^{(i)}) = r_i$, почти для всех простых p . Отсюда

$$x_p y_p = \alpha_p^{(1)} y_p^2 + \dots + \alpha_p^{(n-2)} y_p^{n-1},$$

а значит, $k_p + l_p \geq 2l_p$, т.е. $k_p \geq l_p$ почти при всех $p \in P$. Рассуждая аналогично, находим, что

$$x_p y_p = \beta_p^{(1)} x_p^2 + \dots + \beta_p^{(m-2)} x_p^{m-1},$$

а значит, $k_p + l_p \geq 2k_p$, т.е. $l_p \geq k_p$ почти при всех $p \in P$. Таким образом, $k_p = l_p$ почти при все простых p .

Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n$ – все простые числа, для которых $k_{p_i} \neq l_{p_i}$. Тогда элемент

$$z = (1 - \varepsilon_{p_1} - \dots - \varepsilon_{p_n})y + p_1^{k_{p_1}} \varepsilon_{p_1} + \dots + p_n^{k_{p_n}} \varepsilon_{p_n} \in L(y)$$

имеет ту же высотную характеристику, что и элемент x и $L(y) = L(z)$.

Так как любой эндоморфизм группы $L(x)$ является домножением на некоторый элемент из $\mathbb{Z}_\chi$, то можно считать, что $E(L(x)^+) \subset \mathbb{Z}_\chi$. Из аналогичных соображений можно также считать, что $E(L(y)^+) \subset \mathbb{Z}_\chi$. Поскольку $E(L(x)^+)$ и $E(L(y)^+)$ – сервантные подкольца в $\mathbb{Z}_\chi$, то любой гомоморфизм из $E(L(x)^+)$ в $E(L(y)^+)$ является домножением на некоторый элемент из $\mathbb{Z}_\chi$. В частности, если $\Phi: E(L(x)^+) \rightarrow E(L(y)^+)$ – кольцевой изоморфизм, то $\Phi(\varphi) = \alpha\varphi$ для любого $\varphi \in E(L(x)^+)$. Тогда $\Phi(1) = 1 = \alpha 1 = \alpha$. Следовательно, Φ – тождественное отображение, а значит, $E(L(x)^+) = E(L(y)^+)$.

Пусть v – произвольный элемент из $L(x)$. Тогда он представим в следующем виде:

$$v = r_1 x + r_2 x^2 + \dots + r_n x^n + t \quad (20)$$

для некоторых элементов $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$ и $t \in t(L(x))$ (будем также считать, что $n+1$ – степень нильпотентности x). Построим отображение $\psi: L(x) \rightarrow L(y)$, где

$$\psi(v) = (r_1 + r_2x + \dots + r_nx^{n-1})z + \eta(t), \quad (21)$$

η – изоморфизм периодических частей групп $L(x)$ и $L(y)$, переводящий x_p в z_p для каждого простого p (такой изоморфизм существует, так как элементы x_p и z_p имеют одинаковые p -высоты).

Убедимся, что отображение ψ задано корректно. Во-первых, домножение на $r_1 + r_2x + \dots + r_nx^{n-1}$ является эндоморфизмом группы $L(x)$, а значит, и эндоморфизмом группы $L(y)$. Следовательно, $\psi(v) \in L(y)$. Во-вторых, проверим, что действие ψ не зависит от выбора разложения элемента $v \in L(x)$ в виде (20).

Пусть $v \in t(L(x))$. Рассмотрим два его представления в виде (20):

$$v = t_1x + t_2x^2 + \dots + t_nx^n + t = t'_1x + t'_2x^2 + \dots + t'_nx^n + t'. \quad (22)$$

Так как $v \in t(L(x))$, то $t_i, t'_i \in \bigoplus_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Заметим, что домножение на εx , где $\varepsilon \in \bigoplus_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p$, является эндоморфизмом группы $t(L(x))$, и $E(t(L(x))^+) = \mathbb{Z}_\chi$, в частности, $E(t(L(x))^+)$ – коммутативное кольцо. Тогда, учитывая теорему 3 и то, что $\eta(\varepsilon_p x) = \eta(x_p) = z_p$, получаем

$$\begin{aligned} \eta(t_1x) &= t_1z, & \eta(t_2x^2) &= (\varepsilon x)\eta(t_2x) = t_2xz, & \dots, \\ \eta(t_nx^n) &= (\varepsilon x^{n-1})\eta(t_nx) = t_nx^{n-1}z, \end{aligned}$$

где ε – такой идемпотент из $\bigoplus_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p$, что $\varepsilon t_2 = t_2, \dots, \varepsilon t_n = t_n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \psi(t_1x + t_2x^2 + \dots + t_nx^n + t) &= (t_1 + t_2x + \dots + t_nx^{n-1})z + \eta(t) \\ &= \eta(t_1x + t_2x^2 + \dots + t_nx^n + t). \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что

$$\begin{aligned} \psi(t'_1x + t'_2x^2 + \dots + t'_nx^n + t') &= (t'_1 + t'_2x + \dots + t'_nx^{n-1})z + \eta(t') \\ &= \eta(t'_1x + t'_2x^2 + \dots + t'_nx^n + t'). \end{aligned}$$

Так как η – изоморфизм, то из (22) следует, что

$$\psi(t_1x + t_2x^2 + \dots + t_nx^n + t) = \psi(t'_1x + t'_2x^2 + \dots + t'_nx^n + t'),$$

а значит, действие ψ на элемент $v \in t(L(x))$ не зависит от выбора его разложения.

Далее рассмотрим произвольный элемент $v \in L(x)$ и два его разложения, т.е.

$$v = r_1x + r_2x^2 + \dots + r_nx^n + t = s_1x + s_2x^2 + \dots + s_nx^n + t', \quad (23)$$

где $r_i, s_i \in R$ и $t, t' \in t(L(x))$. Так как элементы $x, x^2, \dots, x^n$ независимы по модулю $t(L(x))$ (т.е. линейно независимы над $\mathbb{Q}$ их образы при естественном гомоморфизме $L(x) \rightarrow L(x)/t(L(x))$), то из (23) следует, что рациональные числа $|r_i|$ и $|s_i|$ равны для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, а значит, существует такой

идемпотент $\varepsilon \in R$, что $(1-\varepsilon)r_i = (1-\varepsilon)s_i$ для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Отсюда следует, что

$$(1-\varepsilon)(r_1 + r_2x + \dots + r_nx^{n-1}) = (1-\varepsilon)(s_1 + s_2x + \dots + s_nx^{n-1}).$$

Тогда, учитывая предыдущий случай, имеем

$$\begin{aligned} \psi(r_1x + r_2x^2 + \dots + r_nx^n + t) &= (r_1 + r_2x + \dots + r_nx^{n-1})z + \eta(t) \\ &= (1-\varepsilon)(r_1 + r_2x + \dots + r_nx^{n-1})z + \varepsilon(r_1 + r_2x + \dots + r_nx^{n-1})z + \eta(t) \\ &= (1-\varepsilon)(s_1 + s_2x + \dots + s_nx^{n-1})z + \psi(\varepsilon v - \varepsilon t) + \eta(t) \\ &= (1-\varepsilon)(s_1 + s_2x + \dots + s_nx^{n-1})z + \eta(\varepsilon v + (1-\varepsilon)t). \end{aligned}$$

Так как $(1-\varepsilon)t = (1-\varepsilon)t'$, то из этого равенства следует, что

$$\psi(r_1x + r_2x^2 + \dots + r_nx^n + t) = \psi(s_1x + s_2x^2 + \dots + s_nx^n + t').$$

Таким образом, отображение ψ задано корректно.

Нетрудно видеть, что отображение ψ является гомоморфизмом. Действительно, если $v = r_1x + r_2x^2 + \dots + r_nx^n + t$ и $w = s_1x + s_2x^2 + \dots + s_nx^n + t'$, то

$$\begin{aligned} \psi(v+w) &= ((r_1 + s_1) + (r_2 + s_2)x + \dots + (r_n + s_n)x^{n-1})z + \eta(t+t') \\ &= (r_1 + r_2x + \dots + r_nx^{n-1})z + \eta(t) + (s_1 + s_2x + \dots + s_nx^{n-1})z + \eta(t') \\ &= \psi(v) + \psi(w). \end{aligned}$$

Покажем, что ψ – инъекция. Если $v = r_1x + r_2x^2 + \dots + r_nx^n + t$ и $\psi(v) = 0$, то

$$(r_1 + r_2x + \dots + r_nx^{n-1})z + \eta(t) = 0,$$

т.е. $(r_1 + r_2x + \dots + r_nx^{n-1})z = -\eta(t) \in t(L(y))$. Учитывая, что $\text{char}(x) = \text{char}(z)$ (по построению элемента z), получаем, что x и z имеют одинаковые степени нильпотентности, равные $n+1$. Тогда из условия $r_1z + r_2zx + \dots + r_nzx^{n-1} \in t(L(y))$ получаем, что $r_1, r_2, \dots, r_n \in \bigoplus_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p$, а значит, $v \in t(L(x))$. Из этого следует, что $\psi(v) = \eta(v)$. Так как η – биекция, то из равенства $\eta(v) = 0$ вытекает, что $v = 0$, т.е. ψ – инъекция.

Покажем, что ψ – сюръекция. Из построения отображения ψ следует, что

$$\psi(x) = z, \psi(x^2) = xz, \dots, \psi(x^n) = x^{n-1}z.$$

Так как ψ – инъективный гомоморфизм, то элементы $z, xz, \dots, x^{n-1}z$ являются независимыми по модулю $TL(y) = t(L(y))$ (поскольку независимы по модулю $TL(x)$ их прообразы). Тогда, учитывая, что $r^*(L(y)) = n$, получаем, что

$$\text{Im } \psi = \langle z, xz, \dots, x^{n-1}z, t(L(y)) \rangle_R = L(y),$$

т.е. ψ – сюръекция.

Таким образом, из всего вышесказанного следует, что ψ является изоморфизмом групп $L(x)^+$ и $L(y)^+$.

Список литературы

- [1] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 1, 2, Мир, М., 1974, 1977; пер. с англ.: L. Fuchs, *Infinite Abelian groups*, vol. I, II, Pure and Applied Mathematics, **36**, Academic Press, New York–London, 1970, 1973.
- [2] П. А. Крылов, “Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **6**:3 (2000), 793–812.
- [3] A. A. Fomin, “Some mixed Abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers”, *Abelian groups and modules* (Dublin, Ireland, 1998), Trends Math., Birkhäuser, Basel, 1999, 87–100.
- [4] L. Fuchs, I. Halperin, “On the imbedding of a regular ring in a regular ring with identity”, *Fund. Math.*, **54** (1964), 285–290.
- [5] L. Fuchs, K. M. Rangaswamy, “On generalized regular rings”, *Math. Z.*, **107**:1 (1968), 71–81.
- [6] S. Glaz, W. Wickless, “Regular and principal projective endomorphism rings of mixed Abelian groups”, *Comm. Algebra*, **22**:4 (1994), 1161–1176.
- [7] A. Fomin, W. Wickless, “Quotient divisible Abelian groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:1 (1998), 45–52.
- [8] A. A. Fomin, “Quotient divisible mixed groups”, *Abelian groups, rings and modules* (Perth, Australia, 2000), Contemp. Math., **273**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, 117–128.
- [9] R. A. Beaumont, R. S. Pierce, “Torsion-free rings”, *Illinois J. Math.*, **5** (1961), 61–98.
- [10] Е. Г. Зиновьев, “Об одном обобщении колец псевдорациональных чисел”, *Вестн. ТомГУ*, **290** (2006), 46–47.
- [11] C. E. Murley, “The classification of certain classes of torsion free Abelian groups”, *Pacific J. Math.*, **40** (1972), 647–665.
- [12] О. И. Давыдова, “Факторно делимые группы ранга 1”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:3 (2007), 25–33; англ. пер.: O. I. Davydova, “Rank-1 quotient divisible groups”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **154**:3 (2008), 295–300.

А. В. Царёв (A. V. Tsarev)

Московский педагогический государственный университет

E-mail: an-tsarev@yandex.ru

Поступила в редакцию

09.04.2008