Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Тушев, О примитивных представлениях разрешимых групп конечного ранга,
Матем. сб., 2000, том 191, номер 11, 117–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm524>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:52:40

УДК 512.544

А. В. Тушев

О примитивных представлениях разрешимых групп конечного ранга

В работе, в частности, показано, что в классе разрешимых групп конечного ранга, удовлетворяющих условию максимальности для нормальных подгрупп, только полициклические группы могут обладать точными неприводимыми примитивными представлениями над полем нулевой характеристики. При этом разработаны методы, которые позволяют изучать индуцированные представления нильпотентных и разрешимых групп конечного ранга.

Библиография: 29 названий.

§ 1. Введение

Напомним, что группа G имеет *конечный свободный ранг*, если она обладает конечным субнормальным рядом, в котором каждый фактор является либо бесконечным циклическим, либо локально конечным; тогда свободный ранг $r_0(G)$ группы G равен количеству бесконечных циклических факторов в таком ряде. Группа G называется *мини-максной*, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого удовлетворяет либо условию минимальности, либо условию максимальности для подгрупп. Группа G удовлетворяет условию *максимальности* для нормальных подгрупп (или условию $\text{max-}G$), если G не содержит бесконечно возрастающей цепочки попарно различных нормальных подгрупп.

Пусть G – группа и $\mathbb{k}$ – поле. Неприводимый $\mathbb{k}G$ -модуль M называется *импримитивным*, если существуют собственная подгруппа $H \leq G$ и $\mathbb{k}H$ -подмодуль $N \leq M$ такие, что модуль M индуцирован с подмодуля N , т.е. $M = N \otimes_{\mathbb{k}H} \mathbb{k}G$. Если M не является импримитивным, то он называется *примитивным*.

Предположим, что группа G имеет конечный свободный ранг $r_0(G)$. Будем говорить, что модуль M является *полупримитивным*, если он не индуцирован с $\mathbb{k}H$ -подмодуля ни для какой подгруппы $H \leq G$ такой, что $r_0(H) < r_0(G)$. Нетрудно заметить, что наше определение совпадает с определением полупримитивности из [1] в случае, когда группа G полициклическая. Представление группы G будем называть примитивным или полупримитивным, если модуль этого представления обладает соответствующим свойством.

В [2] Харпер показал, что любая конечно порожденная нильпотентная группа, которая не является почти абелевой, обладает примитивным неприводимым представлением над любым не локально конечным полем. Тем самым был положительно решен вопрос Залесского, поставленный им в [3]. Таким образом, бесконечные полициклические группы могут обладать примитивными и полупримитивными представлениями.

Хорошо известно, что любая полициклическая группа имеет конечный ранг и удовлетворяет условию тах- G . Отметим, что класс разрешимых групп конечного ранга, удовлетворяющих условию тах- G , довольно широк и кроме полициклических групп содержит также конечно порожденные метабелевы группы конечного ранга. Основным результатом настоящей работы является

ТЕОРЕМА 4.3.1. *Пусть G – разрешимая группа конечного ранга с условием максимальности для нормальных подгрупп, $\mathbb{k}$ – поле нулевой характеристики и M – неприводимый $\mathbb{k}G$ -модуль такой, что $C_G(M) = 1$. Если группа G не является полициклической, то существуют подгруппа $S \leq G$ и $\mathbb{k}S$ -подмодуль $U \leq M$ такие, что $M = U \otimes_{\mathbb{k}S} \mathbb{k}G$ и $r_0(S) < r_0(G)$.*

Из теоремы 4.3.1 сразу же следует, что в классе разрешимых групп конечного ранга, удовлетворяющих условию тах- G , только полициклические группы могут обладать точными полупрimitивными неприводимыми представлениями над полем нулевой характеристики. В случае конечно порожденных метабелевых групп конечного ранга аналогичный результат доказан в [4]. Поскольку разрешимые группы конечного ранга с условием тах- G являются линейными группами над полем нулевой характеристики, то в связи с полученными результатами естественно следующее предположение.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть G – линейная группа конечного ранга над полем нулевой характеристики. Если группа G обладает точным неприводимым полупрimitивным представлением над полем нулевой характеристики, то группа G – почти полициклическая.*

Теорема 4.3.1 легко вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.4.1. *Пусть G – разрешимая группа конечного свободного ранга и A – ее нильпотентная минимаксная нормальная подгруппа баз кручения, которая не имеет бесконечных полициклических G -инвариантных секций. Пусть $\mathbb{k}$ – поле нулевой характеристики и M – $\mathbb{k}G$ -модуль, который имеет $\mathbb{k}A$ -кручение. Тогда существуют элемент $0 \neq a \in M$ и подгруппа $S \leq G$ такие, что $a\mathbb{k}G = a\mathbb{k}S \otimes_{\mathbb{k}S} \mathbb{k}G$ и $r_0(S/C_S(a\mathbb{k}S)) < r_0(G)$.*

Теорема 3.4.1 позволяет использовать при изучении модуля M индукцию по свободному рангу группы G . Этот подход был разработан Роузблейдом в [5].

В случае, когда подгруппа A абелева, теорема 3.4.1 легко следует из [4; теорема 4.2]. Неабелев случай был получен благодаря дальнейшему развитию (см. пп. 2.6, 3.2 и 3.3) глубоких идей, введенных Бруксом [6], [7] и Брауном [8]. Это развитие оказалось возможным благодаря результатам Верфрица [9] об инвариантных идеалах групповых алгебр абелевых групп конечного ранга (см. предложение 2.4.3).

Значительная часть трудностей доказательства теоремы 3.4.1 рассмотрена в п. 3.3, где изучаются модули над минимаксными нильпотентными группами. В частности, в лемме 3.3.2(ii) показано, что при некоторых дополнительных условиях такие модули индуцируются с модулей над конечно порожденными подгруппами. В связи с этим представляет интерес следующее предположение.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Пусть G – нильпотентная минимаксная группа и $\mathbb{K}$ – конечно порожденное поле нулевой характеристики. Тогда любое неприводимое представление группы G над полем $\mathbb{K}$ индуцировано с некоторого неприводимого представления φ подгруппы $H \leq G$ такого, что $\varphi(H)$ – конечно порожденная нильпотентная группа.

Некоторые результаты настоящей работы анонсированы в [10].

§ 2. Вспомогательные результаты

2.1. Теоретико-групповые леммы. Подгруппа B группы A называется *плотной*, если для любого $g \in A$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $g^n \in B$. Если B – подгруппа локально нильпотентной группы A , то изолятор $\text{is}_A B = \{x \in A : x^n \in B \text{ для некоторого } n \geq 1\}$ подгруппы B в A является подгруппой в A . Подгруппа B называется *изолированной* в A , если $\text{is}_A B = B$. Максимальную периодическую подгруппу локально нильпотентной группы A будем обозначать через $t(A)$.

Конечно порожденную подгруппу группы G будем называть *f.g.-подгруппой*, а плотную f.g.-подгруппу будем называть *f.g.d.-подгруппой*.

Полициклическую группу будем называть *р.с.-группой*, а бесконечную р.с.-группу будем называть *i.р.с.-группой*.

Пусть A, B и C – подгруппы группы G такие, что B – нормальная подгруппа в A . Будем говорить, что A – *C-подгруппа*, если $C \leq N_G(A)$. Соответственно секцию A/B назовем *C-секцией* группы G , если A и B – C -подгруппы, а ряд $\{G_i\}$ подгрупп будем называть *C-рядом*, если G_i – C -подгруппа для каждого i . Будем говорить, что C -ряд является *C-центральный*, если в факторах этого ряда подгруппа C действует тождественно.

ЛЕММА 2.1.1. Пусть G – разрешимая группа, $r_0(G) < \infty$, и N – нильпотентная G -подгруппа без кручения в G . Тогда:

- (i) существуют G -подгруппы $G_0, G_1 \leq G$ такие, что $N \leq G_1 \leq G_0$, $|G/G_0| < \infty$, факторгруппа $\Gamma = G_0/G_1$ – свободная абелева, факторгруппа $G_1/(G_1 \cap C_G(N))$ – нильпотентная без кручения, N обладает G_1 -центральным G -рядом $\{N_i\}$, факторы N_i/N_{i+1} которого – без кручения и такие, что $\mathbb{Q}\Gamma$ -модуль $(N_i/N_{i+1}) \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} \mathbb{Q}\Gamma$ вполне приводим для каждого i ;
- (ii) если A – изолированная N -подгруппа в N такая, что $r_0(N_G(A)) = r_0(G)$, то $|G : N_G(A)| < \infty$;
- (iii) если U – абелева G -подгруппа в G , удовлетворяющая условию $\text{tax-}G$, то $|t(U)| < \infty$;
- (iv) если N не имеет бесконечных полициклических G -секций и H – подгруппа в G такая, что $r_0(G) = r_0(H)$, то N не имеет бесконечных полициклических H -секций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Из результатов Чарина [11] следует, что G обладает G -подгруппами G_0 и G_1 такими, что $N \leq G_1 \leq G_0$, $|G/G_0| < \infty$, факторгруппа G_0/G_1 – свободная абелева, а факторгруппа $D = G_1/C$ – нильпотентная без кручения, где C – централизатор N в G_1 . При этом N обладает

G_1 -центральным G -рядом $\{N_i\}$ с абелевыми секциями без кручения N_i/N_{i+1} такими, что $(N_i/N_{i+1}) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Q}G$ – неприводимый $\mathbb{Q}G$ -модуль для каждого i . Тогда утверждение следует из теоремы Клиффорда.

(ii) Так как факторгруппа $D = G_1/C$ – нильпотентная без кручения, то из результатов Глушкова [12] следует, что $N_D(A)$ – изолированная подгруппа в D . Тогда поскольку $r_0(N_G(A)) = r_0(G)$, то $G_1 \leq N_G(A)$ и утверждение становится очевидным.

(iii) Из условия $\text{мах-}G$ следует, что $|\pi| < \infty$, где π – множество простых делителей порядков элементов подгруппы $T = t(U)$. Пусть P – силовская p -подгруппа из T , тогда из условия $\text{мах-}G$ следует, что $P^k = 1$ для некоторого $k = p^n$. Так как $r(G) < \infty$, то $|P| < \infty$, откуда $|T| < \infty$.

(iv) Предположим, что N имеет $i.p.c.$ - H -секцию. В силу (i) N имеет G_1 -центральный G -ряд $\{N_i\}$ и, значит, $M = N_{i+1}/N_i$ имеет $i.p.c.$ - H -секцию для некоторого i . Пусть $F = HG_1/G_1$; заменив H на ее подгруппу конечного индекса, можно считать, что F – абелева $f.g.$ -группа.

Покажем, что M имеет $i.p.c.$ - H -подгруппу. Очевидно, M – $\mathbb{Z}F$ -модуль и, значит, M обладает подмодулями $U = a\mathbb{Z}F$ и $X \leq U$ такими, что U/X – $i.p.c.$ -факторгруппа. Из [13] следует, что модуль U нётеров. Покажем индукцией по $r(U)$, что любой нётеров $\mathbb{Z}F$ -модуль U , который обладает подмодулем X , определяющим $i.p.c.$ -факторгруппу U/X , обладает и подмодулем с аддитивной $i.p.c.$ -группой в случае, когда $r(U) < \infty$. Из (iii) следует, что $|t(U)| < \infty$, поэтому, переходя к фактормодулю $U/t(U)$, можно считать, что группа U – без кручения, и, следовательно, U не содержит ненулевых конечных подмодулей. Пусть $V = x\mathbb{Z}F$, где $x \in X$, и пусть $I = \text{Ann}_{\mathbb{Z}F}(x)$; тогда $V \simeq \mathbb{Z}F/I$. По предположению индукции U/V обладает подмодулем с аддитивной $i.p.c.$ -группой, и, следовательно, заменив модуль U его подмодулем, можно считать, что $\mathbb{Z}F$ -модуль U/V порожден одним элементом, а U/V – $i.p.c.$ -факторгруппа. Пусть $J = \text{Ann}_{\mathbb{Z}F}(U/V)$, тогда $\mathbb{Z}F/J$ – $i.p.c.$ -группа. Предположим, что I аннулирует U ; тогда $I \leq J$, и поскольку $V \simeq \mathbb{Z}F/I$, то V обладает подмодулем, определяющим $i.p.c.$ -факторгруппу, и можно применить предположение индукции к V . Итак, можно считать, что существуют элементы $\alpha \in I$ и $a \in U$ такие, что $b = a\alpha \neq 0$, а так как $UIJ = 0$, то $bJ = 0$. Тогда $J \leq L$, где $L = \text{Ann}_{\mathbb{Z}F}(b)$, и, следовательно, $b\mathbb{Z}F$ – подмодуль с аддитивной $i.p.c.$ -группой. Таким образом, M обладает $i.p.c.$ - H -подгруппой. Поскольку $|G : HG_1| < \infty$, то отсюда легко получить, что M обладает $i.p.c.$ - G -подгруппой и, значит, G обладает $i.p.c.$ - G -секцией.

ЛЕММА 2.1.2. Пусть G – разрешимая группа, $r(G) < \infty$, и пусть $H \leq G$. Тогда:

- (i) подгруппа H – плотная тогда и только тогда, когда $r_0(H) = r_0(G)$;
- (ii) если G удовлетворяет условию $\text{мах-}G$ и $r_0(H) = r_0(G)$, то $|G : H| < \infty$ и H удовлетворяет условию $\text{мах-}H$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{D_i : 1 \leq i \leq n\}$ – ряд коммутантов группы G . Доказательство проведем индукцией по n .

(i) Если H – плотная подгруппа в G , то $r_0(D_i/D_{i+1}) = r_0((D_i \cap H)/(D_{i+1} \cap H))$ для каждого i и, значит, $r_0(H) = r_0(G)$.

Предположим теперь, что $r_0(H) = r_0(G)$. Индукцией по n утверждение сводится к случаю, когда $G = AH$, где A – абелева нормальная подгруппа в G . Тогда легко проверяется, что $A \cap H$ – G -подгруппа, а факторгруппа $A/(A \cap H)$ – периодическая, и, переходя к факторгруппе $G/(A \cap H)$, можно считать, что $A \cap H = 1$ и A – периодическая абелева группа конечного ранга.

Пусть $x \in G = AH$; покажем, что $x^n \in H$ для некоторого n . Так как A – периодическая абелева группа и $r(A) < \infty$, то существует конечная G -подгруппа $B \leq A$ такая, что $x \in BH$. Таким образом, можно считать, что A конечна и $|G : H| < \infty$. Тогда H содержит G -подгруппу конечного индекса и, следовательно, H – плотная в G подгруппа.

(ii) Пусть $D = D_1$; покажем сначала, что $|D : (H \cap D)| < \infty$. Пусть $T = t(D)$, тогда из леммы 2.1.1(iii) следует, что $|T| = k < \infty$. Если $T = D$, то, очевидно, $|D : (H \cap D)| < \infty$. Таким образом, можно считать, что $T \neq A$ и, значит, $B = D^k$ является абелевой G -подгруппой без кручения конечного индекса в D . Очевидно, достаточно показать, что $|B : X| < \infty$, где $X = B \cap H$. Доказательство проведем индукцией по $r_0(B)$. По лемме 2.1.1(i) существует G -подгруппа $G_1 \leq G$ такая, что факторгруппа G/G_1 полициклическая, а B обладает G_1 -центральной рядом. Пусть $C = C_B(G_1)$, тогда нетрудно показать, что C является изолированной G -подгруппой в B . Так как группа G удовлетворяет условию $\text{max-}G$, то C – конечно порожденный $\mathbb{Z}(G/G_1)$ -модуль. Тогда C – конечно порожденный $\mathbb{Z}(HG_1/G_1)$ -модуль, так как $|G : HG_1| < \infty$. Следовательно, C – нётеров $\mathbb{Z}(HG_1/G_1)$ -модуль, так как группа HG_1/G_1 – почти полициклическая. Пусть $F = H \cap C$, тогда F – $\mathbb{Z}(HG_1/G_1)$ -подмодуль в C , а так как в силу (i) H – плотная подгруппа в G , то факторгруппа C/F периодическая. Тогда по лемме 2.1.1(iii) $|C/F| < \infty$. Отсюда следует, что $|CX : X| < \infty$, а так как по предположению индукции $|B : CX| < \infty$, то можно заключить, что $|B : X| < \infty$ и, следовательно, $|D : (H \cap D)| < \infty$.

Теперь используем индукцию по n . Поскольку $|D : (H \cap D)| < \infty$, то $|DH : H| < \infty$, а так как по предположению индукции $|G : DH| < \infty$, то $|G : H| < \infty$. Тогда из результатов Вильсона [14] следует, что подгруппа H удовлетворяет условию $\text{max-}H$.

Пусть G – разрешимая группа конечного ранга, тогда нетрудно показать, что существует G -подгруппа $P(G) \leq G$ такая, что факторгруппа $G/P(G)$ полициклическая, а $P(G)$ не содержит G -подгруппы R такой, что факторгруппа N/R бесконечная полициклическая. Подгруппу $P(G)$ назовем *р.с.-корадикалом* группы G . В общем случае подгруппа $P(G)$ не единственна, однако если X – другая подгруппа с отмеченным выше свойством, то $|P(G)/(P(G) \cap X)| < \infty$ и $|X/(P(G) \cap X)| < \infty$.

ЛЕММА 2.1.3. Пусть G – разрешимая группа конечного ранга с условием $\text{max-}G$. Тогда:

- (i) $P(G)$ – нильпотентная минимаксная группа без кручения;
- (ii) $P(G)$ не имеет бесконечных полициклических G -секций.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Так как $r(G) < \infty$ и группа G конечно порожденная, то из [15] следует, что G обладает G -рядом $T \leq K \leq G$ таким, что T – периодическая группа, N/T – нильпотентная минимаксная группа, а G/K – р.с.-группа. Из леммы 2.1.1(iii) следует, что $|T| < \infty$, тогда нетрудно показать, что K содержит

нильпотентную G -подгруппу N без кручения конечного индекса, и можно положить $N = P(G)$.

(ii) Из (i) имеем, что $P(G)$ – нильпотентная подгруппа без кручения. Тогда из леммы 2.1.1(i) следует, что существуют G -подгруппы H , $N \leq G$ такие, что $|G/H| < \infty$, факторгруппа H/N – конечно порожденная абелева, $P(G)$ обладает N -центральной G -рядом $\{Z_i\}$, факторы которого – без кручения. Предположим, что $P(G)$ обладает *i.p.c.*- G -секцией. Переходя к факторгруппе группы G , можно считать, что Z_1 содержит *i.p.c.*- G -подгруппу. Итак, Z_1 – нётеров $\mathbb{Z}F$ -модуль, который содержит подмодуль с аддитивной *i.p.c.*-группой, где $F = H/N$ – абелева *f.g.*-группа. Тогда нетрудно показать, что существует простой идеал $P \leq \mathbb{Z}F$, который имеет ненулевой аннулятор D в Z_1 такой, что $\mathbb{Z}F/P$ – *i.p.c.*-группа. По лемме Артина–Рисса (см. [16]) $Z_1 P^n \cap D = 0$ для некоторого n . Поскольку Z_1 – нётеров $\mathbb{Z}F$ -модуль, то $Z_1 P^m$ – конечно порожденный $\mathbb{Z}F$ -модуль для любого m . Легко проверить, что $Z_1/Z_1 P^n$ – *r.c.*-группа, причем она бесконечная, так как $Z_1 P^n \cap D = 0$. Поскольку $A = Z_1 P^n$ – H -подгруппа и $|G : H| < \infty$, то $B = \bigcap_{g \in G} A^g$ – G -подгруппа, и из теоремы Ремака следует, что Z_1/B – *i.p.c.*-группа. Таким образом, переходя к факторгруппе группы G , можно считать, что Z_1 – свободная абелева группа.

Пусть $L = Z_2$; для каждого $x \in N$ отображение $\varphi_x: L \rightarrow Z_1$ по правилу $\varphi_x: a \mapsto [a, x]$ является гомоморфизмом с $\text{Ker } \varphi_x = C_L(x)$, поэтому $L/C_L(x)$ – свободная абелева группа. Так как $\bigcap_{x \in N} C_L(x) = Z_1$, то группа L/Z_1 аппроксимируется свободными абелевыми группами и, значит, L/Z_1 – *r.c.*-группа. Тогда, используя индукцию по длине $\{Z_i\}$, можно показать, что $P(G)$ – *r.c.*-группа, а это приводит к противоречию.

Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов G . Напомним, что группа G действует на A рационально неприводимо, если всякая G -подгруппа $0 \neq B \leq A$ определяет периодическую факторгруппу A/B . Группа A называется G -*плинтусом*, если любая подгруппа конечного индекса группы G действует на A рационально неприводимо. Обозначим через $\Delta_G(A)$ множество элементов из A , имеющих конечные орбиты при действии группы G . Легко проверить, что $\Delta_G(A)$ – G -подгруппа в A .

Группу A назовем G -*полиплинтусом*, если A имеет *f.g.d.*-подгруппу B такую, что $B = \bigoplus_{i=1}^n B_i$ и $\text{is}_A B_i$ – G -плинтус для каждого i . G -полиплинтус A назовем *нётеровым*, если A удовлетворяет условию *тах- G* .

Пусть H – подгруппа группы G . Правой (левой) *трансверсалью* подгруппы H в G называется множество элементов, выбранных по одному из каждого правого (левого) смежного класса группы G по подгруппе H .

ЛЕММА 2.1.4. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует разрешимая группа G , $r_0(G) < \infty$. Тогда:

- (i) если G действует на A рационально неприводимо, то G содержит подгруппу конечного индекса H такую, что A – H -полиплинтус, причем A содержит нётеров H -полиплинтус;
- (ii) если A – G -полиплинтус и H – подгруппа в G такая, что $r_0(G) = r_0(H)$, то A – H -полиплинтус, причем если $\Delta_G(A) = 1$, то $\Delta_H(A) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Нетрудно показать, что найдутся подгруппа конечного индекса $H \leq G$ и изолированная H -подгруппа $B \leq A$ такие, что A/B — H -плинтус. Пусть T — правая трансверсаль подгруппы H в G , тогда $\bigcap_{t \in T} B^t = 1$. Следовательно, $A \leq \bigoplus_{i=1}^n A_i$, где A_i — H -плинтусы, и утверждение становится очевидным.

Из леммы 2.1.1(i) следует, что факторгруппа $G/C_G(A) = \Gamma$ — конечно порожденная почти абелева. Так как A — $\mathbb{Z}\Gamma$ -модуль, то утверждение следует из нётеровости кольца $\mathbb{Z}\Gamma$.

(ii) Пусть B — f.g.d.-подгруппа в A такая, что $B = \bigoplus_{i=1}^n B_i$ и $A_i = \text{is}_A B_i$ является G -плинтусом для всех i . Так как группа G действует на A рационально неприводимо, то из леммы 2.1.1(i) следует, что $G/C_G(A_i)$ — конечно порожденная почти абелева группа. Так как $r_0(G) = r_0(H)$, то $|G : HC_G(A_i)| < \infty$ и, следовательно, A_i является H -плинтусом. Поскольку $H \leq G$, то из $\Delta_G(A) = 1$ следует $\Delta_H(A) = 1$.

ЛЕММА 2.1.5. Пусть N — неабелева минимаксная нильпотентная группа без кручения и Z — предпоследний член верхнего центрального ряда группы N . Пусть L — плотная подгруппа в N и $S \leq N$, причем $Z \leq L \leq S$. Если $|S/L| = \infty$, то существуют N -подгруппы $K, G \leq S$ такие, что $K \leq Z$, $L \leq G$, факторгруппы Z/K и G/L — квазициклические, а Z/K — коммутант факторгруппы G/K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя к факторгруппе, можно считать, что Z — центр группы N . Поскольку факторгруппа S/L — бесконечная черниковская, то существует квазициклическая подгруппа G/L в S/L . Так как G — плотная подгруппа в N , то Z является центром в подгруппе G .

Пусть D — коммутант подгруппы G ; очевидно, $D \leq Z$. Тогда для любого $g \in G$ отображение $\varphi_g: x \mapsto [x, g]$ задает гомоморфизм группы G/Z в D , причем $\text{Ker } \varphi_g = C_G(g)$. Поскольку $\bigcap_{g \in L} \text{Ker } \varphi_g = Z$ и факторгруппа G/Z не является конечно порожденной, то D — минимаксная абелева группа, не допускающая конечного числа образующих. Следовательно, переходя к факторгруппе в G , можно считать, что подгруппа D квазициклическая. Тогда найдется подгруппа $K \leq Z$ такая, что $Z = D \times K$ и, значит, Z/K — коммутант в G/K .

ЛЕММА 2.1.6. Пусть G — минимаксная нильпотентная группа степени нильпотентности 2. Предположим, что G содержит абелеву нормальную подгруппу H такую, что G/H — делимая абелева группа. Тогда любая конечно порожденная G -подгруппа $X \leq H$ содержится в центре Z группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $g \in X$, то $[g, G] \leq X$ и нетрудно показать, что факторгруппа $G/C_G(g)$ конечно порождена. С другой стороны, если $g \notin Z$, то факторгруппа $G/C_G(g)$ является нетривиальной делимой группой, так как $H \leq C_G(g)$ и факторгруппа G/H делимая, а это приводит к противоречию.

ЛЕММА 2.1.7. Пусть N — нильпотентная минимаксная группа, K — ее N -подгруппа, H — f.g.d.-подгруппа в N такая, что $N = KH$ и N обладает субнормальным рядом $\{H_i, i = 1, \dots, n\}$ с абелевыми делимыми факторами H_{i+1}/H_i таким, что $H_1 = H$ и $H_n = G$. Тогда $I^+H = N$ для любой N -подгруппы $I^+ \leq K$ такой, что $|K : I^+| < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $N = KH$ и $|K : I^+| < \infty$, то $|N : I^+H| < \infty$. Очевидно, группа N обладает субнормальным рядом $\{I^+H_i, i = 1, \dots, n\}$ с абелевыми делимыми факторами, и, в то же время, ввиду соотношения $|N : I^+H| < \infty$ эти факторы конечны. Отсюда следует, что $I^+H = N$.

2.2. Теоретико-модульные леммы. Пусть R – кольцо, M – R -модуль. Модуль M называется *однородным*, если $X \cap Y \neq 0$ для любых подмодулей $0 \neq X, Y \leq M$. Подмодуль $U \leq M$ называется *существенным*, если $U \cap V \neq 0$ для любого подмодуля $0 \neq V \leq M$. Модуль M имеет *однородную размерность* $\text{u-dim}_R(M) = n$, если он обладает существенным подмодулем, являющимся прямой суммой n однородных подмодулей (см. [17]).

ЛЕММА 2.2.1. Пусть R – нётерова область целостности и G – конечно порожденная нильпотентная группа такая, что $G = AB$, где A и B – изолированные G -подгруппы в G . Пусть $C = A \cap B$ и D – изолированная G -подгруппа в G такая, что $C \leq D \leq B$ и $r_0(B/D) = 1$. Пусть V – RB -модуль такой, что $\text{u-dim}_{RD}(V) = n < \infty$. Тогда $\text{u-dim}_{RE}(V \otimes_{RB} RG) = n$, где $E = AD$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение легко получается из леммы 3.4 работы [8] с помощью индукции по $r_0(A/C)$.

Пусть R – кольцо и M – K -модуль. Размерность Крулля $K_R(M)$ модуля M определяется по индукции следующим образом:

1. $K_R(M) = -1$ тогда и только тогда, когда $M = 0$;
2. для целого числа $q \geq 0$ $K_R(M) \leq q$ тогда и только тогда, когда в любой убывающей последовательности подмодулей модуля M все, кроме, быть может, конечного числа, факторы имеют размерность Крулля $\leq q - 1$.

R -модуль M называется q -критическим, если $K_R(M) = q$ и $K_R(M/N) < q$ для любого подмодуля $0 \neq N \leq M$ (см. [18]). Кольцо R называется *критическим*, если R_R – критический R -модуль.

Если S – конечно порожденная область целостности, то S – ρ -критическое кольцо, где $\rho = \dim S$ – размерность области S , т.е. максимальная длина возрастающей цепочки простых идеалов из S .

Область целостности S назовем *f.g.f.-областью*, если S обладает конечно порожденной мультипликативной подгруппой F , которая порождает S как кольцо.

Скрещенное произведение $R = S * G$ группы G и коммутативного кольца S (см. [19]) будем называть *центральной*, если S содержится в центре кольца R .

ЛЕММА 2.2.2. Пусть G – конечно порожденная нильпотентная группа с изолированной G -подгруппой H , S – конечно порожденная область целостности, $R = S * G$ – центральное скрещенное произведение кольца S и группы G , $T = S * H \leq R$. Пусть M – R -модуль и U – нётеров T -подмодуль в M такой, что $K_T(U) = \rho$ и $M = UR$. Тогда:

- (i) если U – ρ -критический и $M = U \otimes_T R$, то M – $(\rho + \mu)$ -критический R -модуль, где $r_0(G/H) = \mu$;
- (ii) если S – f.g.f.-область, то $K_R(M) \geq \rho$;
- (iii) если S – f.g.f.-область, группа G – без кручения, модуль $M = aR$ – без T -кручения и факторгруппа G/H – свободная абелева с порожда-

ющими $x_1H, \dots, x_nH$ такими, что $0 \neq \text{Ann}_R(a) \cap S\langle x_iH \rangle$ для каждого i , то любой ненулевой подмодуль $N \leq M$ обладает ρ -критическим R -подмодулем V таким, что $K_R(V) = \rho = \dim S + r_0(H)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Утверждение следует из леммы 10(i) работы Сигала [18], так как из результатов Роузблеяда [5] вытекает, что всякий простой R -модуль является конечным и, следовательно, артиновым T -модулем.

(ii) Пусть F – мультипликативная конечно порожденная подгруппа в S , порождающая S . Поскольку скрещенное произведение R – центральное, то нетрудно показать существование конечно порожденной мультипликативной подгруппы $\hat{G}$ в R такой, что S и $\hat{G}$ порождают кольцо R . Тогда M можно рассматривать как $\mathbb{Z}(F \times \hat{G})$ -модуль и утверждение следует из [18; теорема G].

(iii) Так как $K_S(S) = \dim S$, то из (i) следует, что $K_T(aT) = \dim S + r_0(H)$ для любого элемента $0 \neq a \in M$.

Доказательство проведем индукцией по n . Пусть $L = \langle x_1, \dots, x_{n-1}, H \rangle$, тогда по предположению индукции N обладает ρ -критическим подмодулем $b(S * L)$. Поскольку $\langle x_nH \rangle$ – G -подгруппа и кольцо $S * \langle x_nH \rangle$ однородное, то нетрудно показать, что модуль M является $S * \langle x_nH \rangle$ -периодическим. Отсюда следует, что $bR \neq bSL \otimes_{SL} R$, и из [18; лемма 10(ii)] получаем, что $K_R(bR) \leq \rho$. Тогда bR содержит β -критический подмодуль $0 \neq cR$ и $\beta \leq \rho$. Поскольку модуль M – без T -кручения, то cR содержит свободный T -подмодуль и из (ii) следует, что $\beta = \rho$.

ЛЕММА 2.2.3. Пусть N – подгруппа группы G и J – область целостности. Пусть $R = J * G$ – центральное скрещенное произведение и $S = J * N$ – подкольцо в R . Тогда:

- (i) если N – G -подгруппа, $|G : H| < \infty$ и M – R -модуль с $K_S(M) < \infty$, то $K_S(M) = K_R(M)$;
- (ii) если G – нильпотентная группа без кручения и N – плотная подгруппа в G , то $aR \cap S \neq 0$ для любого элемента $0 \neq a \in R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Утверждение может быть получено с помощью аргументов, использованных при доказательстве леммы 8 из [18].

(ii) Очевидно, существуют f.g.d.-подгруппа $H \leq G$ и конечно порожденная область $L \leq J$ такие, что $a \in L * H$. Достаточно показать, что $Y \cap L * K \neq 0$, где $K = H \cap N$ и $Y = a(L * H)$. Ввиду того, что подгруппа N плотная в G , имеем $|H : K| < \infty$, а так как подгруппа K субнормальная, то достаточно рассмотреть случай, когда K – нормальная подгруппа в H . Поскольку L – критическое кольцо, то из леммы 2.2.2(i) получаем, что критическими являются $L * H$ и $L * K$ и, следовательно, $K_{L * H}(L * H / Y) < K_{L * H}(L * H)$. Тогда так как в силу (i) $K_{L * H}(L * H) = K_{L * K}(L * K)$, то $K_{L * H}(L * H / Y) < K_{L * K}(L * K)$. С другой стороны, если $L * K \cap Y = 0$, то $K_{L * K}(L * H / Y) \geq K_{L * K}(L * K)$. Следовательно, так как в силу (i) $K_{L * K}(L * H / Y) = K_{L * H}(L * H / Y)$, то $K_{L * H}(L * H / Y) \geq K_{L * K}(L * K)$, но это приводит к противоречию.

ЛЕММА 2.2.4. Пусть A – нормальная нильпотентная подгруппа без кручения группы G , R – область целостности и M – RG -модуль без $\mathbb{K}A$ -кручения. Тогда:

- (i) существует кольцо частных $Q = RG(RA)^{-1}$;

- (ii) существует Q -модуль $D = M \otimes_{RK} Q = M(RA)^{-1}$ и $M \leq D$;
- (iii) если C – плотная подгруппа в A , то $RG(RA)^{-1} = RG(RC)^{-1} = RC(RC)^{-1} \otimes_{RC} RG$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Аргументы из [19; гл. 13, леммы 3.5(i), (ii) и 3.6(i)] показывают, что $RA \setminus \{0\}$ – область Орэ в RG .

(ii) См. [17; гл. 2, 1.17].

(iii) Так как $RG(RA)^{-1} = RA(RA)^{-1} \otimes_{RA} RG$, то достаточно показать, что $RA(RA)^{-1} = RA(RC)^{-1} = RC(RC)^{-1} \otimes_{RC} RA$.

По [19; гл. 13, леммы 3.5(i) и 3.6(i)] RX – кольцо Орэ для любой подгруппы $X \leq A$. Так как подгруппа C субнормальна в A , то из [19; гл. 13, лемма 3.5(ii)] следует, что $RC \setminus \{0\}$ – множество правых делителей для RA и, следовательно, $RA(RA)^{-1} \geq RA(RC)^{-1}$. По лемме 2.2.3(ii) $aRA \cap RC \neq 0$ для любого элемента $0 \neq a \in RA$ и, следовательно, $RA(RC)^{-1}$ – тело, а так как $RA(RC)^{-1} \leq RA(RA)^{-1}$, то $RA(RC)^{-1} = RA(RA)^{-1}$.

ЛЕММА 2.2.5. Пусть L – минимаксная нильпотентная группа без кручения, K – ее нормальная подгруппа, определяющая свободную абелеву факторгруппу L/K . Пусть R – область целостности и M – RL -модуль без RK -кручения. Тогда для любого элемента $0 \neq a \in V$ существует f.g.d.-подгруппа $H \leq L$ такая, что $aRL = aRH \otimes_{RH} RL$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 2.2.4(i), (ii) существуют кольцо частных $Q = RL(RK)^{-1}$ и циклический Q -модуль $W = aQ$ такие, что $aRL \leq W$. Очевидно, Q – скрещенное произведение тела $RK(RK)^{-1}$ и полициклической группы L/K . Хорошо известно, что такое скрещенное произведение является нётеровым и, следовательно, $I = \text{Ann}_Q(a)$ является конечно порожденным правым идеалом в Q . Тогда существует f.g.d.-подгруппа $H \leq L$ такая, что $I = (I \cap RH)Q$. Так как по лемме 2.2.4(iii) $Q = T \otimes_{RH} RL$, где $T = RH(R(H \cap K))^{-1}$, то $aQ = aT \otimes_{RH} RL$. Отсюда следует, что $aRL = aRH \otimes_{RH} RL$.

Пусть G – группа, R – кольцо и I – идеал кольца RG . Тогда $I^+ = \{x \in G : x - 1 \in I\}$ – нормальная подгруппа в G .

ЛЕММА 2.2.6. Пусть L – нильпотентная группа без кручения конечного ранга такая, что $L = KH$, где K – изолированная нормальная подгруппа в L и H – f.g.d.-подгруппа в L . Пусть R – область целостности, I – L -инвариантный идеал в RK такой, что $L = I^+H$. Пусть $M = aRL$ – циклический RL -модуль такой, что $aRL = aRH \otimes_{RH} RL$. Тогда существует RH -модульный изоморфизм $aRL/aRLI \simeq aRH/aRHI'$, где $I' = RH \cap I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $J = \text{Ann}_{RL}(a)$, тогда $J = (RH \cap J)RL$. Покажем сначала, что $RL = RH + RHI$ и $J + RLI = (J \cap RH) + RHI$.

По определению I^+ $agh - ah \in RHI$ для любых элементов $g \in I^+$, $a \in R$ и $h \in H$ и, следовательно, $agh \in RH + RHI$. Тогда так как $I^+H = L$, то $RL = RH + RHI$.

Поскольку $L = I^+H$ и $J = (J \cap RH)RL$, то $J = (J \cap RH)RI^+$. По определению I^+ $ag - a \in RHI$ для любых элементов $g \in I^+$, $a \in J \cap RH$ и, следовательно, $ag \in (RH + J) + RHI$. Тогда так как $J = (J \cap RH)RI^+$, то $J \leq (J \cap RH) + RLI$.

и, следовательно, $J + RLI = (J \cap RH) + RLI$. Так как $I^+H = L$, то нетрудно показать, что $RLI = RHI$ и, значит, $J + RLI = (J \cap RH) + RHI$.

Очевидно, $aRL/aRLI \simeq RL/(J + RLI)$ и, следовательно, так как $RL = RH + RHI$ и $J + RLI = (J \cap RH) + RHI$, то $aRL/aRLI = (RH + RHI)/((J \cap RH) + RHI) \simeq RH/((J \cap RH) + (RH \cap RHI))$.

Легко проверяется, что $RH \cap RHI = RHI'$ и, следовательно, $aRL/aRLI \simeq RH/((J \cap RH) + RHI') \simeq aRH/aRHI'$.

2.3. Некоторые свойства идеалов групповых колец нильпотентных групп конечного ранга. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга и $\mathbb{k}$ – поле. Если P – простой идеал кольца $\mathbb{k}A$, то размерность $\dim P$ идеала P определяется следующим образом: $\dim P = \dim(\mathbb{k}A/P) = K_{\mathbb{k}A}(\mathbb{k}A/P)$. Хорошо известно, что $\dim P$ – это степень трансцендентности над $\mathbb{k}$ поля частных области целостности $\mathbb{k}A/P$. Пусть I – идеал кольца $\mathbb{k}A$. Обозначим через $\mathcal{P}(I)$ множество минимальных над I простых идеалов, которые имеют максимальную размерность. Очевидно, $\mathcal{P}(I)$ совпадает с множеством простых идеалов максимальной размерности, содержащих идеал I . Эту размерность обозначим через $\dim \mathcal{P}(I)$, если $\mathcal{P}(I) \neq \emptyset$. Если $\mathcal{P}(I) = \emptyset$, т.е. $I = \mathbb{k}A$, то положим $\dim \mathcal{P}(I) = -1$.

Нам также необходимы некоторые понятия, введенные Уилсоном в [20; 3.8] и основанные на результатах Брукса [21]. Если I и J – идеалы в $\mathbb{k}A$, то введем отношение: $I \approx J$, если $I \cap \mathbb{k}B = J \cap \mathbb{k}B$ для некоторой f.g.d.-подгруппы $B \leq A$. Тогда $\approx$ является отношением эквивалентности, и мы обозначим через $[I]$ класс эквивалентности, содержащий идеал I .

По [20; 3.9] если I – идеал кольца $\mathbb{k}A$, то существует f.g.d.-подгруппа $B \leq A$ такая, что для любой подгруппы C конечного индекса в B отображение $Q \mapsto Q \cap \mathbb{k}C$ задает биекцию множества минимальных над $I \cap \mathbb{k}B$ простых идеалов кольца $\mathbb{k}B$ на множество минимальных над $I \cap \mathbb{k}C$ простых идеалов $\mathbb{k}C$. Такая подгруппа B называется *I -локальной*.

Будем говорить, что класс эквивалентности $[P]$ *минимален* над идеалом $I \leq \mathbb{k}A$, если существует I -локальная подгруппа B такая, что $P \cap \mathbb{k}B$ – минимальный над $I \cap \mathbb{k}B$ простой идеал кольца $\mathbb{k}B$. Нетрудно показать, что минимальный класс содержит простые идеалы и все эти идеалы имеют одинаковую размерность. Будем говорить, что класс $[P]$ минимален над классом $[I]$, если $[P]$ минимален над I . Из [20; 3.10(b)] следует, что данное определение корректно. Обозначим через $\mathcal{L}\mathcal{P}(I)$ множество минимальных над I классов $[P]$, простые идеалы которых имеют максимальную размерность. Обозначим эту размерность через $\dim \mathcal{L}\mathcal{P}(I)$.

ЛЕММА 2.3.1. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга и B – ее плотная подгруппа. Пусть $\mathbb{k}$ – поле, тогда для любого идеала I кольца $\mathbb{k}A$

- (i) отображение $\varphi: \mathcal{P}(I) \rightarrow \mathcal{P}(I \cap \mathbb{k}B)$ по правилу $\varphi: P \mapsto P \cap \mathbb{k}B$ сюръективно и, значит, $\dim \mathcal{P}(I) = \dim \mathcal{P}(I \cap \mathbb{k}B)$,
- (ii) $\mathcal{L}\mathcal{P}(I) = \{[P\mathbb{k}A] : P \in \mathcal{P}(I \cap \mathbb{k}B)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $P \in \mathcal{P}(I)$; если $L = P \cap \mathbb{k}B \notin \mathcal{P}(I \cap \mathbb{k}B)$, то существует минимальный над $I \cap \mathbb{k}B$ простой идеал Q такой, что $\dim Q > \dim L$. В начале доказательства леммы 2.2 из [21] показано существование простого идеала T такого, что $I \leq T$ и $T \cap \mathbb{k}B = Q$. Так как подгруппа B плотная в A , то легко

видеть, что $\dim T = \dim Q$ и $\dim P = \dim L$, а значит, $\dim P < \dim T$, что противоречит определению $\mathcal{P}(I)$. Таким образом, $P \cap \mathbb{k}B \in \mathcal{P}(I \cap \mathbb{k}B)$ и, следовательно, φ отображает $\mathcal{P}(I)$ в $\mathcal{P}(I \cap \mathbb{k}B)$.

Пусть $Q \in \mathcal{P}(I \cap \mathbb{k}B)$; как отмечалось выше, существует минимальный над I простой идеал P такой, что $P \cap \mathbb{k}B = Q$. Если $P \notin \mathcal{P}(I)$, то найдется минимальный над I простой идеал T такой, что $\dim P < \dim T$. Тогда $T \cap \mathbb{k}B = L$ – простой идеал, содержащий I , а так как подгруппа B плотная в A , то $\dim L = \dim T$ и $\dim Q = \dim P$. Следовательно, $\dim L > \dim Q$, что противоречит определению $\mathcal{P}(I \cap \mathbb{k}B)$. Таким образом, φ – сюръекция.

(ii) Пусть C – I -локальная подгруппа в A ; так как плотная подгруппа I -локальной подгруппы также является I -локальной, то можно считать, что $C \leq B$. Пусть $P \in \mathcal{P}(I)$; очевидно, что $(P \cap \mathbb{k}B) \cap \mathbb{k}A \cap \mathbb{k}C = P \cap \mathbb{k}C$ и, следовательно, $[P] = [(P \cap \mathbb{k}B) \cap \mathbb{k}A]$. Тогда утверждение выполняется, поскольку ввиду (i) отображение $\varphi: P \mapsto P \cap \mathbb{k}B$ сюръективное.

ЛЕММА 2.3.2. Пусть N – нильпотентная минимаксная группа без кручения с нормальными подгруппами K и Q такими, что Q/K – центральная квазициклическая p -подгруппа факторгруппы N/K . Пусть $\mathbb{k}$ – поле, $\text{char } \mathbb{k} = 0$, и I_1 – N -инвариантный идеал в $\mathbb{k}K$ такой, что $|K : I_1^+| < \infty$ и $I_1 = (I_1 \cap \mathbb{k}F) \cap \mathbb{k}K$, где $F/I_1^+ = D$ – центральная подгруппа в N/I_1^+ и $I_1 \cap \mathbb{k}F$ – максимальный идеал в $\mathbb{k}F$. Пусть $C = \xi/I_1^+$ – централизатор группы N в Q/I_1^+ . Тогда существует N -инвариантный идеал I в $\mathbb{k}Q$ такой, что $I = (I \cap \mathbb{k}\xi) \cap \mathbb{k}Q$, $I \cap \mathbb{k}K \geq I_1$ и $I \cap \mathbb{k}\xi = J$ – максимальный идеал кольца $\mathbb{k}\xi$, причем группа ξ/J^+ имеет квазициклическую подгруппу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как ξ/I_1^+ – центральная группа в Q/I_1^+ , то любой идеал I кольца $\mathbb{k}Q$ такой, что $I = (I \cap \mathbb{k}\xi) \cap \mathbb{k}Q$ и $I \cap \mathbb{k}K \geq I_1$, является N -инвариантным. Тогда достаточно показать существование максимального идеала $J \leq \mathbb{k}\xi$ такого, что факторгруппа ξ/J^+ содержит квазициклическую подгруппу и $J \cap \mathbb{k}F \geq I_1 \cap \mathbb{k}F$, а затем можно положить $I = J \cap \mathbb{k}Q$.

Поскольку I_1^+ – подгруппа конечного индекса в K , то легко заметить, что C – подгруппа конечного индекса в Q/I_1^+ и, следовательно, C – прямое произведение конечной абелевой группы и квазициклической p -группы. Кроме того, очевидно, что $D \leq C$. Пусть f – алгебраическое замыкание поля $\mathbb{k}F/(I_1 \cap \mathbb{k}F)$. Так как $\text{char } f = 0$, то мультипликативная группа f^* содержит квазициклическую p -подгруппу. Тогда существует гомоморфизм $\varphi: C \rightarrow f^*$ такой, что $\varphi(D) \simeq D$ и $|\varphi(C)| = \infty$. Гомоморфизм φ можно продолжить до кольцевого гомоморфизма $\psi: \mathbb{k}\xi \rightarrow f$ и положить $J = \text{Ker } \psi$.

Пусть I – правый идеал группового кольца RG . Подгруппа $H \leq G$ контролирует I , если $I = (I \cap RH)RG$. Нетрудно показать, что пересечение $c(I)$ подгрупп, контролирующих I , также контролирует I . Подгруппа $c(I)$ называется *контролером* идеала I .

ЛЕММА 2.3.3. Пусть $\mathbb{k}$ – конечно порожденное поле, $\text{char } \mathbb{k} = 0$, и $G = Q \times H$ – прямое произведение конечно порожденной абелевой группы H и квазициклической p -группы Q . Пусть P – простой идеал кольца $\mathbb{k}G$ такой, что подгруппа Q не содержится в P^+ . Тогда $c(P)$ – *f.g.*-подгруппа группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, можно считать, что $G \cap P^+ = 1$. Пусть F – поле частных области целостности $\mathbb{k}G/P$, тогда поле $F = \mathbb{k}(G)$ порождается подполем $\mathbb{k}$ и подгруппой G мультипликативной группы F^* . Таким образом, достаточно показать существование f.g.-подгруппы $L \leq G$ такой, что $F = \mathbb{k}(L) \otimes_{KL} KG$.

Пусть f – подполе поля F , порожденное подгруппой H и элементом $1 \neq a \in Q$ таким, что $a^p = 1$. Так как f – конечно порожденное поле, то из [22; лемма 7] следует, что мультипликативная группа f^* – прямое произведение конечной группы и свободной абелевой группы. Следовательно, $L = f^* \cap G$ – f.g.-подгруппа в G и, очевидно, $\mathbb{k}(L) \cap G = L$. Тогда утверждение следует из [22; лемма 2].

ЛЕММА 2.3.4. Пусть $\mathbb{k}$ – подполе конечно порожденного поля f , $\text{char } \mathbb{k} = 0$, и D – подгруппа мультипликативной группы f^* поля f . Тогда существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что если C – конечная циклическая группа, содержащая подгруппу D и такая, что $|C/D| = p^n$, где p – простое число и $n > m$, то скрещенное произведение $f(n) = f \otimes_{\mathbb{k}D} \mathbb{k}C$ поля f и группы C/D содержит максимальный идеал J такой, что $\dim_f(f(n)/J) \geq p^{n-m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, существует p -подгруппа $E \leq C$ такая, что $|E/H| = p^n$ и $f(n) = f \otimes_{\mathbb{k}H} \mathbb{k}E$, где $H = E \cap D$. Таким образом, можно считать, что C – p -группа. Так как f – конечно порожденное поле, то по [22; лемма 7] мультипликативная группа $f^* = X \times Y$, где $|X| < \infty$ и Y – свободная абелева группа. Тогда существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $|\langle \xi \rangle| = p^m$, где $\langle \xi \rangle$ – силовская p -подгруппа в f^* (очевидно, $\langle g \rangle = D \leq \langle \xi \rangle$). Если $\xi = 1$, то $f \cap C = 1$ и, следовательно, $f(n) = fC$ – групповое кольцо. Пусть элемент $1 \neq x \in C$ такой, что $x^p = 1$. Так как $\xi = 1$ и $\text{char } f = 0$, то $f\langle x \rangle / f\langle x \rangle \varphi(x)$ – конечно порожденное поле, мультипликативная группа которого имеет нетривиальную силовскую p -подгруппу, где $\varphi(x)$ – многочлен деления круга. Тогда, заменив f на $f\langle x \rangle / f\langle x \rangle \varphi(x)$ и $f(n)$ на $\hat{f}(n) = f(n) / f(n) \varphi(x)$, можно считать, что $\xi \neq 1$, т.е. $m > 0$.

Так как $g \in \langle \xi \rangle$, то существует $d \in \mathbb{N}$ такое, что $\xi^d = g$, а так как $n > m$, то существует элемент $h \in C$ такой, что $h^d = g$. Пусть $\alpha = h - \xi$, тогда $f\langle h \rangle / f\langle h \rangle \alpha \simeq f$ и $\hat{f}(n) = f(n) / f(n) \alpha = f \otimes_{\mathbb{k}\langle h \rangle} \mathbb{k}C$. Таким образом, заменив $f(n)$ на $\hat{f}(n)$, можно считать, что $C \cap f = \langle \xi \rangle$ и $\dim_f f(n) = p^{n-m}$. Покажем, что в этом случае $f(n)$ – поле.

Пусть I – максимальный идеал кольца $f(n)$, тогда $F = f(n)/I$ – поле такое, что $f \leq F$, $C \leq F^*$, $F = f(C)$, $C \cap f^* = \langle \xi \rangle$ и, следовательно, $|C/C \cap f^*| = p^{n-m}$. Тогда по [22; лемма 2] $\dim_f F = |C/C \cap f^*| = \dim_f f(n)$ и, значит, $I = 0$. Итак, $f(n)$ не содержит собственных идеалов, т.е. $f(n)$ – поле.

2.4. Крупные выделяющие идеалы групповых колец разрешимых групп. Пусть N – группа и R – область целостности. Назовем идеал I кольца RN *крупным*, если $|N/I^+| < \infty$ и $I = (RF \cap I)RN$, где $F \geq I^+$ и F/I^+ – центр факторгруппы N/I^+ . Если N – нормальная подгруппа группы G , то идеал I кольца RN назовем *G -крупным*, если I – крупный и G -инвариантный. Если $H \leq G$ и F/I^+ – H -центральная секция в G , то I будем называть *H -центральным G -крупным идеалом* кольца RN .

Идеал I кольца R называется *центральным*, если он порожден центральными элементами кольца R . Если существует конечная возрастающая цепь $\{I_i\}$ идеалов кольца R такая, что I_{i+1}/I_i — центральный идеал в R/I_i для каждого i , то эта цепь и идеалы, входящие в нее, называются *полицентральными* (см. [16]).

ЛЕММА 2.4.1. Пусть K — нормальная подгруппа конечно порожденной нильпотентной группы L , $\mathbb{k}$ — поле, W — конечно порожденный L -модуль, I — L -центральный L -крупный идеал в $\mathbb{k}K$. Тогда:

- (i) $I\mathbb{k}L$ — полицентральный идеал в $\mathbb{k}L$;
- (ii) для любого подмодуля $0 \neq U \leq W$ фактормодуль U/UI обладает конечным рядом, каждый фактор которого изоморфен некоторой секции фактормодуля W/WI .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $\{L_i\}$ — верхний центральный ряд группы L и $D_i = L_i \cap I^+$. Легко проверяется, что $\langle D_i - 1 \rangle$ — полицентральные идеалы кольца $\mathbb{k}L$. Тогда утверждение следует из определения L -центрального L -крупного идеала, поскольку $I\mathbb{k}L = (I \cap \mathbb{k}F)\mathbb{k}L$ и $\mathbb{k}F/\langle I^+ - 1 \rangle$ — центральное нётерово подкольцо факторкольца $\mathbb{k}L/\langle I^+ - 1 \rangle$.

(ii) Как уже показано, $I\mathbb{k}L$ — полицентральный идеал кольца $\mathbb{k}L$, и по лемме Артина–Рисса (см. [16]) существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $WI^n \cap U \leq UI$. Отсюда следует, что U/UI имеет конечный ряд подмодулей, в котором каждый фактор изоморфен некоторой секции фактормодуля WI^m/WI^{m+1} , где $m = 1, \dots, n$. Тогда достаточно показать, что для любого m модуль WI^m/WI^{m+1} имеет конечный ряд, факторы которого изоморфны секциям модуля W/WI . Достаточно показать, что WI/WI^2 обладает конечным рядом, в котором каждый фактор изоморфен некоторой секции модуля W/WI , а затем использовать индукцию по m .

Пусть $\{a_1, \dots, a_t\}$ — порождающие элементы идеала $I\mathbb{k}L$ такие, что $a_i + I_i$ — центральный элемент факторкольца $\mathbb{k}L/I_i$, где I_i — идеал в $\mathbb{k}L$, порожденный элементами $\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$. Доказательство проведем индукцией по t . Переходя к фактормодулю W/WI^2 , можно считать, что $WI^2 = 0$. Пусть $a_1 = \alpha$, тогда отображение $\alpha: W \rightarrow WI$ по правилу $\alpha: x \mapsto x\alpha$ является эндоморфизмом модуля W таким, что $WI \leq \text{Ker } \alpha$. Следовательно, подмодуль $W\alpha \leq WI$ изоморфен секции $W/\text{Ker } \alpha$ модуля W/WI . Таким образом, переходя к фактормодулю $W/W\alpha$, можно считать, что $Wa_1 = 0$, и утверждение следует из предположения индукции.

ЛЕММА 2.4.2. Пусть L — минимаксная нильпотентная группа без кручения и K — ее нормальная подгруппа такая, что факторгруппа L/K — свободная абелева. Пусть $\mathbb{k}$ — поле, W — циклический $\mathbb{k}L$ -модуль без $\mathbb{k}K$ -кручения, I — L -центральный L -крупный идеал в $\mathbb{k}K$. Тогда для любого циклического подмодуля $0 \neq U \leq W$ фактормодуль U/UI обладает конечным рядом, в котором каждый фактор изоморфен некоторой секции фактормодуля W/WI .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если группа L конечно порожденная, то утверждение следует из предыдущей леммы.

Рассмотрим теперь общий случай. Предположим, что $W = a\mathbb{k}L$ и $U = b\mathbb{k}L$, где $b \in a\mathbb{k}L$. По лемме 2.2.5 существует f.g.d.-подгруппа $H \leq L$ такая, что $W = a\mathbb{k}H \otimes_{\mathbb{k}H} \mathbb{k}L$. Очевидно, подгруппу H можно выбрать так, что $b \in a\mathbb{k}H$ и H удовлетворяет условиям леммы 2.1.7, тогда $L = HI^+$. Так как $U = b\mathbb{k}H \otimes_{\mathbb{k}H} \mathbb{k}L$, то из

леммы 2.2.6 следует, что U/UI обладает конечным рядом $\{X_i\}$ $\mathbb{k}H$ -подмодулей, каждый фактор которого изоморфен некоторой секции $\mathbb{k}H$ -модуля W/WI . Поскольку $L = HI^+$ и I^+ действует тождественно на W/WI и U/UI , то $\{X_i\}$ является L -рядом, а $\mathbb{k}H$ -изоморфизмы факторов этого ряда продолжаются до $\mathbb{k}L$ -изоморфизмов.

Пусть R – кольцо и W – подмодуль R -модуля M . Будем говорить, что идеал I кольца R выделяет подмодуль W в M , если $MI \neq M$ и $W + MI = M$ (см. [6]). Нетрудно показать, что I выделяет W тогда и только тогда, когда $MI \neq M$ и $(M/W)I = M/W$. Отсюда следует, что если I выделяет W , то I^n также выделяет W для любого $n \in \mathbb{N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.3. Пусть N – минимаксная нильпотентная нормальная подгруппа без кручения разрешимой группы G , $r_0(G) < \infty$, и $\mathbb{k}$ – конечно порожденное поле. Пусть H – f.g.d.-подгруппа в N и J – правый идеал кольца $\mathbb{k}H$. Тогда:

- (i) существует G -крупный идеал I кольца N такой, что $\mathbb{k}H \cap I$ выделяет J в $\mathbb{k}H$;
- (ii) если $\hat{N}$ – нормальная нильпотентная подгруппа в G , $N \leq \hat{N}$, то идеал I можно выбрать так, что $I = (I \cap \mathbb{k}C)\mathbb{k}N$, где $C \geq I^+$ и C/I^+ – центральная подгруппа в $\hat{N}/I^+$, т.е. идеал I – $\hat{N}$ -центральный;
- (iii) если $\hat{N} = G$, то идеал I можно выбрать так, что выполняются свойства из (ii) и $I \cap \mathbb{k}C$ – максимальный идеал кольца $\mathbb{k}C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Из леммы 2.1.1(i) следует существование нормальных подгрупп G_1 и G_0 в G и G -ряда $\{N_i\}$ в N таких, что $N \leq G_1 \leq G_0$, факторгруппа $\Gamma = G_0/G_1$ – свободная абелева, $|G/G_0| < \infty$ и все секции $\{N_i\}$ – G_1 -центральные, причем $(N_i/N_{i+1}) \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} \mathbb{Q}\Gamma$ – вполне приводимый $\mathbb{Q}\Gamma$ -модуль для каждого i . Пусть T – правая трансверсаль к G_0 в G и $M = \{t^{-1} : t \in T\}$. Положим $F = \bigcap_{s \in M} H^s$, тогда F – f.g.d.-подгруппа в H^s для каждого $s \in M$. Из леммы 2.2.3(ii) следует, что $J^s \cap \mathbb{k}F \neq 0$ для каждого $s \in M$, а из однородности кольца $\mathbb{k}F$ вытекает, что $D = (\bigcap_{s \in M} J^s) \cap \mathbb{k}F$ – ненулевой правый идеал кольца $\mathbb{k}F$.

Покажем индукцией по $r(N)$ существование G_0 -крупного идеала E кольца $\mathbb{k}N$ такого, что $E \cap \mathbb{k}(F \cap C)$ выделяет правый идеал $D \cap \mathbb{k}(F \cap C)$ в $\mathbb{k}(F \cap C)$ и $E = (\mathbb{k}C \cap E)\mathbb{k}N$, где C – G -подгруппа в N такая, что $E^+ \leq C$, секция C/E^+ – G_1 -центральная и $\mathbb{k}C \cap E$ – максимальный идеал в $\mathbb{k}C$.

Так как поле $\mathbb{k}$ конечно порожденное, то из [9; теорема А] следует существование множества $\mathcal{J} = \{I_i\}$ Γ -инвариантных максимальных идеалов $I_i \leq \mathbb{k}A$ таких, что $|A : I_i^+| < \infty$ и $\bigcap I_i = 0$, где $A = N_1$. Отсюда следует существование Γ -инвариантного максимального идеала $E_1 \in \mathcal{J}$ такого, что $\mathbb{k}NE_1$ не содержит D .

Так как $|A : E_1^+| < \infty$, то существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $N^m \cap A \leq E_1^+$; положим $X = AN^m$ и $Y = F \cap X$. Очевидно, кольцо $\mathbb{k}N/\mathbb{k}NE_1$ является центральным скрещенным произведением $f * L$, где $f = \mathbb{k}A/E_1$ – конечно порожденное поле и $L = N/A$ – нильпотентная группа без кручения. Пусть $Z = (D + \mathbb{k}NE_1)/\mathbb{k}NE_1$, тогда Z – ненулевой идеал в $f * (FA/A)$. Так как $|F : Y| < \infty$, то по лемме 2.2.3(ii) $Z \cap (\mathbb{k}Y + \mathbb{k}XE_1)/\mathbb{k}XE_1$ – ненулевой идеал скрещенного произведения $(\mathbb{k}Y + \mathbb{k}XE_1)/\mathbb{k}XE_1 = f * (YA/A)$.

Так как $N^m \cap A \leq E_1^+$, то легко проверить, что $\mathbb{K}X/\mathbb{K}X E_1 \simeq (\mathbb{K}A/E_1)(N^m/(N^m \cap A)) = f(N^m/(N^m \cap A))$ – групповое кольцо группы $N^m/(N^m \cap A)$ над полем f . Тогда так как N^m и $N^m \cap A$ – G -подгруппы в N , $N^m/(N^m \cap A)$ – нильпотентная нормальная минимаксная подгруппа без кручения в $G_0/(N^m \cap A)$ и $r(N) > r(N^m/(N^m \cap A))$, то можно применить предположение индукции к групповому кольцу $f(N^m/(N^m \cap A)) \simeq \mathbb{K}X/\mathbb{K}X E_1$. По предположению индукции существует G_0 -крупный идеал $E_2/\mathbb{K}X E_1$ кольца $\mathbb{K}X/\mathbb{K}X E_1$ такой, что $(E_2/\mathbb{K}X E_1) \cap (\mathbb{K}(Y \cap C) + \mathbb{K}X E_1)/\mathbb{K}X E_1$ выделяет $Z \cap (\mathbb{K}(Y \cap C) + \mathbb{K}X E_1)/\mathbb{K}X E_1$ в $(\mathbb{K}(Y \cap C) + \mathbb{K}X E_1)/\mathbb{K}X E_1$ и $E_2 = (\mathbb{K}C \cap E_2)\mathbb{K}X$, где C – G -подгруппа в N такая, что $E_2^+ \leq C$, секция C/E_2^+ – G_1 -центральная и $\mathbb{K}C \cap E_2$ – максимальный идеал кольца $\mathbb{K}C$. Тогда можно положить $E = \mathbb{K}N E_2$.

Таким образом, в $\mathbb{K}N$ существует G_0 -крупный идеал E такой, что $E \cap \mathbb{K}B$ выделяет $D \cap \mathbb{K}B$ в $\mathbb{K}B$, где $B = F \cap C$. Так как $D = \bigcap_{s \in M} J^s \cap \mathbb{K}F$, то из [6; лемма 6] следует, что $E \cap \mathbb{K}B$ выделяет $J^s \cap \mathbb{K}B$ для каждого $s \in M$ и, следовательно, $E^t \cap \mathbb{K}B^t$ выделяет $J \cap \mathbb{K}B^t$ для каждого $t \in T$. Тогда так как $F^t \subseteq H$ и C – G -подгруппа, то $E^t \cap \mathbb{K}R$ выделяет $J \cap \mathbb{K}R$ в $\mathbb{K}R$ для каждого $t \in T$, где $R = H \cap C$. Пусть $I = \bigcap_{t \in T} E^t$; так как C – G -подгруппа в N , легко видеть, что секция C/I^+ – G_1 -центральная и, следовательно, I – G -крупный N -центральный идеал кольца $\mathbb{K}N$.

Предположим, что $(I \cap \mathbb{K}R) + (J \cap \mathbb{K}R) \neq \mathbb{K}R$, тогда $\mathbb{K}R$ обладает максимальным правым идеалом $\hat{I}$, содержащим $(I \cap \mathbb{K}R) + (J \cap \mathbb{K}R)$. Так как факторгруппа $R/(I \cap \mathbb{K}R)^+$ конечная абелева и $I \cap \mathbb{K}R$ – пересечение максимальных идеалов $E^t \cap \mathbb{K}R \leq \mathbb{K}R$, то можно заключить, что $\hat{I} = E^t \cap \mathbb{K}R$ для некоторого t . Но это приводит к противоречию, так как $E^t \cap \mathbb{K}R$ выделяет $J \cap \mathbb{K}R$ в $\mathbb{K}R$ для каждого t . Таким образом, $I \cap \mathbb{K}R$ выделяет $J \cap \mathbb{K}R$ в $\mathbb{K}R$, а так как $R \leq H$, то $I \cap \mathbb{K}H$ выделяет $J \cap \mathbb{K}H$ в $\mathbb{K}H$.

(ii), (iii) Поскольку $\hat{N}$ – G -подгруппа, то ряд $\{N_i\}$ можно уплотнить до $G_1\hat{N}$ -центрального G -ряда. Тогда, заменив G_1 на $G_1\hat{N}$, можно считать, что $\hat{N} \leq G_1$. В случае, когда группа G – нильпотентная, можно положить $G = G_1$, а для G_1 утверждения (ii) и (iii) доказаны в (i).

2.5. Локальная размерность Крулля и критические элементы. Пусть S – нётерово кольцо и N – нильпотентная группа конечного ранга. Пусть M – SN -модуль, будем говорить, что M имеет *локальную размерность Крулля* $LK_{SN}(M)$, если $LK_{SN}(M) = \max\{LK_{SN}(aSH) : a \in M, H \in \mathcal{D}\} < \infty$, где $\mathcal{D}$ – множество всех f.g.d.-подгрупп из N .

Будем говорить, что SN -модуль M является *локально критическим*, если $LK_{SN}(M/U) < LK_{SN}(M)$ для любого подмодуля $0 \neq U \leq M$. Секция A/B модуля M называется *собственной*, если $A \neq B \neq 0$. Если aSN – локально критический подмодуль SN -модуля M и $LK_{SN}(aSN) \leq LK_{SN}(bSN)$ для любого элемента $0 \neq b \in M$, то легко видеть, что M не содержит подмодуля, изоморфного собственной секции модуля aSN .

ЛЕММА 2.5.1. Пусть N – нормальная нильпотентная подгруппа конечного ранга группы G , S – нётерово подкольцо коммутативного кольца R , M – RG -модуль и $a \in M$. Тогда:

- (i) $K_{SX}(aSX) = K_{SY}(aSY)$ для любых двух f.g.d.-подгрупп $X, Y \leq N$;

- (ii) $K_{SH}(aSH) \geq K_{SH}(axSH)$ для любого элемента $x \in RG$ и любой f.g.d.-подгруппы $H \leq N$;
- (iii) SN -модуль aRG имеет локальную размерность Крулля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть $Z = X \cap Y$, тогда достаточно показать, что $K_{SX}(aSX) = K_{SZ}(aSZ) = K_{SY}(aSY)$. Так как Z – субнормальная подгруппа в X , то достаточно рассмотреть случай, когда Z – нормальная подгруппа в X . Тогда по [18; лемма 8] $K_{SX}(aSX) = K_{SZ}(aSX)$. С другой стороны, так как $aSX = \sum_{t \in T} aSZt$, где T – конечная трансверсаль к Z в X , то легко видеть, что $K_{SX}(aSX) = K_{SZ}(aSZ)$. Те же рассуждения показывают, что $K_{SY}(aSY) = K_{SZ}(aSZ)$.

(ii) Пусть $x = \sum_{g \in T} \alpha_g g$, где $\alpha_g \in R$ и T – носитель элемента x . Очевидно, $a\alpha_g gSH = aS(gHg^{-1})g\alpha_g$, откуда следует, что

$$K_{SH}(a\alpha_g SH) \leq K_{S(gHg^{-1})}(aS(gHg^{-1})).$$

Тогда из (i) имеем $K_{SH}(a\alpha_g SH) \leq K_{SH}(aSH)$, а так как $ax \in \sum_{g \in T} a\alpha_g SH$, то $K_{SH}(axSH) \leq K_{SH}(aSH)$.

(iii) Утверждение следует из (i) и (ii).

ЛЕММА 2.5.2. Пусть R – коммутативное нётерово кольцо и N – нильпотентная группа конечного ранга. Пусть M – RN -модуль, обладающий локальной размерностью Крулля. Тогда:

- (i) $LK_{RN}(M) = \max\{LK_{RN}(M/U), LK_{RN}(U)\}$ для любого подмодуля $U \leq M$;
- (ii) если модуль M локально критический, то $LK_{RN}(M) = LK_{RN}(U)$ для любого подмодуля $0 \neq U \leq M$ и M – однороден.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Очевидно,

$$LK_{RN}(M) \geq \max\{LK_{RN}(M/U), LK_{RN}(U)\}.$$

Пусть $a \in M$ такой, что $LK_{RN}(M) = LK_{RN}(a\mathbb{k}N)$, и пусть H – f.g.d.-подгруппа в N . Тогда $LK_{RN}(M) = K_{RH}(a\mathbb{k}H) = \max\{K_{RH}(a\mathbb{k}H/V), K_{RH}(V)\}$, где $V = U \cap a\mathbb{k}H$. Легко видеть, что $K_{RH}(a\mathbb{k}H/V) \leq LK_{RN}(M/U)$ и $K_{RH}(V) \leq LK_{RN}(U)$, а следовательно, $K_{RN}(M) \leq \max\{LK_{RN}(M/U), LK_{RN}(U)\}$.

(ii) Утверждение следует из (i).

Напомним некоторые понятия, введенные Бруксом в [6]. Пусть L – группа и K – ее нормальная подгруппа, определяющая свободную абелеву факторгруппу L/K со свободными порождающими $Kx_1, Kx_2, \dots, Kx_n$. Обозначим через $\mathcal{X} = \{ \langle K, \{x_j\}_{j \in J} \rangle : J \subseteq \{1, \dots, n\} \}$ систему, состоящую из 2^n подгрупп группы L , содержащих K . Систему $\mathcal{X}$ назовем *полной системой подгрупп* над K . Пусть R – область целостности и $M = aRL$ – циклический RL -модуль без RK -крючения. Положим $\mathcal{X}(aRL) = \{X \in \mathcal{X} : \text{Ann}_{RX}(a) = 0\}$. Пусть $r(aRL) = \max\{r(X/K) : X \in \mathcal{X}(aRL)\}$ и $\mathcal{MX}(aRL)$ – множество подгрупп $X \in \mathcal{X}(aRL)$ таких, что $r(aRL) = r(X/K)$.

ЛЕММА 2.5.3. Пусть L – минимаксная нильпотентная группа без кручения, K – ее нормальная подгруппа, определяющая свободную абелеву факторгруппу L/K . Пусть R – нётерова область целостности и M – RL -модуль без RK -кручения. Тогда существует подмодуль $V \leq M$ такой, что:

- (i) для любой подгруппы $Y \leq L$ такой, что $K \leq Y$, модуль V – либо без RY -кручения, либо RY -периодический;
- (ii) для любой полной системы $\mathcal{X}$ подгрупп над K существуют элемент $0 \neq a \in V$ и подгруппа $X \in \mathcal{MX}(aRL)$ такие, что $T \cap aR(H \cap X) \neq 0$ для любого подмодуля $0 \neq T \leq aRL$ и любой f.g.d.-подгруппы $H \leq L$;
- (iii) для любого элемента $0 \neq a \in V$ подмодуль $aRL \leq V$ является локально критическим, а следовательно, однородным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Очевидно, можно перейти к любому ненулевому подмодулю в M .

Покажем сначала, что для любой полной системы $\mathcal{X}$ найдется циклический подмодуль $0 \neq W \leq M$ такой, что для любого циклического подмодуля $0 \neq aRL \leq W$ и любой подгруппы $X \in \mathcal{X}(aRL)$ подмодуль aRL – без RX -кручения. Пусть $X \in \mathcal{X}$; нетрудно показать, что $M_X = \{a \in M : \text{Ann}_{RX}(a) \neq 0\}$ – RX -подмодуль в M , а так как X – L -подгруппа в L , то M_X – RL -подмодуль в M . Итак, если $M_X \neq 0$, то, заменив M на M_X , можно считать, что $X \notin \mathcal{X}(S)$ для любого циклического подмодуля $0 \neq S \leq M$. Тогда W существует, так как $|\mathcal{X}| < \infty$.

Пусть $X \in \mathcal{MX}(W)$; тогда по лемме 2.2.4(ii) существует $RL(RX)^{-1}$ -модуль $W(RX)^{-1}$, и из максимальности подгруппы X следует, что $W(RX)^{-1}$ имеет конечную размерность над телом $RX(RX)^{-1}$. Следовательно, $W(RX)^{-1}$ содержит простой $RL(RX)^{-1}$ -подмодуль D . Очевидно, $V = D \cap W \neq 0$. Пусть $0 \neq a \in V$, тогда $D = aRL(RX)^{-1}$ – простой $RL(RX)^{-1}$ -модуль.

Пусть Y – подгруппа в L такая, что $K \leq Y$. Положим $T = \{x \in aRL(RX)^{-1} : \text{Ann}_{RY}(a) \neq 0\}$; тогда поскольку Y – нормальная подгруппа в L , то T – подмодуль в $aRL(RX)^{-1}$. Так как $D = aRL(RX)^{-1}$ – простой модуль, то либо $T = 0$, либо $T = D$. Таким образом, модуль V – либо без RY -кручения, либо RY -периодический.

(ii) Пусть V удовлетворяет (i), пусть $0 \neq a \in V$ и $X \in \mathcal{MX}(aRL)$. В силу (i) aRL – без RX -кручения, следовательно, по лемме 2.2.4(ii) существует $RL(RX)^{-1}$ -модуль $aRL(RX)^{-1}$, и из максимальности X легко следует, что $aRL(RX)^{-1}$ – конечномерное пространство над телом $RX(RX)^{-1}$. Тогда элемент a можно выбрать так, что $aRL(RX)^{-1}$ – простой $RL(RX)^{-1}$ -модуль. Пусть $0 \neq T$ – подмодуль в aRL и H – конечно порожденная плотная подгруппа в L . Так как $aRL(RX)^{-1}$ – простой $RL(RX)^{-1}$ -модуль, то легко видеть, что $T \cap aRX \neq 0$. Следовательно, так как $H \cap X$ – плотная подгруппа в X , то из леммы 2.2.3(ii) следует, что $T \cap aR(H \cap X) \neq 0$.

(iii) Пусть V удовлетворяет (ii) и H – f.g.d.-подгруппа в L . В силу (ii) найдутся элемент $0 \neq a \in V$ и подгруппа $X \in \mathcal{MX}(aRL)$ такие, что $T \cap aR(H \cap X) \neq 0$ для любого подмодуля $0 \neq T \leq aRL$. Очевидно, элемент a можно выбрать так, что модуль aRH – ρ -критический. Тогда так как $T \cap aRH \neq 0$, то легко заметить, что $LK_{RL}(aRL/T) < LK_{RL}(aRL)$ для любого подмодуля $0 \neq T \leq aRL$. Итак, модуль aRL локально критический, а значит, по лемме 2.5.2(ii) он однородный.

Положим $V = aRL$; очевидно, V – локально критический и, значит, V удовлетворяет условиям (i)–(iii).

В обозначениях предыдущей леммы будем говорить, что элемент $0 \neq a \in M$ является *RL-критическим*, если

- (i) aRL – локально критический RL -модуль,
- (ii) для любой подгруппы $Y \leq L$ такой, что $K \leq Y$, модуль aRL – либо без RY -кручения, либо RY -периодический.

Аргументы предыдущей леммы показывают, что любой RL -модуль без RK -кручения имеет RL -критические элементы.

Нетрудно показать, что если элемент a – RL -критический, то любой элемент $0 \neq b \in aRL$ также RL -критический. По лемме 2.5.3(ii) модуль aRL – без RX -кручения, если $X \in \mathcal{X}(aRL)$, и RY -периодический, если $Y \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{X}(aRL)$. Отсюда следует, что $\mathcal{X}(aRL) = \mathcal{X}(bRL)$ и $r(aRL) = r(bRL)$ для любого элемента $0 \neq b \in aRL$.

ЛЕММА 2.5.4. *Используя приведенные выше обозначения, предположим, что $L = KN$, где N – плотная подгруппа в L . Пусть a – RL -критический элемент из M такой, что $aRL = aRN \otimes_{RN} RL$. Тогда элемент a является также и RN -критическим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как N – плотная подгруппа в L и $aRL = aRN \otimes_{RN} RL$, то легко видеть, что aRN – локально критический RN -модуль.

Пусть $T = N \cap K$ и X – подгруппа в N такая, что $T \leq X$, тогда X – плотная подгруппа в $Y = KX$. Предположим, что aRN имеет RX -кручение, тогда модуль aRL имеет RY -кручение и, значит, модуль aRL – RY -периодический. Тогда для любого элемента $0 \neq x \in aRN$ найдется элемент $0 \neq y \in RY$ такой, что $xy = 0$. По лемме 2.2.3(ii) $yRY \cap RX \neq 0$ и, следовательно, существует элемент $0 \neq z \in RX$ такой, что $xz = 0$. Таким образом, модуль aRN является RX -периодическим.

2.6. Простой спектр аннуляторов фактормодулей над минимаксными нильпотентными группами. Ниже используются некоторые методы, введенные Бруксом в [6; §5]. Пусть R – коммутативное кольцо, P – простой идеал в R и R_P – локализация кольца R по идеалу P . Пусть W – R -модуль, носитель $\text{Supp } W$ модуля W состоит из простых идеалов $P \leq R$, для которых $W_P = W \otimes_R R_P \neq 0$ (см. [23; гл. II, §4.4]). По [23; гл. IV, §1.4] если R и W – нётеровы, то множество $\mathcal{M}(W)$ минимальных элементов из $\text{Supp } W$ конечно и состоит из простых идеалов кольца R , минимальных над $\text{Ann}_R(W)$, $\mathcal{M}(W)$ также совпадает с множеством минимальных простых идеалов, ассоциированных с W .

Пусть N – нильпотентная группа и K – ее N -подгруппа такая, что факторгруппа N/K – абелева без кручения конечного ранга. Пусть $\mathbb{k}$ – поле и I – N -крупный идеал кольца $\mathbb{k}K$. Тогда N/I^+ – расширение конечной группы с помощью абелевой и, следовательно, N/I^+ содержит характеристическую центральную подгруппу A конечного индекса.

Пусть $W = a\mathbb{k}L$ – циклический $\mathbb{k}N$ -модуль, тогда W/WI можно рассматривать как $\mathbb{k}A$ -модуль, и поскольку A – подгруппа конечного индекса в N/I^+ , то W/WI – конечно порожденный $\mathbb{k}A$ -модуль. Предположим, что существует плотная подгруппа $L \leq N$ такая, что $K \leq L$, факторгруппа L/K – конечно

порожденная и $W = a\mathbb{k}N = U \otimes_{K/L} \mathbb{k}N$, где $a\mathbb{k}L = U$. Тогда факторгруппа L/K – свободная абелева со свободными порождающими $Kx_1, Kx_2, \dots, Kx_n$. Пусть $\mathcal{X} = \{\langle K, \{x_j\}_{j \in J} \rangle : J \subseteq \{1, \dots, n\}\}$ – полная система подгрупп над K . Пусть V – $\mathbb{k}K$ -модуль такой, что U – образ модуля $V \otimes_{\mathbb{k}K} \mathbb{k}L$ при $\mathbb{k}L$ -модульном гомоморфизме α . Положим $\mathcal{X}(U) = \{X \in \mathcal{X} : \ker \alpha \cap (V \otimes_{\mathbb{k}K} \mathbb{k}X) = 0\}$, $r(U) = \max\{r(X/K) : X \in \mathcal{X}(U)\}$ и $\mathcal{MX}(U) = \{X \in \mathcal{X}(U) : r(X/K) = r(U)\}$.

Пусть $B = A \cap L/I^+$; очевидно, B – f.g.d.-подгруппа в A и центральная подгруппа конечного индекса в L/I^+ . Тогда U/UI – конечно порожденный и, значит, нётеров $\mathbb{k}B$ -модуль, так как $\mathbb{k}B$ – нётерово кольцо. Обозначим через $\mathcal{P}(U/UI)$ подмножество простых идеалов $P \in \mathcal{M}(U/UI)$ максимальной размерности и обозначим через $d(U/UI)$ эту размерность, если $\mathcal{M}(U/UI) \neq \emptyset$, т.е. $U/UI \neq 0$, а если $U/UI = 0$, то положим $d(U/UI) = -1$. Нетрудно показать, что $d(U/UI)$ не зависит от выбора центральной подгруппы B конечного индекса в L/I^+ . Очевидно, $\mathcal{P}(U/UI) = \mathcal{P}(\mathcal{J})$ (см. п. 2.3), где $\mathcal{J} = \text{Ann}_{\mathbb{k}B}(U/UI)$. Положим $\mathcal{L}\mathcal{P}(W/WI) = \mathcal{L}\mathcal{P}(\mathcal{J})$, где $\mathcal{J} = \text{Ann}_{\mathbb{k}A}(W/WI)$. Пусть $d(W/WI) = \dim \mathcal{L}\mathcal{P}(\mathcal{J})$, из леммы 2.3.1(i) следует, что $d(W/WI) = d(U/UI)$.

ЛЕММА 2.6.1. Пусть L – нильпотентная группа без кручения конечного ранга, K – ее L -подгруппа, определяющая свободную абелеву факторгруппу L/K , $\mathbb{k}$ – поле и M – $\mathbb{k}L$ -модуль без $\mathbb{k}K$ -кручения. Пусть $0 \neq a \in M$ и предположим, что для любой подгруппы $X \leq L$ такой, что $K \leq X$ и $\text{Ann}_{\mathbb{k}X}(a) = 0$, модуль $a\mathbb{k}L$ не имеет $\mathbb{k}X$ -кручения. Тогда:

- (i) $r(a\mathbb{k}L)$ не зависит от выбора полной системы $\mathcal{X}$ подгрупп над K ;
- (ii) если элемент a – $\mathbb{k}L$ -критический, то $r(a\mathbb{k}L) = r(X/K)$ для любой изолированной подгруппы $X \leq L$ такой, что $K \leq X$ и подгруппа X является максимальной относительно свойства $\text{Ann}_{\mathbb{k}X}(a) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}_1$ – две полные системы подгрупп над K , и пусть $r = r(a\mathbb{k}L)$ относительно системы $\mathcal{X}$ и $r_1 = r(a\mathbb{k}L)$ относительно системы $\mathcal{X}_1$. Нетрудно показать существование f.g.d.-подгруппы $H \leq L$ такой, что $r = r(a\mathbb{k}H)$ относительно системы $\widehat{\mathcal{X}}$, а $r_1 = r(a\mathbb{k}H)$ относительно системы $\widehat{\mathcal{X}}_1$, где полные системы $\widehat{\mathcal{X}}$ и $\widehat{\mathcal{X}}_1$ подгрупп над $H \cap K$ получены пересечением $\mathcal{X}$ и $\mathcal{X}_1$ с H . Таким образом, можно считать, что группа L конечно порожденная.

Пусть $X \in \mathcal{MX}(a\mathbb{k}L)$ и $Y \in \mathcal{MX}_1(a\mathbb{k}L)$; тогда из определения $\mathcal{MX}$ и $\mathcal{MX}_1$ следует существование свободных порождающих $\{x_i X\}$ факторгруппы L/X и свободных порождающих $\{y_j Y\}$ факторгруппы L/Y таких, что $\text{Ann}_{\mathbb{k}L}(a) \cap \mathbb{k}\langle x_i X \rangle \neq 0$ и $\text{Ann}_{\mathbb{k}L}(a) \cap \mathbb{k}\langle y_j Y \rangle \neq 0$ для всех i, j . Очевидно, существует конечно порожденная область поля $S \leq \mathbb{k}$ такая, что $\text{Ann}_{SL}(a) \cap S\langle x_i X \rangle \neq 0$ и $\text{Ann}_{SL}(a) \cap S\langle y_j Y \rangle \neq 0$ для всех i, j . Поскольку модуль aSL не имеет SX -кручения и SY -кручения, то из леммы 2.2.2(iii) следует, что aSL содержит ρ -критический подмодуль U , где $\rho = \dim S + r$, а U содержит ρ -критический подмодуль, где $\rho = \dim S + r_1$, и, следовательно, $r = r_1$.

(ii) Очевидно, существует полная система $\mathcal{X}$ подгрупп над K такая, что $X \in \mathcal{X}$. Тогда утверждение следует из (i).

ЛЕММА 2.6.2. Пусть L – минимаксная нильпотентная группа без кручения, K – ее L -подгруппа, определяющая свободную абелеву факторгруппу L/K , $\mathbb{k}$ – поле и W – циклический $\mathbb{k}L$ -модуль без $\mathbb{k}K$ -кручения. Пусть I –

L -крупный идеал в $\mathbb{K}K$ такой, что $W \neq WI$, тогда для любого циклического подмодуля $W_1 \leq W$:

- (i) $\text{Supp } W_1/W_1I \subseteq \text{Supp } W/WI$;
- (ii) $d(W_1/W_1I) \leq d(W/WI)$;
- (iii) если $d(W_1/W_1I) = d(W/WI)$, то $\mathcal{P}(W_1/W_1I) \subseteq \mathcal{P}(W/WI)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Рассмотрим сначала случай, когда группа L конечно порожденная. Пусть F/I^+ – центр факторгруппы K/I^+ ; так как $|F/I^+| < \infty$, то $|L : H| < \infty$, где $H = C_L(F/I^+)$. Очевидно, I – H -центральный H -крупный идеал кольца $\mathbb{K}K$. Так как $|L : H| < \infty$, то можно выбрать центральную подгруппу без кручения A конечного индекса в L/I^+ и такую, что $A \leq H/I^+$.

Поскольку $|L : H| < \infty$, то W – конечно порожденный $\mathbb{K}H$ -модуль, и из леммы 2.3.1 следует, что $\mathbb{K}A$ -модуль W_1/W_1I обладает конечным рядом, в котором каждый фактор изоморфен некоторой секции $\mathbb{K}A$ -модуля W/WI . Тогда утверждение следует из [23; гл. II, §4, предложение 16].

Рассмотрим общий случай. Предположим, что $W = a\mathbb{K}L$ и $W_1 = b\mathbb{K}L$, где $b \in a\mathbb{K}L$. По лемме 2.5.3(i) найдется f.g.d.-подгруппа $H \leq L$ такая, что $W = a\mathbb{K}H \otimes_{\mathbb{K}H} \mathbb{K}L$. Очевидно, H можно выбрать так, что $b \in a\mathbb{K}H$ и H удовлетворяет условиям леммы 2.1.7. Тогда $W_1 = b\mathbb{K}H \otimes_{\mathbb{K}H} \mathbb{K}L$ и утверждение следует из леммы 2.2.6.

(ii) Если $W_1/W_1I = 0$, то $d(W_1/W_1I) = -1$, и утверждение очевидно. Таким образом, можно считать, что $W_1/W_1I \neq 0$, т.е. $\text{Supp } W_1/W_1I \neq \emptyset$. В силу (i) $\text{Supp } W_1/W_1I \subseteq \text{Supp } W/WI$, и, значит, для любого $P \in \mathcal{P}(W_1/W_1I)$ существует $P_1 \in \mathcal{M}(W/WI)$ такой, что $P_1 \leq P$. Тогда $\dim P_1 \geq \dim P$, т.е. $d(W_1/W_1I) \leq d(W/WI)$.

(iii) Как отмечалось выше, для любого $P \in \mathcal{P}(W_1/W_1I)$ найдется $P_1 \in \mathcal{M}(W/WI)$ такой, что $P_1 \leq P$. Если $d(W_1/W_1I) = d(W/WI)$, то $\dim P_1 = \dim P$ и, значит, $P_1 = P$. Итак, $P \in \mathcal{M}(W/WI)$, а так как $d(W_1/W_1I) = d(W/WI)$, то $P \in \mathcal{P}(W/WI)$. Отметим, что поскольку $d(W/WI)$ не зависит от выбора центральной подгруппы A конечного индекса в L/I^+ , то соотношение $\mathcal{P}(W_1/W_1I) \subseteq \mathcal{P}(W/WI)$ будет выполняться при любом выборе подгруппы A .

ЛЕММА 2.6.3. Пусть H – конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, K – ее H -подгруппа, определяющая свободную абелеву факторгруппу H/K , и $\mathcal{X}$ – полная система подгрупп над K . Пусть $\mathbb{K}$ – поле; W – циклический $\mathbb{K}H$ -модуль такой, что для любой подгруппы $X \in \mathcal{M}\mathcal{X}(W)$ модуль W – без $\mathbb{K}X$ -кручения; Z – группа, представимая в виде $Z = YH$, где Y – ее Z -подгруппа такая, что $Y \cap H = K$ и $|Z : H| < \infty$; W' – циклический $\mathbb{K}Z$ -модуль такой, что $W' = W \otimes_{\mathbb{K}H} \mathbb{K}Z$ и $V \cap W \neq 0$ для любого подмодуля $0 \neq V \leq W'$. Тогда $\mathbb{K}K$ содержит правый идеал J такой, что если I – H -крупный идеал кольца $\mathbb{K}K$, выделяющий J , то:

- (i) $d(W/WI) = d(V/VI) = r(W)$ для любого циклического подмодуля $0 \neq V \leq W$;
- (ii) $\dim_{\mathbb{K}} W/WI < \infty$, если $r(W) = 0$;
- (iii) если T – Z -крупный идеал кольца $\mathbb{K}Y$ такой, что $T \cap \mathbb{K}K \geq I$, то $d(W'/W'T) = d(V'/V'T) = r(W')$ для любого циклического подмодуля $0 \neq V' \leq W'$;

- (iv) если B – центральная подгруппа без кручения конечного индекса в H/I^+ , $X \in \mathcal{X}$, $B_X = B \cap X/I^+$ и $\mathbb{K}B_X \cap P = 0$ для некоторого $P \in \mathcal{P}(W)$, то $X \in \mathcal{X}(W)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X \in \mathcal{MX}(W)$, тогда модуль W не имеет $\mathbb{K}X$ -кручения, и, следовательно, по лемме 2.2.4(ii) существует Q -модуль $W(\mathbb{K}X)^{-1}$, где $Q = \mathbb{K}X(\mathbb{K}X)^{-1}$. Из максимальности подгруппы X следует, что $\dim_Q W(\mathbb{K}X)^{-1} < \infty$. Тогда нетрудно показать существование конечно порожденного свободного существенного $\mathbb{K}X$ -подмодуля $U \leq W$.

Следующие два абзаца доказательства в значительной мере опираются на результаты Брукса [6]. Хотя в [6] кольцо коэффициентов $\mathbb{K}$ предполагается абсолютно гильбертовым, упоминаемые здесь результаты этой работы справедливы и для случая, когда $\mathbb{K}$ – поле. В начале доказательства леммы 14 из [6] показано существование подмодуля (правого идеала) $J_1 \leq \mathbb{K}K$, свободного $\mathbb{K}K$ -подмодуля $F \leq W$ и возрастающей цепочки:

$$U \oplus F = W_1 \leq \dots \leq W_\lambda \leq W_{\lambda+1} \leq \dots \leq W$$

$\mathbb{K}K$ -подмодулей модуля W таких, что любой H -крупный идеал I кольца $\mathbb{K}K$, выделяющий J_1 , также выделяет аннулятор модуля $W_{\lambda+1}/W_\lambda$ в $\mathbb{K}K$ для каждого λ . Следовательно, $(W_{\lambda+1}/W_\lambda)I^n = W_{\lambda+1}/W_\lambda$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого λ . По лемме 2.4.1(i) $I\mathbb{K}X$ – полицентральный идеал кольца $\mathbb{K}X$. Тогда согласно [16] для идеала $I\mathbb{K}X$ справедлива лемма Артина–Рисса и, значит, эта лемма справедлива для идеала $(I\mathbb{K}X)^n = I^n\mathbb{K}X$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Тогда аргументы доказательства леммы 14 из [6] показывают, что $WI^n \cap W_1 = W_1I^n$, а так как F – свободный $\mathbb{K}K$ -модуль, то $WI^n \cap U = UI^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как $(W_{\lambda+1}/W_\lambda)I = W_{\lambda+1}/W_\lambda$ для каждого λ , то $(W/W_1)I = W/W_1$.

Из [6; лемма 8] следует существование подмодуля (правого идеала) $J_2 \leq \mathbb{K}K$ такого, что $d(W/WI) = r(W)$ для любого H -крупного идеала $I \leq \mathbb{K}K$, выделяющего J_2 (см. [6; второй абзац после леммы 8]). Пусть $J = J_1 \cap J_2$ и I – H -крупный идеал кольца $\mathbb{K}K$, выделяющий подмодуль J ; по [6; лемма 6] I выделяет J_1 и J_2 .

(i) Убедимся, что $d(W/WI) = d(V/VI)$ для любого циклического подмодуля $0 \neq V \leq W$. Ввиду леммы 2.6.2(ii) достаточно показать, что $d(W/WI) \leq d(V/VI)$, т.е. что модуль V/VI не является $\mathbb{K}A_X$ -периодическим, где $A_X = A \cap X/I^+$ и A – центральная подгруппа без кручения конечного индекса в H/I^+ . При этом можно считать, что $A \cap K/I^+ = 1$.

Так как по лемме 2.6.2 $d(V_1/V_1I) \leq d(V/VI)$ для любого циклического подмодуля $0 \neq V_1 \leq V$, то V можно заменить любым циклическим подмодулем $0 \neq V_1 \leq V$, в частности можно считать, что $V = a\mathbb{K}H$, где $0 \neq a \in U_1 = U \cap V$.

Так как U – свободный $\mathbb{K}K$ -модуль, то $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} UI^n = 0$. Тогда существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $U_1 \leq UI^{m-1}$ и U_1 не содержится в UI^m . Следовательно, $U_1/(U_1 \cap UI^m) \simeq (U_1 + UI^m)/UI^m$ – ненулевой подмодуль в $UI^{m-1}/UI^m \simeq \bigoplus_{i=1}^t (\mathbb{K}X I^{m-1}/\mathbb{K}X I^m)_i$.

Теперь покажем, что модуль $S = \mathbb{K}X I^{m-1}/\mathbb{K}X I^m$ – без $\mathbb{K}A_X$ -кручения и, следовательно, таким же является модуль UI^{m-1}/UI^m . Очевидно, $S = (I^{m-1}/I^m) \otimes_{\mathbb{K}C} \mathbb{K}B$, где $C = K/I^+$ и $B = X/I^+$; тогда так как $A \cap C = 1$, то модуль S – без $\mathbb{K}A_X$ -кручения.

Итак, модуль $U_1/(U_1 \cap UI^m)$ – без $\mathbb{K}A_X$ -кручения. Так как $WI^m \cap U = UI^m$, то $U_1 \cap WI^m = U_1 \cap UI^m$ и, значит, модуль $U_1/(U_1 \cap WI^m)$ – без $\mathbb{K}A_X$ -кручения. Так как $U_1 \leq UI^{m-1}$ и V порожден элементом из U_1 , то $V \leq WI^{m-1}$ и, значит, $VI \leq WI^m$. Отсюда $U_1 \cap VI \leq U_1 \cap WI^m$, а так как модуль $U_1/(U_1 \cap WI^m)$ – без $\mathbb{K}A_X$ -кручения, то модуль $U_1/(U_1 \cap VI) \simeq (U_1 + VI)/VI \leq V/VI$ не является $\mathbb{K}A_X$ -периодическим.

(ii) Так как $(W/W_1)I = (W/W_1)$, то $WI + W_1 = W$ и, следовательно, $W/WI \simeq W_1/(W_1 \cap WI) = W_1/W_1I$. Если $r(W) = 0$, то нетрудно показать, что W_1 – конечно порожденный свободный $\mathbb{K}K$ -модуль и, следовательно, $\dim_{\mathbb{K}} W/WI < \infty$.

(iii) Так как $W' = W \otimes_{\mathbb{K}H} \mathbb{K}Z$, то нетрудно показать, что $YX \in \mathcal{MX}(W')$ и модуль W' – без $\mathbb{K}(YX)$ -кручения. Кроме того, можно получить цепочку подмодулей:

$$W'_1 \leq \dots \leq W'_\lambda \leq W'_{\lambda+1} \leq \dots \leq W',$$

где $W'_\lambda = W_\lambda \otimes_{\mathbb{K}H} \mathbb{K}Z$, $W'_1 = (U \oplus F) \otimes_{\mathbb{K}H} \mathbb{K}Z = (U \otimes_{\mathbb{K}H} \mathbb{K}Z) \oplus (F \otimes_{\mathbb{K}H} \mathbb{K}Z)$ и $U \otimes_{\mathbb{K}H} \mathbb{K}Z$ – конечно порожденный свободный $\mathbb{K}(YX)$ -модуль такой, что $(U \otimes_{\mathbb{K}H} \mathbb{K}Z) \cap V \neq 0$ для любого подмодуля $0 \neq V \leq W'$. Так как $T \cap \mathbb{K}H \geq I$ и $(W_{\lambda+1}/W_\lambda)I = W_{\lambda+1}/W_\lambda$, то легко видеть, что $(W'_{\lambda+1}/W'_\lambda)T = W'_{\lambda+1}/W'_\lambda$ и, следовательно, $(W'_{\lambda+1}/W'_\lambda)T^n = W'_{\lambda+1}/W'_\lambda$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого λ . Тогда можно повторить аргументы доказательства утверждения (i).

(iv) Аргументы доказательства этого утверждения можно найти в [6; с. 100]. Пусть Q_X – поле частных кольца $\mathbb{K}B_X$. Из [6; леммы 6 и 8] следует, что подмодуль J можно выбрать так, что для любой подгруппы $X \in \mathcal{X}$ и любого H -крупного идеала I кольца $\mathbb{K}K$, выделяющего J , соотношение $(W/WI) \otimes_{\mathbb{K}B_X} Q_X \neq 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $X \in \mathcal{X}(W)$. Так как $P \in \text{Supp } W/WI$, то $(W/WI) \otimes_{\mathbb{K}A} \mathbb{K}B_P \neq 0$, где $\mathbb{K}B_P$ – локализация $\mathbb{K}B$ по идеалу P . Так как $\mathbb{K}B_X \cap P = 0$, то $Q_X \leq B_P$ и, значит, $(W/WI) \otimes_{\mathbb{K}B_X} Q_X \neq 0$, откуда следует, что $X \in \mathcal{X}(W)$.

ЛЕММА 2.6.4. Пусть G – разрешимая группа конечного свободного ранга, K и N – ее нильпотентные минимаксные G -подгруппы без кручения такие, что $K \leq N$. Пусть L – подгруппа в N такая, что $K \leq L$ и факторгруппа L/K свободная абелева. Пусть $\mathbb{K}$ – конечно порожденное поле, M – $\mathbb{K}L$ -модуль без $\mathbb{K}K$ -кручения и a – $\mathbb{K}L$ -критический элемент из M . Тогда существует G -крупный N -центральный идеал I кольца $\mathbb{K}K$ такой, что:

- (i) $d(W/WI) = d(a\mathbb{K}L/a\mathbb{K}LI) = r(a\mathbb{K}L)$ и $\mathcal{P}(W/WI) \supseteq \mathcal{P}(W_1/W_1I)$ для любых ненулевых циклических подмодулей W и W_1 модуля $a\mathbb{K}L$ таких, что $W \geq W_1$;
- (ii) существует $\mathbb{K}L$ -критический элемент $b \in a\mathbb{K}L$ такой, что $\mathcal{P}(V/VI) = \mathcal{P}(b\mathbb{K}L/b\mathbb{K}LI)$ для любого циклического подмодуля $0 \neq V \leq b\mathbb{K}L$, причем $\dim_{\mathbb{K}} V/VI < \infty$, если $r(a\mathbb{K}L) = 0$;
- (iii) если $G = N$ и группа G обладает G -подгруппами Z и Y такими, что $Z = YL$, $Y \cap L = K$, $|Z : L| < \infty$ и $a\mathbb{K}Z = a\mathbb{K}L \otimes_{\mathbb{K}L} \mathbb{K}Z$, причем элемент a является также $\mathbb{K}Z$ -критическим, и если T – G -крупный идеал кольца $\mathbb{K}Y$ такой, что $T \cap \mathbb{K}K \geq I$, то $d(W/WT) = d(a\mathbb{K}Z/a\mathbb{K}ZT) = r(a\mathbb{K}Z)$ и $\mathcal{P}(W/WT) \supseteq \mathcal{P}(W_1/W_1T)$ для любых циклических подмодулей $0 \neq W_1, W \leq a\mathbb{K}Z$ таких, что $W \geq W_1$;

- (iv) если B – центральная подгруппа без кручения конечного индекса в L/I^+ , $\mathcal{X}$ – полная система подгрупп из L над K , $X \in \mathcal{X}$, $B_X = B \cap X/I^+$ и $\mathbb{k}B_X \cap P = 0$ для некоторого $P \in \mathcal{P}(\mathbb{k}L)$, то $X \in \mathcal{X}(\mathbb{k}L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) По лемме 2.2.5 существует f.g.d.-подгруппа $H \leq L$ такая, что $L = KH$ и $\mathbb{k}L = \mathbb{k}H \otimes_{\mathbb{k}H} \mathbb{k}L$. Очевидно, подгруппу H можно выбрать так, что она удовлетворяет условиям леммы 2.1.7 и $r(\mathbb{k}H) = r(\mathbb{k}L)$, где $r(\mathbb{k}H)$ определяется относительно полной системы $\widehat{\mathcal{X}}$ подгрупп из H над $H \cap K$. По лемме 2.5.4 элемент a – $\mathbb{k}H$ -критический и, значит, модуль $\mathbb{k}H$ – без $\mathbb{k}X$ -кручения для любой подгруппы $X \in \widehat{\mathcal{M}\mathcal{X}}(\mathbb{k}H)$. Тогда по лемме 2.6.3(i) существует правый идеал $J \leq \mathbb{k}(K \cap H)$ такой, что если $\widehat{I}$ – H -крупный идеал, выделяющий J в $\mathbb{k}(K \cap H)$, то $d(V/V\widehat{I}) = d(\mathbb{k}H/\mathbb{k}H\widehat{I}) = r(\mathbb{k}H)$ для любого циклического подмодуля $0 \neq V \leq \mathbb{k}H$. По предложению 2.4.3 существует N -центральный G -крупный идеал I кольца $\mathbb{k}K$ такой, что $\widehat{I} = I \cap \mathbb{k}H$ выделяет J и, очевидно, $\widehat{I}$ – H -крупный идеал кольца $\mathbb{k}(H \cap K)$. Тогда так как подгруппа H удовлетворяет условиям леммы 2.1.7 и $r(\mathbb{k}H) = r(\mathbb{k}L)$, то из леммы 2.2.6 следует, что $d(\mathbb{k}L/\mathbb{k}LI) = d(\mathbb{k}H/\mathbb{k}H\widehat{I}) = r(\mathbb{k}H) = r(\mathbb{k}L)$.

Так как $\mathbb{k}L$ – локально критический $\mathbb{k}L$ -модуль, то легко видеть, что $W \cap \mathbb{k}H \neq 0$. Пусть $0 \neq b \in W \cap \mathbb{k}H$, тогда $b\mathbb{k}L = b\mathbb{k}H \otimes_{\mathbb{k}H} \mathbb{k}L$. По лемме 2.6.3(i) $d(b\mathbb{k}H/b\mathbb{k}H\widehat{I}) = d(\mathbb{k}H/\mathbb{k}H\widehat{I}) = r(\mathbb{k}H)$ и, следовательно, по лемме 2.2.6 $d(b\mathbb{k}L/b\mathbb{k}LI) = r(\mathbb{k}H) = r(\mathbb{k}L)$. Тогда так как $b\mathbb{k}L \leq W \leq \mathbb{k}L$, то из леммы 2.6.2(ii) следует, что $d(W/WI) = d(\mathbb{k}L/\mathbb{k}LI) = r(\mathbb{k}L)$, и утверждение вытекает из леммы 2.6.2(iii).

(ii) Из (i) и конечности $\mathcal{P}(W/WI)$ следует существование $\mathbb{k}L$ -критического элемента $b \in \mathbb{k}L$ такого, что $\mathcal{P}(V/VI) = \mathcal{P}(b\mathbb{k}L/b\mathbb{k}LI)$ для любого циклического подмодуля $0 \neq V \leq b\mathbb{k}L$.

Предположим, что $r(\mathbb{k}L) = 0$. Пусть H – f.g.d.-подгруппа в L из (i), тогда $r(\mathbb{k}H) = 0$. По лемме 2.6.3(ii) $\dim_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}H/\mathbb{k}H\widehat{I}) < \infty$, и из леммы 2.2.6 следует, что $\dim_{\mathbb{k}}(\mathbb{k}L/\mathbb{k}LI) < \infty$, а из леммы 2.4.2 получаем, что $\dim_{\mathbb{k}}(V/VI) < \infty$ для любого циклического подмодуля $V \leq \mathbb{k}L$.

(iii) Так как $|Z : L| < \infty$, то легко показать существование f.g.d.-подгруппы $Z_1 \leq Z$ такой, что $Z = KZ_1$, $H \leq Z_1$, $Z_1 = K_1H$, где $K_1 \leq K$, $|Z_1 : H| < \infty$ и $W' = \mathbb{k}Z_1 = \mathbb{k}H \otimes_{\mathbb{k}H} \mathbb{k}Z_1$. Очевидно, $T_1 \cap \mathbb{k}(H \cap K) \geq \widehat{I}$, где $T_1 = T \cap \mathbb{k}Z_1$ и $\widehat{I} = I \cap \mathbb{k}(H \cap K)$. Тогда по лемме 2.6.3(ii) $d(W'/W'T_1) = d(V'/V'T_1) = r(W')$ для любого циклического подмодуля $0 \neq V' \leq W'$. Таким образом, так как элемент a – $\mathbb{k}Z$ -критический, то можно использовать аргументы из (i).

(iv) Очевидно, подгруппу H можно выбрать так, что существует полная система $\mathcal{Y}$ подгрупп из H над $K \cap H$ такая, что $X \in \mathcal{X}(\mathbb{k}L)$ тогда и только тогда, когда $X = KY$, где $Y \in \mathcal{Y}(\mathbb{k}H)$. Теперь утверждение следует из леммы 2.6.3(iv) и леммы 2.2.6.

Пусть N – группа, R – область целостности, и пусть $W = aRN$ – циклический RN -модуль. Будем говорить, что подгруппа $L \leq N$ контролирует W , если $W = (aRL) \otimes_{RL} RN$ и $U \cap aRL \neq 0$ для любого RN -подмодуля $0 \neq U \leq W$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.5. Пусть G – разрешимая группа конечного ранга, N и K – ее минимаксные нильпотентные G -подгруппы без кручения такие, что $K \leq N$ и факторгруппа N/K – абелева без кручения. Пусть $\mathbb{k}$ – конечно

порожденное поле и M – $\mathbb{k}N$ -модуль без $\mathbb{k}K$ -кручения. Предположим, что существуют плотная подгруппа $L \leq N$ и $\mathbb{k}L$ -критический элемент $x \in M$ такие, что $K \leq L$, факторгруппа L/K конечно порождена и подгруппа L контролирует $x\mathbb{k}N$. Тогда существуют $\mathbb{k}L$ -критический элемент $a \in x\mathbb{k}L$ и G -крупный N -центральный идеал I кольца $\mathbb{k}K$ такие, что:

- (i) $\mathcal{P}(a\mathbb{k}L/a\mathbb{k}LI) = \mathcal{P}(U/UI)$ для любого циклического подмодуля $0 \neq U \leq a\mathbb{k}L$ и $\dim_{\mathbb{k}}(a\mathbb{k}L/a\mathbb{k}LI) < \infty$, если $r(a\mathbb{k}L) = 0$;
- (ii) $r(a\mathbb{k}L) = d(a\mathbb{k}N/a\mathbb{k}NI)$ и $\mathcal{P}\mathcal{L}(a\mathbb{k}N/a\mathbb{k}NI) = \mathcal{P}\mathcal{L}(V/VI)$ для любого циклического подмодуля $0 \neq V \leq a\mathbb{k}N$;
- (iii) если B – центральная подгруппа без кручения конечного индекса в L/I^+ , $\mathcal{X}$ – полная система подгрупп из L над K , $X \in \mathcal{X}$, $B_X = B \cap X/I^+$ и $\mathbb{k}B_X \cap P = 0$ для некоторого $P \in \mathcal{P}(a\mathbb{k}L)$, то $X \in \mathcal{X}(a\mathbb{k}L)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i), (ii) По лемме 2.6.4(ii) существуют $\mathbb{k}L$ -критический элемент $a \in x\mathbb{k}L$ и G -крупный N -центральный идеал I кольца $\mathbb{k}K$ такие, что $\mathcal{P}(U/UI) = \mathcal{P}(a\mathbb{k}L/a\mathbb{k}LI)$ для любого циклического подмодуля $0 \neq U \leq a\mathbb{k}L$, причем $r(a\mathbb{k}L) = d(a\mathbb{k}L/a\mathbb{k}LI)$ и если $r(a\mathbb{k}L) = 0$, то $\dim_{\mathbb{k}}(a\mathbb{k}L/a\mathbb{k}LI) < \infty$. Так как элемент x – $\mathbb{k}L$ -критический, то модуль $x\mathbb{k}L$ – однородный, откуда следует, что L контролирует модуль $W = a\mathbb{k}N = a\mathbb{k}L \otimes_{\mathbb{k}L} \mathbb{k}N$.

Пусть $b\mathbb{k}N$ – циклический подмодуль в W , тогда существует подгруппа $X \leq N$ такая, что $|X : L| < \infty$ и $b \in a\mathbb{k}X$. Так как L контролирует модуль W , то $b\mathbb{k}N \cap a\mathbb{k}L \neq 0$, и, следовательно, существует подмодуль $c\mathbb{k}N \leq b\mathbb{k}N$, где $0 \neq c \in a\mathbb{k}L$. Итак, $c\mathbb{k}X \leq b\mathbb{k}X \leq a\mathbb{k}X$. Так как $d(a\mathbb{k}L/a\mathbb{k}LI) = d(c\mathbb{k}L/c\mathbb{k}LI)$ и L контролирует W , то нетрудно показать, что $d(a\mathbb{k}X/a\mathbb{k}XI) = d(c\mathbb{k}X/c\mathbb{k}XI)$. Из леммы 2.6.2(ii) следует, что $d(a\mathbb{k}X/a\mathbb{k}XI) = d(b\mathbb{k}X/b\mathbb{k}XI) = d(c\mathbb{k}X/c\mathbb{k}XI)$, и по лемме 2.6.2(iii) $\mathcal{P}(a\mathbb{k}X/a\mathbb{k}XI) \supseteq \mathcal{P}(b\mathbb{k}X/b\mathbb{k}XI) \supseteq \mathcal{P}(c\mathbb{k}X/c\mathbb{k}XI)$. Тогда из леммы 2.3.1(ii) следует, что $\mathcal{L}\mathcal{P}(a\mathbb{k}N/a\mathbb{k}NI) \supseteq \mathcal{L}\mathcal{P}(b\mathbb{k}N/b\mathbb{k}NI) \supseteq \mathcal{L}\mathcal{P}(c\mathbb{k}N/c\mathbb{k}NI)$. С другой стороны, так как $\mathcal{P}(a\mathbb{k}L/a\mathbb{k}LI) = \mathcal{P}(c\mathbb{k}L/c\mathbb{k}LI)$, то по лемме 2.3.1(ii) $\mathcal{L}\mathcal{P}(a\mathbb{k}N/a\mathbb{k}NI) = \mathcal{L}\mathcal{P}(c\mathbb{k}N/c\mathbb{k}NI)$ и, значит, $\mathcal{L}\mathcal{P}(a\mathbb{k}N/a\mathbb{k}NI) = \mathcal{L}\mathcal{P}(b\mathbb{k}N/b\mathbb{k}NI)$. Так как $r(a\mathbb{k}L) = d(a\mathbb{k}L/a\mathbb{k}LI)$, то нетрудно показать, что $r(a\mathbb{k}L) = d(a\mathbb{k}N/a\mathbb{k}NI)$.

(iii) Утверждение следует из леммы 2.6.4(iv).

Пусть N – нильпотентная минимаксная группа без кручения, K и L – ее нормальные подгруппы такие, что $K \leq L$ и $L/K = (Q/K) \times (S/K)$, где Q/K – квазициклическая p -группа, S/K – свободная абелева группа и Q/K – центральная подгруппа в N/K . Пусть $\mathbb{k}$ – поле, $\text{char } \mathbb{k} = 0$, и $a\mathbb{k}L = a\mathbb{k}S \otimes_{\mathbb{k}S} \mathbb{k}L$ – циклический $\mathbb{k}L$ -модуль без $\mathbb{k}Q$ -кручения.

Пусть I_1 – N -крупный N -центральный идеал кольца $\mathbb{k}K$ такой, что $I_1 = (I_1 \cap \mathbb{k}F)\mathbb{k}K$, где F/I_1^+ – центральная подгруппа в N/I_1^+ , а $I_1 \cap \mathbb{k}F$ – максимальный идеал в $\mathbb{k}F$. Тогда L/I_1^+ имеет характеристическую центральную подгруппу $A = C/I_1^+ \times B/I_1^+$ конечного индекса, где $C/I_1^+ \simeq Q/K$ и $B/I_1^+ \simeq S/K$.

Пусть ξ/I_1^+ – централизатор группы N в Q/I_1^+ ; очевидно, $F/I_1^+ \leq \xi/I_1^+$ и подгруппу C можно выбрать так, что $C/I_1^+ \leq \xi/I_1^+$. Тогда по лемме 2.3.2 существует N -инвариантный идеал I кольца $\mathbb{k}Q$ такой, что $I = (I \cap \mathbb{k}\xi)\mathbb{k}Q$, $I \cap \mathbb{k}K \geq I_1$ и $I \cap \mathbb{k}\xi = J$ – максимальный идеал кольца $\mathbb{k}\xi$, причем факторгруппа ξ/J^+ содержит квазициклическую подгруппу. Следовательно, $f = \mathbb{k}(C/I_1^+)/J\mathbb{k}(C/I_1^+)$ – поле и

$a\mathbb{k}L/a\mathbb{k}LI$ – конечно порожденный fD -модуль, где $D = B/I_1^+$. Тогда можно определить $\mathcal{P}_f(a\mathbb{k}L/a\mathbb{k}LI)$ как множество простых идеалов кольца fD , содержащих $\text{Ann}_{fD}(a\mathbb{k}L/a\mathbb{k}LI)$ и имеющих максимальную размерность. Эту размерность обозначим через $d_f(a\mathbb{k}L/a\mathbb{k}LI)$. Так как $a\mathbb{k}L = a\mathbb{k}S \otimes_{\mathbb{k}S} \mathbb{k}L$, то нетрудно показать, что $d_f(a\mathbb{k}L/a\mathbb{k}LI) = d(a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI_1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.6. Пусть N – нильпотентная минимаксная группа без кручения, K и L – ее N -подгруппы такие, что $K \leq L$ и $L/K = (Q/K) \times (S/K)$, где Q/K – центральная квазициклическая p -подгруппа в N/K и S/K – свободная абелева группа. Пусть $\mathbb{k}$ – конечно порожденное поле, $\text{char } \mathbb{k} = 0$, M – $\mathbb{k}L$ -модуль без $\mathbb{k}Q$ -кручения. Тогда существуют N -инвариантный идеал I кольца $\mathbb{k}Q$ и $\mathbb{k}L$ -критический элемент $a \in M$ такие, что $d_f(a\mathbb{k}L/a\mathbb{k}LI) = r(a\mathbb{k}L)$ и $\mathcal{P}_f(a\mathbb{k}L/a\mathbb{k}LI) = \mathcal{P}_f(V/VI)$ для любого циклического подмодуля $0 \neq V \leq a\mathbb{k}L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть b – $\mathbb{k}L$ -критический элемент модуля M . По лемме 2.5.3(i) существует f.g.d.-подгруппа $H \leq L$ такая, что $b\mathbb{k}L = b\mathbb{k}H \otimes_{\mathbb{k}H} \mathbb{k}L$. Заменив S на SH , можно считать, что $b\mathbb{k}L = b\mathbb{k}S \otimes_{\mathbb{k}S} \mathbb{k}L$, а по лемме 2.5.4 b – $\mathbb{k}S$ -критический элемент в M .

По лемме 2.6.4 существует N -крупный идеал I_1 кольца $\mathbb{k}K$ такой, что $d(W/WI_1) = d(b\mathbb{k}S/b\mathbb{k}SI_1) = r(b\mathbb{k}S)$ и $\mathcal{P}(W/WI_1) \supseteq \mathcal{P}(W_1/W_1I_1)$ для любых циклических подмодулей $0 \neq W, W_1 \leq b\mathbb{k}S$ таких, что $W \geq W_1$. По предложению 2.4.3(ii), (iii) идеал I_1 можно выбрать так, что $I_1 = (I_1 \cap \mathbb{k}F)\mathbb{k}N$, где $F \geq I_1^+$, F/I_1^+ – центральная подгруппа в N/I_1^+ и $I_1 \cap \mathbb{k}F$ – максимальный идеал кольца $\mathbb{k}F$. Тогда по лемме 2.3.2 существует N -инвариантный идеал I кольца $\mathbb{k}Q$, удовлетворяющий условиям $I = (I \cap \mathbb{k}\xi)\mathbb{k}Q$, $I \cap \mathbb{k}K \geq I_1$ и $I \cap \mathbb{k}\xi = J$ – максимальный идеал кольца $\mathbb{k}\xi$ такой, что ξ/J^+ содержит квазициклическую p -подгруппу, где ξ/I^+ – централизатор группы N в Q/I^+ . При этом L/I^+ имеет характеристическую центральную подгруппу $A = C/I^+ \times B/I^+$ конечного индекса, где $C/I^+ \simeq Q/K$ и $B/I^+ \simeq S/K$.

Очевидно, подгруппу L можно представить в виде объединения N -подгрупп $X \leq L$ таких, что $S \leq X$ и $|X/S| < \infty$. Тогда в каждой из подгрупп X/I^+ можно выбрать центральную характеристическую подгруппу A_X конечного индекса так, что A – объединение подгрупп A_X . Поскольку $I = (I \cap \mathbb{k}\xi)\mathbb{k}Q$, то $I \cap \mathbb{k}(X \cap Q) = I(X)$ – N -крупный идеал кольца $\mathbb{k}(X \cap Q)$ такой, что $I(X) \cap \mathbb{k}K \geq I_1$. По лемме 2.5.4 b – $\mathbb{k}X$ -критический элемент, тогда из леммы 2.6.4(iii) следует, что $\mathcal{P}(U/UI(X)) \supseteq \mathcal{P}(U_1/U_1I(X))$ для любых циклических подмодулей $0 \neq U_1, U \leq b\mathbb{k}X$ таких, что $U \geq U_1$, где $\mathcal{P}(U/UI(X))$ определяется относительно кольца $\mathbb{k}A_X$. Поскольку L – объединение подгрупп X , а A – объединение подгрупп A_X , то нетрудно показать, что $\mathcal{P}_f(W/WI) \supseteq \mathcal{P}_f(W_1/W_1I)$ для любых циклических подмодулей $0 \neq W_1, W \leq b\mathbb{k}L$ таких, что $W \geq W_1$. Так как $b\mathbb{k}L = b\mathbb{k}S \otimes_{\mathbb{k}S} \mathbb{k}L$, то легко видеть, что $d_f(b\mathbb{k}L/b\mathbb{k}LI) = d(b\mathbb{k}S/b\mathbb{k}SI_1) = r(b\mathbb{k}S) = r(b\mathbb{k}L)$. Тогда утверждение следует из конечности $\mathcal{P}_f(W/WI)$.

§ 3. Индуцированные модули над групповыми кольцами разрешимых групп конечного ранга

3.1. Сепараторы модулей. Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга, на которой действует группа операторов Γ , пусть $\mathbb{k}$ – поле и I – идеал

кольца $\mathbb{k}A$. Подгруппа $S_\Gamma(I) \leq \Gamma$, состоящая из элементов γ таких, что $I \cap \mathbb{k}B = I^\gamma \cap \mathbb{k}B$ для некоторой f.g.d.-подгруппы $B \leq A$, называется *стандартизатором* идеала I (см. [21]). Подгруппа $\text{Ser}_\Gamma(I) \leq S_\Gamma(I)$, порожденная элементами γ такими, что $\text{Sp}(I) \cap \text{Sp}(I^\gamma) \neq \emptyset$, где $\text{Sp}(I)$ – простой спектр идеала I , называется *сепаратором* I в G . Это определение эквивалентно определению сепаратора, которое было введено в [24] и которое предложил рецензент работы [24]. Свойства сепаратора рассматривались в [24], [4], [25].

Пусть R – кольцо, M , X и Y – R -модули. Будем говорить, что модули X и Y *сепарированы* в M , если X и Y не имеют ненулевых изоморфных секций, которые были бы изоморфны подмодулю в M . Модули X и Y называются *подобными*, если их инъективные оболочки изоморфны (см. [8]). Будем говорить, что подмодуль $X \leq M$ *твердый* в M , если X однородный и M не содержит подмодулей, изоморфных собственной секции модуля X .

Пусть $\mathbb{k}$ – поле, G – группа и A – G -подгруппа в G . Пусть M и W – $\mathbb{k}A$ -модули. Подгруппу $\text{Ser}_{(G,A)}(M, W) \leq G$, порожденную элементами g такими, что модули W и Wg не сепарированы в M , будем называть *сепаратором* модуля W в G . Очевидно, для любого элемента $h \in G$ такого, что $h \notin \text{Ser}_{(G,A)}(M, W)$, модули W и Wh сепарированы в M . Если поле $\mathbb{k}$ существенно в определении сепаратора, то будем использовать обозначение $\text{Ser}_{(G,\mathbb{k}A)}(M, W)$. Ниже будет показано, что $\text{Ser}_{(G,A)}(M, a\mathbb{k}A) \leq \text{Ser}_G(\text{Ann}_{\mathbb{k}A}(a))$, если A – абелева группа без кручения конечного ранга и элемент a выбран как в теореме 4.2 работы [4].

По лемме 3.2 работы [8] $\text{Stab}_G[W] = \{g \in G : Wg \text{ и } W \text{ подобны}\}$ – подгруппа в G , которую называют *стабилизатором* в G класса $[W]$ модулей, подобных W . Легко проверить, что $\text{Stab}_G[W] \leq \text{Ser}_{(G,A)}(M, W)$ и $\text{Stab}_G[W] = \text{Ser}_G(M, W)$, если подмодуль W твердый в M . Свойства $\text{Stab}_G[W]$ изучались Бруксом и Брауном в [8], а также Бруксом в [7]. Некоторые другие подходы к изучению индуцированных модулей рассмотрены Бруксом и Брауном в [26].

ЛЕММА 3.1.1. Пусть G – группа, Z , X , Y и L – ее подгруппы такие, что $Z \geq X \geq Y \geq L$, Y – X -подгруппа, а L – Z -подгруппа. Пусть $\mathbb{k}$ – поле, M – $\mathbb{k}Y$ -модуль, V и W – его подмодули такие, что $V \geq W$. Тогда $\text{Ser}_{(Z,L)}(M, W) \geq \text{Ser}_{(X,Y)}(V, W)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку всякая RY -секция в W является также и RL -секцией, то $\text{Ser}_{(X,L)}(V, W) \geq \text{Ser}_{(X,Y)}(V, W)$. Тогда из определения сепаратора следует, что $\text{Ser}_{(Z,L)}(V, W) \geq \text{Ser}_{(X,L)}(V, W)$ и, очевидно, $\text{Ser}_{(Z,L)}(M, W) \geq \text{Ser}_{(Z,L)}(V, W)$.

ЛЕММА 3.1.2. Пусть G – группа, A – ее G -подгруппа, $\mathbb{k}$ – поле и f – его подполе. Пусть M – $\mathbb{k}A$ -модуль, тогда $\text{Ser}_{(G,\mathbb{k}A)}(M, a\mathbb{k}A) \leq \text{Ser}_{(G,fA)}(M, afA)$ для любого $a \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in \text{Ser}_{(G,A)}(M, a\mathbb{k}A)$, причем $a\mathbb{k}A$ и $a\mathbb{k}Ag$ не сепарированы в M . Так как всякая $\mathbb{k}A$ -секция является и fA -секцией, то fA -модули $a\mathbb{k}A$ и $a\mathbb{k}Ag$ не сепарированы в M . Тогда существуют элементы $x, y \in \mathbb{k}A$ такие, что $axfA$ и $ayfAg$ обладают фактормодулями $axfA/X$ и $(ayfA/Y)g$, которые изоморфны fA -подмодулю $0 \neq S \leq M$. Пусть $x = \sum_i \alpha_i g_i$, где $\alpha_i \in \mathbb{k}$ и $g_i \in A$; тогда $axfA \leq \sum_i \alpha \alpha_i fA$, и поскольку $\alpha \alpha_i fA \simeq afA$, то легко видеть, что afA обладает секцией, которая изоморфна ненулевому подмодулю из $axfA/X$. Так как

$afA/X \simeq (ayfA/Y)g \simeq S$, то afA и $(ayfA/Y)g$ не сепарированы в M . Следовательно, существуют элементы $u, v \in fA$ такие, что $aufA$ и $ayvfAg$ обладают фактормодулями $aufA/U$ и $(ayvfA/V)g$, которые изоморфны fA -подмодулю $0 \neq Q \leq M$. Пусть $uv = \sum_i \beta_i g_i$, где $\beta_i \in \mathbb{k}$ и $g_i \in A$; тогда $ayvfA \leq \sum_i a\beta_i fA$, а так как $a\beta_i fA \simeq afA$, то легко видеть, что $(afA)g$ имеет секцию, изоморфную ненулевому подмодулю из $(ayvfA/V)g$. Так как $(ayvfA/V)g \simeq aufA/U \simeq Q$, то afA и $(afA)g$ не сепарированы в M . Таким образом, $g \in \text{Sep}_{(G,A)}(M, afA)$.

Пусть A – абелева группа без кручения конечного ранга и $\mathbb{k}$ – поле. Будем говорить, что идеал I кольца $\mathbb{k}A$ является *локально простым*, если $I \cap \mathbb{k}B$ – простой идеал кольца $\mathbb{k}B$ для некоторой f.g.d.-подгруппы $B \leq A$. Тогда легко видеть, что $\mathcal{LP}(I) = [I]$ и, следовательно, $\dim \mathcal{LP}(I) = \dim(I \cap \mathbb{k}B)$.

Пусть M – $\mathbb{k}A$ -модуль; будем говорить, что элемент $0 \neq a \in M$ имеет *локально максимальный аннулятор* I в $\mathbb{k}A$, если I – локально простой идеал и $\dim \mathcal{LP}(I) \leq \dim \mathcal{LP}(J)$ для любого элемента $0 \neq b \in M$, имеющего локально простой аннулятор J в $\mathbb{k}A$. Так как $K_{\mathbb{k}B}(a\mathbb{k}B) = \dim(I \cap \mathbb{k}B)$, то $\dim \mathcal{LP}(I) = LK_{\mathbb{k}A}(a\mathbb{k}A)$.

ЛЕММА 3.1.3. Пусть G – группа, A – ее абелева G -подгруппа без кручения конечного ранга, $\mathbb{k}$ – поле, M – $\mathbb{k}G$ -модуль и элемент $0 \neq a \in M$ имеет локально максимальный аннулятор I в $\mathbb{k}A$. Тогда $S_G(I) \geq \text{Sep}_G(I) \geq \text{Sep}_{(G,A)}(M, W)$ для любого $\mathbb{k}A$ -подмодуля $W \leq M$ такого, что $I = \text{Ann}_{\mathbb{k}A}(W)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in G$ и предположим, что подмодули W и Wt имеют секции, изоморфные подмодулю $0 \neq U \leq M$. Очевидно, можно предполагать, что подмодуль $U = b\mathbb{k}A$ – циклический. Тогда $J = \text{Ann}_{\mathbb{k}A}(b) \geq I$, и так как аннулятор I локально максимальный, то $\mathbb{k}B \cap J = \mathbb{k}B \cap I$, где B – f.g.d.-подгруппа в A такая, что $\mathbb{k}B \cap I$ – простой идеал в $\mathbb{k}B$. Те же аргументы показывают, что $\mathbb{k}C \cap J = \mathbb{k}C \cap I^t$, где C – f.g.d.-подгруппа в A такая, что $\mathbb{k}C \cap I^t$ – простой идеал в $\mathbb{k}C$. Пусть $D = C \cap B$, тогда $\mathbb{k}D \cap I = \mathbb{k}D \cap J = \mathbb{k}D \cap I^t$ и, значит, $t \in S_G(I)$.

Как отмечалось выше, $J = \text{Ann}_{\mathbb{k}A}(b) \geq I$, и те же рассуждения показывают, что $J = \text{Ann}_{\mathbb{k}A}(b) \geq I^t$. Отсюда следует, что $\text{Sp}(I) \cap \text{Sp}(I^t) \neq \emptyset$. Таким образом, $t \in \text{Sep}_G(I)$ и, значит, $\text{Sep}_G(I) \geq \text{Sep}_{(G,A)}(M, W)$.

ЛЕММА 3.1.4. Пусть G – группа и A – ее G -подгруппа. Пусть $\mathbb{k}$ – поле, M – $\mathbb{k}G$ -модуль, $0 \neq a \in M$ и $S = \text{Sep}_{(G,A)}(a\mathbb{k}G, a\mathbb{k}A)$. Тогда:

- (i) если $x = b + c \in \mathbb{k}G$, где $b = \sum_{i=2}^n (\sum_{j=1}^{m_i} \beta_{ij} t_{ij}) g_i$, $c = \sum_{j=1}^{m_1} \beta_{1j} t_{1j}$, $\beta_{ij} \in \mathbb{k}A$, $\{g_i\}$ – подмножество правой трансверсали κS в G такое, что $\{g_i\} \cap S = \emptyset$, $\{t_{ij}\}$ – подмножество правой трансверсали κA в S и $I = \text{Ann}_{\mathbb{k}A}(ac) \neq \mathbb{k}A$, то $abI \neq 0$;
- (ii) $a\mathbb{k}G = a\mathbb{k}S \otimes_{\mathbb{k}S} \mathbb{k}G$;
- (iii) $W \cap a\mathbb{k}S \neq 0$ для любого $\mathbb{k}G$ -подмодуля $0 \neq W \leq a\mathbb{k}G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Очевидно, $ab\mathbb{k}A \leq \sum_{i=2}^n (\sum_{j=1}^{m_i} a\mathbb{k}A t_{ij}) g_i$, откуда следует, что $ab\mathbb{k}A$ обладает ненулевым подмодулем, изоморфным секции $\mathbb{k}A$ -модуля $a\mathbb{k}A t_{ij} g_i$ для некоторых i и j . Предположим, что $abI = 0$, тогда $ab\mathbb{k}A$ изоморфен фактормодулю модуля $a\mathbb{k}A$ и, следовательно, $a\mathbb{k}A$ обладает ненулевой секцией U/V , которая изоморфна секции в $a\mathbb{k}A t_{ij} g_i$ и подмодулю в $ab\mathbb{k}A$. С другой стороны, $a\mathbb{k}A \leq \sum_{j=1}^{m_1} a\mathbb{k}A t_{1j}$ и, следовательно, секция U/V содержит ненулевой

подмодуль U_1/V , который изоморфен секции модуля $a\mathbb{k}At_{1j}$ для некоторого $j = r$. Таким образом, $a\mathbb{k}At_{ij}g_i$ и $a\mathbb{k}At_{1r}$ имеют ненулевые секции, изоморфные подмодулю из $ab\mathbb{k}A$. Следовательно, $a\mathbb{k}At_{ij}g_it_{1r}^{-1}$ и $a\mathbb{k}A$ обладают ненулевыми секциями, изоморфными подмодулю из $ab\mathbb{k}At_{1r}^{-1}$, но это противоречит определению S , так как $t_{ij}g_it_{1r}^{-1} \notin S$.

(ii) Пусть $J = \text{Ann}_{\mathbb{k}G}(a)$; достаточно показать, что $J = (\mathbb{k}S \cap J)\mathbb{k}G$. Предположим, что $J \neq (\mathbb{k}S \cap J)\mathbb{k}G$. Тогда существует элемент $x = b + c \in J$ такой, что $c \notin \mathbb{k}S \cap J$, где $b = \sum_{i=2}^n (\sum_{j=1}^{m_i} \beta_{ij}t_{ij})g_i$, $c = \sum_{j=1}^{m_1} \beta_{1j}t_{1j}$, $\beta_{ij} \in \mathbb{k}A$, $\{g_i\}$ – подмножество правой трансверсали к S в G такое, что $S \cap \{g_i\} = \emptyset$, $\{t_{ij}\}$ – подмножество правой трансверсали к A в S . Так как $c \notin \mathbb{k}S \cap J$, то $ac \neq 0$ и, следовательно, $I = \text{Ann}_{\mathbb{k}A}(ac) \neq \mathbb{k}A$. Так как $xI \subseteq J$, $cI \subseteq J$ и $x = b + c$, то $bI \subseteq J$ и, следовательно, $abI = 0$, но это противоречит (i).

(iii) Предположим, что $W \cap a\mathbb{k}S = 0$. Тогда существует элемент $x = b + c \in \mathbb{k}G$, где $b = \sum_{i=2}^n (\sum_{j=1}^{m_i} \beta_{ij}t_{ij})g_i$, $c = \sum_{j=1}^{m_1} \beta_{1j}t_{1j}$, $\beta_{ij} \in \mathbb{k}A$, $\{g_i\}$ – подмножество правой трансверсали к S в G такое, что $S \cap \{g_i\} = \emptyset$, $\{t_{ij}\}$ – подмножество правой трансверсали к A в S , причем число n минимально относительно свойств $0 \neq ax \in W$ и $ax \notin a\mathbb{k}S$. Пусть $I = \text{Ann}_{\mathbb{k}A}(ac)$; тогда, очевидно, $I \neq \mathbb{k}A$, и из минимальности n следует, что $abI = 0$, но это противоречит (i).

3.2. Модули, индуцированные с изолированных подгрупп. В этом пункте обобщаются некоторые результаты, полученные Бруксом и Брауном в [7], [8].

Пусть N – нильпотентная группа, $r_0(N) < \infty$, S – конечно порожденная область целостности и M – SN -модуль. Пусть $0 \neq a \in M$ и H – собственная изолированная N -подгруппа в N . Пару (a, H) назовем *важной*, если существует f.g.d.-подгруппа $A \leq N$ такая, что:

- (i) модуль aSA – ρ -критический и $K_{SA}(aSA) \leq K_{SX}(xSX)$ для любого элемента $0 \neq x \in M$ и любой f.g.d.-подгруппы $X \leq N$;
- (ii) $aSA = aSB \otimes_{SB} SA$, где $B = A \cap H$;
- (iii) если $0 \neq b \in aSB$ и V – плотная подгруппа в B , то не существует подгруппы $D \leq V$ такой, что $bSV = bSD \otimes_{SD} SV$, is N D – нормальная подгруппа в N и $r_0(D) < r_0(V)$.

ЛЕММА 3.2.1. Пусть N – нильпотентная группа, $r_0(N) < \infty$, и S – конечно порожденное подкольцо поля $\mathbb{k}$. Пусть M – $\mathbb{k}N$ -модуль и (a, H) – важная пара SN -модуля M . Тогда для любого элемента $0 \neq x \in \mathbb{k}N$ и любой f.g.d.-подгруппы $X \leq N$ существуют конечно порожденная плотная X -подгруппа $Y \leq X$ и элемент $0 \neq y \in SV$, где $V = Y \cap H$, такие, что (axy, H) – важная пара в M и $axySY = axySV \otimes_{SV} SY$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как (a, H) – важная пара, то найдется f.g.d.-подгруппа $A \leq N$ такая, что $aSA = aSB \otimes_{SB} SA$, где $B = A \cap H$ и aSA – s -критический модуль, причем подгруппы A и B удовлетворяют условиям (i) и (ii) определения важных пар.

Очевидно, $A \cap X = \widehat{X}$ – плотная подгруппа в N . Пусть $x = \sum_i \alpha_i g_i$, где $\alpha_i \in \mathbb{k}$ и $g_i \in N$. Положим $Z = \widehat{X} \cap (\bigcap_i \widehat{X}^{g_i})$; тогда нетрудно показать, что Z – f.g.d.-подгруппа конечного индекса в X . Следовательно, существует $m \in \mathbb{N}$ такое,

что $Y = X^m \leq Z$. Из определения Y следует, что $g_i Y g_i^{-1} \leq A$, а так как H — N -подгруппа, то $g_i V g_i^{-1} \leq B$ для каждого i , где $V = H \cap Y$.

Если $\text{Ann}_{SV}(a\alpha_i g_i) \neq \text{Ann}_{SV}(a\alpha_j g_j)$ для некоторых i и j , то можно выбрать элемент $y \in SV$ такой, что $a\alpha_i g_i y \neq 0$ и $a\alpha_j g_j y = 0$. Тогда через несколько шагов можно выбрать элемент $0 \neq y \in SV$ такой, что для любого i либо $a\alpha_i g_i y = 0$, либо $\text{Ann}_{SV}(a\alpha_i g_i y) = I$ и $a\alpha_i g_i y \neq 0$. Очевидно, элемент y можно выбрать так, что $W = SV/I$ — ρ -критический SV -модуль.

Так как $g_i V g_i^{-1} \leq B$, то $W \simeq a\alpha_i g_i y SV \leq aSV \alpha_i g_i \leq aSB \alpha_i g_i$, а поскольку подмодуль aSB удовлетворяет условию (iii) определения важных пар, то нетрудно заметить, что W также удовлетворяет этому условию.

Так как $g_i V g_i^{-1} \leq B$ для каждого i , то $a\alpha_i g_i y SV \leq aSB \alpha_i g_i$. Отсюда следует, что $a\alpha_i g_i y SY \simeq W \otimes_{SV} SY$ и, следовательно, $\text{Ann}_{SY}(a\alpha_i g_i y) = ISY = J$ для каждого i . Так как $axy = \sum a\alpha_i g_i y$, то $\text{Ann}_{SY}(axy) \geq J$. По лемме 2.2.2(i) $a\alpha_i g_i y SY \simeq W \otimes_{SV} SY$ — r -критический модуль, а так как $g_i Y g_i^{-1}$ — подгруппа конечного индекса в A , то из [18; лемма 8] следует, что $r \leq s$. Если $\text{Ann}_{SY}(axy) > J$, то $K_{SY}(axySY) < s$, но это противоречит минимальности s . Итак, $\text{Ann}_{SY}(axy) = J$ и, следовательно, $axySY = axySV \otimes_{SV} SY$. Таким образом, (axy, H) — важная пара модуля M .

ЛЕММА 3.2.2. Пусть N — нильпотентная группа, $r_0(N) < \infty$, и S — конечно порожденное подкольцо поля $\mathbb{k}$. Пусть M — $\mathbb{k}N$ -модуль и (a, H) — важная пара SN -модуля M . Тогда $K = H$ для любой важной пары (b, K) модуля M такой, что $b \in a\mathbb{k}N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $K \neq H$; тогда $F = K \cap H$ — изолированная N -подгруппа и, следовательно, существует изолированная N -подгруппа $T \leq N$ такая, что $F \leq T \leq H$ и $r_0(H/T) = 1$. Так как (b, K) — важная пара модуля $a\mathbb{k}N$, то существует f.g.d.-подгруппа $X \leq N$ такая, что $bSX = bSA \otimes_{SA} SX$, где $A = X \cap K$, причем подгруппы A и X удовлетворяют условиям (i) и (iii) определения важных пар. Так как $b \in a\mathbb{k}N$, то по лемме 3.2.1 существуют конечно порожденная плотная X -подгруппа $Y \leq X$ и элемент $0 \neq y \in SB$, где $B = Y \cap H$, такие, что (d, H) — важная пара модуля M , где $d = by$, и $dSY = dSB \otimes_{SB} SY$. Согласно условию (iii) определения важных пар dSB не содержит ненулевых SB -подмодулей, индуцированных с подгруппы C , где $C = B \cap T$. Тогда из [8; лемма 3.3] следует, что dSB содержит SB -подмодуль V , который имеет конечную однородную размерность над SC .

Пусть $D = AB$, тогда по лемме 2.2.1 VSD имеет конечную однородную размерность над SE , где $E = AC$. Таким образом, существует элемент $0 \neq x \in dSB$ такой, что xSD имеет конечную однородную размерность над SE .

Так как $bSX = bSA \otimes_{SA} SX$, то легко видеть, что $bSD = bSE \otimes_{SE} SD$, а так как $y \in SB$, то $d = by \in bSD$. Следовательно, $xSD \leq dSD \leq bSD$ и по [8; лемма 3.5] xSD содержит ненулевой подмодуль, индуцированный с SE -подмодуля. Таким образом, xSD имеет бесконечную однородную размерность над SE , что приводит к противоречию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.3. Пусть G — группа и N — ее нильпотентная G -подгруппа, $r_0(N) < \infty$. Пусть S — конечно порожденное подкольцо поля $\mathbb{k}$, M —

$\mathbb{k}N$ -модуль и (a, H) – важная пара SN -модуля M . Тогда

$$\text{Sep}_{(G, \mathbb{k}N)}(M, a\mathbb{k}N) \leq N_G(H).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K = N_G(H)$, тогда достаточно показать, что $\mathbb{k}N$ -подмодули W и Wt сепарированы в M для любого элемента $t \in G$ такого, что $t \notin K$, где $W = a\mathbb{k}N$.

Предположим, что существуют цепочки подмодулей $U < V \leq W$, $X < Y \leq W$ и $\mathbb{k}N$ -подмодуль $0 \neq Z \leq M$ такие, что $V/U \simeq (Y/X)t \simeq Z$.

Пусть A – f.g.d.-подгруппа в N из определения важных пар. Предположим, что $U \cap aSA \neq 0$. Поскольку подмодуль aSA – ρ -критический, то из леммы 2.5.1 следует, что $LK_{SN}(W/U) < K_{SA}(aSA)$ и, значит, $LK_{SN}(V/U) < K_{SA}(aSA)$. Но это противоречит минимальности $K_{SA}(aSA)$, так как $V/U \simeq Z$.

Таким образом, $U \cap aSA = 0$. С помощью леммы 2.5.1 нетрудно показать, что $T/U = \{x \in W/U : LK_{SN}(x\mathbb{k}N) < \rho\}$ – подмодуль в W/U . Очевидно, $aSA \cap T = 0$, а из минимальности ρ и изоморфизма $V/U \simeq Z$ следует, что $V/U \cap T/U = U$. Тогда (a, H) – важная пара модуля W/T , а из леммы 3.2.1 следует существование элемента $0 \neq b \in V/U$ такого, что (b, H) – важная пара модуля V/U . Очевидно, можно положить $V/U = b\mathbb{k}N$; тогда поскольку $V/U \simeq Z$, то существует элемент $c \in Z$ такой, что (c, H) – важная пара модуля M и $Z = c\mathbb{k}N$.

Так как (at, H^t) – важная пара модуля Wt , то приведенные выше аргументы показывают существование элемента $0 \neq d \in Z$ такого, что (d, H^t) – важная пара модуля Z . По лемме 3.2.2 $H^t = H$, что приводит к противоречию.

3.3. Непроницаемые модули. Пусть N – нильпотентная непериодическая группа конечного свободного ранга, R – область целостности и H – конечно порожденная плотная подгруппа без кручения группы N . RN -модуль M будем называть RN -непроницаемым, если модуль M имеет RH -кручения и для любого конечно порожденного подкольца $S \leq R$ SN -модуль M не имеет важных пар. Очевидно, если K – подкольцо в R и RN -непроницаемый RN -модуль M имеет KH -кручение, то модуль M является также и KN -непроницаемым.

ЛЕММА 3.3.1. Пусть L – нильпотентная минимаксная группа без кручения и Z – ее изолированная L -подгруппа, определяющая конечно порожденную абелеву факторгруппу L/Z . Пусть $\mathbb{k}$ – поле и M – непроницаемый $\mathbb{k}L$ -модуль без $\mathbb{k}Z$ -кручения. Пусть a – $\mathbb{k}L$ -критический элемент модуля M и X – изолированная подгруппа в L такая, что $Z \leq X$ и $r(a\mathbb{k}X) = 0$. Тогда $r(a\mathbb{k}L) < r(L/X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как X – изолированная подгруппа в L , то существует полная система $\mathcal{X}$ подгрупп над Z такая, что $X \in \mathcal{X}$. Предположим, что $r(a\mathbb{k}L) \geq r(L/X)$; тогда существует подгруппа $B \in \mathcal{X}(a\mathbb{k}L)$ такая, что $r(B/Z) = r(L/X)$. Очевидно, существуют f.g.f.-область $S \leq \mathbb{k}$ и f.g.d.-подгруппа $H \leq L$ такие, что $r(aSC) = 0$ и $D \in \widehat{\mathcal{X}}(aSH)$, где $C = X \cap H$, $D = B \cap H$ и полная система $\widehat{\mathcal{X}}$ подгрупп над $Z \cap H$ получена пересечением подгрупп из $\mathcal{X}$ с подгруппой H .

Так как $r(aSC) = 0$ и модуль M – без $S(Z \cap H)$ -кручения, то легко заметить, что подмодуль aSC удовлетворяет условиям леммы 2.2.2(iii) и, следовательно, существует l -критический подмодуль $bSC \leq aSC$, где $l = \dim S + r(Z \cap H)$. Из леммы 2.2.2(i) следует, что модуль $bSC \otimes_{SC} SH$ – m -критический, где $m = l + r(H/C)$.

Так как модуль M непроницаемый, то $K_{SH}(bSH) < m$. С другой стороны, по лемме 2.5.3(i) модуль $\text{ak}L$ – без $\mathbb{k}B$ -кручения и, следовательно, $D \in \widehat{\mathcal{X}}(bSH)$. Тогда аргументы леммы 2.2.2(i), (ii) показывают, что $K_{SH}(bSH) \geq l + r(D/(Z \cap H)) = l + r(H/C) = m$, но это противоречит соотношению $K_{SH}(bSH) < m$.

ЛЕММА 3.3.2. Пусть N – нильпотентная минимаксная неабелева группа без кручения и K – изолированная подгруппа в N , содержащая предпоследний член Z верхнего центрального ряда группы N . Пусть $\mathbb{k}$ – конечно порожденное поле, $\text{char } \mathbb{k} = 0$, и M – $\mathbb{k}N$ -модуль без $\mathbb{k}K$ -кручения. Если модуль M непроницаемый, то существуют плотная подгруппа $S \leq N$ и $\mathbb{k}S$ -критический элемент $a \in M$ такие, что $K \leq S$, факторгруппа S/K конечно порожденная и:

- (i) $\mathbb{k}S$ -подмодуль $\text{ak}S$ твердый в M и $\text{Sep}_{(N,S)}(M, \text{ak}S) = \text{Stab}_N[\text{ak}S] = S$;
- (ii) $\mathbb{k}N$ -подмодуль $\text{ak}N$ локально критический минимальной локальной размерности в M , твердый в M и $\text{ak}N = \text{ak}H \otimes_{\mathbb{k}H} \mathbb{k}N$ для некоторой f.g.d.-подгруппы $H \leq N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть L – плотная подгруппа в N такая, что $Z \leq L$ и факторгруппа L/Z конечно порожденная. По лемме 2.5.3 существует $\mathbb{k}L$ -критический элемент $b \in M$, причем элемент b можно выбрать так, что $b\mathbb{k}L$ имеет минимальную локальную размерность в M . Тогда $b\mathbb{k}L$ – твердый подмодуль в M и, следовательно, $Q = \text{Stab}_N[b\mathbb{k}L] = \text{Sep}_{(N,L)}(M, b\mathbb{k}L)$.

Предположим, что $|Q/L| = \infty$; тогда по лемме 2.1.5 существуют Q -подгруппы $R, G \leq Q$ такие, что $R \leq Z$, $L \leq G$, факторгруппы Z/R и G/L квазициклические и $(G/R)' = Z/R$. Так как $b\mathbb{k}L$ – однородный $\mathbb{k}L$ -модуль, то $G = \text{Stab}_G[x\mathbb{k}L]$ для любого элемента $0 \neq x \in b\mathbb{k}L$.

Пусть ξ/R – центр факторгруппы G/R и X – изолятор подгруппы $\xi \cap L$ в L . Очевидно, существует изолированная подгруппа $Y \leq X$ такая, что $Z \leq Y$ и Y – максимальная подгруппа в X относительно свойства $\text{Ann}_{RY}(b) = 0$. По лемме 2.5.3(i) модуль $b\mathbb{k}L$ – без $\mathbb{k}Y$ -кручения. Тогда, заменив Z на Y и R на плотную G -подгруппу $R_1 \leq Y$, содержащую R и определяющую квазициклическую факторгруппу Y/R_1 , можно считать, что $r(b\mathbb{k}X) = 0$. Следовательно, по лемме 3.3.1 $r(b\mathbb{k}L) < r(L/X)$.

По предложению 2.6.6 существуют $\mathbb{k}L$ -критический элемент $x \in b\mathbb{k}L$ и G -инвариантный идеал I кольца $\mathbb{k}Z$ такие, что $r(W) = d(W/WI)$ и $\mathcal{P}_f(V/VI) = \mathcal{P}_f(W/WI)$ для любого подмодуля $0 \neq V \leq W$, где $W = x\mathbb{k}L$. Так как модуль W однородный и $\text{Stab}_G[W] = G$, то для любого элемента $g \in G$ существуют ненулевые изоморфные подмодули $V_1 \leq W$ и $V_2 \leq Wg$. Тогда $\mathcal{P}_f(W/WI) = \mathcal{P}_f(V_1/V_1I) = \mathcal{P}_f(V_2/V_2I) = \mathcal{P}_f(Wg/WgI)$ и, следовательно, G/L действует на множестве $\mathcal{P}_f(W/WI)$. Так как $|\mathcal{P}_f(W/WI)| < \infty$ и группа G/L не содержит собственных подгрупп конечного индекса, то $P^g = P$ для любого $g \in G$ и любого идеала $P \in \mathcal{P}_f(W/WI)$.

Как отмечалось перед предложением 2.6.6, каждый $P \in \mathcal{P}_f(W/WI)$ является простым идеалом кольца $\mathbb{k}A$, где $A = C \times B$ – характеристическая центральная подгруппа конечного индекса в L/I^+ , C – квазициклическая группа, а B – конечно порожденная абелева группа. Поскольку идеал I содержит G -крупный идеал кольца $\mathbb{k}R$, то $|R : (I^+ \cap R)| < \infty$.

По лемме 2.3.3 для любого идеала $P \in \mathcal{P}_f(W/WI)$ контролер $c(P) = F$ – f.g.-подгруппа в A . Так как $P^g = P$ для любого $g \in G$, то F – нормальная f.g.-подгруппа в G/I^+ . Тогда по лемме 2.1.6 F содержится в центре ζ/I^+ факторгруппы G/I^+ и, следовательно, $P = (P \cap \mathbb{k}E)\mathbb{k}A$, где $E = A \cap \zeta/I^+$.

Так как $|R : (I^+ \cap R)| < \infty$, то легко проверить, что $r_0(E) = r_0(\zeta/I^+) = r_0(\xi/R) = r_0(X/R)$. Тогда так как $P = (P \cap \mathbb{k}E)\mathbb{k}A$, то $r(W) = \dim P \geq r(A/E) = r(L/X)$, но это противоречит соотношению $r(\mathbb{k}L) < r(L/X)$, поскольку $r(W) = r(\mathbb{k}L)$. Таким образом, $|Q/L| < \infty$.

Положим $S = KQ$. Так как всякая f.g.d.-подгруппа из L будет f.g.d.-подгруппой в S , то $LK_{\mathbb{k}S}(\mathbb{k}L) = LK_{\mathbb{k}L}(\mathbb{k}L) = m$. По лемме 2.5.3 существует $\mathbb{k}S$ -критический элемент $a \in \mathbb{k}S$ такой, что $LK_{\mathbb{k}S}(a\mathbb{k}S) \leq m$. Предположим, что $a\mathbb{k}S$ имеет собственную секцию, изоморфную подмодулю из M . Тогда существует элемент $0 \neq y \in M$ такой, что $LK_{\mathbb{k}S}(y\mathbb{k}S) < m$ и, следовательно, $LK_{\mathbb{k}S}(y\mathbb{k}L) < m$, но это противоречит минимальности $LK_{\mathbb{k}L}(\mathbb{k}L)$. Таким образом, подмодуль $a\mathbb{k}S$ твердый в M и, следовательно, $\text{Stab}_N[a\mathbb{k}S] = \text{Sep}_{(N,S)}(M, a\mathbb{k}S)$.

Пусть $T = \text{Stab}_N[a\mathbb{k}S]$; так как $S \leq T$, то достаточно показать, что $T \leq S$. Пусть $g \in T$, тогда $a\mathbb{k}S$ и $a\mathbb{k}Sg$ имеют изоморфные $\mathbb{k}S$ -подмодули U_1 и U_2 . Так как $a\mathbb{k}S \leq \mathbb{k}L$ и $S = KQ$, то из определения подгруппы Q следует, что инъективная $\mathbb{k}L$ -оболочка подмодуля U_1 является прямой суммой инъективных $\mathbb{k}L$ -оболочек подмодулей $\mathbb{k}Lh$, где $h \in K$, а инъективная $\mathbb{k}L$ -оболочка подмодуля U_2 является прямой суммой инъективных $\mathbb{k}L$ -оболочек подмодулей $\mathbb{k}Lfg$, где $f \in K$. Так как $U_1 \simeq U_2$, то подмодули $\mathbb{k}Lh$ и $\mathbb{k}Lfg$ подобны для некоторых $h, f \in K$ и, следовательно, $h^{-1}fg \in Q$. Таким образом, $g \in KQ = S$.

(ii) Из (i) и леммы 3.1.4 следует, что $a\mathbb{k}N = a\mathbb{k}S \otimes_{\mathbb{k}S} \mathbb{k}N$ и $a\mathbb{k}S \cap D \neq 0$ для любого $\mathbb{k}N$ -подмодуля $0 \neq D \leq a\mathbb{k}N$. Тогда так как подмодуль $a\mathbb{k}S$ локально критический и твердый в M , то таким же является и $\mathbb{k}N$ -подмодуль $a\mathbb{k}N$. По лемме 2.2.5 $a\mathbb{k}S = a\mathbb{k}H \otimes_{\mathbb{k}H} \mathbb{k}S$, где H – f.g.d.-подгруппа в S и, следовательно, $a\mathbb{k}N = a\mathbb{k}H \otimes_{\mathbb{k}H} \mathbb{k}N$. Из выбора элемента a следует, что $\mathbb{k}N$ -подмодуль $a\mathbb{k}N$ имеет минимальную локальную размерность.

ЛЕММА 3.3.3. Пусть N – нильпотентная неабелева минимаксная G -подгруппа без кручения разрешимой группы G , $r_0(G) < \infty$. Пусть K – изолированная G -подгруппа из N , содержащая предпоследний член верхнего центрального ряда подгруппы N и такая, что факторгруппа N/K – G -полиплинтус с $\Delta_G(N/K) = 1$. Пусть $\mathbb{k}$ – конечно порожденное поле, $\text{char } \mathbb{k} = 0$, и M – $\mathbb{k}N$ -модуль без $\mathbb{k}K$ -кручения, который является $\mathbb{k}Y$ -периодическим для любой изолированной G -подгруппы $Y \leq N$ такой, что $K < Y$. Предположим, что $r_0(\text{Sep}_{(G,N)}(M, x\mathbb{k}N)) = r_0(G)$ для любого элемента $0 \neq x \in M$. Если модуль M непроницаемый, то существуют плотная подгруппа $S \leq N$, $\mathbb{k}S$ -критический элемент $a \in M$ и G -крупный N -центральный идеал I кольца $\mathbb{k}K$ такие, что $K \leq S$, факторгруппа S/K – конечно порожденная и:

- (i) подмодуль $a\mathbb{k}N$ твердый в M , $\dim_{\mathbb{k}}(a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI) = d < \infty$ и

$$\mathcal{P}(a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI) = \mathcal{P}(a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI)$$

для любого элемента $s \in \mathbb{k}S$;

- (ii) $a\mathbb{k}S(\mathbb{k}K)^{-1}$ – простой $\mathbb{k}S(\mathbb{k}K)^{-1}$ -модуль;

- (iii) для любого $P \in \mathcal{P}(\text{ak}S/\text{ak}SI)$ P – максимальный идеал кольца $\mathbb{k}B$ и P^+ – подгруппа конечного индекса в B , где B – центральная подгруппа конечного индекса в S/I^+ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) По лемме 3.3.2 существуют плотная подгруппа $S \leq N$ и $\mathbb{k}S$ -критический элемент $x \in M$ такие, что $K \leq S$, факторгруппа S/K – конечно порожденная, $x\mathbb{k}S$ – $\mathbb{k}S$ -твердый подмодуль в M , $S = \text{Sep}_{(N,S)}(M, x\mathbb{k}S) = \text{Stab}_N[x\mathbb{k}S]$ и подмодуль $x\mathbb{k}N$ – $\mathbb{k}N$ -твердый в M . Подгруппа $S = \text{Stab}_N[x\mathbb{k}S]$ контролирует подмодуль $x\mathbb{k}N$ и подмодуль $x\mathbb{k}S$ однороден; тогда по предложению 2.6.5 существуют $\mathbb{k}S$ -критический элемент $a \in x\mathbb{k}S$ и G -крупный N -центральный идеал I кольца $\mathbb{k}K$ такие, что $\mathcal{L}\mathcal{P}(W/WI) = \mathcal{L}\mathcal{P}(V/VI)$ для любого подмодуля $0 \neq V \leq W = a\mathbb{k}N$, $d(W/WI) = r(a\mathbb{k}S)$, $\dim_{\mathbb{k}}(a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI) = d < \infty$, $r(a\mathbb{k}S) = 0$ и $\mathcal{P}(a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI) = \mathcal{P}(a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI)$ для любого элемента $0 \neq c \in \mathbb{k}S$. Так как $W \leq x\mathbb{k}N$, то подмодуль W твердый в M .

Так как подмодуль W твердый в M , то $\text{Sep}_{(G,N)}(M, W) = \text{Stab}_G[W]$. Для любого элемента $g \in H = \text{Stab}_G[W]$ подмодули W и Wg имеют ненулевые изоморфные подмодули X и Y . Тогда $\mathcal{L}\mathcal{P}(W/WI) = \mathcal{L}\mathcal{P}(X/XI) = \mathcal{L}\mathcal{P}(Y/YI) = \mathcal{L}\mathcal{P}(Wg/WgI) = \mathcal{L}\mathcal{P}(W/WI)^g$. Таким образом, подгруппа H действует на $\mathcal{L}\mathcal{P}(W/WI)$.

Пусть A – характеристическая центральная подгруппа без кручения конечного индекса в N/I^+ . Так как $|K/I^+| < \infty$, то легко видеть, что A – G -полиплинтус такой, что $\Delta_G(A) = 1$. Так как $r_0(G) = r_0(H)$, то из леммы 2.1.4(ii) следует, что A – H -полиплинтус такой, что $\Delta_H(A) = 1$.

Пусть B – центральная подгруппа без кручения конечного индекса в S/I^+ . Так как A – G -полиплинтус, то подгруппу B можно выбрать так, что $B \leq A$, $B = \bigoplus_{i=1}^n B_i$ и $A_i = \text{is}_A B_i$ – G -плинтус для каждого i . Из леммы 2.1.4(ii) следует, что A_i также является и H -плинтусом.

Так как $B \cap K/I^+ = 1$ и $B = \bigoplus_{i=1}^n B_i$, то нетрудно показать существование полной системы $\mathcal{X}$ подгрупп из S над K , которая содержит подгруппы $X_i \in \mathcal{X}$ такие, что $X_i/I^+ \cap B = D_i$ является плотной подгруппой в B_i . Пусть Y_i – изолятор подгруппы X_i в N , тогда Y_i – G -подгруппа в N такая, что $K \leq Y_i$ и по условию леммы модуль M – $\mathbb{k}Y_i$ -периодический. Так как $a\mathbb{k}N = a\mathbb{k}S \otimes_{\mathbb{k}S} \mathbb{k}N$, то можно заключить, что подмодуль $a\mathbb{k}S$ – $\mathbb{k}X_i$ -периодический и, значит, $X_i \notin \mathcal{X}(a\mathbb{k}S)$. Тогда по лемме 2.6.5(iii) $\mathbb{k}D_i \cap P \neq 0$ для любого идеала $P \in \mathcal{P}(a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI)$ и, следовательно, $\mathbb{k}B_i \cap P = P_i \neq 0$. Так как $W = a\mathbb{k}N = a\mathbb{k}S \otimes_{\mathbb{k}S} \mathbb{k}N$, то из леммы 2.2.1(ii) следует, что $\mathcal{L}\mathcal{P}(W/WI) = \{[P] : P \in \mathcal{P}(a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI)\}$, откуда $\mathbb{k}A_i \cap Q = Q_i \neq 0$ для любого $[Q] \in \mathcal{L}\mathcal{P}(W/WI)$.

Пусть $\mathcal{L}_i = \{[Q_i] : Q_i = \mathbb{k}A_i \cap Q, \text{ где } [Q] \in \mathcal{L}\mathcal{P}(W/WI)\}$, тогда H действует на множестве $\mathcal{L}_i$. Так как $|\mathcal{L}_i| < \infty$ и $\Delta_H(A_i) = 1$, то из [20; 3.11] вытекает, что Q_i^+ – плотная подгруппа в A_i для любого класса $[Q_i] \in \mathcal{L}_i$. Отсюда следует, что для любого $P \in \mathcal{P}(a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI)$ подгруппа P_i^+ плотная в B_i , где $P_i = P \cap \mathbb{k}B_i$. Так как $B = \bigoplus_{i=1}^n B_i$, то P^+ – плотная подгруппа в B для любого идеала $P \in \mathcal{P}(a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI)$. Тогда $d(W/WI) = r(a\mathbb{k}S) = 0$ и из предложения 2.6.5 следует, что $\dim_{\mathbb{k}}(a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI) = d < \infty$.

(ii) Так как $r(a\mathbb{k}S) = 0$, то нетрудно проверить, что $\dim_Q a\mathbb{k}S(\mathbb{k}K)^{-1} < \infty$, где $Q = \mathbb{k}K(\mathbb{k}K)^{-1}$. Тогда элемент a можно выбрать так, что $a\mathbb{k}S(\mathbb{k}K)^{-1}$ – простой $\mathbb{k}S(\mathbb{k}K)^{-1}$ -модуль.

(iii) Так как P^+ – подгруппа конечного индекса в B и P – простой идеал, то P – максимальный идеал кольца $\mathbb{k}B$.

Пусть $\mathbb{k}$ – поле, G – группа и M – $\mathbb{k}G$ -модуль. Обозначим через $\mathbb{k}G\text{-dim}_{\mathbb{k}} M$ максимальную размерность над $\mathbb{k}$ простой секции модуля M . Легко проверить, что если модуль M обладает рядом подмодулей, в котором каждый фактор имеет размерность над $\mathbb{k}$ не более чем d , то $\mathbb{k}G\text{-dim}_{\mathbb{k}} M \leq d$.

ЛЕММА 3.3.4. Пусть N – нильпотентная неабелева минимаксная G -подгруппа без кручения разрешимой группы G , $r_0(G) < \infty$. Пусть K – изолированная G -подгруппа из N , содержащая предпоследний член верхнего центрального ряда подгруппы N и такая, что N/K – нётеров G -полиплинтус с $\Delta_G(N/K) = 1$. Пусть $\mathbb{k}$ – конечно порожденное поле, $\text{char } \mathbb{k} = 0$, и M – $\mathbb{k}N$ -модуль без $\mathbb{k}K$ -кручения, который является $\mathbb{k}X$ -периодическим для любой G -инвариантной изолированной подгруппы $X \leq N$ такой, что $K < X$. Предположим, что $r_0(G) = r_0(\text{Ser}_{(G,N)}(M, x\mathbb{k}N))$ для любого элемента $0 \neq x \in M$. Если модуль M непроницаемый, то факторгруппа N/K бесконечная полициклическая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что факторгруппа N/K не является полициклической.

По лемме 3.3.3 существуют плотная подгруппа $S \leq N$ и $\mathbb{k}S$ -критический элемент $a \in M$ такие, что $K \leq S$, факторгруппа S/K конечно порожденная, $a\mathbb{k}N$ – $\mathbb{k}N$ -твердый подмодуль в M и $a\mathbb{k}S(\mathbb{k}K)^{-1}$ – простой $\mathbb{k}S(\mathbb{k}K)^{-1}$ -модуль. По леммам 3.3.2(i) и 3.1.4 подгруппа S контролирует подмодуль $a\mathbb{k}N$ и, следовательно, $W = a\mathbb{k}N(\mathbb{k}K)^{-1}$ – простой $\mathbb{k}N(\mathbb{k}K)^{-1}$ -модуль. Так как подмодуль $a\mathbb{k}N$ твердый в M , то $\text{Ser}_{(G,N)}(M, a\mathbb{k}N) = \text{Stab}_G[a\mathbb{k}N] = H$. Поскольку $r_0(H) = r_0(G)$, то из лемм 2.1.2(ii) и 2.1.4(ii) следует, что N/K – нётеров H -полиплинтус и $\Delta_H(N/K) = 1$.

Так как $\text{Stab}_H[W] = H$, то $a\mathbb{k}N$ и $a\mathbb{k}Ng$ имеют изоморфные $\mathbb{k}N$ -подмодули A и B для любого элемента $g \in H$. Тогда так как W – простой $\mathbb{k}N(\mathbb{k}K)^{-1}$ -модуль, то $W = A(\mathbb{k}K)^{-1} \simeq B(\mathbb{k}K)^{-1} = Wg$. Итак, $a\mathbb{k}N(\mathbb{k}K)^{-1}$ и $a\mathbb{k}N(\mathbb{k}K)^{-1}g$ – изоморфные $\mathbb{k}N$ -модули. Тогда существуют элементы $b \in \mathbb{k}N$ и $c \in \mathbb{k}K$ такие, что $ab\mathbb{k}Ng$ и $a\mathbb{k}cN$ – изоморфные $\mathbb{k}N$ -модули.

Пусть I – G -крупный N -центральный идеал кольца $\mathbb{k}K$ из леммы 3.3.3, тогда $\dim_{\mathbb{k}}(a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI) = d < \infty$, $\mathcal{P}(a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI) = \mathcal{P}(a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI)$ для любого элемента $s \in \mathbb{k}S$, причем любой $P \in \mathcal{P}(a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI)$ является максимальным идеалом кольца $\mathbb{k}B$ таким, что P^+ – подгруппа конечного индекса в B , где B – центральная подгруппа конечного индекса в S/I^+ .

Очевидно, существует подгруппа $S_1 \leq N$ такая, что $S \leq S_1$, $|S_1 : S| < \infty$, $SS^g \leq S_1^g$ и $b \in \mathbb{k}S_1$. Так как $a\mathbb{k}N = a\mathbb{k}S \otimes_{\mathbb{k}S} \mathbb{k}N$ и S – N -подгруппа, то легко проверить, что фактормодуль $a\mathbb{k}S_1/a\mathbb{k}S_1I = (a\mathbb{k}S/a\mathbb{k}SI) \otimes_{\mathbb{k}S} \mathbb{k}S_1$ обладает конечным рядом $\mathbb{k}S$ -подмодулей, в котором каждая секция имеет размерность над $\mathbb{k}$ не более чем d . Тогда из леммы 2.4.2 следует, что $\mathbb{k}S\text{-dim}_{\mathbb{k}}(ab\mathbb{k}S_1/ab\mathbb{k}S_1I) \leq d$, откуда $\mathbb{k}S^g\text{-dim}_{\mathbb{k}}((ab\mathbb{k}S_1/ab\mathbb{k}S_1I)g) \leq d$. Так как $ab\mathbb{k}Ng \simeq a\mathbb{k}cN$, то отсюда следует, что $\mathbb{k}S^g\text{-dim}_{\mathbb{k}}(a\mathbb{k}(S_1^g)/a\mathbb{k}(S_1^g)I) \leq d$. Так как $c \in \mathbb{k}K \leq \mathbb{k}S$, $SS^g \leq S_1^g$ и $a\mathbb{k}N = a\mathbb{k}S \otimes_{\mathbb{k}S} \mathbb{k}N$, то можно заключить, что $a\mathbb{k}(S_1^g)/a\mathbb{k}(S_1^g)I =$

$(\text{ack}S/\text{ack}SI) \otimes_{\mathbb{K}S} \mathbb{K}S_1^g$ и $\text{ack}(SS^g)/\text{ack}(SS^g)I = (\text{ack}S/\text{ack}SI) \otimes_{\mathbb{K}S} \mathbb{K}(SS^g)$. Отсюда следует, что $\text{ack}(SS^g)/\text{ack}(SS^g)I \leq \text{ack}(S_1^g)/\text{ack}(S_1^g)I$.

Таким образом, для каждого элемента $g \in H$ существует элемент $0 \neq c \in \mathbb{K}S$ такой, что $\mathbb{K}S^g\text{-dim}_{\mathbb{K}}(\text{ack}(SS^g)/\text{ack}(SS^g)I) \leq d$. Так как I — G -крупный идеал кольца $\mathbb{K}K$, то N/I^+ содержит центральную подгруппу A/I^+ конечного индекса. Положим $A(g) = S^g/I^+ \cap A/I^+$, тогда $A(g)$ — центральная подгруппа конечного индекса в S^g/I^+ . Пусть $A(e) = S/I^+ \cap A/I^+$ и $B(g) = A(e) \cap A(g)$. Так как $\text{ack}N = \text{ack}S \otimes_{\mathbb{K}S} \mathbb{K}N$ и $c \in \mathbb{K}S$, то $\text{ack}S^gS/\text{ack}S^gSI = (\text{ack}S/\text{ack}SI) \otimes_{\mathbb{K}S} \mathbb{K}(SS^g) \geq (\text{ack}S/\text{ack}SI) \otimes_{\mathbb{K}B(g)} \mathbb{K}A(g)$ и, следовательно, для любого элемента $g \in H$ существует элемент $0 \neq c \in \mathbb{K}S$ такой, что $\mathbb{K}A(g)\text{-dim}_{\mathbb{K}}(\text{ack}S/\text{ack}SI) \otimes_{\mathbb{K}B(g)} \mathbb{K}A(g) \leq d$.

Так как по лемме 3.3.3(i) $\mathcal{P}(\text{ack}S/\text{ack}SI) = \mathcal{P}(\text{ack}S/\text{ack}SI)$ и P — максимальный идеал кольца $\mathbb{K}A(e)$, содержащий аннулятор модуля $\text{ack}S/\text{ack}SI$ в $\mathbb{K}A(e)$ для любого $P \in \mathcal{P}(\text{ack}S/\text{ack}SI)$, то $\mathbb{K}A(g)$ -модуль $(\text{ack}S/\text{ack}SI) \otimes_{\mathbb{K}B(g)} \mathbb{K}A(g)$ содержит фактормодуль, изоморфный $(\mathbb{K}A(e)/P) \otimes_{\mathbb{K}B(g)} \mathbb{K}A(g)$ и, следовательно, $\mathbb{K}A(g)\text{-dim}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}A(e)/P) \otimes_{\mathbb{K}B(g)} \mathbb{K}A(g) \leq d$.

Пусть $X = \langle S^g : g \in H \rangle$. Так как N/K — нётеров H -полиплинтус и S/K — плотная подгруппа в N/K , то из леммы 2.1.1(iii) следует, что $|N/X| < \infty$, а поскольку факторгруппа N/K не полициклическая, то X/S — бесконечная черниковская группа. Поскольку A/I^+ — подгруппа конечного индекса в N/I^+ , то нетрудно показать существование простого числа p такого, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется элемент $g \in H$ такой, что $A(g)$ содержит подгруппу $C(g)$, удовлетворяющую условию $|C(g)/D(g)| = p^n$, где $D(g) = C(g) \cap A(e)$. Тогда $\mathbb{K}C(g)\text{-dim}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}A(e)/P) \otimes_{\mathbb{K}D(g)} \mathbb{K}C(g) \leq d$.

Пусть $F = \mathbb{K}A(e)/P$; так как идеал P максимальный, то F — поле. Тогда $F(g) = (\mathbb{K}D(g) + P)/P \simeq \mathbb{K}D(g)/(P \cap \mathbb{K}D(g))$ — подполе в F . По лемме 3.3.3(iii) P^+ — подгруппа конечного индекса в $A(e)$ и, следовательно, $\dim_{\mathbb{K}} F < \infty$. Тогда множество $\{F(g)\}$ подполей поля F конечное, и, заменив множество подгрупп $C(g)$ некоторым его подмножеством, можно считать, что $F(g) = f$ для каждого g , где f — конечно порожденное подполе в F .

Пусть $D(n) = D(g)/(P^+ \cap D(g))$ и $C(n) = C(g)/(P^+ \cap D(g))$, где $p^n = |C(g)/D(g)|$. Так как P^+ — подгруппа конечного индекса в $A(e)$, то $C(n)$ — конечная циклическая группа и $D(n)$ — ее подгруппа такие, что $|C(n)/D(n)| = p^n$ и $D(n)$ — подгруппа мультипликативной группы поля f . Тогда $f(n) = \mathbb{K}C(g)/\mathbb{K}C(g)(\mathbb{K}D(g) \cap P) \simeq f \otimes_{\mathbb{K}D(n)} \mathbb{K}C(n)$ для каждого n , и из соотношения $\mathbb{K}C(g)\text{-dim}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}A(e)/P) \otimes_{\mathbb{K}D(g)} \mathbb{K}C(g) \leq d$ следует, что $\mathbb{K}C(n)\text{-dim}_{\mathbb{K}}(f \otimes_{\mathbb{K}D(n)} \mathbb{K}C(n)) \leq d$. Так как поле f порождается подполем $\mathbb{K}$ и подгруппой $D(n)$, то всякий $\mathbb{K}C(n)$ -подмодуль кольца $f \otimes_{\mathbb{K}D(n)} \mathbb{K}C(n)$ является его идеалом. Тогда соотношение $\mathbb{K}C(n)\text{-dim}_{\mathbb{K}}(f \otimes_{\mathbb{K}D(n)} \mathbb{K}C(n)) \leq d$ противоречит лемме 2.3.4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.5. Пусть N — нильпотентная минимаксная G -подгруппа без кручения разрешимой группы G , $r_0(G) < \infty$, причем N не содержит бесконечных полициклических G -секций. Пусть $\mathbb{K}$ — поле, $\text{char } \mathbb{K} = 0$, и M — непроницаемый $\mathbb{K}N$ -модуль такой, что для любой собственной изолированной G -подгруппы $K \leq N$ модуль M — без $\mathbb{K}K$ -кручения. Если $r_0(G) = r_0(\text{Ser}_{(G,N)}(M, x\mathbb{K}N))$ для любого элемента $0 \neq x \in M$, то подгруппа N — абелева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, существует конечно порожденное подполе $f \leq \mathbb{k}$ такое, что модуль M имеет fN -кручение. Легко видеть, что модуль $M - fN$ -непроницаемый, и из леммы 3.1.2 следует, что поле $\mathbb{k}$ можно заменить подполем f . Таким образом, можно считать, что поле $\mathbb{k}$ – конечно порожденное. Пусть элемент $0 \neq x \in M$ такой, что $\text{Ann}_{\mathbb{k}N}(x) \neq 0$. Заменяв модуль M его подмодулем $x\mathbb{k}N$, можно считать, что модуль $M - \mathbb{k}N$ -периодический. Предположим, что подгруппа N неабелева. Тогда N содержит собственную изолированную G -подгруппу K такую, что K содержит предпоследний член верхнего центрального ряда подгруппы N , $(N/K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ – неприводимый $\mathbb{Q}G$ -модуль и модуль M не имеет $\mathbb{k}K$ -кручения. Тогда по лемме 2.1.4 существует подгруппа H конечного индекса в G такая, что $N \leq H$ и факторгруппа N/K является H -полиплинтусом.

По лемме 3.3.2 существуют плотная подгруппа $S \leq N$ и $\mathbb{k}S$ -критический элемент $a \in M$ такие, что $K \leq S$, факторгруппа S/K конечно порожденная, $a\mathbb{k}N = a\mathbb{k}S \otimes_{\mathbb{k}S} \mathbb{k}N$ и подмодуль $a\mathbb{k}N - \mathbb{k}N$ -твердый в M .

Так как подмодуль $a\mathbb{k}N$ твердый в M , то $\text{Stab}_G[a\mathbb{k}N] = \text{Sep}_{(G,N)}(M, x\mathbb{k}N)$ для любого элемента $0 \neq x \in a\mathbb{k}N$. Тогда $\text{Sep}_{(H,N)}(M, x\mathbb{k}N) = \text{Stab}_H[x\mathbb{k}N] = \text{Stab}_G[x\mathbb{k}N] \cap H$ и, следовательно, $r_0(H) = r_0(\text{Sep}_{(H,N)}(M, x\mathbb{k}N))$ для любого элемента $0 \neq x \in a\mathbb{k}N$.

Так как элемент a $\mathbb{k}S$ -критический, то для любой подгруппы $Y \leq S$ такой, что $K \leq Y$, модуль $a\mathbb{k}S$ – либо $\mathbb{k}Y$ -периодический, либо без $\mathbb{k}Y$ -кручения. Тогда так как $a\mathbb{k}N = a\mathbb{k}S \otimes_{\mathbb{k}S} \mathbb{k}N$, то для любой подгруппы $X \leq N$, содержащей K , модуль $a\mathbb{k}N$ – либо без $\mathbb{k}X$ -кручения, либо $\mathbb{k}X$ -периодический. Следовательно, существует изолированная H -подгруппа $L \leq N$ такая, что $K \leq L$, подмодуль $a\mathbb{k}N$ – без $\mathbb{k}L$ -кручения и для любой изолированной H -подгруппы $X \leq N$, содержащей L , подмодуль $a\mathbb{k}N$ – без $\mathbb{k}X$ -кручения. Нетрудно показать, что $N/L - H$ -полиплинтус.

Так как N/K не имеет бесконечных полициклических G -секций, то $\Delta_G(N/K) = 1$ и, следовательно, $\Delta_H(N/K) = 1$. Так как $N/K - H$ -полиплинтус, то нетрудно показать, что $\Delta_H(N/L) = 1$. Из леммы 2.1.4(i) следует, что N/L содержит нётеров H -полиплинтус R/L . Тогда из леммы 3.3.4 вытекает, что факторгруппа R/L бесконечная полициклическая. Так как подгруппа R плотная в N , то факторгруппа N/R черниковская. Пусть T – правая трансверсаль к подгруппе H в G , тогда $\bigcap_{g \in T} R^g = F - G$ -подгруппа в N такая, что $K \leq F$, а из теоремы Ремака следует, что факторгруппа N/F черниковская. Пусть $D = F \cap R$, тогда факторгруппа F/D бесконечно полициклическая. Очевидно, $\bigcap_{g \in T} D^g = K$, и из теоремы Ремака следует, что факторгруппа F/K бесконечная полициклическая. Но это приводит к противоречию, поскольку N не имеет бесконечных полициклических G -секций. Таким образом, подгруппа N абелева.

3.4. Основная теорема об индуцированных модулях. Следующая теорема сформулирована здесь более детально, чем во введении.

ТЕОРЕМА 3.4.1. Пусть G – разрешимая группа, $r_0(G) < \infty$, $\mathbb{k}$ – поле, $\text{char } \mathbb{k} = 0$, и $M - \mathbb{k}G$ -модуль. Пусть A – минимаксная нильпотентная G -подгруппа без кручения группы G , которая не имеет бесконечных полициклических G -секций. Предположим, что модуль M имеет $\mathbb{k}A$ -кручение. Тогда существуют элемент $0 \neq a \in M$ и подгруппы $S \leq F \leq G$ такие,

что $\text{ak}G = \text{ak}S \otimes_{\text{ak}S} \text{ak}G$ и $r_0(S/C_S(\text{ak}S)) < r_0(G)$, причем $|G : F| < \infty$ и $S = \text{Ser}_{(H,B)}(M, \text{ak}B)$, где B – H -подгруппа в A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.1.1 (iii) следует, что группу G можно заменить любой ее подгруппой H такой, что $|G : H| < \infty$ и $x\text{ak}G = x\text{ak}H \otimes_{\text{ak}H} \text{ak}G$ для некоторого $0 \neq x \in M$, при этом подгруппу A можно заменить подгруппой $A \cap H$, а модуль M можно заменить его подмодулем $x\text{ak}H$.

Если $r_0(\text{Ser}_{(G,B)}(M, \text{ak}B)) < r_0(G)$ для некоторого $0 \neq a \in M$ и некоторой G -подгруппы $B \leq A$, то теорема справедлива. Итак, можно считать, что $r_0(\text{Ser}_{(G,B)}(M, x\text{ak}B)) = r_0(G)$ для любого $0 \neq x \in M$ и любой G -подгруппы $B \leq A$.

Пусть B – минимальная изолированная G -подгруппа в A такая, что модуль M имеет $\text{ak}B$ -кручение. Если $\text{ak}B$ -модуль M обладает важной парой (a, C) , то по предложению 3.2.3 $\text{Ser}_{(G,B)}(M, \text{ak}B) \leq N_G(C) = H$. Так как по лемме 2.1.1 (iii) $|G : H| < \infty$, то, заменив G на H и A на $A \cap H$, можно предполагать, что C – G -подгруппа, и, следовательно, B можно заменить на C , при этом $r_0(C) < r_0(B)$. Итак, через несколько шагов можно считать, что $\text{ak}B$ -модуль M непроницаемый. Тогда по предложению 3.3.5 подгруппа B – абелева, и теорема следует из леммы 3.1.3 и [4; теорема 4.2].

§ 4. О модулях над групповыми кольцами разрешимых групп конечного ранга

4.1. Модули над скрещенными произведениями полициклических групп. Пусть S – кольцо, $0 \neq a \in S$ и $J = \langle a \rangle$ – правый идеал кольца S , порожденный элементом a . Тогда $[a] = S/J$ – правый S -модуль.

Пусть S – кольцо, на котором действует группа операторов G , и пусть $0 \neq a \in S$. Будем говорить, что S -модуль M принадлежит классу $\mathcal{U}_0(S, a, G)$, если M обладает вполне упорядоченным рядом подмодулей таким, что каждый элемент x любого фактора этого ряда аннулируется правым идеалом Λ_x^g кольца S , где $g \in G$ и Λ_x – аннулятор некоторого элемента модуля $[a]$. Естественно предполагается, что для каждого элемента x аннулятор Λ_x может быть свой. Нетрудно показать, что если S -модуль M обладает вполне упорядоченным рядом, каждый фактор которого принадлежит классу $\mathcal{U}_0(S, a, G)$, то $M \in \mathcal{U}_0(S, a, G)$.

Будем говорить, что S -модуль M принадлежит классу $\mathcal{U}(S, a, G)$, если M содержит свободный S -подмодуль V такой, что $M/V \in \mathcal{U}_0(S, a, G)$. Очевидно, если $M \in \mathcal{U}(S, a, G)$ и $G \leq G_1$, то $M \in \mathcal{U}(S, a, G_1)$.

ЛЕММА 4.1.1. Пусть S – кольцо, на котором действует группа G , и пусть M – S -модуль, обладающий рядом подмодулей $0 = M_0 \leq \dots \leq M_i \leq M_{i+1} \leq \dots \leq M_\gamma = M$ таким, что $M_{i+1}/M_i \in \mathcal{U}(S, a, G)$, где γ – порядковое число. Тогда $M \in \mathcal{U}(S, a, G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть W_i/M_i – свободный подмодуль в M_{i+1}/M_i такой, что $M_{i+1}/W_i \in \mathcal{U}_0(S, a, G)$. Тогда $W_i = V_i \oplus M_i$, где V_i – свободный подмодуль в M , и, следовательно, $V = \bigoplus_i V_i$ – свободный подмодуль в M . Так как модуль M/V обладает вполне упорядоченным рядом подмодулей $\{V + M_i\}$, факторы которого – из класса $\mathcal{U}_0(S, a, G)$, то $M/V \in \mathcal{U}_0(S, a, G)$.

ЛЕММА 4.1.2. Пусть S – кольцо, на котором действует группа операторов G , и пусть M_1 и M_2 – S -модули. Предположим, что $M_1 \in \mathcal{U}(S, a_1, G)$ и $M_2 \in \mathcal{U}(S, a_2, G)$. Тогда $M_1, M_2 \in \mathcal{U}(S, a, G)$ для любого элемента $0 \neq a \in \langle a_1 \rangle \cap \langle a_2 \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, достаточно показать, что если $N \in \mathcal{U}_0(S, b, G)$ и $a \in \langle b \rangle$, то $N \in \mathcal{U}_0(S, a, G)$. Модуль N обладает вполне упорядоченным рядом подмодулей таким, что каждый элемент x любого фактора этого ряда аннулируется правым идеалом Λ^g кольца S , где $g \in G$ и Λ – аннулятор некоторого элемента $y + \langle b \rangle$ модуля $[b] = S/\langle b \rangle$. Пусть Ω – аннулятор в S элемента $y + \langle a \rangle$ модуля $[a] = S/\langle a \rangle$. Так как $\langle a \rangle \leq \langle b \rangle$, то $\Omega \leq \Lambda$. Отсюда следует, что элемент x аннулируется правым идеалом $\Omega^g \leq S$ и, следовательно, $N \in \mathcal{U}_0(S, a, G)$.

ЛЕММА 4.1.3. Пусть S – кольцо, на котором действует группа операторов G , и пусть $H \leq G$. Пусть M – S -модуль такой, что $M \in \mathcal{U}(S, a, H)$, тогда $Mg \in \mathcal{U}(S, a, G)$, где $g \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть U – свободный S -подмодуль в M такой, что $M/U \in \mathcal{U}_0(S, a, H)$. Тогда Ug – свободный S -подмодуль в Mg и модуль Mg/Ug обладает вполне упорядоченным рядом подмодулей таким, что каждый элемент любого фактора этого ряда аннулируется правым идеалом Λ^h кольца S , где $h \in G$ и Λ – аннулятор некоторого элемента модуля $[a]$.

Для любого $t \geq 1$ определим частичный порядок на множестве $\mathbb{N}^t$ следующим образом: $m \leq n$ тогда и только тогда, когда $n - m \in \mathbb{N}^t$. Пусть S – кольцо, M – S -модуль и $\mathcal{L}(M)$ – решетка подмодулей модуля M . Отображение $\varphi: \mathbb{N}^t \rightarrow \mathcal{L}(S)$ сохраняет порядок, если $\varphi(m) \leq \varphi(n)$ при $m \leq n$.

Следующая теорема обобщает результаты Брауна [27] и Мак-Коннела [28] о скрещенных произведениях коммутативных колец и полициклических групп.

ТЕОРЕМА 4.1.4. Пусть $R = S * \hat{G}$ – скрещенное произведение однородного кольца S и почти полициклической группы $\hat{G}$. Пусть G – группа обратимых элементов кольца R такая, что G действует на S , $R = SG$ и $N = S \cap G$ – нормальная подгруппа в G . Предположим, что для любого конечно порожденного S -модуля M , любого $t \geq 1$ и любого сохраняющего порядок отображения $\varphi: \mathbb{N}^t \rightarrow \mathcal{L}(M)$ существует элемент $0 \neq a \in S$ такой, что $M/\varphi(n) \in \mathcal{U}(S, a, N)$ для каждого $n \in \mathbb{N}^t$. Тогда для любого конечно порожденного модуля M , любого $t \geq 1$ и любого сохраняющего порядок отображения $\varphi: \mathbb{N}^t \rightarrow \mathcal{L}(M)$ существует элемент $0 \neq a \in S$ такой, что $M/\varphi(n) \in \mathcal{U}(S, a, G)$ для каждого $n \in \mathbb{N}^t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа G/N обладает конечным субнормальным рядом, в котором каждый фактор либо бесконечный циклический, либо конечный. Доказательство проведем индукцией по длине этого ряда. Можно предполагать, что существует нормальная подгруппа $H/N \leq G/N$ такая, что факторгруппа G/H либо конечная, либо бесконечная циклическая, и для скрещенного произведения $K = S * \hat{H}$ теорема справедлива, где $\hat{H} = H/N$. Если $|G/H| < \infty$, то M – конечно порожденный K -модуль, и теорема следует из предположения индукции.

Предположим теперь, что $G = H\langle x \rangle$, где $\langle x \rangle$ – бесконечная циклическая группа.

Пусть U – конечно порожденный K -подмодуль модуля M такой, что $M = \sum_{i=-\infty}^{\infty} Ux^i$, и пусть $W = U \otimes_K R = \bigoplus_{i=-\infty}^{\infty} Ux^i$. Тогда $M \simeq W/P$, где P – R -подмодуль в W . Пусть P_n – R -подмодуль в W такой, что $P \leq P_n$ и $P_n/P = \varphi(n)$. Тогда можно использовать методы доказательства леммы 5.1 из [29].

Положим $L_0 = 0$, $L_{2m-1} = \bigoplus_{i=-m+1}^{m-1} Ux^i$, $L_{2m} = \bigoplus_{i=-m+1}^m Ux^i$, где $m \in \mathbb{N}$. Пусть $P_{n,j} = P_n + L_j$, тогда $P_{n,j}/P_n \leq P_{n,j+1}/P_n$, $W/P_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} (P_{n,i}/P_n)$ и по лемме Зассенхауза

$$P_{n,j}/P_n \simeq L_j/(L_{j-1} + (P_n \cap L_j)). \quad (*)$$

Положим $Q_{n,2m} = \{c_m \in U : \sum_{i=-m+1}^m c_i x^i \in L_{2m} \cap P_n\}$ и $Q_{n,2m+1} = \{c_{-m} \in U : \sum_{i=-m}^m c_i x^i \in L_{2m+1} \cap P_n\}$. Так же как и в [29; лемма 5.1] можно показать, что $Q_{n,j}$ – K -подмодули в U . Легко видеть, что $Q_{n,j} \leq Q_{m,j}$, если $n \leq m$, и $Q_{n,2j} \leq Q_{n,2i}$, $Q_{n,2j-1} \leq Q_{n,2i-1}$, если $j \leq i$. Тогда отображения $\psi_1: n, j \mapsto Q_{n,2j}$ и $\psi_2: n, j \mapsto Q_{n,2j-1}$ сохраняют порядок. Следовательно, по предположению индукции найдутся элементы $a_1, a_2 \in S$ такие, что $U/Q_{n,2j} \in \mathcal{U}(S, a_1, H)$ и $U/Q_{n,2j-1} \in \mathcal{U}(S, a_2, H)$. По лемме 4.1.2 существует элемент $a \in S$ такой, что все $U/Q_{n,j} \in \mathcal{U}(S, a, H)$. Из соотношения (*) следует, что $P_{n,j}/P_{n,j-1} \simeq Ux^k/Q_{n,j}x^k \simeq (U/Q_{n,j})x^k$, где $k \in \mathbb{Z}$, и, следовательно, по лемме 4.1.3 $P_{n,j}/P_{n,j-1} \in \mathcal{U}(S, a, G)$. Тогда по лемме 4.1.1 все $M/\varphi(n) \in \mathcal{U}(S, a, G)$.

ЛЕММА 4.1.5. Пусть N – нильпотентная группа без кручения, R – область целостности и M – конечно порожденный S -модуль, где $S = RN$. Тогда для любого $t \geq 1$ и любого сохраняющего порядок отображения $\varphi: \mathbb{N}^t \rightarrow \mathcal{L}(M)$ существует элемент $a \in S$ такой, что все $M/\varphi(n) \in \mathcal{U}(S, a, N)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по количеству k порождающих элементов модуля M . Предположим, что $k = 1$, тогда $\{\varphi(n) : n \in \mathbb{N}^t\}$ – множество правых идеалов кольца S . Пусть $\mathcal{L} = \{\varphi(n) : \varphi(n) \neq 0\}$. Так как любое подмножество в $\mathbb{N}^t$ имеет конечное множество минимальных элементов, то $\mathcal{L}$ имеет конечное подмножество $\mathcal{M}$ минимальных элементов. Так как кольцо S однородное, то пересечение идеалов из $\mathcal{M}$ содержит ненулевой элемент a , который принадлежит всем идеалам из $\mathcal{L}$. Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}^t$ либо $S/\varphi(n) = S$, либо $\varphi(n) \geq \langle a \rangle$. Следовательно, либо модуль $S/\varphi(n)$ – свободный, либо каждый элемент из $S/\varphi(n)$ аннулируется аннулятором некоторого элемента из $S/\langle a \rangle$ и, значит, все $M/\varphi(n) \in \mathcal{U}(S, a, N)$.

Предположим теперь, что модуль M порождается элементами $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, и пусть V – подмодуль в M , порожденный элементами $\{b_2, \dots, b_n\}$. Пусть $\varphi_1(n) = \varphi(n) \cap V$ и $\varphi_2(n) = (\varphi(n) + V)/V$. Легко проверить, что отображения $\varphi_1: \mathbb{N}^t \rightarrow V$ и $\varphi_2: \mathbb{N}^t \rightarrow M/V$ сохраняют порядок, и, следовательно, по предположению индукции существуют элементы a_1 и a_2 в S такие, что $V/\varphi_1(n) \in \mathcal{U}(S, a_1, V)$ и $M/\varphi_2(n) \in \mathcal{U}(S, a_2, M/V)$ для любого $n \in \mathbb{N}^t$. Теперь утверждение следует из лемм 4.1.1 и 4.1.2.

ТЕОРЕМА 4.1.6. Пусть G – группа и N – ее нильпотентная G -подгруппа без кручения, определяющая почти полициклическую факторгруппу G/N . Пусть

R – область целостности и M – конечно порожденный RG -модуль. Тогда существует элемент $0 \neq a \in RN$ такой, что $M \in \mathcal{U}(RN, a, G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема следует из леммы 4.1.5 и теоремы 4.1.4.

4.2. О неприводимых модулях над групповыми кольцами разрешимых групп конечного ранга.

ЛЕММА 4.2.1. Пусть N – нильпотентная группа без кручения, $r(N) < \infty$, и A – изолированная центральная подгруппа в N . Пусть $\mathbb{k}$ – поле, I – максимальный идеал кольца $\mathbb{k}A$ и $a \in \mathbb{k}N$, причем $a \notin \mathbb{k}NI$. Тогда для любого элемента $0 \neq b \in \mathbb{k}N$ найдется $c \in \mathbb{k}N$ такой, что $c \in a\mathbb{k}N$ и $c \notin \mathbb{k}NI$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, существует f.g.d.-подгруппа $H \leq N$ такая, что $a, b \in \mathbb{k}H$, и, следовательно, можно предполагать, что N – f.g.-группа.

Пусть $K = \mathbb{k}N/I$, тогда K – скрещенное произведение поля $\mathbb{k}A/I$ и нильпотентной f.g.-группы без кручения N/A . Хорошо известно, что кольцо K однородное и не имеет делителей нуля.

Пусть $M = \mathbb{k}N/\langle a \rangle$ и $\hat{b} = b + \langle a \rangle \in M$. Предположим, что $\text{Ann}_{\mathbb{k}N}(\hat{b}) \leq \mathbb{k}NI$, тогда $\langle \hat{b} \rangle / \langle \hat{b} \rangle I \simeq K$. По лемме 2.3.1(ii) $\langle \hat{b} \rangle / \langle \hat{b} \rangle I$ обладает конечным рядом, в котором каждый фактор изоморфен некоторой секции модуля M/MI . Так как кольцо K не имеет делителей нуля, то каждый такой ряд имеет фактор, изоморфный K , и, следовательно, модуль M/MI имеет секцию, изоморфную K . С другой стороны, $M \simeq K/\langle \hat{a} \rangle$, где $\hat{a} = a + \mathbb{k}N \neq \mathbb{k}N = \hat{0}$, и, следовательно, $K/\langle \hat{a} \rangle$ имеет секцию, изоморфную K . Но это невозможно, так как кольцо K однородное и, значит, каждый элемент из $K/\langle \hat{a} \rangle$ имеет ненулевой аннулятор в K .

ЛЕММА 4.2.2. Пусть N – нильпотентная G -подгруппа без кручения разрешимой группы G , $r_0(G) < \infty$. Пусть A – изолированная центральная G -подгруппа в N такая, что факторгруппа $G/C_G(A)$ – конечно порожденная почти абелева и $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ – вполне приводимый $\mathbb{Q}G$ -модуль, где G действует на A сопряжениями. Пусть $\mathbb{k}$ – поле и $0 \neq a \in \mathbb{k}A$. Тогда существует максимальный идеал I кольца $\mathbb{k}A$ такой, что $|A : I^+| < \infty$ и идеал $I\mathbb{k}N$ не содержит правых идеалов вида Λ^g , где $g \in G$ и Λ – аннулятор некоторого элемента $\mathbb{k}N$ -модуля $[a]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть H – G -подгруппа такая, что $C_G(A) \leq H$, факторгруппа $H/C_G(A)$ конечно порожденная абелева и $|G/H| < \infty$.

Пусть f – конечно порожденное подполе в $\mathbb{k}$ такое, что $a \in fN$. Элемент a можно представить в виде $a = \sum \alpha_t t$, где $\alpha_t \in fA$ и t – элементы правой трансверсали к A в G . Пусть $\alpha = \prod \alpha_t$ и $\beta = \prod \alpha^r$, где r пробегает трансверсаль к H в G . По [9; теорема А] существует H -инвариантный идеал J кольца fA , который не содержит элемент β и такой, что $|A : J^+| < \infty$. Тогда идеал J не содержит элементов вида α^r . Так как J – H -инвариантный идеал кольца fA , то $\alpha^{r^h} \notin J$, где $h \in H$, и, значит, $\alpha^g \notin J$, где $g \in G$. Пусть I – максимальный идеал кольца $\mathbb{k}A$ такой, что $J \leq I$. Очевидно, $I \cap fA = J$ и, следовательно, $\alpha^g \notin I$. Из определения элемента α следует, что $a^g \notin I\mathbb{k}N$ для любого $g \in G$. Легко видеть, что $|A : I^+| < \infty$.

Пусть $b \in [a]$ и Λ – аннулятор элемента b в $\mathbb{k}N$. Пусть $g \in G$, тогда легко видеть, что Λ^g – аннулятор в $\mathbb{k}N$ элемента $b^g \in [a^g]$. Так как $a^g \notin I\mathbb{k}N$, то из леммы 4.2.1 следует, что Λ^g не содержится в $I\mathbb{k}N$.

ЛЕММА 4.2.3. Пусть S – кольцо, на котором действует группа G , M – S -модуль такой, что $M \in \mathcal{U}_0(S, a, G)$. Пусть I – простой центральный идеал кольца S , не содержащий правых идеалов вида Λ^g , где $g \in G$ и Λ – аннулятор некоторого элемента S -модуля $[a] = S/\langle a \rangle$, где $0 \neq a \in S$. Тогда $\text{Ann}_S(b)$ не содержится в I для любого $b \in M$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 = M_1 \leq M_2 \leq \dots \leq M_\alpha \leq \dots \leq M_\gamma = M$ – ряд подмодулей модуля M , элементы факторов которого аннулируются идеалами вида Λ^g , где $g \in G$ и Λ – аннулятор некоторого элемента модуля $[a] = S/\langle a \rangle$.

Доказательство проведем трансфинитной индукцией по γ . Если $b \in M_\alpha$, где $\alpha < \gamma$, то можно применить предположение индукции. Таким образом, можно предполагать, что $b \notin M_{\gamma-1}$. Тогда $b\Lambda^g \leq M_{\gamma-1}$, где $g \in G$ и Λ – аннулятор некоторого элемента S -модуля $[a]$. Поскольку I не содержит Λ^g , то существует элемент $x \in S$ такой, что $bx \in M_{\gamma-1}$ и $x \notin I$. По предположению индукции существует элемент $y \in \text{Ann}_S(bx)$ такой, что $y \notin I$. Тогда $xy \in \text{Ann}_S(b)$, а так как I – простой идеал в S , то $xy \notin I$.

ЛЕММА 4.2.4. Пусть S – кольцо, на котором действует группа G , M – S -модуль и U – подмодуль модуля M такой, что $M/U \in \mathcal{U}_0(S, a, G)$. Пусть I – простой центральный идеал кольца S , не содержащий правых идеалов вида Λ^g , где $g \in G$ и Λ – аннулятор некоторого элемента $\mathbb{K}N$ -модуля $[a]$. Тогда $\text{Ann}_S(b)$ не содержится в I для любого элемента $\hat{b} \in (U \cap MI)/UI$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый элемент $b \in U \cap MI$ можно записать в виде $b = \sum_{i=1}^n b_i l_i$, где $b_i \in M$ и l_i – центральные порождающие элементы идеала I . Пусть $\hat{b}$ – образ элемента b в $(U \cap MI)/UI$ и $\hat{c}$ – образ элемента $\sum_{i=2}^n b_i l_i$ в $(U \cap MI)/UI$. Покажем индукцией по n , что $\text{Ann}_S(\hat{b})$ не содержится в I .

Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Пусть $\hat{b}_1$ – образ элемента b_1 в M/U , тогда по лемме 4.2.3 $J = \text{Ann}_S(\hat{b}_1)$ не содержится в I , а так как $bJ = b_1 J l_1 \leq UI$, то $J \leq \text{Ann}_S(\hat{b})$.

Рассмотрим теперь общий случай. По предположению индукции существует элемент $x \in \text{Ann}_S(\hat{c})$ такой, что $x \notin I$. Тогда $bx = b_1 x l_1 + z$, где $z \in UI$, и по предположению индукции существует элемент $y \in \text{Ann}_S(\hat{d})$ такой, что $y \notin I$, где $\hat{d}$ – образ элемента $b_1 x l_1$ в $(U \cap MI)/UI$. Таким образом, $xy \in \text{Ann}_S(\hat{b})$ и $xy \notin I$, так как идеал I – простой.

ТЕОРЕМА 4.2.5. Пусть G – разрешимая группа, $r(G) < \infty$, и N – минимальная нильпотентная G -подгруппа без кручения группы G такая, что факторгруппа G/N – полициклическая. Пусть $\mathbb{K}$ – поле и M – простой $\mathbb{K}G$ -модуль. Тогда модуль M имеет $\mathbb{K}N$ -кручение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4.1.6 существует элемент $a \in \mathbb{K}N$ такой, что $M \in \mathcal{U}(\mathbb{K}N, a, G)$. Если модуль M – без $\mathbb{K}N$ -кручения, то существует свободный $\mathbb{K}N$ -подмодуль $0 \neq U \leq M$ такой, что $M/U \in \mathcal{U}_0(\mathbb{K}N, a, G)$. Нетрудно показать, что существует изолированная центральная G -подгруппа $A \leq N$ такая, что факторгруппа $G/C_G(A)$ – конечно порожденная почти абелева и $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ – простой $\mathbb{Q}G$ -модуль, где G действует на A сопряжениями. Тогда по лемме 4.2.2 существует максимальный идеал $I \leq \mathbb{K}A$ такой, что идеал $I\mathbb{K}N$ не содержит правых идеалов вида Λ^g , где $g \in G$ и Λ – аннулятор некоторого элемента $\mathbb{K}N$ -модуля $[a]$. Очевидно,

$I\mathbb{k}N$ – центральный идеал кольца $\mathbb{k}N$, и, следовательно, по лемме 4.2.4 $\text{Ann}_{\mathbb{k}N}(b)$ не содержится в $I\mathbb{k}N$ для любого элемента $b \in (U \cap M I\mathbb{k}N)/U I\mathbb{k}N$. С другой стороны, поскольку U – свободный $\mathbb{k}N$ -модуль, то $U/U I\mathbb{k}N$ – свободный R -модуль, где $R = \mathbb{k}N/I\mathbb{k}N$. Очевидно, R – скрещенное произведение поля $\mathbb{k}A/I$ и нильпотентной группы без кручения N/A и, следовательно, R не имеет делителей нуля. Тогда любой ненулевой элемент модуля $U/U I\mathbb{k}N$ имеет нулевой аннулятор в R , откуда следует, что $U \cap M I\mathbb{k}N = U I\mathbb{k}N$.

Так как по лемме 4.2.2 $|A : I^+| < \infty$, то I^+ содержит G -подгруппу B конечного индекса в A . Тогда $\mathbb{k}N \geq L = \bigcap_{g \in G} (I\mathbb{k}N)^g \supseteq 1 - B \neq 0$ и, следовательно, L – ненулевой G -инвариантный идеал кольца $\mathbb{k}N$. Так как M – простой $\mathbb{k}G$ -модуль, то $ML = M$ и, следовательно, $M I\mathbb{k}N = M$. Тогда $U \cap M I\mathbb{k}N = U$, но это противоречит соотношению $U \cap M I\mathbb{k}N = U I\mathbb{k}N$.

4.3. Примитивные представления разрешимых групп конечного ранга.

ТЕОРЕМА 4.3.1. Пусть G – разрешимая группа, удовлетворяющая условию $\text{тах-}G$, $r(G) < \infty$. Пусть $\mathbb{k}$ – поле, $\text{char } \mathbb{k} = 0$, и M – неприводимый $\mathbb{k}G$ -модуль, $C_G(M) = 1$. Если группа G не является полициклической, то существуют подгруппа $S \leq G$ и $\mathbb{k}S$ -подмодуль $U \leq M$ такие, что $M = U \otimes_{\mathbb{k}S} \mathbb{k}G$ и $r_0(S) < r_0(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по $r_0(G)$. По лемме 2.1.3(ii) полициклический корадикал A группы G не имеет бесконечных полициклических G -секций. По теореме 4.2.5 модуль M имеет $\mathbb{k}A$ -кручение. Тогда по теореме 3.4.1 существуют подгруппа $H \leq G$ и $\mathbb{k}H$ -подмодуль $V \leq M$ такие, что $M = V \otimes_{\mathbb{k}H} \mathbb{k}G$ и $r_0(K) < r_0(G)$, где $K = H/C$ и $C = C_H(V)$. Если $r_0(H) < r_0(G)$, то теорема справедлива. Предположим, что $r_0(H) = r_0(G)$. Тогда по лемме 2.1.2(ii) $|G : H| < \infty$, H – подгруппа с условием $\text{тах-}H$, а по лемме 2.1.1(iv) $P(H)$ не имеет бесконечных полициклических H -секций. Отсюда следует, что группа K удовлетворяет условию $\text{тах-}K$ и $P(K)$ не имеет бесконечных полициклических K -секций.

Предположим, что группа K – полициклическая. Тогда так как $P(H)$ не имеет бесконечных полициклических H -секций, то $D = C \cap P(H)$ – плотная подгруппа в $P(H)$. Из соотношения $|G : H| < \infty$ следует, что $P(H)$ – плотная подгруппа в $P(G)$ и, следовательно, D – плотная подгруппа в $P(G) = A$. Поскольку D – H -подгруппа, то $|G : N_G(D)| < \infty$ и, следовательно, $F = \bigcap_{g \in G} D^g \neq 1$. Таким образом, $1 \neq F$ – G -подгруппа и $C_M(F) \geq V \neq 0$. Тогда так как M – неприводимый $\mathbb{k}G$ -модуль, то нетрудно показать, что $C_M(F) = M$, но это противоречит условию $C_G(M) = 1$. Таким образом, группа K не является полициклической, и можно применить предположение индукции к группе K и $\mathbb{k}K$ -модулю V .

Список литературы

1. Harper D. L. Primitivity in representations of polycyclic groups // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1980. V. 88. P. 15–31.
2. Harper D. L. Primitive irreducible representations of nilpotent groups // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1977. V. 82. P. 241–247.
3. Залесский А. Е. О неприводимых представлениях конечнопорожденных нильпотентных групп без кручения // Матем. заметки. 1971. Т. 9. №2. С. 199–210.

4. *Tushev A. V.* Spectra of conjugated ideals in group algebras of abelian groups of finite rank and control theorems // Glasgow Math. J. 1996. V. 38. P. 309–320.
5. *Roseblade J. E.* Group rings of polycyclic groups // J. Pure Appl. Algebra. 1973. V. 3. P. 307–328.
6. *Brookes C. J. B.* Modules over polycyclic groups // Proc. London Math. Soc. (3). 1988. V. 57. P. 88–108.
7. *Brookes C. J. B.* Stabilisers in injective modules over nilpotent groups // Proc. of Singapore Group Theory Conference, 1987. Berlin: de Gruyter, 1989. P. 275–291.
8. *Brookes C. J. B., Brown K. A.* Primitive group rings and Noetherian rings of quotients // Trans. Amer. Math. Soc. 1985. V. 288. P. 605–623.
9. *Wehrfritz B. A. F.* Invariant maximal ideals in certain group algebras // J. London Math. Soc. (2). 1992. V. 46. P. 101–110.
10. *Tushev A. V.* On modules over group rings of soluble groups of finite rank // London Math. Soc. Lecture Note Ser. 1999. V. 261. P. 718–727.
11. *Чарин В. С.* О группах автоморфизмов нильпотентных групп // Укр. матем. журн. 1954. Т. 3. № 6. С. 295–304.
12. *Глушков В. М.* О нормализаторах полных подгрупп в полной группе // Докл. АН СССР. 1950. Т. 71. № 3. С. 421–424.
13. *Hall P.* Finiteness conditions for soluble groups // Proc. London Math. Soc. (3). 1954. V. 4. P. 419–436.
14. *Wilson J. S.* Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index // Math. Z. 1970. V. 144. P. 19–21.
15. *Kropholler P. H.* On finitely generated soluble groups with large wreath product sections // Proc. London Math. Soc. (3). 1984. V. 49. P. 155–169.
16. *Roseblade J. E.* Applications of the Artin–Rees lemma to group rings // Simp. Math. V. 17. London: Academic Press, 1976. P. 471–478.
17. *McConnell J. C., Robson J. C.* Noncommutative Noetherian rings. Chechester: Wiley, 1987.
18. *Segal D.* On the residual simplicity of certain modules // Proc. London Math. Soc. (3). 1977. V. 34. P. 327–353.
19. *Passman D. S.* The algebraic structure of group rings. New York: Wiley, 1977.
20. *Wilson J. S.* Soluble products of minimax groups, and nearly surjective derivations // J. Pure Appl. Algebra. 1988. V. 53. P. 297–331.
21. *Brookes C. J. B.* Ideals in group rings of soluble groups of finite rank // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1985. V. 97. P. 27–49.
22. *Тушев А. В.* Гёттеровы модули над абелевыми группами конечного свободного ранга // Укр. матем. журн. 1991. Т. 43. С. 1042–1048.
23. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
24. *Тушев А. В.* О примитивности групповых алгебр некоторых классов разрешимых групп // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 3. С. 143–160.
25. *Tushev A. V.* Induced modules over group rings algebras of metabelian groups of finite rank // Comm. Algebra. 1999. V. 27. № 12. P. 5921–5938.
26. *Brookes C. J. B., Brown K. A.* Injective modules, induction maps and endomorphism rings // Proc. London Math. Soc. (3). 1993. V. 67. P. 127–158.
27. *Brown K. A.* The Nullstellensatz for certain group rings // J. London Math. Soc. (2). 1982. V. 26. P. 425–434.
28. *McConnell J. C.* The Nullstellensatz and Jacobson properties for rings of differential operators // J. London Math. Soc. (2). 1982. V. 26. P. 37–42.
29. *Hall P.* On the finiteness of certain soluble groups // Proc. London Math. Soc. (3). 1959. V. 9. P. 595–622.