Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ю. Протасов, М. Е. Широков, Обобщенная компактность в линейных пространствах и ее приложения, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 5, 71–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm5246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 11:25:56

УДК 517.982.25

В. Ю. Протасов, М. Е. Широков

Обобщенная компактность в линейных пространствах и ее приложения

Для данного выпуклого множества в линейном метрическом пространстве естественно возникают вопросы об условиях непрерывности выпуклой оболочки любой непрерывной вогнутой функции (СЕ-свойство) и непрерывности выпуклой оболочки любой непрерывной функции на этом множестве (сильное СЕ-свойство). В случае выпуклых компактов полное решение этих вопросов было найдено в 1970-е годы усилиями Дж. Вестерстрёма и Р. О'Брайена. Сначала Вестерстрёмом было показано, что для компактов сильное СЕ-свойство и СЕ-свойство равносильны соответственно открытости барицентрического отображения и открытости сужения этого отображения на множество максимальных мер. Затем О'Брайен показал эквивалентность последних двух свойств открытости геометрически наглядному "свойству устойчивости" данного компакта, установив тем самым равносильность СЕ-свойства и сильного СЕ-свойства. В работе решается следующая задача: обобщаются ли эти результаты на некомпактные выпуклые множества, и если да, то на какие? Доказано, что такое обобщение возможно на класс так называемых μ -компактных множеств. Приведены аргументы, показывающие, что этот класс является, по-видимому, максимальным классом, для которого такое обобщение возможно. Детально исследуются свойства μ -компактов, рассматривается ряд примеров и обсуждаются приложения полученных результатов в квантовой теории информации.

Библиография: 32 названия.

Ключевые слова: барицентрическое отображение, μ -компактное множество, выпуклая оболочка функции, устойчивость выпуклого множества.

§ 1. Введение

Свойства и структура компактных множеств в контексте выпуклого анализа активно изучаются с середины прошлого века, этому посвящена обширная литература (см. [1]–[3] и библиографию в этих работах). К числу наиболее важных результатов относятся теорема Крейна–Мильмана о выпуклой оболочке крайних точек, теория Шоке о барицентрическом разложении, свойства выпуклых оболочек (convex envelopes) функций, заданных на выпуклых компактах. В работах Г. А. Эдгара [4], [5] и Р. Д. Боргина [6], [7] ряд классических

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00208), МД-2195.2008.1 и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3233.2008.1), работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 07-01-00156 и № 09-01-00424а) и АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" (грант № 2.1.1/500).

результатов обобщен на некомпактные множества в локально выпуклых пространствах. Подобные обобщения не только представляют теоретический интерес, но и существенно важны для приложений, например, в математической физике (см. [8]), квантовой теории информации (см. [9]) и т.д. Понятно, что классические результаты выпуклого анализа обобщаются не на любые некомпактные множества. От множеств требуются некоторые специальные свойства. Так, теория Шоке была распространена на множества, обладающие свойством Радона–Никодима (см. [4]). В работе [9] ряд результатов о непрерывности выпуклых оболочек функций был обобщен на специальный класс некомпактных множеств, названный μ -компактами. Этот класс, характеризуемый специальным сочетанием топологии и структуры линейных операций, и будет основным классом множеств, рассматриваемым в настоящей статье.

Начиная с 1970-х годов в литературе исследуются задачи о непрерывности выпуклых оболочек функций (см. определение 1). При каких условиях на выпуклый компакт $\mathcal{A}$ выпуклая оболочка любой непрерывной (в другой постановке – вогнутой непрерывной) функции, заданной на $\mathcal{A}$, непрерывна? Дж. Вестерстрём в работе [10] показал, что необходимым и достаточным условием этого является свойство открытости барицентрического отображения. Он также высказал гипотезу о равносильности свойства непрерывности выпуклой оболочки любой непрерывной вогнутой функции (названного в [11] *СЕ-свойством*) и свойства непрерывности выпуклой оболочки любой непрерывной функции (названного в [9] *сильным СЕ-свойством*). Эта гипотеза была доказана Р. О’Брайеном (см. [12]), который показал эквивалентность СЕ-свойств свойству открытости отображения выпуклого смешивания

$$(x, y, \lambda) \mapsto \lambda x + (1 - \lambda)y$$

(свойство устойчивости выпуклых множеств – *stable convex sets*; см. [13]–[15]). В какой мере данные результаты распространяются на некомпактные множества $\mathcal{A}$? Первый шаг в решении этой задачи был сделан в работе [9], где были определены так называемые μ -компактные множества. Часть результатов о СЕ-свойствах была перенесена с компактов на более широкий класс μ -компактов, что позволило, в частности, получить ряд результатов о свойствах энтропийных характеристик бесконечномерных квантовых каналов и систем.

В настоящей работе мы детально исследуем свойство μ -компактности, рассматриваем ряд примеров, важных для приложений, обобщаем на класс выпуклых μ -компактов некоторые классические результаты выпуклого анализа, ранее доказанные только для компактов, в частности теорию Вестерстрёма–О’Брайена.

Класс μ -компактных выпуклых множеств определяется требованием слабой компактности прообраза любого компакта при барицентрическом отображении, которое не является чисто топологическим, но выражает определенную связь топологии и структуры линейных операций. Этот класс включает в себя как все компакты, так и некоторые важные для приложений некомпактные множества (например, множество операторов плотности в сепарабельном гильбертовом пространстве). μ -компактные множества не обладают многими

свойствами компактов, такими, например, как ограниченность непрерывных функций, теорема Вейерштрасса и т.д. Тем не менее, как мы увидим, на них можно распространить многие результаты теории Шоке и теории Вестерстрёма–О’Брайена. Более того, будут приведены аргументы, показывающие, что класс выпуклых μ -компактов является в определенном смысле максимальным классом, для которого возможно обобщение теории Вестерстрёма–О’Брайена.

Статья организована следующим образом. В § 2 устанавливаются основные свойства μ -компактов. На простом примере мы покажем, что ряд результатов, распространяющихся на μ -компактные множества, может не выполняться уже при небольшом ослаблении этого свойства до точечной μ -компактности (это свойство определяется требованием слабой компактности множества мер с фиксированным барицентром). Затем мы рассмотрим примеры μ -компактных множеств. В частности, покажем, что ограниченная часть положительного конуса в пространстве l_p при $p = 1$ является μ -компактом, а при $p > 1$ не обладает даже свойством точечной μ -компактности. Также докажем μ -компактность множества борелевских вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве. Этот результат позволяет доказать сохранение μ -компактности при операции выпуклого замыкания.

В § 3 завершим начатое в [9] обобщение теории Вестерстрёма–О’Брайена на μ -компактные выпуклые множества. Докажем μ -компактную версию основного результата из [12], который, в частности, устанавливает равносильность свойства непрерывности выпуклой оболочки любой вогнутой непрерывной ограниченной функции и непрерывности выпуклой оболочки любой непрерывной ограниченной функции. Затем построим пример, подтверждающий предположение о том, что выпуклые μ -компакты составляют максимальный класс выпуклых метризуемых множеств, для которых возможно такое обобщение.

В § 4 рассмотрим некоторые приложения полученных результатов в квантовой теории информации. Возможные обобщения и формулировку открытых вопросов приведем в § 5.

§ 2. О μ -компактных множествах

2.1. Основные определения и свойства. В § 2 и § 3 будем предполагать, что $\mathcal{A}$ – замкнутое ограниченное подмножество локально выпуклого пространства, выпуклое замыкание $\overline{\text{co}} \mathcal{A}$ которого (определяемое как замыкание выпуклой оболочки $\text{co} \mathcal{A}$ множества $\mathcal{A}$) является полным сепарабельным метрическим пространством¹. Будем использовать следующие обозначения:

$\text{extr} \mathcal{A}$ – множество крайних точек выпуклого множества $\mathcal{A}$;

$C(\mathcal{A})$ – множество непрерывных ограниченных функций на множестве $\mathcal{A}$;

$P(\mathcal{A})$, $Q(\mathcal{A})$ – соответственно множества выпуклых и вогнутых непрерывных ограниченных функций на выпуклом множестве $\mathcal{A}$;

¹Это означает, что топология на множестве $\overline{\text{co}} \mathcal{A}$ определяется некоторым счетным набором из семейства полуном, определяющих топологию всего локально выпуклого пространства, и что это множество является сепарабельным и полным в метрике, порожденной этим счетным набором полуном.

со f , $\overline{\text{co}} f$ – выпуклая оболочка и выпуклое замыкание функции f на выпуклом множестве, определяемые соответственно как наибольшая выпуклая и как наибольшая выпуклая замкнутая (полунепрерывная снизу) функции, не превосходящие функцию f (см. [3], [16]);

$\mathfrak{P}_n = \{ \{ \pi_i \}_{i=1}^n \mid \pi_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \pi_i = 1 \}$ – симплекс всех распределений вероятностей с $n \leq +\infty$ исходами.

Пусть $M(\mathcal{A})$ – множество всех борелевских вероятностных мер на множестве $\mathcal{A}$, снабженное топологией слабой сходимости (см. [17], [18]).

Каждой мере $\mu \in M(\mathcal{A})$ можно сопоставить ее барицентр (среднее) $\mathbf{b}(\mu) \in \overline{\text{co}} \mathcal{A}$, определяемый интегралом Петтиса (см. [17], [19])

$$\mathbf{b}(\mu) = \int_{\mathcal{A}} x \mu(dx). \quad (1)$$

Пусть $M_x(\mathcal{A})$ – выпуклое замкнутое подмножество множества $M(\mathcal{A})$, состоящее из таких мер μ , что $\mathbf{b}(\mu) = x \in \overline{\text{co}} \mathcal{A}$.

Меру с конечным или счетным числом атомов $\{x_i\}$ с весами $\{\pi_i\}$ будем обозначать $\{\pi_i, x_i\}$. Пусть $M^f(\mathcal{A})$ и $M_x^f(\mathcal{A})$ – подмножества множеств $M(\mathcal{A})$ и $M_x(\mathcal{A})$ соответственно, состоящие из мер с конечным носителем.

Барицентрическое отображение

$$M(\mathcal{A}) \ni \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu) \in \overline{\text{co}} \mathcal{A} \quad (2)$$

является непрерывным (это нетрудно доказать, используя теорему Прохорова). Поэтому образ любого компакта в $M(\mathcal{A})$ при отображении (2) является компактом в $\overline{\text{co}} \mathcal{A}$. Обратное отображение $\mathbf{b}^{-1}$ может уже не обладать этим свойством. Обобщая определение из [9], выделим класс выпуклых множеств, для которых отображение $\mathbf{b}^{-1}$ переводит компакты в компакты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество $\mathcal{A}$ назовем μ -компактным, если прообраз любого компактного подмножества множества $\overline{\text{co}} \mathcal{A}$ при барицентрическом отображении (2) является компактным подмножеством множества $M(\mathcal{A})$.

Любое компактное множество является μ -компактным. Действительно, из компактности $\mathcal{A}$ следует компактность $M(\mathcal{A})$ (см. [18]). С помощью теоремы Прохорова нетрудно получить следующий критерий μ -компактности (см. [9]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Выпуклое множество $\mathcal{A}$ является μ -компактным тогда и только тогда, когда для любого компактного подмножества $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует компактное подмножество $\mathcal{K}_\varepsilon \subseteq \mathcal{A}$ такое, что для любого $x \in \mathcal{K}$ из разложения $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$, где $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{A}$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \in \mathfrak{P}_n$, следует $\sum_{i: x_i \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{K}_\varepsilon} \lambda_i < \varepsilon$.

Из предложения 1 и общих свойств множества $M(\mathcal{A})$ следует критерий μ -компактности, наиболее удобный для практического использования.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Выпуклое множество $\mathcal{A}$ является μ -компактным тогда и только тогда, когда существует семейство $F(\mathcal{A})$ вогнутых неотрицательных функций на $\mathcal{A}$, обладающее следующими свойствами:

- множество $\{x \in \mathcal{A} \mid f(x) \leq c\}$ относительно компактно для любой функции $f \in F(\mathcal{A})$ и любого $c > 0$;

- для любого компактного подмножества $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$ найдется функция $f \in F(\mathcal{A})$ такая, что $\sup_{x \in \mathcal{K}} f(x) < +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность приведенного условия нетрудно установить, используя предложение 1 (см. [9]).

Покажем его необходимость. Пусть $\mathfrak{V}(\mathcal{A})$ – множество всех полунепрерывных снизу функций φ на $\mathcal{A}$ со значениями в $[0, +\infty]$ таких, что множество $\{x \in \mathcal{A} \mid \varphi(x) \leq c\}$ компактно при любом $c \geq 0$. Из теоремы Прохорова следует (см. [17; пример 8.6.5]), что подмножество $M_0 \subseteq M(\mathcal{A})$ относительно компактно тогда и только тогда, когда существует функция $\varphi \in \mathfrak{V}(\mathcal{A})$ такая, что

$$\sup_{\mu \in M_0} \int_{\mathcal{A}} \varphi(x) \mu(dx) < +\infty.$$

Рассмотрим семейство вогнутых неотрицательных функций

$$f_{\varphi}(x) = \sup_{\mu \in M_x(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} \varphi(y) \mu(dy), \quad \varphi \in \mathfrak{V}(\mathcal{A}),$$

на множестве $\mathcal{A}$. Наличие у этого семейства первого характеристического свойства семейства $F(\mathcal{A})$ следует из непрерывности барицентрического отображения, тогда как второе вытекает из μ -компактности множества $\mathcal{A}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Интересно отметить, что для всех выпуклых μ -компактных некомпактных множеств (рассмотренных в п. 2.2) удастся найти семейство $F(\mathcal{A})$, состоящее из аффинных полунепрерывных снизу функций.

В [20] получен критерий μ -компактности выпуклого множества в терминах свойств функций, определенных на этом множестве. А именно, показано, что μ -компактность равносильна непрерывности операции выпуклого замыкания (двойного преобразования Фенхеля) относительно монотонных поточечно сходящихся последовательностей на классах непрерывных ограниченных и полунепрерывных снизу ограниченных снизу функций.

Свойство μ -компактности может не сохраняться под действием непрерывных аффинных отображений. Из предложений 1 и 2 несложно получить следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – выпуклые множества,² а φ – такое непрерывное аффинное отображение $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, что для любого компакта $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ его полный прообраз $\varphi^{-1}(\mathcal{C})$ является компактом в $\mathcal{A}$. Тогда:

- 1) из μ -компактности $\mathcal{B}$ следует μ -компактность $\mathcal{A}$;
- 2) если φ сюръективно, то из μ -компактности $\mathcal{A}$ следует μ -компактность $\mathcal{B}$.

Свойство μ -компактности множества сохраняется при операциях пересечения, выпуклого замыкания и прямого произведения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. 1) Замкнутое подмножество любого μ -компакта является μ -компактом.

2) Выпуклое замыкание любого μ -компакта является μ -компактом.

²Предполагаем, что множество $\mathcal{B}$ обладает свойствами, указанными в начале п. 2.1.

3) Декартово произведение конечного или счетного числа μ -компактов является μ -компактом (в топологии покоординатной сходимости).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Утверждение непосредственно следует из определения 1.

2) Из μ -компактности множества $\mathcal{A}$ и предложения 2 в [9] (доказательство которого непосредственно переносится на рассматриваемый в статье класс множеств) следует, что барицентрическое отображение $\mu \mapsto \mathbf{b}(\mu)$ является непрерывной аффинной сюръекцией из $M(\mathcal{A})$ на $\overline{\text{co}} \mathcal{A}$, удовлетворяющей условию предложения 3. В силу п. 2) предложения 3 и следствия 4 (см. п. 2.2) множество $\overline{\text{co}} \mathcal{A}$ является μ -компактным.

3) В силу утверждения 2) достаточно рассмотреть случай выпуклых μ -компактов. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ множество $\mathcal{A}^n$ μ -компактно. Покажем, что множество $\mathcal{A} = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n$ является μ -компактом в топологии покоординатной сходимости. Пусть $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ – произвольный компакт. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $\mathcal{K}^n$ (проекция $\mathcal{K}$ на $\mathcal{A}^n$, состоящая из точек $x^n \in \mathcal{A}^n$, каждая из которых является соответствующей координатой некоторой точки $x \in \mathcal{K}$) компактно. Поскольку множество $\mathcal{A}^n$ μ -компактно, то для любого $\varepsilon > 0$ в силу предложения 1 найдется соответствующий компакт $\mathcal{K}_\varepsilon^n \subset \mathcal{A}^n$. Так как $\mathcal{K} \subseteq \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{K}^n$, то можно положить $\mathcal{K}_\varepsilon = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_\varepsilon^{2^{-n}}$ и проверить, что для этого множества выполняются условия предложения 1. Таким образом, множество $\mathcal{A}$ μ -компактно.

Из п. 1) предложения 4 следует, что пересечение любого числа μ -компактов является μ -компактом. Однако их объединение и сумма Минковского в общем случае μ -компактами не являются (замечание 4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В силу п. 2) предложения 4 для доказательства μ -компактности выпуклого множества $\mathcal{A}$ достаточно доказать μ -компактность любого его подмножества $\mathcal{B}$ такого, что $\mathcal{A} = \overline{\text{co}} \mathcal{B}$. Интересно отметить, что при этом множества мер $M(\mathcal{A})$ и $M(\mathcal{B})$ (участвующие в определении μ -компактности множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$) могут быть существенно различны. Например, если $\mathcal{A}$ – симплекс, то $\mathcal{B}$ может представлять собой счетный набор $\{e_i\}$ изолированных крайних точек множества $\mathcal{A}$, а значит, $M(\mathcal{B})$ изоморфно множеству $\mathfrak{P}_{+\infty}$ всех распределений вероятностей со счетным числом исходов, при этом критерий μ -компактности множества $\mathcal{B}$, а значит, и $\mathcal{A}$ можно сформулировать следующим образом: для любого компакта $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n , что из $\sum_{i=1}^{+\infty} \pi_i e_i \in \mathcal{K}$, $\{\pi_i\} \in \mathfrak{P}_{+\infty}$, следует $\sum_{i=n+1}^{+\infty} \pi_i < \varepsilon$.

В силу п. 2) предложения 4 и приведенного ниже предложения 5 приходим к следующему наблюдению. Пусть $\mathcal{A}$ – μ -компактное выпуклое множество в исходной топологии τ , и пусть τ' – более сильная топология на $\mathcal{A}$, совпадающая с топологией τ на множестве $\text{ext} \mathcal{A}$; тогда множество $\mathcal{A}$ μ -компактно в топологии τ' .

Из предложения 3 следует, что изоморфизмами в категории μ -компактных выпуклых множеств являются аффинные гомеоморфизмы. Свойство аффинности существенно, что подтверждается следующим примером. Пусть $\mathcal{A}$ – выпуклое множество, не являющееся μ -компактным. В силу п. 1) предложения 4

и приведенного далее следствия 4 подмножество множества $M(\mathcal{A})$, состоящее из дираковских (одноатомных) мер, является μ -компактом, гомеоморфным множеству $\mathcal{A}$. Это наблюдение показывает, что свойство μ -компактности (в отличие от свойства компактности) не является чисто топологическим, а определяется сочетанием топологии и структуры операции выпуклого смешивания.

Из предложения 3 следует условие μ -компактности семейств отображений, которое будет использовано в следующем параграфе.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathfrak{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ – локально выпуклое пространство с топологией τ отображений из множества $\mathcal{X}$ в локально выпуклое пространство $\mathcal{Y}$, а $\mathfrak{F}_0$ – выпуклое ограниченное замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, состоящее из отображений с множеством значений в выпуклом μ -компакте $\mathcal{A} \subset \mathcal{Y}$, причем $\mathfrak{F}_0$ является полным сепарабельным метрическим пространством таким, что существует элемент $x_0 \in \mathcal{X}$ со следующими свойствами:

- 1) $\{\tau - \lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n = \Phi_0\} \implies \{\lim_{n \rightarrow +\infty} \Phi_n(x_0) = \Phi_0(x_0)\} \quad \forall \{\Phi_n\} \subset \mathfrak{F}_0$;
- 2) множество $\{\Phi \in \mathfrak{F}_0 \mid \Phi(x_0) \in \mathcal{C}\}$ является относительно компактным в топологии τ для любого компакта $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$.

Тогда множество $\mathfrak{F}_0$ является μ -компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывное аффинное отображение

$$\mathfrak{F}_0 \ni \Phi \mapsto \Phi(x_0) \in \mathcal{A}$$

удовлетворяет условиям предложения 3, из п. 1) которого следует μ -компактность множества $\mathfrak{F}_0$.

Для дальнейшего исследования μ -компактности введем ослабленную версию этого свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество $\mathcal{A}$ назовем *точечно μ -компактным*, если для любого $x \in \overline{\text{co}} \mathcal{A}$ множество $M_x(\mathcal{A})$ является компактным подмножеством множества $M(\mathcal{A})$.

Ясно, что точечная μ -компактность следует из μ -компактности. Однако, как мы увидим далее (предложение 13), эти свойства не равносильны.

μ -компактные множества не обладают многими свойствами компактов, такими, например, как равномерная непрерывность и ограниченность непрерывных функций, теорема Вейерштрасса о достижении экстремальных значений непрерывных функций и т.д. Оказывается, однако, что μ -компакты наследуют некоторые важные свойства компактных множеств, позволяющие распространить на них многие результаты теории Шоке и теорию Вестерстрёма–О’Брайена (см. § 3).

Если $\mathcal{A}$ – выпуклое множество, то на множестве $M(\mathcal{A})$ можно ввести следующее отношение частичного порядка, называемое *порядком Шоке* (Choquet ordering; см. [1], [6]). Будем считать, что $\mu \succ \nu$ тогда и только тогда, когда

$$\int_{\mathcal{A}} f(y) \mu(dy) \geq \int_{\mathcal{A}} f(y) \nu(dy)$$

для любой функции $f \in P(\mathcal{A})$.

Мера $\mu \in M(\mathcal{A})$ называется *максимальной*, если из $\nu \succ \mu$ следует $\nu = \mu$ для любой меры $\nu \in M(\mathcal{A})$. Заметим, что если μ и ν – меры из $M(\mathcal{A})$ такие, что $\mu \succ \nu$, то $\mathbf{b}(\mu) = \mathbf{b}(\nu)$ (это следует из того, что множество непрерывных ограниченных аффинных функций на множестве $\mathcal{A}$ отделяет точки этого множества).

Из определения 2 непосредственно вытекает следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $\mathcal{A}$ – выпуклое точечно μ -компактное множество. Любое подмножество множества $M(\mathcal{A})$, линейно упорядоченное отношением $\prec$, имеет точную верхнюю грань.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любое подмножество множества $M(\mathcal{A})$, линейно упорядоченное отношением $\prec$, которое можно рассматривать как направленность $\{\mu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, содержится в $M_x(\mathcal{A})$ при некотором $x \in \mathcal{A}$ и, следовательно, относительно компактно. Поэтому существует поднаправленность $\{\mu_{\lambda_\pi}\}_{\pi \in \Pi}$, сходящаяся к некоторой мере $\mu_0 \in M_x(\mathcal{A})$. Непосредственная проверка показывает, что $\mu_\lambda \prec \mu_0$ для всех $\lambda \in \Lambda$.

Лемма 1 с учетом теоремы 2.4 из [5] показывает, что класс выпуклых точечно μ -компактных множеств является собственным подклассом класса выпуклых множеств, обладающих свойством Радона–Никодима. Исследованию этого свойства и соответствующего класса выпуклых множеств посвящена обширная литература (см. [4]–[6]).

Используя лемму 1 и лемму Цорна, несложно установить следующее обобщение теоремы Крейна–Мильмана и теоремы Шоке на точечно μ -компактные множества (которое является следствием наличия у этих множеств свойства Радона–Никодима; см. [5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{A}$ – точечно μ -компактное выпуклое множество. Тогда $\overline{\text{co}}(\text{extr } \mathcal{A}) = \mathcal{A}$ и $\mathbf{b}(M(\overline{\text{extr } \mathcal{A}})) = \mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу плотности в $M(\overline{\text{extr } \mathcal{A}})$ множества мер с конечным носителем (см. [18; теорема 6.3]) первое утверждение непосредственно следует из второго.

Пусть $x_0 \in \mathcal{A}$. Из леммы 1 и леммы Цорна следует существование максимальной меры μ_* в M_{x_0} . В силу свойств порядка Шоке мера μ_* будет максимальной и в $M(\mathcal{A})$, а значит, эта мера лежит в $M(\overline{\text{extr } \mathcal{A}})$ (см. доказательство теоремы 5.2 в [4]). Таким образом, $x_0 \in \mathbf{b}(M(\overline{\text{extr } \mathcal{A}}))$.

Другое свойство, которое μ -компакты наследуют у компактных множеств, есть следующее представление для выпуклого замыкания функций (полученное в предложении 3 в [9]; его доказательство непосредственно обобщается на рассматриваемый в статье класс множеств).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть f – полунепрерывная снизу ограниченная снизу функция на выпуклом μ -компакте $\mathcal{A}$. Тогда ее выпуклое замыкание вычисляется по формуле

$$\overline{\text{co}} f(x) = \inf_{\mu \in M_x(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} f(y) \mu(dy) \quad \forall x \in \mathcal{A}, \quad (3)$$

точная нижняя грань в которой достигается на некоторой мере μ_x^f из $M_x(\mathcal{A})$.

Именно это представление служит основой для большинства результатов о выпуклых замыканиях функций, определенных на выпуклых μ -компактах.

Если f – непрерывная ограниченная функция на выпуклом μ -компакте $\mathcal{A}$, то в силу непрерывности функционала

$$M(\mathcal{A}) \ni \mu \mapsto \int_{\mathcal{A}} f(x) \mu(dx)$$

из [9; лемма 1] следует, что точную нижнюю грань в (3) можно брать по множеству мер с конечным носителем.

СЛЕДСТВИЕ 2. Любая непрерывная ограниченная функция f на выпуклом μ -компакте $\mathcal{A}$ имеет полунепрерывную снизу (замкнутую) выпуклую оболочку, т.е.

$$\text{co } f(x) = \inf_{\{\pi_i, x_i\} \in M_x^f(\mathcal{A})} \sum_i \pi_i f(x_i) = \overline{\text{co}} f(x) \quad \forall x \in \mathcal{A}. \quad (4)$$

Это утверждение является μ -компактным обобщением следствия I.3.6 из [2].

Условие μ -компактности множества $\mathcal{A}$ в предложении 6 и в следствии 2 нельзя ослабить до точечной μ -компактности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Если $\mathcal{A}$ – точно μ -компактное выпуклое множество, не являющееся μ -компактным, то существует непрерывная ограниченная функция f на $\mathcal{A}$, у которой выпуклая оболочка $\text{co } f$ не является полунепрерывной снизу.

Это означает, что для выпуклого замыкания $\overline{\text{co}} f$ функции f не имеет места представление (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку множество $\mathcal{A}$ не μ -компактно, существует такая некомпактная последовательность мер $\{\mu_n\} \subset M(\mathcal{A})$, что соответствующая последовательность $\{x_n = \mathbf{b}(\mu_n)\} \subset \mathcal{A}$ сходится. В силу теоремы Прохорова последовательность $\{\mu_n\}$ не является (равномерно) плотной. Как показано в доказательстве теоремы 8.6.2 из [17], это гарантирует существование таких $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что для любого компакта $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$ и любого натурального N найдется такое $n > N$, что $\mu_n(U_\delta(\mathcal{K})) < 1 - \varepsilon$, где $U_\delta(\mathcal{K})$ – замкнутая δ -окрестность компакта $\mathcal{K}$. В силу плотности множества мер с конечным носителем в множестве мер с данным барицентром (см. [9; лемма 1]) с учетом следствия 8.2.9 из [17] можно считать, что последовательность $\{\mu_n\}$ состоит из мер с конечным носителем.

Пусть x_0 – предел последовательности $\{x_n\}$. В силу точечной μ -компактности множества $\mathcal{A}$ для определенного выше ε существует такой выпуклый компакт $\mathcal{K}_\varepsilon$, что $\mu(\mathcal{K}_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon/2$ для любой меры $\mu \in M_{x_0}(\mathcal{A})$.

Пусть f – такая непрерывная ограниченная функция на $\mathcal{A}$, что $f(x) = 1$ для всех $x \in \mathcal{K}_\varepsilon$ и $f(x) \leq 0$ для всех $x \in \mathcal{A} \setminus U_\delta(\mathcal{K}_\varepsilon)$. Тогда из приведенных выше свойств последовательностей $\{x_n\}$ и $\{\mu_n\}$ следует, для любого натурального N найдется такое $n > N$, что $\text{co } f(x_n) < 1 - \varepsilon$, в то время как из свойства множества $M_{x_0}(\mathcal{A})$ следует, что $\text{co } f(x_0) \geq 1 - \varepsilon/2$. Таким образом, функция $\text{co } f$ не является полунепрерывной снизу.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Условие точечной μ -компактности существенно в доказательстве предложения 7. Это обстоятельство не позволяет охарактеризовать μ -компакты как максимальный класс выпуклых множеств, для которых верно утверждение следствия 2. Однако и при отсутствии точечной μ -компактности утверждение следствия 2 может нарушаться (см. пример 1 в п. 2.2).

В качестве примера, показывающего существенность условия точечной μ -компактности в предложении 7, рассмотрим единичный шар $\mathcal{B}$ сепарабельного гильбертова пространства. Ясно, что он не является точечным μ -компактом. Покажем, что для любой непрерывной ограниченной функции f на $\mathcal{B}$ ее выпуклая оболочка со f непрерывна. Так как ограниченная выпуклая функция непрерывна во внутренних точках области определения, то достаточно доказать непрерывность со f на границе $\mathcal{B}$, т.е. в точках единичной сферы.

Пусть x – точка единичной сферы. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $\|x - y\| < 2\delta$, то $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. В силу приведенной ниже леммы 2 для произвольной точки z такой, что $\|z - x\| < \delta$, и для произвольной меры $\mu \in M_z(\mathcal{B})$ мера шара радиуса 2δ с центром x не меньше чем $r(\delta, z)$. Следовательно, величина

$$\left| f(x) - \int_{\mathcal{B}} f(t) d\mu \right|$$

не превосходит $\varepsilon r(\delta, z) + N(1 - r(\delta, z))$, где $N = \sup_{t \in \mathcal{B}} |f(t)|$. Значит,

$$|f(x) - \text{co } f(z)| \leq \varepsilon r(\delta, z) + N(1 - r(\delta, z)).$$

Так как при $z \rightarrow x$ имеем $\|z\| \rightarrow 1$, значит, $r(\delta, z) \rightarrow 1$ и, следовательно, со $f(z) \rightarrow f(x)$. Остается заметить, что со $f(x) = f(x)$, поскольку x – крайняя точка $\mathcal{B}$.

ЛЕММА 2. Даны единичный шар $\mathcal{B}$ гильбертова пространства и число $\delta > 0$. Для любой точки $z \in \mathcal{B}$ такой, что $\|z\| > 1 - \delta$, и для любой меры $\mu \in M_z(\mathcal{B})$ мера шара радиуса δ с центром z не меньше чем

$$r(\delta, z) = \frac{\delta^2 - (1 - \|z\|^2)}{\delta^2 - (1 - \|z\|)^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\bar{z} = z/\|z\|$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0 &= \left\{ y \in \mathcal{B}, (y, \bar{z}) < \frac{1 + \|z\|^2 - \delta^2}{2\|z\|} \right\}, \\ \mathcal{B}_1 &= \left\{ y \in \mathcal{B}, (y, \bar{z}) \geq \frac{1 + \|z\|^2 - \delta^2}{2\|z\|} \right\}. \end{aligned}$$

Прямым вычислением показываем, что если $\|y\| = 1$ и $\|y - z\| > \delta$, то $y \in \mathcal{B}_0$. Следовательно, все точки шара $\mathcal{B}$, удаленные от z на расстояние больше чем δ , лежат в множестве $\mathcal{B}_0$. Пусть c_i – барицентр меры μ на множестве $\mathcal{B}_i$, $i = 0, 1$. Тогда $z = \mu(\mathcal{B}_0)c_0 + \mu(\mathcal{B}_1)c_1$. Ясно, что $(c_0, \bar{z}) \leq (1 + \|z\|^2 - \delta^2)/(2\|z\|)$ и $(c_1, \bar{z}) \leq 1$. Следовательно,

$$\|z\| = (z, \bar{z}) < (1 - \mu(\mathcal{B}_1)) \frac{1 + \|z\|^2 - \delta^2}{2\|z\|} + \mu(\mathcal{B}_1),$$

откуда получаем требуемое неравенство для $\mathcal{B}_1$, а следовательно, и для меры шара радиуса δ с центром z , так как этот шар содержит множество $\mathcal{B}_1$.

Одно из важнейших следствий предложения 6 – совпадение любой полунепрерывной снизу ограниченной снизу функции f , определенной на выпуклом μ -компакте $\mathcal{A}$, с ее выпуклым замыканием $\overline{\text{co}} f$ на множестве крайних точек $\text{extr } \mathcal{A}$. Более того, это предложение позволяет получить следующее представление для множества $\text{extr } \mathcal{A}$, которое будет использовано в § 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть $\mathcal{A}$ – μ -компактное выпуклое множество. Тогда

$$\text{extr } \mathcal{A} = \bigcap_{f \in Q(\mathcal{A})} \mathcal{B}_f, \quad \text{где } \mathcal{B}_f = \{x \in \mathcal{A} \mid f(x) = \overline{\text{co}} f(x)\}. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\text{extr } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_f$ для любой функции $f \in Q(\mathcal{A})$ следует из (4). Пусть $x_0 \in \mathcal{A} \setminus \text{extr } \mathcal{A}$. Тогда в $\mathcal{A}$ существуют различные точки x_1 и x_2 такие, что $x_0 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$. Для доказательства того, что точка x_0 не лежит в $\bigcap_{f \in Q(\mathcal{A})} \mathcal{B}_f$, достаточно найти в $Q(\mathcal{A})$ такую функцию f , для которой $f(x_0) > \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$. В качестве такой функции можно взять функцию $-a^2(\cdot)$, где a – такая аффинная непрерывная ограниченная функция на $\mathcal{A}$, что $a(x_1) \neq a(x_2)$.

Пример 1 (см. п. 2.2) показывает существенность условия μ -компактности в предложении 8.

Используя рассуждение из доказательства предложения 7, нетрудно показать, что необходимым условием справедливости выражения (5) является следующее свойство локальной μ -компактности в окрестности множества $\text{extr } \mathcal{A}$: для любой крайней точки x_0 множества $\mathcal{A}$ и любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathcal{A}$, сходящейся к x_0 , множество $\mathbf{b}^{-1}(\{x_n\})$ компактно в $M(\mathcal{A})$.

2.2. Примеры. Любое компактное множество является также и μ -компактным. В этом пункте будут рассмотрены несколько наиболее важных примеров μ -компактных, но не компактных множеств.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Ограниченная часть³ положительного конуса в пространстве l_1 является μ -компактом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть семейство функций вида $l_1 \ni \{x_i\} \mapsto \sum_i h_i x_i$, где $\{h_i\}$ – возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел, и использовать предложение 2 (с учетом критерия компактности для подмножеств пространства l_1).

СЛЕДСТВИЕ 3. Множество $\mathfrak{P}_{+\infty}$ всех распределений вероятностей со счетным числом исходов μ -компактно в метрике пространства l_1 .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пусть $\mathcal{A}_1 = \{x \in l_1 \mid x \geq 0, \|x\|_1 \leq 1\}$. Согласно предложению 9 оба множества $\mathcal{A}_1$ и $-\mathcal{A}_1$ μ -компактны в метрике l_1 . Однако их выпуклая оболочка и их сумма (по Минковскому) не являются даже точечно μ -компактными, поскольку содержат единичный шар пространства l_1 , который, как легко показать, не является точечно μ -компактным.

³Здесь и далее под ограниченной частью положительного конуса в упорядоченном банаховом пространстве будем понимать пересечение этого конуса с единичным шаром.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Любое слабо замкнутое ограниченное по вариации множество борелевских мер на полном сепарабельном метрическом пространстве является μ -компактом в топологии слабой сходимости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – полное сепарабельное метрическое пространство, M – слабо замкнутое ограниченное множество борелевских мер на нем, $\mathfrak{V}(X)$ – множество всех полунепрерывных снизу функций φ на пространстве X со значениями в $[0, +\infty]$ таких, что множество $\{x \in X \mid \varphi(x) \leq c\}$ компактно при любом $c \geq 0$. Из теоремы Прохорова следует (см. [17; пример 8.6.5]), что подмножество $M_0 \subseteq M$ относительно компактно тогда и только тогда, когда существует функция $\varphi \in \mathfrak{V}(X)$ такая, что

$$\sup_{\mu \in M_0} \int_X \varphi(x) \mu(dx) < +\infty.$$

Поэтому семейство аффинных полунепрерывных снизу функций

$$f_\varphi(\mu) = \int_X \varphi(x) \mu(dx), \quad \varphi \in \mathfrak{V}(X),$$

на множестве M удовлетворяет условиям предложения 2.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Множество борелевских вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве является μ -компактом в топологии слабой сходимости.*

Предложения 3 и 9, а также приведенное ниже предложение 15 позволяют доказать следующее утверждение о свойствах конуса положительных операторов в банаховом пространстве Шаттена порядка p (т.е. в пространстве всех операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, у которых $\text{Tr } |A|^p < +\infty$) с нормой $\|A\|_p = (\text{Tr } |A|^p)^{1/p}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Ограниченная часть положительного конуса в пространстве Шаттена порядка p является μ -компактом только при $p = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $p = 1$ заметим, что в силу критерия компактности для подмножеств положительного конуса $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ пространства ядерных операторов $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ (см. лемму в [21; приложение]) отображение, ставящее в соответствие оператору $A \in \mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$ набор его диагональных элементов в некотором фиксированном базисе пространства $\mathcal{H}$, удовлетворяет условиям п. 1) предложения 3, если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – ограниченные части положительных конусов пространств $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ и l_1 соответственно. Из предложения 3 с учетом предложения 9 и следует μ -компактность ограниченной части конуса $\mathfrak{T}_+(\mathcal{H})$.

В случае $p > 1$ конус положительных операторов в пространстве Шаттена содержит подконус коммутирующих операторов, аффинно гомеоморфный $\mathcal{A}_p$ – ограниченной части положительного конуса в пространстве l_p , которая не является μ -компактом (предложение 15).

Из предложения 11 следует, в частности, μ -компактность множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ квантовых состояний – операторов плотности в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, первоначально установленная в [22].

Следствие 1 и лемма 5 позволяют доказать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. *Ограниченная по операторной норме часть конуса $\mathfrak{L}_+(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ линейных непрерывных положительных отображений банахова пространства $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ ядерных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ в другое такое же пространство $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ является μ -компактом в сильной операторной топологии.*

Из этого утверждения следует μ -компактность множеств квантовых операций и квантовых каналов в топологии сильной сходимости (см. [21]).

Из предложения 12 также следует μ -компактность в сильной операторной топологии ограниченной части конуса линейных непрерывных положительных операторов в l_1 , поскольку его можно отождествить с подмножеством конуса $\mathfrak{L}_+(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$. Это показывает μ -компактность множества субмарковских (в частности, марковских) операторов.

Рассмотрим теперь несколько “отрицательных” примеров. Предложение 13 дает пример точно μ -компактных (см. определение 2), но не μ -компактных множеств. Мы увидим, в частности, что в гильбертовом пространстве не существует μ -компактных, но не компактных множеств (предложение 14). Далее последуют примеры множеств, которые не являются даже точно μ -компактными.

В силу определения свойство точечной μ -компактности множества сохраняется при ослаблении топологии. Следующее предложение показывает, что μ -компактность этим свойством не обладает. Ограниченная часть положительного конуса в l_1 перестает быть μ -компактным множеством при ослаблении топологии.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. *При любом $p > 1$ симплекс*

$$\Delta_p = \left\{ x \in l_p \mid x \geq 0, \sum_{i=1}^{+\infty} x^i \leq 1 \right\}$$

в пространстве l_p является точно μ -компактным, но не μ -компактным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точечная μ -компактность множества Δ_p следует из приведенного выше рассуждения. Покажем, что Δ_p не μ -компактно в пространстве l_p . Возьмем возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ и последовательность неотрицательных чисел $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ такие, что $\sum_{i=n_r}^{n_{r+1}-1} z_i = 1$ и $\sum_{i=n_r}^{n_{r+1}-1} (z_i)^p \leq 1/r$ для любого $r \geq 1$. Рассмотрим компакт $\mathcal{K} = \{y \in \Delta_p \mid \forall r \in \mathbb{N} \sum_{i=n_r}^{n_{r+1}-1} (y^i)^p \leq 1/r\}$. Если множество Δ_p является μ -компактным, то для любого $\varepsilon > 0$ в силу предложения 1 найдется соответствующий компакт $\mathcal{K}_\varepsilon$. Множество $\mathcal{K}_\varepsilon$ может содержать лишь конечное число векторов канонического базиса $\{e_i\}$, иначе оно не будет компактно. Пусть N таково, что $e_i \notin \mathcal{K}_\varepsilon$ при $i > N$. Возьмем произвольное r , для которого $n_r > N$, и пусть $x \in \Delta_p$ – вектор с координатами $x^i = z^i$ при $n_r \leq i < n_{r+1}$ и $x^i = 0$ при всех остальных i . Ясно, что $x \in \mathcal{K}$. Так как $x = \sum_{i=n_r}^{n_{r+1}-1} x^i e_i$ и при этом $\sum_{i=n_r}^{n_{r+1}-1} x^i = 1$, а $e_i \notin \mathcal{K}_\varepsilon$ для всех $i = n_r, n_{r+1} - 1$, то получаем противоречие с критерием μ -компактности из предложения 1.

Предложение 13, в частности, показывает, что в гильбертовом пространстве существуют точечно μ -компактные множества. Оказывается, однако, что μ -компактных множеств, отличных от компактных, в гильбертовом пространстве нет.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *В гильбертовом пространстве не существует μ -компактных множеств, не являющихся компактными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изложим идею доказательства, опуская детали, которые читатель легко восстановит.

Пусть $\mathcal{A}$ – ограниченное выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве. Не ограничивая общности, считаем, что его диаметр равен 1. Если $\mathcal{A}$ не компактно, то существует последовательность его элементов $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, нормы которых и все попарные расстояния между которыми больше фиксированного числа $\varepsilon > 0$. В силу слабой компактности $\mathcal{A}$ считаем, что последовательность $\{a_k\}$ слабо сходится к некоторому элементу a . Так как $\mathcal{A}$ выпукло и замкнуто, то $a \in \mathcal{A}$. Последовательность $\{b_k = a_k - a\}_{k \in \mathbb{N}}$ слабо сходится к нулю. Из этого следует, что, переходя к подпоследовательностям, можно добиться быстрой сходимости к нулю скалярных произведений: $(b_i, b_j) \leq \varepsilon^2 2^{-i-j}$ при любых $i \neq j$. Так как $\varepsilon \leq \|b_i\|_2 \leq 1$ для всех $i \in \mathbb{N}$, то, применяя неравенство Коши–Буняковского, показываем, что для любой последовательности $x \in l_2$ выполнены неравенства

$$\frac{\varepsilon}{2} \|x\|_2 \leq \left\| \sum_i x^i b_i \right\|_2 \leq 2 \|x\|_2.$$

Это означает, что система элементов $\{b_k\}$ обладает свойством базиса Рисса. Тогда существует непрерывный линейный оператор, имеющий непрерывный обратный, переводящий систему $\{b_k\}$ в ортонормированную систему (см. [23]). Этот оператор переводит выпуклую оболочку точек a и $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ в множество Δ_2 из предложения 13, которое не является μ -компактным. Следовательно, данная выпуклая оболочка, а значит, и исходное множество $\mathcal{A}$ не μ -компактны.

Приведем теперь два утверждения об отсутствии свойства точечной μ -компактности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. *Множество $\mathcal{A}_p = \{x \in l_p \mid x \geq 0, \|x\|_p \leq 1\}$ (ограниченная часть положительного конуса в пространстве l_p) не является точечно μ -компактным ни при каком $p > 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что если точка $x \in \mathcal{A}_p$ такова, что $\|x\|_p < 1/3$, $\sum_i x_i = +\infty$, то при $\varepsilon = 1/3$ для нее не существует компакта $\mathcal{K}_\varepsilon$ (см. предложение 1). Предположим, что такой компакт существует. Он может содержать лишь конечное число элементов канонического базиса $\{e_i\}$. Возьмем настолько большое N , что $e_i \notin \mathcal{K}_\varepsilon$ для любого $i > N$. Так как ряд $\sum_i x_i$ расходится, то существует r , для которого $s = \sum_{i=N+1}^{N+r} x^i \in (1/3, 2/3)$. Положим $\bar{x} = x - \sum_{i=N+1}^{N+r} x^i e_i$ (координаты вектора $\bar{x}$ с $(N+1)$ -й по $(N+r)$ -ю равны нулю, остальные координаты совпадают с координатами вектора x). Тогда

$$x = (1-s) \left(\frac{1}{1-s} \bar{x} \right) + \sum_{i=N+1}^{N+r} x^i e_i.$$

Так как $1/(1-s) < 3$, а $\|\bar{x}\|_p < 1/3$, то $\bar{x}/(1-s) \in \mathcal{A}_p$. Все точки e_i в данной барицентрической комбинации лежат вне $\mathcal{H}_\varepsilon$, а их суммарный вес s превосходит $1/3$, что приводит к противоречию.

Следующий пример дополняет предложение 7 и показывает, что отсутствие точечной μ -компактности не может гарантировать справедливость выражений (3) и (4) для непрерывных ограниченных вогнутых функций, что приводит к нарушению представления (5).

ПРИМЕР 1. Пусть f – любая непрерывная функция на ограниченной части $\mathcal{A}_p$ положительного конуса пространства l_p при $p > 1$, принимающая значение 1 в нуле и значение 0 на всех векторах канонического базиса $\{e_n\}$ пространства l_p , например функция $f(\cdot) = 1 - \|\cdot\|_p$. Поскольку нулевой вектор пространства l_p является предельной точкой множества всех выпуклых комбинаций векторов базиса $\{e_n\}$, то выпуклое замыкание функции f – это нулевая функция на множестве $\mathcal{A}_p$. Таким образом, $\overline{\text{co}} f(0) \neq f(0)$. Этот пример также показывает, что для множества $\mathcal{A}_p$ такого, что $\mathcal{A}_p = \overline{\text{co}}(\text{extr } \mathcal{A}_p)$ и отображение (2) открыто (это следует из теоремы в [15] с учетом сильной выпуклости пространства l_p при $p > 1$ и доказательства теоремы 1 из [9]), не выполнено утверждение следствия 2 из [9], т.е. непрерывная функция на замкнутом множестве $\text{extr } \mathcal{A}_p$ может не иметь выпуклого непрерывного (и даже полунепрерывного снизу) расширения на $\mathcal{A}_p$.

Гильбертовым кирпичом называется множество

$$\mathcal{H}_a = \{x \in l_2 \mid |x^i| \leq a^i, i \in \mathbb{N}\},$$

где $a = \{a^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – произвольная последовательность положительных чисел. Покажем, что для любого гильбертова кирпича имеет место следующая альтернатива.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. *Если $\|a\|_2 < \infty$, то множество $\mathcal{H}_a$ компактно, а если $\|a\|_2 = +\infty$, то оно не будет даже точечно μ -компактно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение предложения общеизвестно. Оно следует, например, из критерия компактности в l_2 . Пусть $\|a\|_2 = +\infty$. Разобьем последовательность a на пачки так, что каждая пачка содержит конечное число идущих подряд элементов, сумма квадратов которых больше 1. Предположим, что n -я пачка состоит из элементов $a^k, a^{k+1}, \dots, a^{k+m}$. Пусть

$$b_n = \sum_{i=k}^{k+m} a^i e_i$$

при каждом n , а $\mathcal{L}$ – замыкание линейной оболочки элементов $b_n, n \in \mathbb{N}$. Пространство $\mathcal{L}$ является гильбертовым с ортогональным базисом $\{b_n\}$. Единичный шар пространства $\mathcal{L}$ целиком содержится в $\mathcal{H}_a$. Так как шар гильбертова пространства не является точечно μ -компактным, то и множество $\mathcal{H}_a$ таковым не является.

§ 3. О СЕ-свойствах выпуклых μ -компактов

В 1970-е годы интенсивно исследовались различные свойства выпуклых компактов, в частности вопросы о непрерывности выпуклых оболочек непрерывных функций. В работе [10] Дж. Вестерстрём установил связь свойств непрерывности выпуклых оболочек⁴ непрерывных функций со свойствами открытости барицентрического отображения и высказал гипотезу о равносильности свойства непрерывности выпуклой оболочки любой непрерывной вогнутой функции (названного в работе [11] *СЕ-свойством*) и свойства непрерывности выпуклой оболочки любой непрерывной функции (названного в работе [9] *сильным СЕ-свойством*). Эта гипотеза была доказана в работе Р. О'Брайена [12], в которой установлена эквивалентность этих свойств свойству открытости отображения выпуклого смешивания $(x, y, \lambda) \mapsto \lambda x + (1 - \lambda)y$. В дальнейшем появилась обширная литература, посвященная исследованию последнего свойства выпуклых множеств (не обязательно компактных), в которой оно названо *свойством устойчивости*, а выпуклые множества, обладающие этим свойством, названы *устойчивыми* (stable convex sets; см. [13]). Была установлена связь свойства устойчивости с другими свойствами выпуклых множеств (см. [14], [15]).

Цель этого параграфа – обобщение теории Вестерстрёма–О'Брайена на класс μ -компактных выпуклых множеств. Первый частичный результат в этом направлении был получен в работе [9], где доказано μ -компактное обобщение теоремы 3.1 из [10]. Следующая теорема является μ -компактным обобщением основного результата из [12].

ТЕОРЕМА 1. *Для выпуклого μ -компактного множества $\mathcal{A}$ следующие свойства равносильны:*

- (i) *отображение $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \ni (x, y) \mapsto \frac{x+y}{2} \in \mathcal{A}$ открыто (свойство устойчивости; см. [13]);*
- (ii) *отображение $M(\mathcal{A}) \ni \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu) \in \mathcal{A}$ открыто;*
- (iii) *отображение $M(\text{extr } \mathcal{A}) \ni \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu) \in \mathcal{A}$ открыто;⁵*
- (iv) *любая функция из $C(\mathcal{A})$ имеет непрерывную выпуклую оболочку (сильное СЕ-свойство; см. [9]);*
- (v) *любая функция из $Q(\mathcal{A})$ имеет непрерывную выпуклую оболочку (СЕ-свойство; см. [11]).*

Каждое из свойств (i)–(v) влечет замкнутость множества $\text{extr } \mathcal{A}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Свойство (i) в теореме 1 равносильно открытости отображения $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times [0, 1] \ni (x, y, \lambda) \mapsto \lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathcal{A}$ (см. [14]). Свойства (iv) и (v) в теореме 1 можно сформулировать как непрерывность выпуклого замыкания и его совпадение с выпуклой оболочкой для любой функции из $C(\mathcal{A})$ и из $Q(\mathcal{A})$ соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Если для выпуклого μ -компактного множества $\mathcal{A}$ выполнены свойства (i)–(v), то семейство $F(\mathcal{A})$ в предложении 2 можно составить

⁴В силу следствия I.3.6 из [2] выпуклая оболочка любой непрерывной функции на компакте совпадает с ее выпуклым замыканием.

⁵Это отображение является сюръективным в силу предложения 5.

из полунепрерывных снизу функций. Действительно, используя свойство (ii), нетрудно показать, что функции f_φ , построенные в доказательстве предложения 2, полунепрерывны снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Заметим прежде всего, что в силу предложения 8 из (v) следует замкнутость множества $\text{extr } \mathcal{A}$, поскольку (v) гарантирует замкнутость множества $\mathcal{B}_f = \{x \in \mathcal{A} \mid f(x) = \overline{\text{co}} f(x)\}$ для любой функции $f \in Q(\mathcal{A})$.

(v) $\implies$ (iii). Доказательство этой части теоремы (как и доказательство соответствующей части теоремы 3.2 из [10]) основано на применении леммы 2.1 из [10] с учетом возможности ее доказательства без использования условий компактности. Действительно, условие компактности в доказательстве этой леммы можно убрать, используя следующее наблюдение: если X – компактное, а Y – произвольное топологическое пространство, то образ любого замкнутого в $X \times Y$ множества при каноническом проектировании $X \times Y \ni (x, y) \mapsto y \in Y$ замкнут в Y .

В силу представления (3) выпуклое замыкание любой функции f из $Q(\mathcal{A})$ определяется выражением

$$\overline{\text{co}} f(x) = \inf_{\mu \in M_x(\text{extr } \mathcal{A})} \mu(f) \quad \forall x \in \mathcal{A}, \quad \text{где } \mu(f) = \int_{\text{extr } \mathcal{A}} f(x) \mu(dx).$$

Поэтому свойство (v) равносильно непрерывности и ограниченности функции

$$\mathcal{A} \ni x \mapsto \sup\{\mu(f) \mid \mu \in M(\text{extr } \mathcal{A}), b(\mu) = x\}$$

при любой функции f из $P(\mathcal{A})$. Из модифицированной указанным выше образом леммы 2.1 из [10] при $K = M(\mathcal{A})$, $M = M(\text{extr } \mathcal{A})$ и $K' = \mathcal{A}$ следует открытость отображения

$$M(\text{extr } \mathcal{A}) \ni \mu \mapsto \mathbf{b}(\mu) \in \mathcal{A} \quad (6)$$

при наделении множества $M(\text{extr } \mathcal{A})$ топологией, предбаза которой состоит из множеств $\{\mu \in M(\text{extr } \mathcal{A}) \mid \mu(f) > 0\}$, $f \in P(\mathcal{A})$. Следуя терминологии из [10], данную топологию будем называть *p-топологией*. Это слабейшая топология, в которой полунепрерывны снизу функционалы $\mu \mapsto \mu(f)$ при любой функции $f \in P(\mathcal{A})$.

Покажем с помощью леммы 6 (см. § 6), что из открытости отображения (6) в *p*-топологии на $M(\text{extr } \mathcal{A})$ и доказанной замкнутости множества $\text{extr } \mathcal{A}$ следует⁶ открытость отображения (6) в слабой топологии на $M(\text{extr } \mathcal{A})$. Для этого достаточно показать, что для любой сходящейся последовательности $\{x_n\} \subset \mathcal{A}$ и любой направленности $\{\mu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset M(\text{extr } \mathcal{A})$ такой, что

$$b(\{\mu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}) \subseteq \{x_n\}, \quad \exists p\text{-}\lim_{\lambda} \mu_\lambda = \mu_0,$$

где μ_0 – мера из $M(\text{extr } \mathcal{A})$, для которой $\mathbf{b}(\mu_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$, существует поднаправленность направленности $\{\mu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, слабо сходящаяся к мере μ_0 .

⁶В случае компактного множества $\mathcal{A}$ в [10; лемма 3.4] установлено совпадение указанных топологий на $M(\text{extr } \mathcal{A})$. В случае μ -компактного множества $\mathcal{A}$ такое совпадение установить не удастся.

Пусть $\{x_n\}$ и $\{\mu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – указанные последовательность и направленность соответственно. Поскольку последовательность относительно компактна, то из μ -компактности множества $\mathcal{A}$ и включения $\mathbf{b}(\{\mu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}) \subseteq \{x_n\}$ следует относительная компактность направленности $\{\mu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ в слабой топологии, а значит, и существование у нее поднаправленности $\{\mu_{\lambda_\pi}\}_{\pi \in \Pi}$, слабо сходящейся к некоторой мере $\nu \in M(\text{extr } \mathcal{A})$. В силу определений слабой топологии и p -топологии имеем

$$\nu(f) = \lim_{\pi} \mu_{\lambda_\pi}(f) \geq p\text{-}\liminf_{\lambda} \mu_{\lambda}(f) \geq \mu_0(f) \quad \forall f \in P(\mathcal{A}).$$

Это означает, что $\nu \succ \mu_0$ (в смысле частичного порядка Шоке). Из замкнутости множества $\text{extr } \mathcal{A}$ следует максимальность в $M(\mathcal{A})$ любой меры из $M(\text{extr } \mathcal{A})$. Это можно доказать, используя теорему 2.2 из [5] и рассуждение в доказательстве теоремы 1.1 из [7], но можно и непосредственно показать, используя свойство (v) и совпадение любой функции из $Q(\mathcal{A})$ с ее выпуклой оболочкой на множестве $\text{extr } \mathcal{A}$. Поэтому μ_0 – максимальная мера в $M(\mathcal{A})$ и, следовательно, $\nu = \mu_0$.

(iii) $\implies$ (i). Данное утверждение непосредственно доказывается с помощью предложения 5 и приведенного ниже предложения 17 (при $X = \overline{\text{extr } \mathcal{A}}$).

С учетом замечания 5 равносильность свойств (i), (ii) и (iv) для выпуклых μ -компактных подмножеств банахова пространства установлена в [9; теорема 1]. Приведенное там доказательство непосредственно обобщается на рассматриваемый здесь класс множеств.

Импликация (iv) $\implies$ (v) очевидна.

В доказательстве теоремы 1 был использован следующий результат теории меры (см. [24; теорема 2.4]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 17. Пусть X – полное сепарабельное метрическое пространство. Отображение $M(X) \times M(X) \ni (\mu, \nu) \mapsto \frac{1}{2}(\mu + \nu) \in M(X)$ является открытым.

Поскольку множество $M(X)$ μ -компактно (следствие 4), то получаем

СЛЕДСТВИЕ 5. Множество борелевских вероятностных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве обладает свойствами (i)–(v) из теоремы 1.

Требование μ -компактности существенно в доказательстве теоремы 1, оно не может быть ослаблено без изменения всей структуры доказательства. Это приводит к предположению, что класс μ -компактов – это максимальный класс выпуклых метризуемых множеств, на который можно распространить теорию Вестерстрёма–О’Брайена. Косвенным подтверждением этого предположения является следующее утверждение, показывающее, что даже требования точечной μ -компактности не достаточно для доказательства теоремы 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 18. При любом $p > 1$ точечно μ -компактный симплекс $\Delta_p = \{x \in l_p \mid x \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} x^i \leq 1\}$ в l_p устойчив, т.е. для него выполнено свойство (i) теоремы 1, из которого следует (ii), но свойства (iii)–(v) для этого симплекса не имеют места.

Заметим, что при $p = 1$ μ -компактный симплекс $\Delta_1 = \mathcal{A}_1$ уже обладает всеми свойствами (i)–(v) из теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пример 1 показывает, что симплекс Δ_p не обладает свойствами (iv) и (v).

Покажем, что симплекс Δ_p не обладает свойством (iii). Для доказательства заметим, что $\text{extr } \Delta_p = \{0, e_i, i \in \mathbb{N}\}$ и множество Δ_p является симплексом: для любой его точки x существует единственная мера на $\text{extr } \Delta_p$ с барицентром x . Последовательность точек $x_n = (1/n, \dots, 1/n, 0, \dots) \in \Delta_p$ (первые n координат равны $1/n$, остальные – нули) стремится к нулю в l_p при $n \rightarrow +\infty$, однако единственная последовательность мер на $\text{extr } \Delta_p$, порождающая точки x_n , как легко проверить, не сходится к атомарной мере, сосредоточенной в точке 0.

Докажем теперь, что при любом $p > 1$ множество Δ_p устойчиво, т.е. обладает свойством (i), из которого следует и выполнение свойства (ii) (см. доказательство теоремы 1 из [9]). Достаточно доказать, что для любых точек $a, b \in \Delta_p$, $c = \frac{1}{2}(a + b)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, обладающее следующим свойством: для любого $z \in \Delta_p$ такого, что $\|z - c\|_p < \delta$, найдется отрезок $[x, y] \subset \Delta_p$ с серединой в точке z , для которого $\|x - a\|_p < \varepsilon$ и $\|y - b\|_p < \varepsilon$. Взяв ε достаточно малым, можно считать, что $\|a\|_p < 1 - \varepsilon$ и $\|b\|_p < 1 - \varepsilon$. В противном случае заменим точки a и b на достаточно близкие им, лежащие внутри отрезка $[a, b]$. Поскольку l_p -норма сильно выпукла, нормы a и b станут меньше 1. Далее, возьмем настолько большое N , что у каждой из точек a и b норма “хвоста”, начиная с $(N + 1)$ -й координаты, меньше $\frac{1}{6}\varepsilon$, т.е. $(\sum_{k=N+1}^{\infty} (a^k)^p)^{1/p} < \frac{1}{6}\varepsilon$ и $(\sum_{k=N+1}^{\infty} (b^k)^p)^{1/p} < \frac{1}{6}\varepsilon$. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^N$, порожденное первыми N координатами. Обозначим через $\tilde{\Delta}_p$ и $\tilde{s}$ ограничения множества Δ_p и любого элемента $s \in l_p$ на это пространство. Так как $\tilde{\Delta}_p$ является симплексом в $\mathbb{R}^N$, то в силу устойчивости многогранников (см. [13]) найдется $\delta > 0$ такое, что всегда существуют точки $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{\Delta}_p$, для которых $\frac{1}{2}(\tilde{x} + \tilde{y}) = \tilde{z}$, $\|\tilde{x} - \tilde{a}\|_p < \frac{1}{3}\varepsilon$ и $\|\tilde{y} - \tilde{b}\|_p < \frac{1}{3}\varepsilon$, если только $\|\tilde{z} - \tilde{c}\|_p < \delta$. Теперь для данного $z \in \Delta_p$ и произвольного $t \in [-1, 1]$ определим точки $x(t), y(t) \in l_p$ следующим образом:

$$x^k(t) = \begin{cases} \tilde{x}^k, & k \leq N, \\ (1+t)z^k, & k > N, \end{cases} \quad y^k(t) = \begin{cases} \tilde{y}^k, & k \leq N, \\ (1-t)z^k, & k > N. \end{cases}$$

По построению $\frac{1}{2}(x(t) + y(t)) = z$ при любом t , а норма каждого из элементов $x(t)$ и $y(t)$ не превосходит $1 - \frac{1}{3}\varepsilon + 2\delta$. В самом деле,

$$\|\tilde{x}\|_p \leq \|\tilde{a}\|_p + \|\tilde{x} - \tilde{a}\|_p \leq 1 - \varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = 1 - \frac{2}{3}\varepsilon,$$

а норма “хвоста” элемента $(1+t)z$ не превосходит суммы норм “хвостов” $2c$ и $2(z - c)$, т.е. не превосходит $2(\frac{1}{6}\varepsilon + \delta)$. Складывая, получаем $\|x(t)\|_p \leq 1 - \frac{1}{3}\varepsilon + 2\delta$, и то же верно для $y(t)$. При $\delta \leq \frac{1}{6}\varepsilon$ получаем $\|x(t)\|_p \leq 1$ и $\|y(t)\|_p \leq 1$. Покажем, что существует такое $\tau \in [-1, 1]$, при котором $\|x(\tau)\|_1 \leq 1$ и $\|y(\tau)\|_1 \leq 1$, а значит, $x(\tau), y(\tau) \in \Delta_p$. Ясно, что $\|\tilde{x}\|_1 \leq 1$ и $\|\tilde{y}\|_1 \leq 1$. Пусть для определенности $\|\tilde{x}\|_1 \geq \|\tilde{y}\|_1$. Если $\|y(-1)\|_1 \leq 1$, то подходит $\tau = -1$, так как

$\|x(-1)\|_1 = \|\tilde{x}\|_1 \leq 1$. Если же $\|y(-1)\|_1 > 1$, то $\|y(-1)\|_1 > \|x(-1)\|_1$, а поскольку $\|y(1)\|_1 \leq \|x(1)\|_1$, то, пользуясь непрерывностью, заключаем, что найдется такое $\tau \in [-1, 1]$, что $\|y(\tau)\|_1 = \|x(\tau)\|_1$. Так как $\frac{1}{2}(x(\tau) + y(\tau)) = z$, то $\|x(\tau)\|_1 = \|y(\tau)\|_1 = \|z\|_1 \leq 1$.

Наконец, норма разности $\|x(\tau) - a\|_p$ в первых N координатах не превосходит $\frac{1}{3}\varepsilon$, а в оставшихся не превосходит максимальной из норм двух “хвостов” – элемента a и элемента $2z$. Следовательно,

$$\|x(\tau) - a\|_p \leq \frac{1}{3}\varepsilon + \max\left\{\frac{1}{6}\varepsilon, 2\left(\frac{1}{6}\varepsilon + \delta\right)\right\} = \frac{2}{3}\varepsilon + 2\delta.$$

При $\delta < \frac{1}{6}\varepsilon$ получаем, что $\|x(\tau) - a\|_p < \varepsilon$ и, аналогично, $\|y(\tau) - b\|_p < \varepsilon$. Положив $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, завершаем доказательство.

§ 4. Приложения в квантовой теории информации

Важным примером выпуклого μ -компактного множества, для которого имеют место эквивалентные свойства из теоремы 1, является множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ квантовых состояний – операторов плотности (положительных операторов с единичным следом) в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, множество крайних точек которого состоит из одномерных проекторов⁷ – чистых состояний (см. [25]). μ -компактность и свойство устойчивости (свойство (i) в теореме 1) множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ установлены соответственно в [22; предложение 2] и в [26; лемма 3]. Данные свойства существенно использовались при исследовании характеристик квантовых состояний и квантовых каналов. Например, свойство μ -компактности множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ позволило показать, что любое несцепленное состояние (см. ниже) составной квантовой системы является средним состоянием (барицентром) некоторого обобщенного ансамбля чистых состояний-произведений (меры на множестве чистых состояний-произведений; см. [27]). Свойство устойчивости множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ является ключевым в доказательстве полунепрерывности снизу χ -функции произвольного квантового канала – важной характеристики, связанной с классической пропускной способностью этого канала (см. [26]).

В данном параграфе рассмотрен один результат, который является прямым следствием выполнимости для множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ обобщенной теоремы Вестерстрёма–О’Брайена – теоремы 1.

В соответствии с формализмом квантовой механики состояния составной квантовой системы (которая получена в результате объединения двух квантовых систем, описываемых гильбертовыми пространствами $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$) – это операторы плотности в тензорном произведении $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ этих пространств. Принципиальным отличием квантовомеханической статистической модели от классической является существование так называемых сцепленных состояний (entangled states) составной системы, которые невозможно представить в виде выпуклой комбинации состояний-произведений, т.е. состояний, в которых отдельные подсистемы независимы. Именно эффект сцепленности, который можно рассматривать как особый чисто квантовый вид корреляции, является

⁷Множество $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ компактно тогда и только тогда, когда $\dim \mathcal{H} < +\infty$.

основой построения различных квантовых алгоритмов, квантовых криптографических протоколов и систем передачи информации, привлекающих большой интерес исследователей в последние два десятилетия (см. [25; гл. 3]). Поэтому изучение сцепленности, в частности ее количественных характеристик, является одной из важнейших задач квантовой теории информации.

Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ – сепарабельные гильбертовы пространства. Состояние $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ называется *несцепленным*, если оно принадлежит выпуклому замыканию множества состояний произведений, т.е. состояний вида $\rho \otimes \sigma$, где $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{K})$; в противном случае оно называется *сцепленным*.

Монотонной характеристикой сцепленности (entanglement monotone) называется любая неотрицательная функция E на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, обладающая следующими свойствами (см. [28], [29]):

- E1) $\{E(\omega) = 0\} \iff \{\text{состояние } \omega \text{ несцеплено}\};$
- E2) монотонность относительно локальных операций и классических коммуникаций (LOCC), т.е.

$$E(\omega) \geq \sum_i \pi_i E(\omega_i) \quad (7)$$

для любого состояния $\omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ и произвольной LOCC-операции, результатом действия которой на состояние ω является набор состояний $\{\omega_i\}$ с распределением вероятностей $\{\pi_i\}$ (см. подробности в обзоре [29]);

- E3) выпуклость функции E на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$, т.е.

$$E\left(\sum_i \pi_i \omega_i\right) \leq \sum_i \pi_i E(\omega_i)$$

для любого набора $\{\omega_i\}$ состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ и распределения вероятностей $\{\pi_i\}$.

Стандартным способом построения монотонных характеристик сцепленности (МХС) в случае конечномерных пространств $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ является *метод выпуклой надстройки* (the convex roof construction; см. [29], [30]). В соответствии с этим методом для произвольной вогнутой непрерывной неотрицательной функции f на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ такой, что

$$f^{-1}(0) = \text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H}), \quad f(\rho) = f(U\rho U^*) \quad (8)$$

для любого состояния ρ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ и любого унитарного оператора U в пространстве $\mathcal{H}$, соответствующая МХС E^f определяется выражением

$$E^f(\omega) = \inf_{\{\pi_i, \omega_i\} \in M_\omega(\text{extr } \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}))} \sum_i \pi_i f \circ \Theta(\omega_i), \quad \omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}), \quad (9)$$

где $\Theta: \omega \mapsto \text{Tr}_{\mathcal{K}} \omega$ – операция частичного следа (см. [25]); корректность выражения в правой части (9) обусловлена спектральной теоремой. Именно таким методом строится одна из наиболее популярных мер сцепленности⁸ – сцепленность формирования (Entanglement of Formation – EoF), когда в качестве функции f используется энтропия фон Неймана $H(\rho) = -\text{Tr } \rho \log \rho$ (см. [29]).

⁸ Мерой сцепленности называется МХС, обладающая некоторыми особыми свойствами (см. [29]).

Далее будем исследовать свойства функции E^f , определенной выражением (9), считая пространство $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ бесконечномерными.

Важной проблемой при построении любой МХС является исследование ее свойств непрерывности, в частности доказательство ее непрерывности на всем пространстве $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ (формально последнее свойство не входит в определение МХС, однако в конечномерном случае его обычно включают в число основных дополнительных требований). Заметим, что даже в конечномерном случае непрерывность функции E^f не является очевидной и обычно доказывается с использованием явного вида функции f . Именно отмеченные выше μ -компактность и устойчивость множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ гарантируют в силу теоремы 1 непрерывность функции E^f на этом множестве при любой непрерывной функции f как в конечномерном, так и в бесконечномерном случае, что составляет утверждение следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть f – вогнутая непрерывная неотрицательная функция на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$, удовлетворяющая условиям (8). Тогда функция E^f , определенная выражением (9), является непрерывной на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ монотонной характеристикой сцепленности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неотрицательности, вогнутости и непрерывности функции f следует ее ограниченность. В силу теоремы 1 свойство устойчивости μ -компактного множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ гарантирует непрерывность функции $\text{co}(f \circ \Theta)$, а значит, и ее совпадение с функцией $\overline{\text{co}}(f \circ \Theta)$, имеющей в силу предложения 6 представление

$$\overline{\text{co}}(f \circ \Theta)(\omega) = \inf_{\mu \in M_\omega(\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}))} \int_{\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})} (f \circ \Theta)(\varpi) \mu(d\varpi), \quad \omega \in \mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}), \quad (10)$$

где точная нижняя грань достигается на некоторой мере μ_ω из $M_\omega(\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}))$. Используя вогнутость, непрерывность и ограниченность функции $f \circ \Theta$, нетрудно показать, что в качестве μ_ω можно выбрать меру из $M_\omega(\text{ext}(\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})))$. Поэтому из определения функции E^f с учетом вогнутости функции $f \circ \Theta$ непосредственно следует, что $E^f = \text{co}(f \circ \Theta) = \overline{\text{co}}(f \circ \Theta)$.

В силу свойства (8) неотрицательная функция $f \circ \Theta$ равна нулю на чистом состоянии из $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ тогда и только тогда, когда оно является состоянием-произведением. Как показано в [27], состояние ω является несцепленным тогда и только тогда, когда существует такая мера μ_ω с носителем на множестве чистых состояний-произведений, что $\mathbf{b}(\mu_\omega) = \omega$. Поэтому приведенное выше замечание показывает выполнение свойства E1) для функции $E^f = \overline{\text{co}}(f \circ \Theta)$.

Выполнение свойства E2) для функции E^f нетрудно доказать, повторяя рассуждение для такой же функции в конечномерном случае (см. [29]).

Свойство E3) для функции E^f следует из ее определения.

ПРИМЕР 2. Обобщая на бесконечномерный случай рассуждение из [30], рассмотрим семейство непрерывных вогнутых ограниченных функций

$$f_\alpha(\rho) = 2(1 - \text{Tr} \rho^\alpha), \quad \alpha > 1,$$

на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ при $\dim \mathcal{H} \leq +\infty$. Нетрудно проверить, что все функции данного семейства удовлетворяют условиям (8). В силу теоремы 2 $\{E^{f_\alpha}\}_{\alpha > 1}$ –

семейство МХС, непрерывных и ограниченных на множестве $\mathfrak{S}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$ при $\dim \mathcal{H} \leq +\infty$ и $\dim \mathcal{K} \leq +\infty$. Особый интерес представляет случай $\alpha = 2$, в котором МХС E^{f_2} можно рассматривать как бесконечномерное обобщение понятия I-tangle (см. [31]).

§ 5. Возможные обобщения и открытые вопросы

Предложение 1 дает равносильное определение μ -компактности выпуклых множеств рассматриваемого класса. Выпуклое множество $\mathcal{A}$ μ -компактно, если для любого компакта $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $\mathcal{K}_\varepsilon \subseteq \mathcal{A}$ такой, что для любого разложения точки $x \in \mathcal{K}$ в выпуклую комбинацию точек из $\mathcal{A}$ общая масса точек этой комбинации, лежащих в $\mathcal{K}_\varepsilon$, не менее $1 - \varepsilon$. Это свойство выпуклых множеств (любых) назовем *обобщенной μ -компактностью* (для краткости будем также называть $\tilde{\mu}$ -компактностью). Согласно предложению 1 для выпуклых ограниченных подмножеств локально выпуклых пространств, являющихся полными сепарабельными метрическими пространствами, $\tilde{\mu}$ -компактность равносильна μ -компактности. Определение $\tilde{\mu}$ -компактности переносится без изменений на любые выпуклые замкнутые множества в линейных топологических пространствах, в том числе и на неограниченные. Понятие же μ -компактности для неограниченных множеств не определено вовсе, поскольку не определено уже барицентрическое отображение: интеграл

$$\mathbf{b}(\mu) = \int_{\mathcal{A}} x \mu(dx)$$

для некоторых мер $\mu \in M(\mathcal{A})$ может не существовать. Таким образом, понятие $\tilde{\mu}$ -компактности обобщает понятие μ -компактности на более широкий класс выпуклых множеств. Подобно μ -компактам пересечение и декартово произведение любого числа $\tilde{\mu}$ -компактов являются $\tilde{\mu}$ -компактами, выпуклое замкнутое подмножество $\tilde{\mu}$ -компакта также является $\tilde{\mu}$ -компактом (доказательство дословно совпадает с доказательством предложения 4). Имеет место также полный аналог предложения 3 о непрерывных отображениях μ -компактов. Нетривиальные примеры $\tilde{\mu}$ -компактов появляются уже в конечномерном случае.

ЛЕММА 3. *Любой выпуклый замкнутый точечный (не содержащий прямой линии) конус в $\mathbb{R}^d$ является $\tilde{\mu}$ -компактом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$ – выпуклый точечный конус. Для него существует вектор $a \in \mathbb{R}^d$ такой, что $\inf_{x \in \mathcal{C}, \|x\|=1} (x, a) > 0$ (см. [32; с. 53]). Тогда для каждого $r > 0$ усеченный конус $\mathcal{C}_r = \{x \in \mathcal{C}, (x, a) \leq r\}$ компактен. Любой компакт $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}$ можно поместить в некоторый усеченный конус $\mathcal{C}_r$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ компакт $\mathcal{K}_\varepsilon = \mathcal{C}_{r/\varepsilon}$ искомым, что завершает доказательство.

Приведенный ниже факт выпуклой геометрии общеизвестен, мы опускаем его доказательство.

ЛЕММА 4. *Следующие свойства выпуклого замкнутого множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^d$ эквивалентны:*

- (i) $\mathcal{A}$ содержится в выпуклом точечном конусе;
- (ii) $\mathcal{A}$ имеет хотя бы одну крайнюю точку;
- (iii) $\mathcal{A}$ не содержит прямой линии;
- (iv) поляр множества $\mathcal{A}$ имеет непустую внутренность.

Применив лемму 3, получаем, что уже свойство (i) влечет $\tilde{\mu}$ -компактность множества $\mathcal{A}$. С другой стороны, прямая линия не $\tilde{\mu}$ -компактна, поэтому из $\tilde{\mu}$ -компактности следует свойство (iii). Таким образом, доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. В пространстве $\mathbb{R}^d$ $\tilde{\mu}$ -компактность равносильна каждому из свойств (i)–(iv), перечисленных в лемме 4.

Положительные конусы во всех пространствах l_p и $L_p(X)$ являются $\tilde{\mu}$ -компактными в слабой топологии. Доказательство аналогично доказательству леммы 3 и использует слабую компактность ограниченных множеств в этих пространствах. Положительный конус в l_1 (предложение 9), конус всех конечных борелевских мер на полном сепарабельном метрическом пространстве (предложение 10) и конус положительных операторов в пространстве Шаттена порядка $p = 1$ (предложение 11) являются $\tilde{\mu}$ -компактными, причем можно брать не только ограниченные части конусов, как в упомянутых предложениях. Таким образом, $\tilde{\mu}$ -компактность значительно расширяет понятие μ -компактности (это мотивирует вопрос 1).

ВОПРОС 1. В какой мере обобщаются результаты настоящей работы на $\tilde{\mu}$ -компактные множества?

Следующие вопросы касаются уже μ -компактных множеств.

ВОПРОС 2. Существуют ли μ -компактные, но не компактные множества в пространствах L_p и l_p при $p > 1$?

ВОПРОС 3. Дано упорядоченное банахово пространство. При каких условиях ограниченная часть положительного конуса в нем μ -компактна?

ВОПРОС 4. Каковы условия на выпуклое множество $\mathcal{A}$, гарантирующие непрерывность выпуклой оболочки любой непрерывной ограниченной функции, заданной на $\mathcal{A}$?

Это свойство выполнено для устойчивых μ -компактов (теорема 1), однако не выполнено для точечно μ -компактных множеств, не являющихся μ -компактными (предложение 7). Шар в пространстве l_2 обладает данным свойством (замечание 3), а положительная часть этого шара – нет (пример 1).

§ 6. Приложение

6.1. Критерий компактности для подмножеств конуса $\mathfrak{L}_+(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$. Пусть $\mathfrak{L}_+(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ – конус линейных непрерывных положительных отображений банахового пространства $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ ядерных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ в другое такое же пространство $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$. Установим критерий компактности подмножеств данного конуса в сильной операторной топологии.

ЛЕММА 5. 1) Замкнутое ограниченное подмножество $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_+(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ сильно компактно, если в $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ существует состояние полного ранга σ такое, что $\{\Phi(\sigma)\}_{\Phi \in \mathcal{L}_0}$ – компактное подмножество множества $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$.

2) Если подмножество $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_+(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ сильно компактно, то $\{\Phi(\sigma)\}_{\Phi \in \mathcal{L}_0}$ – компактное подмножество множества $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ для любого состояния σ из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $\{|i\rangle\}$ – базис из собственных векторов состояния σ , взятых в порядке убывания собственных значений, и $\mathcal{H}_m$ – собственное подпространство, порожденное первыми m векторами этого базиса.

Пусть $\{\Phi_n\}$ – произвольная последовательность отображений из $\mathcal{L}_0$.

Покажем, что при каждом m для любого оператора A из $\mathfrak{T}(\mathcal{H}_m)$ существует такая подпоследовательность $\{\Phi_{n_k}\}$, что последовательность $\{\Phi_{n_k}(A)\}_k$ сходится в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$. Предположим сначала, что $A \geq 0$. Поскольку $A \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}_m)$, то существует такое $\lambda_A > 0$, что $\lambda_A A \leq \sigma$. В силу критерия компактности для подмножеств множества $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ (см. предложение в [21; приложение]) для любого $\varepsilon > 0$ существует проектор конечного ранга $P_\varepsilon \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}')$ такой, что $\text{Tr}(I_{\mathcal{H}'} - P_\varepsilon)\Phi(\sigma) < \varepsilon$, а значит, и $\text{Tr}(I_{\mathcal{H}'} - P_\varepsilon)\Phi(A) < \lambda_A^{-1}\varepsilon$ для всех $\Phi \in \mathcal{L}_0$. В силу того же критерия компактности множество $\{\Phi(A)\}_{\Phi \in \mathcal{L}_0}$ компактно, что гарантирует существование указанной подпоследовательности для положительного A . Для произвольного оператора $A \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}_m)$ существование такой подпоследовательности следует из возможности его представления в виде линейной комбинации положительных операторов из $\mathfrak{T}(\mathcal{H}_m)$.

Итак, при каждом m из произвольной последовательности $\{\Phi_n\} \subset \mathcal{L}_0$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{\Phi_{n_k}\}$, что существуют

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi_{n_k}(|i\rangle\langle j|) = C_{ij}^m \quad (11)$$

при всех $i, j = \overline{1, m}$, где $\{C_{ij}^m\}$ – некоторые операторы из $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$.

Для любого $m' > m$, применяя данное рассуждение к последовательности $\{\Phi_{n_k}\}_k$, получим такую подпоследовательность последовательности $\{\Phi_n\}$, для которой имеет место (11) для всех $i, j = \overline{1, m'}$ с таким набором операторов $\{C_{ij}^{m'}\}$, что $C_{ij}^{m'} = C_{ij}^m$ для всех $i, j = \overline{1, m}$.

Используя данную конструкцию, можно показать существование набора операторов $\{C_{ij}\}_{i,j=1}^{+\infty}$, обладающего следующим свойством: при каждом m существует такая подпоследовательность $\{\Phi_{n_k}\}$ последовательности $\{\Phi_n\}$, что имеет место (11) при $C_{ij}^m = C_{ij}$ для всех $i, j = \overline{1, m}$.

На множестве $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathfrak{T}(\mathcal{H}_m)$ определим отображение

$$\Phi_*: \sum_{i,j} a_{ij} |i\rangle\langle j| \mapsto \sum_{i,j} a_{ij} C_{ij} \in \mathfrak{T}(\mathcal{H}').$$

Это отображение линейно по построению. Нетрудно показать его положительность и ограниченность. Действительно, по свойству набора $\{C_{ij}\}$ для любого оператора $A \in \bigcup_m \mathfrak{T}(\mathcal{H}_m)$ существует подпоследовательность $\{\Phi_{n_k}\}$ последовательности $\{\Phi_n\}$ такая, что $\Phi_*(A) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi_{n_k}(A)$. Поэтому положительность и ограниченность отображения Φ_* следуют из положительности отображений последовательности $\{\Phi_n\}$ и ее равномерной ограниченности. Поскольку множество $\bigcup_m \mathfrak{T}(\mathcal{H}_m)$ плотно в $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$, отображение Φ_* можно расширить

до линейного положительного ограниченного отображения из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в $\mathfrak{T}(\mathcal{H}')$ (которое будем обозначать тем же символом Φ_*).

Покажем, что отображение Φ_* является предельной точкой последовательности $\{\Phi_n\}$ в сильной операторной топологии. Эту топологию на ограниченных подмножествах $\mathfrak{L}_+(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ можно определить⁹ счетным набором полунорм $\Phi \mapsto \|\Phi(\rho_i)\|_1$, где $\{\rho_i\}$ – любое счетное плотное подмножество множества $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$. Выберем в качестве такого подмножества набор состояний из $\bigcup_m \mathfrak{T}(\mathcal{H}_m)$. Любая окрестность отображения Φ_* содержит окрестность вида

$$\{\Phi \in \mathfrak{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}') \mid \|(\Phi - \Phi_*)(\rho_{i_t})\|_1 < \varepsilon, t = \overline{1, p}\},$$

где $\{\rho_{i_t}\}_{t=1}^p$ – конечный поднабор указанного выше набора состояний и $\varepsilon > 0$. Поскольку $\{\rho_{i_t}\}_{t=1}^p \subset \mathfrak{T}(\mathcal{H}_m)$ при некотором m , то из конструкции отображения Φ_* следует существование такой подпоследовательности $\{\Phi_{n_k}\}$ последовательности $\{\Phi_n\}$, что $\Phi_*(\rho_{i_t}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \Phi_{n_k}(\rho_{i_t})$ при всех $t = \overline{1, p}$, а значит, и принадлежность указанной выше окрестности хотя бы одного элемента последовательности $\{\Phi_n\}$.

Таким образом, отображение Φ_* – предельная точка последовательности $\{\Phi_n\}$ в сильной операторной топологии, что в силу метризуемости этой топологии на ограниченных подмножествах конуса $\mathfrak{L}_+(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ гарантирует существование у этой последовательности подпоследовательности, сходящейся к этому отображению. Компактность множества $\mathfrak{L}_0$ доказана.

2) Это утверждение непосредственно вытекает из определения сильной операторной топологии.

6.2. Критерий открытости.

ЛЕММА 6. Пусть φ – отображение топологического пространства X на метрическое пространство Y . Следующие утверждения равносильны:

- (i) отображение φ является открытым;
- (ii) для любого $x_0 \in X$ и любой последовательности $\{y_n\} \subset Y$, сходящейся к $y_0 = \varphi(x_0)$, существуют поднаправленность $\{y_{n_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ последовательности $\{y_n\}$ и направленность $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, сходящаяся к x_0 , такие, что $\varphi(x_\lambda) = y_{n_\lambda}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\implies$ (ii). Пусть $\mathfrak{U}$ – множество всех окрестностей точки x_0 . Тогда множество Λ всех пар $\lambda = (U, k)$, где $U \in \mathfrak{U}$ и $k \in \mathbb{N}$, с частичным порядком

$$\{\lambda_1 = (U_1, k_1) \succ \lambda_2 = (U_2, k_2)\} \iff \{k_1 \geq k_2 \text{ и } U_1 \subseteq U_2\}$$

является направленным. При каждом $\lambda = (U, k)$ множество $W_\lambda = \varphi(U) \cap V_k$, где V_k – открытый шар в Y с центром y_0 и радиусом $1/k$, является окрестностью точки y_0 . Поэтому существует минимальное число n_λ такое, что $y_{n_\lambda} \in W_\lambda$. Непосредственная проверка показывает, что $\{y_{n_\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ – поднаправленность последовательности $\{y_n\}$. Для каждого $\lambda = (U, k)$ существует $x_\lambda \in U$ такое, что $\varphi(x_\lambda) = y_{n_\lambda}$. Ясно, что направленность $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ сходится к x_0 .

⁹Здесь используется возможность представления любого оператора из $\mathfrak{T}(\mathcal{H})$ в виде линейной комбинации четырех состояний из $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

(ii) $\implies$ (i). Если существует открытое множество $U \subseteq X$ такое, что множество $\varphi(U)$ не является открытым, то существуют $y_0 = \varphi(x_0) \in \varphi(U)$ и последовательность $\{y_n\} \subset Y \setminus \varphi(U)$, сходящаяся к y_0 . Используя (ii), нетрудно прийти к противоречию.

Авторы признательны рецензентам, чьи ценные замечания и предложения способствовали улучшению этой статьи.

Список литературы

- [1] Р. Фелпс, *Лекции о теоремах Шоке*, Мир, М., 1968; пер. с англ.: R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's theorem*, Van Nostrand, Princeton, NJ–Toronto, ON–London, 1966.
- [2] Е. М. Алфсен, *Compact convex sets and boundary integrals*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1971.
- [3] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.: A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, Stud. Math. Appl., **6**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1979.
- [4] G. A. Edgar, “Extremal integral representations”, *J. Functional Analysis*, **23**:2 (1976), 145–161.
- [5] G. A. Edgar, “On the Radon–Nikodym-property and martingale convergence”, *Vector space measures and applications. II* (Univ. Dublin, Dublin, 1977), Lecture Notes in Math., **645**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1978, 62–76.
- [6] R. D. Bourgin, “Geometric aspects of convex sets with the Radon–Nikodým property”, *Lecture Notes in Math.*, **993**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1983.
- [7] R. D. Bourgin, G. A. Edgar, “Noncompact simplexes in Banach spaces with the Radon–Nikodým property”, *J. Functional Analysis*, **23**:2 (1976), 162–176.
- [8] П. А. Мейер, *Вероятность и потенциалы*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: P. A. Meyer, *Probability and potentials*, Blaisdell, Waltham, MA–Toronto, ON–London, 1966.
- [9] М. Е. Широков, “О сильном СЕ-свойстве выпуклых множеств”, *Матем. заметки*, **82**:3 (2007), 441–458; англ. пер.: M. E. Shirokov, “On the strong CE-property of convex sets”, *Math. Notes*, **82**:3–4 (2007), 395–409.
- [10] J. Vesterstrøm, “On open maps, compact convex sets, and operator algebras”, *J. London Math. Soc.* (2), **6** (1973), 289–297.
- [11] Á. Lima, “On continuous convex functions and split faces”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **25** (1972), 27–40.
- [12] R. C. O’Brien, “On the openness of the barycentre map”, *Math. Ann.*, **223**:3 (1976), 207–212.
- [13] S. Papadopoulou, “On the geometry of stable compact convex sets”, *Math. Ann.*, **229**:3 (1977), 193–200.
- [14] A. Clausen, S. Papadopoulou, “Stable convex sets and extremal operators”, *Math. Ann.*, **231**:3 (1978), 193–203.
- [15] R. Grzaślewicz, “Extreme continuous function property”, *Acta Math. Hungar.*, **74**:1–2 (1997), 93–99.
- [16] Е. С. Половинкин, М. В. Балашов, *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*, Физматлит, М., 2004.
- [17] В. И. Богачёв, *Основы теории меры*, РХД, Москва–Ижевск, 2003.
- [18] K. R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, Academic Press, New York–London, 1967.

- [19] Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, “Ковариационные операторы вероятностных мер в локально выпуклых пространствах”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **23**:1 (1978), 3–26; англ. пер.: N. N. Vakhaniya, V. I. Tarieladze, “Covariance operators of probability measures in locally convex spaces”, *Theory Probab. Appl.*, **23**:1 (1978), 1–21.
- [20] М. Е. Широков, “О характеристизации выпуклых μ -компактных множеств”, *УМН*, **63**:5 (2008), 181–182; англ. пер.: M. E. Shirokov, “Characterization of convex μ -compact sets”, *Russian Math. Surveys*, **63**:5 (2008), 981–982.
- [21] М. Е. Широков, А. С. Холево, “Об аппроксимации квантовых каналов”, *Пробл. передачи информ.*, **44**:2 (2008), 3–22; англ. пер.: M. E. Shirokov, A. S. Holevo, “On approximation of infinite-dimensional quantum channels”, *Probl. Inf. Transm.*, **44**:2 (2008), 73–90.
- [22] А. С. Холево, М. Е. Широков, “Непрерывные ансамбли и пропускная способность квантовых каналов бесконечной размерности”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **50**:1 (2005), 98–114; англ. пер.: A. S. Holevo, M. E. Shirokov, “Continuous ensembles and the capacity of infinite-dimensional quantum channels”, *Theory Probab. Appl.*, **50**:1 (2006), 86–98.
- [23] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
- [24] L. Q. Eifler, “Open mapping theorems for probability measures on metric spaces”, *Pacific J. Math.*, **66**:1 (1976), 89–97.
- [25] А. С. Холево, *Введение в квантовую теорию информации*, МЦНМО, М., 2002.
- [26] М. Е. Shirokov, “The Holevo capacity of infinite dimensional channels and the additivity problem”, *Comm. Math. Phys.*, **262**:1 (2006), 137–159.
- [27] Р. Ф. Вернер, А. С. Холево, М. Е. Широков, “О понятии сцепленности в гильбертовых пространствах”, *УМН*, **60**:2 (2005), 153–154; англ. пер.: A. S. Kholevo, M. E. Shirokov, R. F. Werner, “On the notion of entanglement in Hilbert spaces”, *Russian Math. Surveys*, **60**:2 (2005), 359–360.
- [28] G. Vidal, “Entanglement monotones”, *J. Modern Opt.*, **47**:2–3 (2000), 355–376.
- [29] M. B. Plenio, Sh. Virmani, “An introduction to entanglement measures”, *Quantum Inf. Comput.*, **7**:1–2 (2007), 1–51; [arXiv: quant-ph/0504163](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0504163).
- [30] T. J. Osborne, “Convex hulls of varieties and entanglement measures based on the roof construction”, *Quantum Inf. Comput.*, **7**:3 (2007), 209–227.
- [31] P. Rungta, C. M. Caves, “Concurrence-based entanglement measures for isotropic states”, 012307, *Phys. Rev. A*, **67**:1 (2003).
- [32] S. Boyd, L. Vandenberghe, *Convex optimization*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

В. Ю. Протасов (V. Yu. Protasov)
 Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
E-mail: v-protasov@yandex.ru

Поступила в редакцию
 09.04.2008 и 17.02.2009

М. Е. Широков (M. E. Shirokov)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: msh@mi.ras.ru