Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Мерков, Сегментно-стрелочные диаграммы и инварианты орнаментов, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 11, 47–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm525>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:59:48

УДК 515.1

А. Б. Мерков

Сегментно-стрелочные диаграммы и инварианты орнаментов

Рассматриваются гомотопические инварианты орнаментов, т.е. наборов таких ориентированных замкнутых кривых на плоскости, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Как и при классификации узлов, все инварианты орнаментов равны индексам зацепления с подходящими циклами в *дискриминанте*, т.е. в множестве наборов кривых с запрещенными пересечениями. Инварианты конечного порядка (инварианты Васильева) для орнаментов – это инварианты, для которых такой цикл описывается в терминах конечного числа стратов естественной стратификации дискриминанта по типам запрещенных точек. Вычисление этих инвариантов сводится к вычислению некоторых когомологических спектральных последовательностей.

Строится новая явная комбинаторная конструкция семейства инвариантов конечного порядка для орнаментов. Показано, что это семейство покрывает некоторые из ранее известных семейств, а также выражимо в терминах когомологий естественных конечномерных топологических пространств.

Библиография: 18 названий.

§ 1. Введение

Настоящая работа вдохновлена статьей О. Виро и М. Поляка [1], в которой доказывается утверждение, анонсированное в работе [2]: инварианты узлов, порожденные гауссовыми диаграммами, можно интерпретировать как топологические степени некоторых отображений. Доказательство в [1] приведено для инварианта порядка 2 (также называемого v_2 или инвариантом Кассона). Интерес к этой конструкции возрос после результата М. Гусарова [3]: каждый инвариант Васильева для узлов (см. [4]) является линейной комбинацией инвариантов, порожденных гауссовыми диаграммами.

Ниже строится параллельная теория для орнаментов. *Орнаментом* (см. [5]) называется набор ориентированных замкнутых кривых на плоскости, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. В статье рассматриваются гомотопические инварианты орнаментов. Как и при классификации узлов, все инварианты орнаментов равны индексам зацепления с подходящими циклами в *дискриминанте*, т.е. в множестве наборов кривых с запрещенными пересечениями. Инварианты конечного порядка (инварианты Васильева) для орнаментов – это инварианты, для которых такой цикл описывается в терминах конечного числа стратов естественной стратификации дискриминанта по типам запрещенных точек. Нахождение этих инвариантов сводится к вычислению некоторых когомологических спектральных последовательностей. Однако только несколько семейств инвариантов

Работа выполнена при поддержке фонда INTAS (грант № 96-0713) и Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 98-01-00555 и 98-01-00648).

конечного порядка построены явно (см. [5]–[7]), и только инварианты порядка ≤ 5 описаны полностью.

В работе дается новая явная комбинаторная конструкция семейства инвариантов конечного порядка для орнаментов. Показано, что эти инварианты выразимы в терминах когомологий естественных конечномерных топологических пространств.

Модельный пример новой интерпретации инвариантов конечного порядка для трехкомпонентных орнаментов таков (подробнее см. в п. 4.2). Наибольший страт дискриминанта состоит из наборов кривых ровно с одной запрещенной тройной точкой. Его коразмерность в пространстве всех наборов из трех кривых равна единице, и он коориентируем. Следовательно, если зафиксировать коориентацию страта и некоторую точку в пространстве орнаментов (по традиции эта точка – *тривиальный орнамент*, т.е. набор взаимно непересекающихся стандартных вложений окружностей в плоскость), то индекс зацепления с этим стратом определяет инвариант орнаментов. Этот инвариант (индекс Кронекера) можно вычислить суммированием по всем точкам пересечения первых двух компонент их индексов относительно третьей компоненты, взятых со знаками, зависящими от направлений касательных векторов в точках пересечения. Эта сумма равна сумме знаков (т.е. чисел ± 1), зависящих от направлений касательных векторов, по следующим парам в образе орнамента: точка пересечения первых двух компонент и точка третьей компоненты, лежащая строго справа от этой точки пересечения. См. рис. 1, где точка пересечения помечена квадратиком, а точки справа от нее – кружочками; значение инварианта равно ± 2 в зависимости от ориентаций компонент. Кроме того, этот инвариант равен сумме тех же знаков ± 1 по всем *сегментно-стрелочным диаграммам*, изображенным на рис. 4, где окружности – это прообраз орнамента, концы сегмента – это прообразы точки пересечения первых двух компонент, а конец стрелки является прообразом точки третьей компоненты, лежащей строго справа от этой точки пересечения.

Рис. 1. Орнамент ϕ – это отображение дизъюнктного объединения окружностей в плоскость. Точка пересечения его первых двух кривых помечена квадратиком, а точки третьей кривой, лежащие строго направо от этой точки пересечения, помечены кружками. Так же помечены их прообразы

Другая интерпретация рассматриваемого инварианта такова. Каждый трехкомпонентный орнамент определяет отображение тора $\mathbb{T}^3$, т.е. множества всевозможных троек точек окружностей-прообразов, имеющих по одной точке на каждой окружности, в пространство $\mathbb{R}^6 = (\mathbb{R}^2)^3$ упорядоченных троек точек плоскости. Поскольку тройные пересечения запрещены, образ отображения не может

пересекать двумерную плоскость $x = y = z$, где $x, y, z \in \mathbb{R}^2$. Индекс зацепления образа тора и плоскости равен этому же инварианту.

Для исследования более сложных инвариантов нужно рассматривать страты дискриминанта, состоящие из наборов кривых с запретным поведением в $m > 3$ точках окружностей-прообразов. Таким стратам соответствуют сегментно-стрелочные диаграммы с одним или несколькими сегментами и несколькими стрелками, а также отображения торов $\mathbb{T}^m$ конфигураций из m_1 точек первой окружности, m_2 точек второй окружности и т. д. ($\sum_i m_i = m$) в пространство $(\mathbb{R}^2)^m$. При этом образы отображений не пересекаются с некоторыми конфигурациями (agangement) запрещенных плоскостей коразмерности 4 в $(\mathbb{R}^2)^m$. Индекс зацепления образа тора и любого $(m - 1)$ -мерного класса гомологий такой конфигурации плоскостей является инвариантом орнаментов. Связь теории орнаментов с топологией конфигураций плоскостей была известна и ранее, но при этом подходе она становится более явной.

Структура статьи такова. В §§2 и 6 напоминаются некоторые общие определения. В §§3, 4 определяются новые инварианты и приводятся несколько примеров. В §5 представлен другой взгляд на конструкцию новых инвариантов. В §7 доказано, что новые инварианты являются инвариантами конечного порядка, а в §§8, 9 дано описание некоторых ранее известных семейств инвариантов в терминах новых инвариантов. Возможные обобщения намечены в §§10, 11.

Автор выражает благодарность М. Поляку и О. Виро за краткие, но плодотворные обсуждения и В. Васильеву за бесчисленные консультации и редактирование текста.

§2. Основные определения

Напомним основные определения и примеры из элементарной теории орнаментов. Корни теории орнаментов, а именно изучение гомологий дискриминантных множеств в функциональных пространствах (см. [8] и [5]¹), остаются за рамками настоящей работы, хотя идея сегментно-стрелочных диаграмм пришла из этих пространств.

2.1. Орнаменты и квазиорнаменты. Обозначим через K дизъюнктивное объединение $c_1 \sqcup \dots \sqcup c_k$ k нумерованных (или окрашенных в разные цвета) окружностей. Буква k остается зарезервированной на протяжении всей статьи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [5]). *k -орнаментом* (или просто *орнаментом*) называется C^∞ -гладкое отображение $K \rightarrow \mathbb{R}^2$ такое, что ни одна точка $\mathbb{R}^2$ не имеет трех точек на трех разных окружностях в своем прообразе. Два орнамента *эквивалентны*, если соответствующие отображения $K \rightarrow \mathbb{R}^2$ можно соединить такой гомотопией $K \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, что для любого $t \in [0, 1]$ ограничение отображения на $K \times t$ является орнаментом. Орнамент *тривиален*, если он эквивалентен вложению $K \rightarrow \mathbb{R}^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [5]). *k -квазиорнамент* (или просто *квазиорнамент*) — это C^∞ -гладкое отображение $K \rightarrow \mathbb{R}^2$. Запрещенные для орнаментов точки многократного пересечения квазиорнамента называются его *особыми точками*.

¹Доступна также как глава 6 книг [9] и [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см. [5]). Орнамент *регулярен*, если он является иммерсией K и все кратные точки образа K в $\mathbb{R}^2$ являются простыми трансверсальными пересечениями. Квазиорнамент *регулярен*, если он является иммерсией K , в каждой кратной точке образа все локальные компоненты пересекаются попарно трансверсально и прообраз каждой кратной точки либо состоит из двух точек, либо содержит точки по крайней мере трех окружностей c_l^2 .

Регулярные орнаменты образуют плотное открытое множество в пространстве квазиорнаментов, а значит, каждый инвариант определяется своими значениями на регулярных орнаментах. На любом пути общего положения в пространстве орнаментов почти все орнаменты регулярны. В конечном числе особых моментов происходит одна из локальных перестроек, показанных на рис. 2.

Рис. 2. Разрешенные локальные перестройки для орнаментов. Верхний индекс показывает количество участвующих компонент, нижний индекс – либо число участвующих точек пересечения, либо его скачок

2.2. Примеры инвариантов орнаментов. Зафиксируем ориентацию плоскости $\mathbb{R}^2$. Пусть x – точка в $\mathbb{R}^2$. Напомним, что индекс точки $x \in \mathbb{R}^2$ относительно замкнутой ориентированной кривой $\tau: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, не проходящей через x , – это число оборотов вектора $\tau(t) - x$, когда t пробегает окружность $\mathbb{S}^1$. Обозначим через $\text{ind}_l x = \text{ind}_{\phi(c_l)} x$ индекс x относительно l -й компоненты $\phi(c_l)$ регулярного k -квазиорнамента ϕ , если $x \notin \phi(c_l)$, и наименьшее значение индекса в малой окрестности x , если $x \in \phi(c_l)$. Пусть теперь x – простая точка пересечения i -й компоненты $\phi(c_i)$ и j -й компоненты $\phi(c_j)$; положим³ $\sigma_{ij}(x)$ равным 1, если ориентация, задаваемая касательным репером $(\phi'_i((\phi_i)^{-1}(x)), \phi'_j((\phi_j)^{-1}(x)))$, совпадает с ориентацией плоскости $\mathbb{R}^2$, и -1 в противном случае.

Каждому регулярному k -орнаменту ϕ и числам i и j таким, что $1 \leq i < j \leq k$, соответствует следующая целочисленная функция $I_{ij}(b_1, \dots, b_k)$ от целочисленных аргументов:

$$I_{ij}(b_1, \dots, b_k)(\phi) = \sum_{\substack{x \in \phi(c_i) \cap \phi(c_j) \\ \text{ind}_l x = b_l, 1 \leq l \leq k}} \sigma_{ij}(x).$$

² Последнее условие не сформулировано в [5] явно.

³ Полное обозначение $\sigma_{\phi(c_i), \phi(c_j)}(x)$ чересчур громоздко.

ТЕОРЕМА 1 (см. [5; теорема 3]). Для любых $1 \leq i < j \leq k$ и целых $b_1, \dots, b_k$ функция $I_{ij}(b_1, \dots, b_k)$ является инвариантом орнаментов.

Для любых k неотрицательных целых показателей $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ можно следующим образом определить функции $M_{ij}(\beta)$ от k -орнаментов:

$$\begin{aligned} M_{ij}(\beta)(\phi) &= \sum_{b_1, \dots, b_k \in \mathbb{Z}} b_1^{\beta_1} \dots b_k^{\beta_k} \cdot I_{ij}(b_1, \dots, b_k)(\phi) \\ &= \sum_{p \in \phi(c_i) \cap \phi(c_j)} \sigma_{ij}(p) (\text{ind}_1 p)^{\beta_1} \dots (\text{ind}_k p)^{\beta_k}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $1 \leq i < j \leq k$. Очевидно, что $M_{ij}(\beta)$ – инварианты. Эти инварианты типа моментов индексов являются простейшими инвариантами конечного порядка (см. ниже теорему 2). Оказывается, что эти инварианты порождают все рациональные одногруппные инварианты конечного порядка (см. п. 6.2) и почти порождают все такие целочисленные инварианты. Точнее, базис $\mathbb{Z}$ -модуля одногруппных инвариантов конечного порядка образован инвариантами $M_{ij}(\beta)$, а

$$V_{ij}(\beta) = \sum_{p \in \phi(c_i) \cap \phi(c_j)} \sigma_{ij}(p) \binom{\text{ind}_1 p}{\beta_1} \dots \binom{\text{ind}_k p}{\beta_k}, \quad (2)$$

где $1 \leq i < j < k$ (см. [6; теорема 3]); тем не менее, инварианты $M_{ij}(\beta)$ удобнее для ручных вычислений.

В пп. 2.3–2.5 мы определим инварианты конечного порядка для орнаментов.

2.3. Особые точки и способы вырождения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (см. [5]). Точка $x \in \mathbb{R}^2$ является *особой точкой сложности j* регулярного квазиорнамента $\phi: K \rightarrow \mathbb{R}^2$, если $\phi^{-1}(x)$ состоит ровно из $j + 1$ точек, по крайней мере три из которых принадлежат разным компонентам K . Сложность $\text{comp} \phi$ регулярного квазиорнамента ϕ равна сумме сложностей всех его особых точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (см. [5]). Пусть регулярный квазиорнамент ϕ имеет m особых точек $x^1, \dots, x^m$. Способ вырождения ϕ – это порядок пометки всех точек их прообразов, удовлетворяющий следующим условиям. На каждом шаге помечаются либо некоторые три точки прообраза $\phi^{-1}(x^l)$ особой точки, принадлежащие трем разным компонентам K (если ни одна из точек $\phi^{-1}(x^l)$ еще не помечена), либо одна точка (если она еще не помечена, а три или более из точек $\phi^{-1}(x^l)$ уже помечены).

2.4. Характеристические числа. Характеристические числа инвариантов, соответствующие регулярным квазиорнаментам и способам их вырождения, определяются индукцией по сложности квазиорнаментов.

Характеристическое число, соответствующее орнаменту (единственный способ вырождения которого пуст), – это значение инварианта на орнаменте. Последний шаг способа вырождения k -квазиорнамента – это либо пометка одной точки на какой-либо компоненте c_l , либо пометка тройки точек на разных компонентах c_i, c_j и $c_l, i < j < l$. Рассмотрим локальное трансверсальное возмущение l -й компоненты k -квазиорнамента ϕ в малой окрестности помечаемой точки, т.е. сдвиг небольшого куска образа $\phi(c_l)$ через точку пересечения x трансверсально касательной

к $\phi(c_l)$ в x . Возможны два направления сдвига, соответствующие возмущенные квазиорнаменты имеют меньшую сложность, чем исходный, и принадлежат двум разным классам эквивалентности. Один из них можно назвать “положительным”, а другой – “отрицательным”. А именно если x – точка тройного пересечения $\phi(c_i)$, $\phi(c_j)$ и $\phi(c_l)$, то “положительные” k -квазиорнаменты – это те, у которых больше значение $\sigma_{ij}(x) \operatorname{ind}_l x$, а если x – точка более сложного пересечения, то “положительные” k -квазиорнаменты – это те, у которых больше значение $\operatorname{ind}_l x$. Характеристическое число, соответствующее данным k -квазиорнаменту и способу вырождения, определяется как разность характеристических чисел, соответствующих “положительному” и “отрицательному” возмущению этого k -квазиорнамента и способам их вырождения, полученным из исходного способа удалением последнего шага.

2.5. Инварианты конечного порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (см. [5]). Инвариант орнаментов является *инвариантом порядка i* , если все его характеристические числа, соответствующие регулярным квазиорнаментам сложности $> i$, равны нулю.

ТЕОРЕМА 2 (см. [5; теорема 4]). $M_{ij}(\beta)$ является инвариантом порядка $|\beta| + 1$, где $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_k$. То же верно и для $V_{ij}(\beta)$.

§ 3. Морсовские регулярные орнаменты

Для любого направления d на плоскости $\mathbb{R}^2$ обозначим через $\pi_d: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ проекцию вдоль этого направления.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. (Квази-)орнамент $\phi: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется *морсовским регулярным (квази-)орнаментом относительно направления d* , если

- он регулярен (см. определение 3);
- $\pi_d \circ \phi$ является функцией Морса, все критические значения которой различны;
- π_d принимает различные некритические значения на разных точках пересечения (квази-)орнамента (включая самопересечения его компонент).

Очевидно, что морсовский регулярный орнамент остается морсовским регулярным при малых возмущениях направления d . Морсовские регулярные орнаменты образуют открытое плотное множество в пространстве всех орнаментов. Во всех последующих формулах орнамент предполагается морсовским регулярным относительно горизонтального направления и под его *критической точкой (критическим значением)* понимается критическая точка (соответственно значение) композиции орнамента с проекцией вдоль горизонтали. Чтобы проверить, что функция от орнаментов, использующая морсовскую регулярность, является инвариантом, нужно проверить ее инвариантность относительно изотопий в пространстве морсовских регулярных орнаментов, перестроек Райдемайстера, показанных на рис. 2, и перестроек, нарушающих морсовскую регулярность (см. рис. 3, на котором направление проекции горизонтально).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Все локальные перестройки регулярных орнаментов, не являющиеся изотопиями морсовских регулярных орнаментов, показаны на рис. 2 и 3.

Рис. 3. Дополнительные локальные перестройки морсовских регулярных орнаментов. Горизонтальное направление является выделенным; локальные ветви могут принадлежать либо одной и той же, либо разным компонентам орнамента: верхний индекс, обозначаемый “*”, показывает их число (1 или 2)

§ 4. Вдохновляющие примеры, сегментно-стрелочные диаграммы и конфигурационные пространства

Этот параграф содержит определения сегментно-стрелочных диаграмм и некоторых конфигурационных пространств и примеры того, как в этих терминах выражаются инварианты конечного порядка для орнаментов. Поскольку определения довольно сложны, они вводятся постепенно и перемежаются примерами.

4.1. Индекс точки и инварианты типа моментов индексов. Для $p, q \in \mathbb{R}^2$ обозначим через $p \prec q$ тот факт, что точки p и q лежат на одной горизонтальной прямой, p слева от q .

Один из способов вычислить индекс $\text{ind}_\phi p$ точки $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \phi(c)$ относительно морсовской регулярной замкнутой кривой $\phi: \mathbb{S}^1 \simeq c \rightarrow \mathbb{R}^2$ таков. Обозначим через $x_1, x_2, \dots$ прообразы пересечений образа ϕ с горизонтальным лучом, выходящим из p направо; положим $\sigma(x_i)$ равным $+1$, если кривая ϕ направлена вверх в точке $\phi(x_i)$, и -1 , если она направлена вниз. Тогда

$$\text{ind}_\phi p = \sum_{i>0} \sigma(x_i) = \sum_{x \in c: p \prec \phi(x)} \sigma(x).$$

Применяя подобные формулы для орнаментов, мы будем индексировать “ind” и “σ” номерами компонент орнамента, относительно которых вычисляется индекс:

$$\text{ind}_l p = \sum_{x \in c_l: p \prec \phi(x)} \sigma_l(x), \quad (3)$$

аналогично

$$\text{ind}_l p = - \sum_{x \in c_l: \phi(x) \prec p} \sigma_l(x). \quad (4)$$

Если $p \in \phi(c_l)$, то, следуя [5], определим $\text{ind}_l p$ как наименьшее из значений индекса в пересечении малой окрестности p с дополнением до $\phi(c_l)$. В этом случае формулы (3) и (4) выглядят так:

$$\text{ind}_l p = \sum_{x \in c_l: p \prec \phi(x)} \sigma_l(x) + \sum_{x \in c_l: p = \phi(x)} \frac{\sigma_l(x) - 1}{2} \quad (5)$$

и

$$\text{ind}_l p = - \sum_{x \in c_l: \phi(x) \prec p} \sigma_l(x) - \sum_{x \in c_l: p = \phi(x)} \frac{\sigma_l(x) + 1}{2}. \quad (6)$$

Если p не является точкой самопересечения c_l , то вторые суммы состоят из одного слагаемого (каждая). Если горизонтальная прямая, проходящая через точку p , не проходит через самопересечения $\phi(c_l)$, то все формулы (3)–(6) можно переписать в виде сумм по точкам пересечения, а не по их прообразам. Например, формулы (3) и (5) превращаются в

$$\text{ind}_l p = \sum_{q \in \phi(c_l): p \prec q} \sigma_l(q) \quad (7)$$

и

$$\text{ind}_l p = \sum_{q \in \phi(c_l): p \prec q} \sigma_l(q) + \frac{\sigma_l(p) - 1}{2} \quad (8)$$

соответственно, где $\sigma_l(p) = \sigma_l(\phi^{-1}(q))$.

С другой стороны, формулы (1) и (2) для инвариантов $M_{ij}(\beta)$ и $V_{ij}(\beta)$ можно очевидным образом переписать в виде сумм по прообразам точек пересечения, например

$$M_{ij}(\beta) = \sum_{(x,y) \in c_i \times c_j: \phi_i(x) = \phi_j(y)} \sigma_{ij}((x,y)) (\text{ind}_1 \phi_i(x))^{\beta_1} \dots (\text{ind}_k \phi_i(x))^{\beta_k}, \quad (9)$$

где $\sigma_{ij}((x,y)) = \sigma_{ij}(\phi_i(x))$.

В этом параграфе мы подставим формулы (3) и (5) в (1) или (2) (или, точнее, (7) и (8) в (9), но для морсовских регулярных орнаментов эти два подхода совпадают) и дадим комбинаторную и гомологическую интерпретацию полученных формул. Для комбинаторного описания понадобятся определения в стиле Виро–Поляка (ср. с [2], [11]).

4.2. Пример: инвариант $M_{1,2}(0,0,1)$. Простейший инвариант конечного порядка для 3-орнаментов – это инвариант $M_{1,2}(0,0,1) = V_{1,2}(0,0,1)$ порядка 2. Подстановка (7) в (1) или (3) в (9) дает (для морсовских регулярных орнаментов):

$$M_{1,2}(0,0,1) = \sum_{\substack{p \in \phi(c_1) \cap \phi(c_2) \\ q \in \phi(c_3), p \prec q}} \sigma_{1,2}(p) \sigma_3(q) = \sum_{\substack{(x,y,z) \in c_1 \times c_2 \times c_3 \\ \phi_1(x) = \phi_2(y) \prec \phi_3(z)}} \sigma_{1,2}((x,y)) \sigma_3(z). \quad (10)$$

Рис. 4. Простая сегментно-стрелочная диаграмма

Формулу (10) можно интерпретировать следующим образом. Пусть $D_{1,1,1}$ – диаграмма, изображенная на рис. 4. Она *уважается* морсовским регулярным орнаментом ϕ , если ϕ склеивает вместе концы отрезка, а образ конца стрелки лежит справа от образа концов отрезка, т.е. $\phi_1(x) = \phi_2(y) \prec \phi_3(z)$. Тогда произведение $\sigma_{1,2}((x, y))\sigma_3(z)$ называется *знаком диаграммы*. Две диаграммы называются *эквивалентными*, если одна переводится в другую изотопией окружностей. Обозначим через $\langle D_{1,1,1}, \phi \rangle$ сумму знаков всех диаграмм, эквивалентных $D_{1,1,1}$ и уважаемых ϕ . Тогда

$$M_{1,2}(0, 0, 1)(\phi) = \langle D_{1,1,1}, \phi \rangle \quad (11)$$

для любого морсовского регулярного орнамента ϕ .

Гомологическая интерпретация инварианта $M_{1,2}(0, 0, 1)$ такова. Для любого 3-орнамента $\phi: c_1 \sqcup c_2 \sqcup c_3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ можно рассмотреть его мульти-0-струйное расширение $j^{(3)}(\phi): (\mathbb{S}^1)^3 \simeq c_1 \times c_2 \times c_3 \rightarrow (\mathbb{R}^2)^3 \simeq \mathbb{R}^6$. Образ струйного расширения $j^{(3)}(\phi)$ не пересекает *дискриминант* $\Sigma = \{(x, y, z) \in (\mathbb{R}^2)^3 : x = y = z\}$, являющийся множеством запрещенных тройных пересечений. Коэффициент зацепления образа $j^{(3)}(\phi)([(\mathbb{S}^1)^3])$ фундаментального класса пространства-прообраза и фундаментального класса $[\Sigma]$ дискриминанта является инвариантом орнаментов. Он равен $-M_{1,2}(0, 0, 1)$. Действительно, коэффициент зацепления равен индексу пересечения $j^{(3)}(\phi)([(\mathbb{S}^1)^3])$ и любой цепи $Q^3 \subset \mathbb{S}^6 = \overline{\mathbb{R}}^6$ такой, что $\partial Q^3 = \Sigma$. Возьмем в качестве Q^3 замыкание трехмерной полуплоскости $\{(x, y, z) \in (\mathbb{R}^2)^3 : x^1 = y^1 \leq z^1, x^2 = y^2 = z^2\}$. Тогда формула (10) вычисляет индекс пересечения образа $j^{(3)}(\phi)$ с Q^3 (с противоположным знаком).

Для дальнейших примеров требуются еще определения и обозначения.

4.3. Сегментно-стрелочные диаграммы. Ниже даны общие определения, относящиеся к сегментно-стрелочным диаграммам. В двух последующих простых примерах и в § 8 используются только диаграммы ровно с одним сегментом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. *Сегментно-стрелочная диаграмма* D в K – это конечное подмножество $D_p \subset K$, элементы которого называются *точками сегментно-стрелочной диаграммы*, снабженное следующей структурой:

- подмножеством $D_v \subset D_p$, элементы которого называются *вершинами диаграммы*;
- набором D_s , неупорядоченных пар точек множества D_p , находящихся на парах разных окружностей K и называемых *сегментами диаграммы*;
- набором $D_a \subset (D_v \cup D_s)^2$ упорядоченных пар вершин и/или сегментов, называемых *стрелками диаграммы*;
- положительными целыми числами $\nu(\dots)$, приписанными сегментам и вершинам и называемыми их *кратностями*;
- каждая точка из D_p принадлежит какой-либо паре из D_s или из D_a .

Удобно изображать сегментно-стрелочные диаграммы как следующие одномерные объекты:

- k нумерованных ориентированных окружностей;
- несколько отрезков (сегментов), соединяющих точки разных окружностей;
- несколько стрелок, каждый конец которых является либо вершиной, либо серединой отрезка.

Это позволяет ссылаться на “конец сегмента” или “хвост стрелки”. Однако слова “вершина” или “точка” диаграммы будут по-прежнему означать элементы конечных множеств, определенных выше.

Простая сегментно-стрелочная диаграмма – это сегментно-стрелочная диаграмма, в которой ни одна вершина не является концом сегмента и все кратности равны 1. Если в сегментно-стрелочной диаграмме стереть окружности и рассмотреть оставшиеся сегменты, вершины и стрелки как одномерное топологическое пространство, это пространство может оказаться несвязным. Сегменты и вершины из каждой его компоненты связности образуют *группу*. Далее рассматриваются только сегментно-стрелочные диаграммы, имеющие по крайней мере один сегмент в каждой группе⁴. Диаграмма ровно с одной группой называется *одногруппной диаграммой*. Диаграмма ровно с одним сегментом в каждой группе и без ориентированных циклов, образованных ее стрелками, называется *сегментно-стрелочной диаграммой общего положения*. Сегментно-стрелочная диаграмма общего положения называется *правой диаграммой*, *левой диаграммой*, *корневой диаграммой*, если каждая ее стрелка начинается на сегменте, кончается на сегменте, начинается или кончается на сегменте соответственно.

См. примеры простых сегментно-стрелочных диаграмм на рис. 4 и 5.

Рис. 5. Примеры простых сегментно-стрелочных диаграмм на трех окружностях: (a) левая одногруппная; (b) одногруппная некорневая общего положения; (c), (d) правые трехгруппные; (e), (f) одногруппные необщего положения

Каждый гомеоморфизм $K \rightarrow K$ очевидным образом определяет отображение сегментно-стрелочной диаграммы в сегментно-стрелочную диаграмму и сохраняет свойства простоты и общности положения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Две диаграммы D и D' *эквивалентны* ($D \sim D'$), если существует отображение $K \rightarrow K$, гомотопное тождественному и переводящее одну диаграмму в другую. Две диаграммы D и D' *U -эквивалентны* ($D \sim_U D'$), если U – открытое множество в K и вышеупомянутая гомотопия тождественна вне U .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Диаграмма D *уважается* морсовским регулярным орнаментом (или квазиорнаментом) ϕ , если ϕ склеивает вместе концы каждого сегмента (можно представлять себе, что весь сегмент стягивается в точку) и образ конца каждой стрелки лежит справа от образа ее начала (в случае орнаментов; а в случае квазиорнаментов, соответственно, лежит справа либо совпадает). Тогда для каждого сегмента $[x, y]$, где $x \in c_i$, а $y \in c_j$, его знак $\sigma_\phi([x, y]) = \sigma_{ij}(\phi_i(x))$ определен как в формуле (9). Аналогично, для каждой вершины $z \in c_l$ ее знак $\sigma_\phi(z) = \sigma_l(z)$ определен как в формуле (5). Знак $\sigma_\phi(D)$ диаграммы D – это произведение знаков всех ее сегментов и вершин, возведенных в степени, равные соот-

⁴И на самом деле только диаграммы, имеющие в каждой группе стрелку и точки по крайней мере трех окружностей, хотя а priori это не требуется. С другой стороны, сегментно-стрелочные диаграммы без стрелок – это в точности хордовые диаграммы в смысле [7].

ветствующим кратностям:

$$\sigma_\phi(D) = \prod_{[x,y] - \text{сегмент } D} (\sigma_\phi([x,y]))^{\nu([x,y])} \prod_{z - \text{вершина } D} (\sigma_\phi(z))^{\nu(z)}. \quad (12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *Представлением* (класса эквивалентности) диаграммы D в морсовском регулярном (квази-)орнаменте ϕ называется диаграмма D' , уважаемая ϕ и эквивалентная D .

Обозначим через $\langle D, \phi \rangle$ сумму

$$\langle D, \phi \rangle = \sum_{D' \sim D} \sigma_\phi(D') \quad (13)$$

по всем представлениям⁵ D' диаграммы D в ϕ .

Эта сумма зависит не от конкретной диаграммы D , а от ее класса эквивалентности. Сумма определена и конечна для каждой диаграммы D общего положения и морсовского регулярного (квази-)орнамента ϕ . Она определяет инвариант (т.е. локально постоянную функцию) морсовских регулярных орнаментов, но может меняться при перестройках типов Ψ^2 , X^2V_* , X^2X^1 , X^1X^2 и X^2X^2 , см. рис. 3. Ее можно продолжить по линейности на формальные линейные комбинации диаграмм:

$$\left\langle \sum_i \alpha_i D_i, \phi \right\rangle = \sum_i \alpha_i \langle D_i, \phi \rangle. \quad (14)$$

Иногда диаграмма или линейная комбинация диаграмм определяет инвариант орнаментов.

Чтобы упростить рисование диаграмм, нумерованные и ориентированные окружности K будут изображаться вертикальными прямыми, ориентированными снизу вверх и упорядоченными слева направо по их номерам. Например, диаграмма $D_{1,1,1}$ с рис. 4 будет изображаться так: . Диаграммы эквивалентны.

Теперь займемся непростыми сегментно-стрелочными диаграммами. В соответствии с формулой (12) сегмент или вершина нечетной кратности дает такой же множитель в формуле (12), как и простой(-ая), а сегменты и вершины четной кратности не влияют на знак представления. Четные (или, попросту, двойные) сегменты и вершины будут рисоваться жирными, а нечетные (простые) – тонкими. В частности, конец сегмента помечен тонкой точкой, если его знак присутствует в качестве сомножителя в $\sigma(D)$.

Следующие обозначения определяют не новые диаграммы, а только сокращения. Линейная комбинация $\sum \alpha_i D_i$ диаграмм $D_1, \dots, D_n$, совпадающих с точностью до кратностей их сегментов и вершин, записывается в формулах типа (13) как одна диаграмма D , где коэффициент $\sigma_\phi(D) = \sum \alpha_i \sigma_\phi(D_i)$ – это не моном, а полином от знаков сегментов и вершин. Сегменты и вершины, знаки которых входят

⁵В [7] и [12] эта сумма бралась не только по всем представлениям D' , но еще по всем изоморфизмам $D \rightarrow D'$. Такое определение давало лишний коэффициент, равный порядку группы автоморфизмов диаграммы D . Здесь мы предпочитаем обойтись без этого коэффициента.

в $\sigma_\phi(D)$ не как мономиальные сомножители, будут обводиться кружком, и соответствующий полиномиальный множитель будет помечен рядом с кружком и объяснен впоследствии. Чтобы увидеть примеры этих обозначений, взгляните на формулы п. 10.3. Вот копия одной из них:

$$\begin{aligned} I_{112,112}^\times &= \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 1} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 2} \\ \hline \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 3} \\ \hline \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 4} \\ \hline \end{array} \parallel \\ &= \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 1} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 2} \\ \hline \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 3} \\ \hline \end{array} + \frac{1}{4} \left(\begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 5} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram 6} \\ \hline \end{array} \right). \end{aligned}$$

Символ $\parallel$ справа от правой верхней диаграммы показывает, что знаки двух обведенных вершин должны совпадать. Этот предикат $(\sigma(x) = \sigma(y))$, где x и y – вершины на правой прямой диаграммы, записан в нижней строке как полиномиальный множитель $\frac{1}{2}(\sigma(x)\sigma(y) + 1)$.

4.4. Конфигурационные пространства. Определяемые ниже конфигурационные пространства соответствуют сегментно-стрелочным диаграммам с одним сегментом. Общие определения даны в §9 и п. 10.2.

С каждым мультииндексом⁶ $a = (a_1, \dots, a_k)$ связаны два конфигурационных пространства $K^a = \times_{i \leq k} c_i^{a_i} \simeq (\mathbb{S}^1)^{|a|}$ и $(\mathbb{R}^2)^a = \times_{i \leq k} (\mathbb{R}^2)^{a_i} \simeq (\mathbb{R}^2)^{|a|}$, где $|a| = \sum_{i \leq k} a_i$; a -мульти-0-струйное расширение (или просто a -расширение) $j^{(a)}(\phi): K^a \rightarrow (\mathbb{R}^2)^a$ k -орнамента $\phi: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ определяется покоординатно естественным образом. Канонические одномерные координаты x_l в K^a и двумерные координаты y_l в $(\mathbb{R}^2)^a$, где $1 \leq l \leq |a|$, наследуют цвета (т.е. номера) $\text{col } x_l = \text{col } l = i$ соответствующих прямых сомножителей c_i в K^a . Дискриминант $\Sigma^a \subset (\mathbb{R}^2)^a$ – это объединение

$$\Sigma^a = \bigcup_{(i,j,l): \text{col } i \neq \text{col } j \neq \text{col } l \neq \text{col } i} \Sigma_{ijl} \quad (15)$$

запрещенных плоскостей $\Sigma_{ijl} = \{(y_1, \dots, y_{|a|}) \in (\mathbb{R}^2)^a : y_i = y_j = y_l\}$ коразмерности 4.

4.5. Пример: инвариант $M_{1,2}(0,0,2)$. Теперь попробуем получить комбинаторную и гомологическую интерпретацию инварианта $M_{1,2}(0,0,2)$ порядка 3 для 3-орнаментов. Сначала проделаем трюк: подставим в формулу (1) (для морсовских регулярных орнаментов) формулу (3) для одного сомножителя $\text{ind}_3 x$ в $(\text{ind}_3 x)^2$ и (4) для другого сомножителя. Мы получим формулу

$$M_{1,2}(0,0,2) = - \sum_{\substack{x \in \phi(c_1) \cap \phi(c_2) \\ y, z \in \phi(c_3), z \prec x \prec y}} \sigma_{1,2}(x) \sigma_3(y) \sigma_3(z), \quad (16)$$

которая может быть естественно представлена в виде диаграммы:

$$M_{1,2}(0,0,2)(\phi) = \left\langle - \begin{array}{|c|} \hline \text{Diagram} \\ \hline \end{array}, \phi \right\rangle.$$

⁶ Такие мультииндексы называются *одногруппными сигнатурами*, см. п. 6.1.

Без трюков можно обойтись подстановкой только формулы (3), но тогда две вершины на третьей окружности могут совпасть:

$$M_{1,2}(0, 0, 2) = \sum_{\substack{x \in \phi(c_1) \cap \phi(c_2) \\ y, z \in \phi(c_3), x \prec y, x \prec z}} \sigma_{1,2}(x) \sigma_3(y) \sigma_3(z) \quad (17)$$

$$= 2 \sum_{\substack{x \in \phi(c_1) \cap \phi(c_2) \\ \{y, z\} \in B(\phi(c_3), 2) \\ x \prec y, x \prec z}} \sigma_{1,2}(x) \sigma_3(y) \sigma_3(z) + \sum_{\substack{x \in \phi(c_1) \cap \phi(c_2) \\ y \in \phi(c_3), x \prec y}} \sigma_{1,2}(x). \quad (18)$$

Напоминаем, что через $B(X, n)$ обозначается пространство n -элементных подмножеств топологического пространства X . Первая сумма в (18) – это сумма по парам различных вершин на c_3 , а вторая – сумма по парам совпадающих вершин. Тогда

$$M_{1,2}(0, 0, 2)(\phi) = \left\langle 2 \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right. + \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right. , \phi \right\rangle. \quad (19)$$

Сравнивая формулы (11), (19) и (2), получаем диаграммное представление для $V_{1,2}(0, 0, 2) = \frac{1}{2}(M_{1,2}(0, 0, 2) - M_{1,2}(0, 0, 1))$:

$$V_{1,2}(0, 0, 2)(\phi) = \left\langle \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right. + \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right. - \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right. , \phi \right\rangle = \left\langle \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right. + \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right. -, \phi \right\rangle. \quad (20)$$

Знак “−” справа от вершины y самой правой диаграммы показывает, что учитываются только представления с $\sigma_3(y) = -1$. Вся самая правая диаграмма представляет собой

$$\sum_{\substack{x \in \phi(c_1) \cap \phi(c_2) \\ y \in \phi(c_3), x \prec y}} \sigma_{1,2}(x) \frac{1 - \sigma_3(y)}{2} = \sum_{\substack{x \in \phi(c_1) \cap \phi(c_2) \\ y \in \phi(c_3), x \prec y \\ \sigma_3(y) = -1}} \sigma_{1,2}(x).$$

Гомологическая интерпретация $M_{1,2}(0, 0, 2)$ такова. Возьмем мультииндекс $a = (1, 1, 2)$. Дискриминант $\Sigma^a \subset (\mathbb{R}^2)^a \simeq \mathbb{R}^8$ является объединением двух 4-мерных плоскостей $\Sigma_{1,2,3}$ и $\Sigma_{1,2,4}$ с 2-мерным пересечением $\Sigma_{1,2,3,4}$. Группа гомологий Бореля–Мура $\bar{H}_3(\Sigma^a)$ (т.е. группа гомологий одноточечной компактификации $\bar{\Sigma}^a$ дискриминанта) изоморфна $\mathbb{Z}$; ее образующей является $[\bar{\Sigma}_{1,2,3|4}^+ - \bar{\Sigma}_{1,2,4|3}^+]$, где

$$\Sigma_{ijl|m}^+ = \{x \in (\mathbb{R}^2)^a : x_i^1 = x_j^1 = x_l^1 \leq x_m^1, x_i^2 = x_j^2 = x_l^2 = x_m^2\}$$

– это 3-мерная полуплоскость, ориентированная системой координат (x_i^1, x_i^2, x_m^1) . Обозначим через $Q_{ij|lm}^{++}$ 4-мерный “квадрант”

$$Q_{ij|lm}^{++} = \{x \in (\mathbb{R}^2)^a : x_i^1 = x_j^1 \leq \min(x_l^1, x_m^1), x_i^2 = x_j^2 = x_l^2 = x_m^2\},$$

ориентированный системой координат $(x_i^1, x_i^2, x_l^1, x_m^1)$. Тогда

$$\partial([Q_{1,2|3,4}^{++}]) = [\Sigma_{1,2,3|4}^+] - [\Sigma_{1,2,4|3}^+],$$

поэтому коэффициент зацепления $j^{(a)}(\phi) * ([K^a])$ с $[\bar{\Sigma}_{1,2,3|4}^+] - [\bar{\Sigma}_{1,2,4|3}^+]$ равен его индексу пересечения с $[Q_{1,2|3,4}^{++}]$, каковой можно вычислить по формуле (17) для $M_{1,2}(0, 0, 2)(\phi)$.

Напротив, целочисленный инвариант $V_{1,2}(0, 0, 2)$ не представим в виде класса целочисленных когомологий дополнения $(\mathbb{R}^2)^a \setminus \Sigma^a$, хотя, конечно, представим в виде класса рациональных когомологий.

4.6. Пример: инвариант $M_{1,2}(0, 1, 1) \equiv V_{1,2}(0, 1, 1)$.

$$\begin{aligned}
M_{1,2}(0, 1, 1) &= \sum_{\substack{x \in \phi(c_1) \cap \phi(c_2) \\ y \in \phi(c_3), z \in \phi(c_1) \\ x \prec y, x \prec z, x \neq z}} \sigma_{1,2}(x) \sigma_3(y) \sigma_2(z) + \sum_{\substack{x \in \phi(c_1) \cap \phi(c_2) \\ y \in \phi(c_3), x \prec y}} \sigma_{1,2}(x) \sigma_3(y) \frac{\sigma_2(x) - 1}{2} \\
&= \begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{Diagram 5} \\ \text{Diagram 6} \end{array} \\
&= \begin{array}{c} \text{Diagram 7} \\ \text{Diagram 8} \end{array} - \begin{array}{c} \text{Diagram 9} \\ \text{Diagram 10} \end{array}.
\end{aligned}$$

Знак “−” под обведенной вершиной x последней диаграммы показывает, что учитываются только представления с $\sigma_2(x) = -1$.

Гомологическая интерпретация инварианта $M_{1,2}(0, 1, 1) = V_{1,2}(0, 1, 1)$ подобна интерпретации $V_{1,2}(0, 0, 2)$. Она связана с индексом пересечения образа $j^{(a)}(\phi)_*([K^a])$ при $a = (1, 2, 1)$ и объединения двух соответственно ориентированных квадрантов $Q_{1,2|3,4}^{++}$ и $Q_{1,3|2,4}^{++}$, но не совпадает с ним. На самом деле, этот индекс пересечения равен

$$2V_{1,2}(0, 1, 1) + V_{1,2}(0, 0, 1) = 2 \begin{array}{c} \text{Diagram 11} \\ \text{Diagram 12} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 13} \\ \text{Diagram 14} \end{array} \quad (21)$$

(ср. с формулой (19)).

4.7. Пример: инвариант $M_{1,2}(0, 0, 1)^2$.

$$\begin{aligned}
M_{1,2}(0, 0, 1)^2 &= \sum_{\substack{x_1, x_2 \in \phi(c_1) \cap \phi(c_2) \\ y_1, y_2 \in \phi(c_3) \\ x_1 \prec y_1, x_2 \prec y_2}} \sigma_{1,2}(x_1) \sigma_3(y_1) \sigma_{1,2}(x_2) \sigma_3(y_2) \\
&= \sum_{\substack{x_1, x_2 \in \phi(c_1) \cap \phi(c_2) \\ y_1, y_2 \in \phi(c_3) \\ x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, x_1 \prec y_1, x_2 \prec y_2}} \sigma_{1,2}(x_1) \sigma_3(y_1) \sigma_{1,2}(x_2) \sigma_3(y_2) \\
&+ \sum_{\substack{x \in \phi(c_1) \cap \phi(c_2) \\ y_1, y_2 \in \phi(c_3) \\ y_1 \neq y_2, x \prec y_1, x \prec y_2}} (\sigma_{1,2}(x))^2 \sigma_3(y_1) \sigma_3(y_2) \\
&+ \sum_{\substack{x_1, x_2 \in \phi(c_1) \cap \phi(c_2) \\ y \in \phi(c_3) \\ x_1 \neq x_2, x_1 \prec y, x_2 \prec y}} \sigma_{1,2}(x_1) \sigma_{1,2}(x_2) (\sigma_3(y))^2 \\
&+ \sum_{\substack{x \in \phi(c_1) \cap \phi(c_2) \\ y \in \phi(c_3) \\ x \prec y}} (\sigma_{1,2}(x))^2 (\sigma_3(y))^2 \\
&= 2 \begin{array}{c} \text{Diagram 15} \\ \text{Diagram 16} \end{array} + 2 \begin{array}{c} \text{Diagram 17} \\ \text{Diagram 18} \end{array} + 2 \begin{array}{c} \text{Diagram 19} \\ \text{Diagram 20} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 21} \\ \text{Diagram 22} \end{array}. \quad (22)
\end{aligned}$$

Но третья диаграмма не имеет представлений в морсовских регулярных орнаментах из-за двух точек пересечения на одной горизонтальной прямой, следовательно,

$$M_{1,2}(0, 0, 1)^2 = 2 \begin{array}{c} \text{Diagram 23} \\ \text{Diagram 24} \end{array} + 2 \begin{array}{c} \text{Diagram 25} \\ \text{Diagram 26} \end{array} + \begin{array}{c} \text{Diagram 27} \\ \text{Diagram 28} \end{array}. \quad (23)$$

§ 5. Другая мотивация сегментно-стрелочных диаграмм

Хотя изначально сегментно-стрелочные диаграммы возникли как “возмущения” A -конфигураций (см. п. 6.1), а в приведенных примерах иллюстрировали вычисление инвариантов типа моментов индекса, у них есть еще и независимая элементарная мотивировка.

Возьмем морсовский регулярный k -орнамент ϕ и

- проведем горизонтальные прямые через все точки пересечения разных компонент орнамента;
- пометим каждую точку пересечения каждой из этих горизонтальных прямых с орнаментом;
- пометим прообразы всех этих точек в K и назовем их *вершинами*;
- соединим два прообраза каждой точки пересечения разных компонент отрезком (сегментом);
- проведем стрелку из середины сегмента в вершину в K , если их образы лежат на одной горизонтальной прямой, второй правее первого, и не разделены образами других вершин;
- проделаем то же самое для всех пар вершина–сегмент и вершина–вершина.

Полученная сегментно-стрелочная диаграмма называется *сегментно-стрелочной диаграммой орнамента ϕ* . Теперь припишем каждому сегменту и каждой вершине знак (т.е. $+1$ или -1), как это описано в определении 10. То, что получится, называется *ориентированной сегментно-стрелочной диаграммой* орнамента.

ТЕОРЕМА 3. *Морсовский регулярный орнамент определен своей ориентированной сегментно-стрелочной диаграммой с точностью до эквивалентности.*

Доказательство, хотя и длинное, элементарно и опущено: теорема не будет использоваться нигде, кроме этого неформального параграфа. С теоремы 3 можно было бы начать другой подход к классификации орнаментов: через классификацию ориентированных сегментно-стрелочных диаграмм по модулю отношения эквивалентности, индуцированного на диаграммах разрешенными перестройками орнаментов (рис. 2 и 3).

Таким образом, в принципе все инварианты орнаментов можно вычислить по их ориентированным сегментно-стрелочным диаграммам. Для инвариантов, порожденных представлениями сегментно-стрелочных диаграмм, этот “принцип” тривиален: представление в морсовском регулярном орнаменте является фактически представлением в его ориентированной сегментно-стрелочной диаграмме. Следовательно, проблемы взаимоотношений трех классов инвариантов орнаментов — всех инвариантов, инвариантов конечного порядка и инвариантов, порожденных диаграммами, — естественно изучать в терминах ориентированных сегментно-стрелочных диаграмм.

§ 6. Некоторые определения

Ниже повторяются некоторые определения из статей [5] и [6], полезные при вычислении порядков инвариантов.

6.1. A -конфигурации и сигнатуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12 (см. [5]). *Конфигурация* (или *A -конфигурация*) – это конечный набор точек K , разбитый на несколько групп так, что каждая точка содержит точки по крайней мере трех окружностей. Квазиорнамент *уважает* конфигурацию, если он склеивает вместе все точки каждой группы. Квазиорнамент ϕ *строго уважает* конфигурацию J , если ϕ уважает J , J содержит все прообразы всех особых точек ϕ и ϕ переводит различные группы в различные особые точки.

Конфигурация, строго уважаемая регулярным квазиорнаментом ϕ , будет обозначаться через $\text{Conf } \phi$. Обозначим через $\text{Conf } D$ конфигурацию, полученную из сегментно-стрелочной диаграммы D забыванием кратностей, стрелок и сегментов диаграммы, но сохранением ее точек и их разбиения на группы.

Комбинаторной характеристикой конфигурации или строго уважающего ее квазиорнамента является сигнатура, ср. с [6; определение 7], где строки и столбцы по ошибке переставлены.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. *Сигнатура* A – это матрица из неотрицательных целых чисел a_i^l с $k \geq 3$ упорядоченными столбцами a_i и неупорядоченными строками a^l , имеющая по крайней мере три положительных элемента в каждой строке.

Сигнатура $a = (a_1, \dots, a_k)$ (верхний индекс, равный 1, опущен), состоящая из единственной строки, называется *одногруппной сигнатурой*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. *Сигнатура* $\text{Sign } J$ конфигурации J – это сигнатура со строками, соответствующими группам точек, столбцами, соответствующими номерам (цветам) окружностей, и элементами a_i^l , равными количеству точек i -й окружности в l -й группе. Сигнатуры сегментно-стрелочных диаграмм и регулярных квазиорнаментов определяются равенствами $\text{Sign } D = \text{Sign}(\text{Conf } D)$ и $\text{Sign } \phi = \text{Sign}(\text{Conf } \phi)$ соответственно.

С сигнатурой A (или конфигурацией, квазиорнаментом и т.п., имеющими эту сигнатуру) связаны следующие числа: сумма $|A|$ всех элементов (общее число прообразов особых точек), число $\#A$ строк (особых точек, групп их прообразов) и сложность $\text{compl } A = |A| - \#A$.

Пространство конфигураций фиксированной сигнатуры A имеет естественную структуру гладкого многообразия размерности $|A|$, в общем случае неориентируемого, некомпактного и несвязного⁷. Его компонентами связности являются классы конфигураций, преобразуемых друг в друга изотопиями пространства K .

С другой стороны, любую отдельную конфигурацию сигнатуры A можно представлять себе как конечное множество элементов, раскрашенных в k цветов и разбитых на группы. Такой объект, единственный с точностью до изоморфизма для любой сигнатуры A , называется *абстрактной A -конфигурацией*. Например, элементы абстрактной A -конфигурации могут быть просто числами $1, \dots, |A|$ или чем угодно, проиндексированным этими числами.

6.2. Сигнатура и порядок инвариантов. Рассмотрим частичный порядок $<$ на множестве сигнатур, являющийся транзитивным замыканием следующего отношения:

- $A < B$, если A получается из B уменьшением одного из элементов;

⁷Но ориентированного, компактного и связного тора, если A -конфигурации имеют не более чем по одной точке на каждой окружности.

- $A < B$, если A получается из B удалением одной из строк;
- $A < B$, если A получается из B следующим слиянием двух $(l$ -й и m -й) строк по i -му столбцу: при условии, что оба элемента b_i^l и b_i^m положительны, строки b^l и b^m заменяются одной строкой a^l такой, что $a_i^l = b_i^l + b_i^m - 1$ и $a_j^l = b_j^l + b_j^m$ при $j \neq i$.

Функции $|A|$, $\#A$ и $\text{compl } A$ монотонны по отношению к этому порядку.

Упорядочение сигнатур определяет на группе инвариантов конечного порядка более детальную иерархию, чем фильтрация по порядку инвариантов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Инвариант является *инвариантом сигнатуры* A , если его характеристические числа равны нулю для всех регулярных k -квазиорнаментов и способов их вырождения, за исключением k -квазиорнаментов сигнатур $\leq A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Каждый инвариант сигнатуры A является инвариантом порядка $\text{compl } A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Каждый инвариант конечного порядка является инвариантом некоторой сигнатуры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существует только конечное множество сигнатур сложности, равной порядку инварианта. Годится сигнатура, строками которой являются все строки всех этих сигнатур.

Инвариант (конфигурация, сегментно-стрелочная диаграмма, ...) с одногруппной сигнатурой называется *одногруппным инвариантом* (конфигурацией, сегментно-стрелочной диаграммой, ... соответственно).

§ 7. Сигнатура и порядок инвариантов, порожденных сегментно-стрелочными диаграммами

ТЕОРЕМА 4. Пусть $D_1, \dots, D_m$ – сегментно-стрелочные диаграммы такие, что линейная комбинация $\langle \alpha_1 D_1 + \dots + \alpha_m D_m, \cdot \rangle$ является инвариантом орнаментов. Тогда это инвариант конечного порядка и

- 1) если сложность каждой диаграммы $\leq n$, то это инвариант порядка n ;
- 2) если сигнатура каждой диаграммы $\leq a$, то это инвариант сигнатуры $\leq a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения теоремы означают, что характеристические числа равны нулю при любом способе вырождения, если квазиорнамент в некотором смысле слишком сложен. Достаточно рассматривать только морсовские регулярные квазиорнаменты. Точная формулировка приведена в лемме 1, из которой теорема 4 очевидным образом следует.

ЛЕММА 1. Если линейная комбинация $\langle \alpha_1 D_1 + \dots + \alpha_m D_m, \cdot \rangle$ является инвариантом и его характеристическое число отлично от нуля для морсовского регулярного квазиорнамента ϕ при хотя бы одном способе вырождения, то найдется такое представление D' какого-либо слагаемого D_j в ϕ , что $\text{Conf } D' \supset \text{Conf } \phi$ (а значит, $\text{Sign } D_j \not\leq \text{Sign } \phi$ и $\text{compl } D_j > \text{compl } \phi$).

Для доказательства леммы мы зафиксируем морсовский регулярный квазиорнамент ϕ , разобьем сумму $\langle \alpha_1 D_1 + \dots + \alpha_m D_m, \cdot \rangle$ на много слагаемых, определенных в какой-нибудь окрестности квазиорнамента ϕ в пространстве квазиорнамен-

тов, и докажем утверждение этой леммы для каждого слагаемого отдельно (см. лемму 2). Тогда утверждение леммы очевидно выполняется и для всей суммы.

Чтобы сформулировать лемму 2, потребуются еще определения. Сначала определим малую окрестность морсовского регулярного квазиорнамента, в которой определение характеристических чисел корректно не только для инвариантов орнаментов, но и для любых функций, локально постоянных на морсовских регулярных орнаментах.

Для морсовского регулярного квазиорнамента ϕ можно взять по узкой открытой горизонтальной полосе $\mathbb{R}^1 \times I$, где I — вертикальный интервал, вокруг каждой его точки пересечения (включая особые точки) так, что полосы попарно не пересекаются и не содержат критических точек квазиорнамента ϕ . Обозначим через U_ϕ прообраз объединения этих полос в K , а через $U_\phi(z)$ его компоненту связности, содержащую точку z . Полосы можно взять такими узкими, что

- (*) если $\phi(z_1) = \phi(z_2)$, то диапазоны касательных к квазиорнаменту направлений в образах $U_\phi(z_1)$ и $U_\phi(z_2)$ не пересекаются.

Тогда для любого квазиорнамента ψ , принадлежащего достаточно малой окрестности O_ϕ квазиорнамента ϕ в топологии C^∞ , образы $\psi(U_\phi(z_1))$ и $\psi(U_\phi(z_2))$ пересекаются ровно в одной точке и все точки пересечения ψ лежат в этих полосах. Следовательно, для любого представления D_ψ сегментно-стрелочной диаграммы D в квазиорнаменте $\psi \in O_\phi$

- все точки диаграммы D_ψ принадлежат U_ϕ ;
- представление D_ψ U_ϕ -эквивалентно некоторому представлению D_ϕ диаграммы D в ϕ ;
- других представлений D в ψ , U_ϕ -эквивалентных D_ψ , нет.

Тогда сумма

$$\langle (D, \phi), \psi \rangle = \sum_{D' \sim_{U_\phi} D} \sigma_\psi(D') \quad (24)$$

(ср. с формулой (13)) определена для любой сегментно-стрелочной диаграммы D , морсовского регулярного квазиорнамента ϕ и морсовского регулярного орнамента ψ . На самом деле, сумма состоит не более чем из одного слагаемого и равна нулю, если ϕ не уважает D . Следовательно, в O_ϕ функция $\langle \alpha_1 D_1 + \dots + \alpha_m D_m, \cdot \rangle$ равна конечной линейной комбинации функций вида $\langle (D, \phi), \cdot \rangle$, а ее характеристические числа равны той же линейной комбинации характеристических чисел этих функций, если только последние определены корректно.

И они определены корректно. Действительно, в индуктивном определении характеристических чисел (см. п. 2.4) достаточно проверить, что все “положительные” возмущения, достаточно близкие к исходному квазиорнаменту ϕ , гомотопны в пространстве морсовских регулярных квазиорнаментов (и, конечно, то же верно для “отрицательных” возмущений). Это справедливо для возмущений в O_ϕ в силу условия (*).

Теперь для доказательства леммы 1 нужно только проверить следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Если для морсовского регулярного квазиорнамента ϕ и уважаемой им диаграммы D характеристическое число $\langle (D, \phi), \cdot \rangle$ отлично от нуля при каком-либо способе вырождения, то $\text{Conf } \phi \subset \text{Conf } D$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индуктивно по сложности квазиорнамента ϕ . База индукции: не существует квазиорнаментов (ни даже сигнатур) сложности 1. Теперь предположим, что лемма уже доказана для любого квазиорнамента сложности $< \text{compl } \phi$. Возьмем любой способ вырождения квазиорнамента ϕ и рассмотрим последний шаг вычисления соответствующего характеристического числа. Пусть $z \in K$ – тот прообраз особой точки, в окрестности которого квазиорнамент возмущается. Можно считать, что эта окрестность содержится в $U_\phi(z)$ и что положительное и отрицательное возмущения принадлежат O_ϕ . Тогда если z не является точкой D , то во всей $U_\phi(z)$ нет точек диаграмм, U_ϕ -эквивалентных D , каждое представление D в одном из возмущений является также представлением в другом и характеристическое число равно нулю. Более того, если $\phi(z)$ является тройной точкой и какой-либо из трех ее прообразов не принадлежит D , то же самое рассуждение доказывает равенство характеристического числа нулю. Поэтому если характеристическое число не равно нулю, то

- множество $\text{Conf}' \phi$, состоящее из одной или трех точек конфигурации $\text{Conf } \phi$, помеченных на последнем шаге вырождения, содержится в $\text{Conf}(D)$,
- характеристическое число $\langle (D, \phi), \cdot \rangle$ не равно нулю для одного возмущения ϕ' из двух (и выбранного способа вырождения ϕ без последнего шага), а следовательно, $\text{Conf } \phi' \subset \text{Conf } D$.

Таким образом, $\text{Conf } \phi = \text{Conf } \phi' \cup \text{Conf}' \phi \subset \text{Conf } D$.

§ 8. Одногруппные инварианты

Ниже приводятся два новых описания всех одногруппных инвариантов конечного порядка: как “статистические суммы” представлений сегментно-стрелочных диаграмм и как классы когомологий естественных конечномерных топологических пространств. На самом деле все одногруппные инварианты конечного порядка уже описаны в [6] следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 5 (см. [6; теорема 3]). *Каждый инвариант $V_{ij}(\beta)$ является инвариантом сигнатуры $\beta + \varepsilon_i + \varepsilon_j$, где ε_i – это i -й базисный вектор в $\mathbb{Z}^k$. Инварианты $V_{ij}(\beta)$ порождают группу целочисленных одногруппных инвариантов конечного порядка.*

Ценность нового подхода в том, что, возможно, его удастся обобщить на все инварианты конечного порядка.

8.1. Комбинаторное представление одногруппных инвариантов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Каждый инвариант $V_{ij}(\beta)$ представим в виде конечной линейной комбинации правых одногруппных диаграмм сигнатур $\leq \beta + \varepsilon_i + \varepsilon_j$ с рациональными коэффициентами. Эта сумма содержит единственное слагаемое максимальной сигнатуры; все его вершины и сегменты – простые, а коэффициент равен единице.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в § 4, достаточно подставить формулы (3) и (5) в формулу (2).

ПРИМЕР. $S \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| = 24 \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| + 12 \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| + 6 \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| + 8 \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right|.$

Определим функцию N_{ij}^a от морсовских регулярных орнаментов формулой

$$N_{ij}^a(\phi) = \langle SD_{ij}^a, \phi \rangle = \langle TSD_{ij}^a, \phi \rangle. \quad (25)$$

В п. 8.3 будет показано, что N_{ij}^a является инвариантом (теорема 6). Следовательно, это одногруппный инвариант сигнатуры a (теорема 4).

8.2. Явные выражения для образующих групп гомологий конфигураций плоскостей. Перед рассмотрением гомологической интерпретации инвариантов конечного порядка напомним некоторые общие определения и факты.

Порядковый комплекс частично упорядоченного множества $(P, <)$ – это симплициальный комплекс, образованный симплексами $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ для всех конечных монотонных последовательностей $p_0 < p_1 < \dots < p_n$ в P .

Пусть $\Upsilon = \{V_1, \dots, V_m\}$ – конфигурация (arrangement) собственных векторных подпространств (далее: плоскостей) $V_1, \dots, V_m$ в $\mathbb{R}^n$ такая, что пересечение любого (непустого) множества плоскостей из Υ также является плоскостью из Υ . Плоскости частично упорядочены по включению: $V_i < V_j$, если $V_j \subset V_i$. Для любой плоскости $V \in \Upsilon$ обозначим через $\Delta(V)$ порядковый комплекс всех таких плоскостей $V' \in \Upsilon$, что $V' < V$ (включая саму плоскость V), через $\Lambda(V)$ – его подкомплекс $\bigcup_{V' < V, V' \neq V} \Delta(V')$ и через $\Xi(V)$ – факторкомплекс $\Delta(V)/\Lambda(V)$. Тогда $\Xi(V)$ является клеточным пространством, клетки которого, за исключением точки $\Lambda(V)/\Lambda(V)$, естественно отождествляются с монотонными цепочками $(V_i < V_j < \dots < V)$.

Гомологии одноточечной компактификации объединения $\cup_{\Upsilon} = \bigcup_{V \in \Upsilon} V$ всех плоскостей выразимы в терминах групп гомологий этих порядковых факторкомплексов согласно разновидности формулы Горески–Мак–Фёрсона (см. [13]):

$$\overline{H}_*(\cup_{\Upsilon}) = \bigoplus_{V \in \Upsilon} H_{*-\dim V}(\Xi(V)). \quad (26)$$

Мы построим явное соответствие между образующими групп когомологий $H_*(\Xi(V))$ и образующими групп $\overline{H}_*(\cup_{\Upsilon})$. А именно каждой клетке ξ комплекса $\Xi(V)$ мы поставим в соответствие некомпактную клетку $C(\xi)$ в $\cup_{\Upsilon}$.

В каждой плоскости V_i выберем вектор v_i , трансверсальный каждой подплоскости $V_j \in \Upsilon$. Для каждой клетки $\xi_{i_1, \dots, i_l} = (V_{i_1} < \dots < V_{i_l}) \in \Xi(V_{i_l})$ обозначим через $C(\xi_{i_1, \dots, i_l})$ прямое произведение конуса в $\mathbb{R}^n$, порожденного $l-1$ векторами $v_{i_1} + \dots + v_{i_{l-1}}, v_{i_2} + \dots + v_{i_{l-1}}, \dots, v_{i_{l-1}}$, и последней плоскости $V_{i_l} \subset \mathbb{R}^n$. Отображение C можно продолжить по линейности на цепные комплексы, и простое прямое вычисление показывает, что $\partial C(c) = -C(\partial c)$ для любой цепи c . Следовательно, C индуцирует гомоморфизм $C_V: H_*(\Xi(V)) \rightarrow \overline{H}_{*+\dim V}(\cup_{\Upsilon})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Отображение

$$\bigoplus_{V \in \Upsilon} C_V: \bigoplus_{V \in \Upsilon} H_*(\Xi(V)) \rightarrow \overline{H}_*(\cup_{\Upsilon})$$

является изоморфизмом.

Это предложение доказано ранее (см. [14]) в немного другой, но эквивалентной формулировке. Там рассматриваются подкомплексы $\Lambda(V)$ вместо факторкомплексов $\Xi(V)$ и линк $\cup_T \cap \mathbb{S}^{n-1}$ конфигурации плоскостей вместо ее одноточечной компактификации $\bar{\cup}_T$. Вышеприведенная конструкция является надстройкой для конструкции, описанной в [14].

8.3. Гомологическое представление одногруппных инвариантов. Теперь предъявим другой (т.е. отличный от множества инвариантов $M_{ij}(\beta)$, определенных формулой (1)) набор образующих группы рациональных одногруппных инвариантов конечного порядка. Для каждой одногруппной сигнатуры a эти образующие подгруппы инвариантов сигнатуры a естественно соответствуют образующим группы гомологий $\bar{H}_{\text{compl } a}(\Sigma^a)$ дискриминанта Σ^a , определенного формулой (15). Эти инварианты $J^a(h)$ задаются формулой

$$J^a(h)(\phi) = h(j^{(a)}(\phi) * ([K^a])), \quad (27)$$

где h — некоторый $|a|$ -мерный класс когомологий пространства $\Omega^a = (\mathbb{R}^2)^a \setminus \Sigma^a$. Очевидно, что формула (27) определяет целочисленный инвариант орнаментов. Далее в этом пункте показаны некоторые хорошие свойства таких инвариантов.

Группа приведенных когомологий $\bar{H}^*(\Omega^a)$ изоморфна по теореме двойственности Александра группе гомологий Бореля–Мура $\bar{H}_{2|a|-1-*}(\Sigma^a)$. Последняя вычисляется в терминах групп гомологий порядкового комплекса пересечений плоскостей дискриминанта. Известно, что все группы гомологий этого порядкового комплекса свободны (см. [15]), их числа Бетти вычислены в [15], а образующие предъявлены в [16] и [6]. Нам понадобится следующий результат из [6].

Рассмотрим порядковый факторкомплекс $\Xi^a = \Xi(\Sigma^a)$ конфигурации всех плоскостей $\Sigma_{ijl} \subset \Sigma^a$ и их пересечений (см. п. 8.2). Пусть $S_{ij}^a \subset S(|a|)$ — это множество всех перестановок π $|a|$ двумерных координат $x_1, \dots, x_{|a|}$ в $(\mathbb{R}^2)^a$ таких, что $\text{col } x_{\pi(1)} = i, \text{col } x_{\pi(2)} = j$ и $i \neq \text{col } x_{\pi(3)} \neq j$. Обозначим через $\sigma(\pi)$ четность перестановки π . Обозначим через $\Sigma_{i_1 i_2 i_3 \dots i_m}$ плоскость в $(\mathbb{R}^2)^a$, заданную уравнениями $x_{i_1} = x_{i_2} = x_{i_3} = \dots = x_{i_m}$, и через $x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \mid x_{i_4} \mid \dots \mid x_{i_{m-1}} \mid x_{i_m}$ — клетку в Ξ^a , порожденную монотонной цепочкой $\Sigma_{i_1 i_2 i_3} \supset \Sigma_{i_1 i_2 i_3 i_4} \supset \dots \supset \Sigma_{i_1 i_2 i_3 \dots i_m}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6 (см. [6; предложение 21]). *Если все k элементов сигнатуры a положительны, то $\dim H_{|a|-3}(\Xi^a) = \binom{k-1}{2}$ и цепи*

$$\xi_{ij}^a = \sum_{\pi \in S_{ij}^a} \sigma(\pi) \cdot x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} x_{\pi(3)} \mid x_{\pi(4)} \mid \dots \mid x_{\pi(|a|-1)} \mid x_{\pi(|a|)} \mid, \quad i < j < k,$$

образуют базис $H_{|a|-3}(\Xi^a)$. В общем случае если в сигнатуре a имеется $k' < k$ ненулевых элементов и l — максимальный индекс ненулевого элемента a_l , то базис $H_{|a|-3}(\Xi^a)$ образован $\binom{k'-1}{2}$ образующими ξ_{ij}^a такими, что $i < j < l$, $a_i > 0$ и $a_j > 0$.

Теперь займемся построением гомоморфизмов из группы $(|a| - 3)$ -мерных цепей в Ξ^a в группу $(|a| - 1)$ -мерных цепей в Σ^a и в группу $|a|$ -мерных относительных

цепей в $((\mathbb{R}^2)^a, \Sigma^a)$. Каждая клетка $x_{\pi(1)} x_{\pi(2)} x_{\pi(3)} \mid x_{\pi(4)} \mid \dots \mid x_{\pi(|a|)}$ в Ξ^a переходит в клетку

$$\begin{aligned} & \Sigma_{\pi(1)\pi(2)\pi(3)\pi(4)\dots\pi(|a|)} \\ & = \{x \in (\mathbb{R}^2)^a : x_{\pi(1)} = x_{\pi(2)} = x_{\pi(3)} \prec x_{\pi(4)} \prec \dots \prec x_{\pi(|a|)}\} \end{aligned}$$

дискриминанта Σ^a ; ее размерность равна $|a| - 1$, а ориентация задается системой координат $(x_{\pi(1)}^1, x_{\pi(2)}^2, x_{\pi(4)}^1, \dots, x_{\pi(|a|)}^1)$. Продолжим это отображение по линейности до отображения $C_{|a|-3}(\Xi^a) \rightarrow C_{|a|-1}(\Sigma^a)$, и пусть Σ_{ij}^a — это образ ξ_{ij}^a . Аналогично определим $|a|$ -мерную клетку $Q_{\pi(1)\pi(2)\pi(3)\pi(4)\dots\pi(|a|)}$ как множество

$$\{x \in (\mathbb{R}^2)^a : x_{\pi(1)} = x_{\pi(2)} \prec x_{\pi(3)} \prec x_{\pi(4)} \prec \dots \prec x_{\pi(|a|)}\},$$

ориентированное системой координат $(x_{\pi(1)}^1, x_{\pi(2)}^2, x_{\pi(3)}^1, x_{\pi(4)}^1, \dots, x_{\pi(|a|)}^1)$, и назовем цепь Q_{ij}^a формулой

$$Q_{ij}^a = \sum_{\pi \in S_{ij}^a} \sigma(\pi) \cdot Q_{\pi(1)\pi(2)\pi(3)\pi(4)\dots\pi(|a|)},$$

где аналогично $S_{ij}^a, \overline{S}_{ij}^a \subset S(|a|)$, — это множество всех таких перестановок π координат в $(\mathbb{R}^2)^a$, что $\text{col } x_{\pi(1)} = i, \text{col } x_{\pi(2)} = j$, но без ограничения на $\text{col } x_{\pi(3)}$.

Простое прямое вычисление показывает, что $\partial Q_{ij}^a = -\Sigma_{ij}^a$ и, следовательно, $\partial \Sigma_{ij}^a = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Подгруппа $\overline{H}_{|a|}(\Sigma^a)$, порожденная циклами Σ_{ij}^a , изоморфна $H_{|a|-3}(\Xi^a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на явной конструкции Циглера и Живалевича для образующих групп гомологий Бореля–Мура дискриминанта Σ^a , описанной в п. 8.2. Чтобы эта конструкция стала применима, достаточно сдвинуть клетки Σ_{ij}^a в общее положение согласованным способом.

В терминах п. 8.2 Σ_{ij}^a получается из ξ_{ij}^a применением отображения C , порожденного следующим выбором векторов v_* : в каждой плоскости $\Sigma_{i_1 \dots i_l}$ берется вектор $v_{i_1 \dots i_l}$, i -я 2-мерная координата которого равна нулю, если $i \in \{i_1, \dots, i_l\}$, и равна направленному вправо единичному вектору в противном случае. Недостаток этого выбора векторов связан с пересечениями двух и более плоскостей $\Sigma_{i_1 \dots i_l}$ с непересекающимися наборами индексов. Во-первых, для такого пересечения пока не определен никакой вектор, а во-вторых, никакой вектор $v_{i_1 \dots i_l}$ не трансверсален к такому пересечению. Средство от неприятностей существует: во-первых, для такого пересечения определим вектор произвольно, а во-вторых, слегка возмущим ненулевые компоненты $v_{i_1 \dots i_l}$, чтобы все они стали различными. Такое малое возмущение не меняет гомологического класса Σ_{ij}^a , и применимо предложение 5, доказывающее изоморфизм.

Обозначим через q_{ij}^a класс когомологий в $\tilde{H}^{|a|}(\Omega^a)$, двойственный по Пуанкаре к Q_{ij}^a (или, с точностью до знака, двойственный по Александеру к Σ_{ij}^a). Обозначим через H_{ij}^a соответствующий инвариант орнаментов $J^a(q_{ij}^a)$. Очевидно, что H_{ij}^a не меняется при одновременной перестановке двух координат одного цвета в K^a и в $(\mathbb{R}^2)^a$, поскольку при этом и Q_{ij}^a , и K^a меняют свои ориентации, а $(\mathbb{R}^2)^a$ сохраняет.

ТЕОРЕМА 6. *Инвариант H_{ij}^a с точностью до знака $\sigma_{ij}^a = \pm 1$ равен функции N_{ij}^a , определенной формулой (25). Следовательно, N_{ij}^a является инвариантом орнаментов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО заключается в прямом вычислении. Его схема такова. Определение SD_{ij}^a подогнано специально так, чтобы обеспечить ровно одну помеченную диаграмму в TSD_{ij}^a для каждой клетки Q_{ij}^a . Если ϕ – морсовский регулярный орнамент, то $j^{(a)}(\phi)_*(K^a)$ трансверсально к каждой плоскости, содержащей $|a|$ -мерную клетку Q_{ij}^a . В каждой точке пересечения нескольких $|a|$ -мерных клеток $Q_{\pi(1)\pi(2)|\pi(3)|\dots|\pi(|a|)}$ цикла Q_{ij}^a все локальные индексы пересечения $j^{(a)}(\phi)_*([K^a])$ с $|a|$ -мерными плоскостями, содержащими эти клетки и наследующими их ориентации, совпадают. Поэтому индекс пересечения Q_{ij}^a и $j^{(a)}(\phi)_*([K^a])$ можно вычислять как сумму всех локальных индексов пересечения, хотя Q_{ij}^a не является ни гладким, ни трансверсальным к $j^{(a)}(\phi)_*(K^a)$. Каждый такой локальный индекс пересечения равен знаку определителя матрицы, которую можно превратить в блочно-диагональную матрицу перестановкой строк и столбцов, зависящей только от a , i и j ; четность этой перестановки дает множитель $-\sigma_{ij}^a$. Один из блоков имеет размер 4×4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & (\phi_i^1)' & 0 \\ 0 & 1 & (\phi_i^2)' & 0 \\ 1 & 0 & 0 & (\phi_j^1)' \\ 0 & 1 & 0 & (\phi_j^2)' \end{pmatrix},$$

определитель равен

$$-\begin{vmatrix} (\phi_i^1)' & (\phi_j^1)' \\ (\phi_i^2)' & (\phi_j^2)' \end{vmatrix},$$

так что его знак противоположен знаку $\sigma_{ij}(\cdot)$ образа отрезка в формулах типа (1) и (13). Каждый из остальных блоков имеет размер 2×2 :

$$\begin{pmatrix} 1 & (\phi_l^1)' \\ 0 & (\phi_l^2)' \end{pmatrix},$$

а знак его определителя равен $\sigma_l(\cdot)$. Поэтому каждому локальному индексу пересечения, суммируемому в H_{ij}^a , соответствует представление (помеченной) диаграммы в $\sigma_{ij}^a N_{ij}^a$ с тем же коэффициентом и, наоборот, каждому представлению диаграммы D_{ij}^a соответствует пересечение образа $j^{(a)}(\phi)_*([K^a])$ с клеткой Q_{ij}^a .

СЛЕДСТВИЕ 2. H_{ij}^a и N_{ij}^a являются одногруппными инвариантами сигнатуры a .

Доказательство немедленно следует из теоремы 6, определения N_{ij}^a и теоремы 4.

ТЕОРЕМА 7. 1) *Инварианты H_{ij}^a порождают группу одногруппных инвариантов конечного порядка над рациональными числами.*

2) *Инварианты H_{ij}^a с $\text{compl } a \leq n$ порождают группу одногруппных инвариантов порядка n над рациональными числами.*

3) *Инварианты H_{ij}^a с $a \leq a'$ порождают группу одногруппных инвариантов сигнатуры $\leq a'$ над рациональными числами.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все три утверждения справедливы для инвариантов $V_{ij}(a)$ вместо H_{ij}^a (даже над целыми числами), и остается только представить инварианты $V_{ij}(\beta)$ в виде линейных комбинаций H_{ij}^a . Удобно использовать их представления в виде правых одnogруппных диаграмм (предложение 4 для $V_{ij}(\beta)$; теорема 6 и определение N_{ij}^a для H_{ij}^a). Каждая часть теоремы доказывается индукцией по порядку инвариантов. База индукции: нетривиальных инвариантов порядка 1 нет. Шаг индукции: докажем теорему для инвариантов порядка n в предположении, что она уже доказана для инвариантов меньших порядков. Каждый инвариант порядка n является линейной комбинацией инвариантов $V_{ij}(\beta)$, представленных как линейные комбинации правых одnogруппных диаграмм. Каждая диаграмма сигнатуры a сложности $\text{compl } a = n$ встречается не более чем в одном слагаемом, и все ее сегменты и вершины – простые. Ее можно убить вычитанием H_{ij}^a или N_{ij}^a с подходящим коэффициентом; при этом появятся новые диаграммы только сигнатур $< a$. Следовательно, все диаграммы сложности n можно убить вычитанием инварианта сигнатуры a (и порядка n). Разность содержит только диаграммы сигнатур $< a$, и можно применить предположение индукции. Всюду в доказательстве можно налагать условие “сигнатура $a \leq a'$ ”, и доказательство остается верным.

§ 9. Однородные инварианты

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16 (см. [6]). Инвариант I порядка i является *однородным инвариантом*, если его характеристические числа, сопоставляемые k -квазиорнаменту ϕ сложности i и способу вырождения Γ , зависят от сигнатуры $\text{Conf } \phi$ конфигурации J , строго уважаемой ϕ , и от Γ , но не от самих J и ϕ .

Имеется общий факт, что характеристические числа, сопоставляемые инвариантом порядка n квазиорнаментам, которые строго уважают конфигурацию той же сложности n , зависят не от конкретного квазиорнамента, а только от класса эквивалентности конфигурации (см. [5; теорема 6]). Определение 16 требует равенства характеристических чисел для квазиорнаментов, строго уважающих неэквивалентные конфигурации одинаковой сигнатуры A любой сложности. Поскольку все одnogруппные конфигурации одинаковой сигнатуры эквивалентны, все одnogруппные инварианты однородны.

Все однородные инварианты конечного порядка для орнаментов описываются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 8 (см. [6; теорема 4]). *Все однородные инварианты конечного порядка для орнаментов являются многочленами от одnogруппных инвариантов (и, следовательно, линейными комбинациями произведений инвариантов $V_{ij}(\beta)$).*

С другой стороны, все однородные инварианты конечного порядка представимы и как сегментно-стрелочные диаграммы, и как индексы пересечения в конфигурационных пространствах. Для доказательства нужно перенести каждое из этих представлений с пары инвариантов на их произведение. Эта чисто техническая работа – дать подходящие определения и произвести тривиальные вычисления – проделана ниже.

Произведение сегментно-стрелочных диаграмм.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. *Произведением сегментно-стрелочных диаграмм D и E (или, строго говоря, произведением классов эквивалентности диаграмм D и E) называется формальная сумма всех классов эквивалентности диаграмм, содержащих диаграмму-представителя F такую, что существуют диаграммы $D' \sim D$ и $E' \sim E$, удовлетворяющие условиям:*

- каждый сегмент F является сегментом D' или E' (или их обеих) и его кратность равна сумме его кратностей в D' и в E' ;
- каждая вершина F является вершиной D' или E' (или их обеих) и ее кратность равна сумме ее кратностей в D' и в E' ;
- каждая стрелка F является стрелкой D' или E' (или их обеих).

Приведенное произведение $D \otimes E$ сегментно-стрелочных диаграмм D и E — это сумма тех слагаемых из их произведения, которые являются диаграммами общего положения. И произведение, и приведенное произведение продолжаются билинейно на линейные комбинации диаграмм.

См. примеры произведения и приведенного произведения диаграмм в формулах (22) и (23).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Если $\langle \sum_i \alpha_i D_i, \cdot \rangle$ и $\langle \sum_j \beta_j E_j, \cdot \rangle$ — инварианты орнаментов, то*

$$\left\langle \sum_i \alpha_i D_i, \cdot \right\rangle \times \left\langle \sum_j \beta_j E_j, \cdot \right\rangle = \left\langle \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j D_i \otimes E_j, \cdot \right\rangle. \quad (28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит из простого прямого вычисления: достаточно взять любой морсовский регулярный орнамент ϕ и подставить формулу (14) в (28). И левая, и правая стороны равенства (28) будут состоять из одних и тех же слагаемых.

Произведение конфигурационных пространств. Определения конфигурационных пространств (см. п. 4.4) обобщаются с одногруппных сигнатур на все сигнатуры без каких-либо изменений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Для любой сигнатуры A определены два конфигурационных пространства $K^A = \times_{i \leq k} c_i^{|a_i|} \simeq (\mathbb{S}^1)^{|A|}$ и $(\mathbb{R}^2)^A = \times_{i \leq k} (\mathbb{R}^2)^{|a_i|} \simeq (\mathbb{R}^2)^{|A|}$, где $|a_i| = \sum_{m=1}^{\#A} a_i^m$. *A-расширение* $j^{(A)}(\phi): K^A \rightarrow (\mathbb{R}^2)^A$ k -орнамента $\phi: K \rightarrow \mathbb{R}^2$ определяется покоординатно естественным образом. Канонические одномерные координаты x_l в K^A и двумерные координаты y_l в $(\mathbb{R}^2)^A$, где $1 \leq l \leq |A|$, наследуют цвета (т.е. номера компонент) $\text{col } x_l = \text{col } l = i$ соответствующих прямых сомножителей c_i в K^A и номера $\text{row } x_m = \text{row } y_m = \text{row } m$ строк сигнатуры. *Дискриминант* $\Sigma^A \subset (\mathbb{R}^2)^A$ — это объединение

$$\Sigma^A = \bigcup_{\substack{(i,j,l): \text{row } i = \text{row } j = \text{row } l \\ \text{col } i \neq \text{col } j \neq \text{col } l \neq \text{col } i}} \Sigma_{ijl} \quad (29)$$

запрещенных плоскостей $\Sigma_{ijl} = \{(y_1, \dots, y_{|A|}) \in (\mathbb{R}^2)^A : y_i = y_j = y_l\}$ коразмерности 4.

Очевидно, $K^A \simeq \times_{m=1}^{\#A} K^{a^m}$, $(\mathbb{R}^2)^A \simeq \times_{m=1}^{\#A} (\mathbb{R}^2)^{a^m}$, $j^{(A)}(\phi) \simeq \times_{m=1}^{\#A} j^{(a^m)}(\phi)$; при фиксации порядка $|A|$ координат изоморфизмы становятся каноническими.

Для любого $|A|$ -мерного класса когомологий h в $\Omega^A = (\mathbb{R}^2)^A \setminus \Sigma^A$ формула

$$J^A(h)(\phi) = h(j^{(A)}(\phi)_*([K^A])) \quad (30)$$

определяет целочисленный инвариант $J^A(h)$ орнаментов. Это же обозначение будет применяться вместо классов когомологий к относительным циклам или $|A|$ -мерным классам гомологий в $H_{|A|}((\mathbb{R}^2)^A, \Sigma^A)$, двойственным к этим классам когомологий по Пуанкаре.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19. *Сумма сигнатур A и B* — это сигнатура $A + B$, множество строк которой является объединением множеств строк A и B .

Очевидно, что при этом определении суммы сигнатур количество точек $|A|$, количество строк $\#A$ и сложность $\text{comp} A$ сигнатур аддитивны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Если q — $|A|$ -мерный относительный цикл в $((\mathbb{R}^2)^A, \Sigma^A)$ и r — $|B|$ -мерный относительный цикл в $((\mathbb{R}^2)^B, \Sigma^B)$, то*

$$J^A(q)J^B(r)(\cdot) = (-1)^{|A||B|}J^{A+B}(q \times r)(\cdot).$$

Из теорем 8 и 7, следствия 1 и предложений 8 и 9 следует, что группа однородных инвариантов конечного порядка для орнаментов порождается как инвариантами, задаваемыми сегментно-стрелочными диаграммами, так и инвариантами, задаваемыми индексами пересечения в конфигурационных пространствах.

§ 10. Неоднородные инварианты

Общего явного описания неоднородных инвариантов конечного порядка для орнаментов пока нет. Ниже определяется обобщение сегментно-стрелочных диаграмм, которое, возможно, поможет их описать.

10.1. Вертикально упорядоченные сегментно-стрелочные диаграммы. В этом параграфе стрелки рассматривавшихся выше сегментно-стрелочных диаграмм называются *горизонтальными стрелками*, а сами диаграммы — *горизонтальными диаграммами*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20. *Вертикально упорядоченная сегментно-стрелочная диаграмма* — это (горизонтальная) сегментно-стрелочная диаграмма, оснащенная дополнительными стрелками другой природы, соединяющими группы точек диаграммы (или, для горизонтальных диаграмм общего положения, середины сегментов) и называющимися *вертикальными стрелками*.

Основные конструкции для вертикально упорядоченных диаграмм определяются так же, как в п. 4.3. Вертикально упорядоченная диаграмма является *диаграммой общего положения*, если она является диаграммой общего положения как горизонтальная диаграмма, а ее вертикальные стрелки не образуют ориентированных циклов. Определение эквивалентности вертикально упорядоченных диаграмм повторяет определение 9. Вертикально упорядоченная диаграмма D

уважается морсовским регулярным орнаментом ϕ , если для ее сегментов и горизонтальных стрелок выполнены условия определения 10, а образ начала каждой вертикальной стрелки (являющийся группой точек на одной горизонтальной прямой) лежит ниже образа ее конца. Представления вертикально упорядоченных диаграмм и формула (13) определяются в точности как в п. 4.3 с учетом изменений в определениях эквивалентности и уважения.

У “горизонтальной” триангуляции, определенной в п. 8.1, существует естественный “вертикальный” аналог. Вертикальные стрелки диаграммы определяют некоторый частичный порядок групп диаграммы. Этот частичный порядок можно несколькими способами доопределить до линейного порядка. *Вертикальная триангуляция* $T_V D$ диаграммы D — это сумма по всем таким линейным порядкам диаграмм общего положения с теми же сегментами, вершинами, их кратностями и горизонтальными стрелками, вертикальные стрелки которой задают этот линейный порядок. Вертикальную триангуляцию можно определить и для горизонтальной сегментно-стрелочной диаграммы. Очевидно, что $\langle T_V D, \cdot \rangle = \langle D, \cdot \rangle$ для любой диаграммы D .

Таким образом, любой инвариант, порожденный горизонтальными сегментно-стрелочными диаграммами, может быть порожден и вертикально упорядоченными сегментно-стрелочными диаграммами. С другой стороны, теорема 4 и ее доказательство остаются верными безо всяких изменений и для вертикально упорядоченных диаграмм. Это означает, что вертикально упорядоченные диаграммы могут оказаться лучшим инструментом исследования инвариантов конечного порядка для орнаментов, чем горизонтальные сегментно-стрелочные диаграммы. Но примеров инвариантов, порожденных вертикально упорядоченными диаграммами, которые не порождаются горизонтальными диаграммами, пока нет.

10.2. Замечания о возможном подходе к неоднородным инвариантам. Следующее утверждение является естественным аналогом теоремы 4.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. *Каждый инвариант $J^A(h)$ является инвариантом сигнатуры A (а значит, порядка $\text{compl } A$).*

На самом деле это предположение является доказанной теоремой, но доказательство слишком некрасиво, чтобы приводить его здесь. Несколько слов о том, как предположение можно доказать и почему лучше вместо него доказывать другое. Имеется общеизвестное (см. [17]) клеточное разбиение пространства $(\mathbb{R}^2)^A$, для которого дискриминант Σ^A является клеточным подпространством. Пусть q — относительный цикл в $((\mathbb{R}^2)^A, \Sigma^A)$, двойственный h по Пуанкаре. Тогда значение $J^A(h)(\phi)$ равно индексу пересечения образа A -расширения ϕ и q . Но индекс пересечения образа A -расширения ϕ с каждой клеткой q представим в виде суммы формул (13) по нескольким вертикально упорядоченным сегментно-стрелочным диаграммам сигнатуры $\leq A$. Для этих сумм справедлива теорема 4.

С другой стороны, индексы пересечения образов A -расширений орнаментов с относительными циклами в $((\mathbb{R}^2)^A, \Sigma^A)$ годятся для изучения одних только однородных инвариантов. Для неоднородных инвариантов естественно рассматривать индексы пересечения графиков A -расширений орнаментов с относительными циклами в пространстве $K^A \times (\mathbb{R}^2)^A$ по модулю подходящим образом определенного дискриминанта. По крайней мере, так можно интерпретировать формулу (13),

а следовательно, и любой инвариант, порожденный сегментно-стрелочными диаграммами. Обобщение предположения 1 для этих условий кажется тоже верным, но доказательства у меня нет.

10.3. Примеры неоднородных инвариантов 3-орнаментов. В [18] было показано, что неоднородных инвариантов порядка < 6 нет, поскольку A -конфигурации сложности < 6 , имеющие одинаковую сигнатуру, эквивалентны.⁸ В [6; приложение А.2] частично описана факторгруппа неоднородных инвариантов порядка 6 для 3-орнаментов: это свободная абелева группа, три образующие которой соответствуют трем парам классов эквивалентности конфигураций сигнатур $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ и, возможно, еще три образующие соответствуют четырем классам эквивалентности конфигураций сигнатуры $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Обозначим через $A_{112,112}$ сигнатуру $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ сложности 6. Существует инвариант $I_{112,112}^\times$ порядка 6, характеристические числа которого равны ± 1 для квазиорнаментов сигнатуры $A_{112,112}$, если две хорды, соединяющие пары прообразов особых точек на третьей окружности, пересекаются, и равны 0 для остальных квазиорнаментов сложности ≥ 6 (см. [6; приложение А.2]). Инвариант $I_{112,112}^\times$ определен с точностью до знака и по модулю инвариантов порядка 5. Такой инвариант можно задать явной формулой

$$\begin{aligned} I_{112,112}^\times &= \left| \begin{array}{c} \text{diag 1} \\ \text{diag 2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{diag 3} \\ \text{diag 4} \end{array} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} \text{diag 5} \\ \text{diag 6} \end{array} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} \text{diag 7} \\ \text{diag 8} \end{array} \right| \parallel \\ &= \left| \begin{array}{c} \text{diag 1} \\ \text{diag 2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{diag 3} \\ \text{diag 4} \end{array} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} \text{diag 5} \\ \text{diag 6} \end{array} \right| + \frac{1}{4} \left(\left| \begin{array}{c} \text{diag 9} \\ \text{diag 10} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{diag 11} \\ \text{diag 12} \end{array} \right| \right). \end{aligned}$$

Символ $\parallel$ справа от правой верхней диаграммы показывает, что знаки двух вершин должны совпадать.

Остальные (пока еще гипотетические) неоднородные инварианты 3-орнаментов еще не найдены, но аналогичные вычисления проведены для *длинных орнаментов*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21. *Длинный k -орнамент* ϕ — это набор $k \geq 3$ гладких ориентированных некомпактных кривых на плоскости (т.е. отображение $\phi: \mathbb{R}^1 \sqcup \dots \sqcup \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$), никакие три из которых не пересекаются в одной точке и вне некоторого компакта каждая l -я кривая ϕ_l совпадает с прямой $\lambda_l(t) = (l, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Теория инвариантов Васильева естественно переносится на длинные орнаменты и даже становится проще из-за односвязности конфигурационных пространств. Каждый инвариант конечного порядка для орнаментов является также инвариантом конечного порядка для длинных орнаментов, но появляются и новые инварианты конечного порядка. Теория сегментно-стрелочных диаграмм также переносится на длинные орнаменты и становится проще, поскольку теперь вертикальные прямые в диаграммах представляют прямые, а не окружности.

⁸См. описание всех инвариантов 3-орнаментов порядка < 6 в [6; приложение А.1].

Обозначим через $A_{111,111}$ сигнатуру $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ сложности 4. Для длинных 3-орнаментов существует 4 неэквивалентных класса $A_{111,111}$ -конфигураций. Действительно, упорядочим группы такой конфигурации в соответствии с порядком ее точек на первой прямой. Тогда порядок ее точек на второй и третьей прямых может либо совпадать с порядком групп, либо не совпадать. Каждый из этих четырех классов определяет инвариант порядка 4, характеристические числа которого равны ± 1 для длинных квазиорнаментов с особенностями этого класса и равны 0 для других квазиорнаментов сложности 4.⁹ Такой инвариант $I_{111,111}^{++}$, соответствующий $A_{111,111}$ -конфигурации с одинаковым порядком точек на каждой прямой, задается явно следующей формулой:

$$\begin{aligned}
I_{111,111}^{++} &= \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \\
&+ \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} \\
&+ \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} \\
&+ \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} \parallel - \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} \parallel + \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} \parallel - \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} \parallel \\
&+ \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} \parallel + \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} \parallel \\
&= \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \\
&+ \frac{1}{2} \left(\begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} \right) \\
&+ \frac{1}{4} \left(\begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} \right) \\
&+ \frac{1}{4} \left(\begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} \right) \\
&+ \frac{1}{4} \left(\begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} \right) + \frac{1}{8} \left(\begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \bullet \rightarrow \\ \hline \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Снова символ $\parallel$ возле диаграммы показывает, что знаки двух или трех обведенных вершин должны совпадать. Условие совпадения двух знаков $\sigma_i(x)$ и $\sigma_j(y)$ эквивалентно умножению на $\frac{1}{2}(1 + \sigma_i(x)\sigma_j(y))$, а условие совпадения трех знаков $\sigma_i(x)$, $\sigma_j(y)$ и $\sigma_l(z)$ эквивалентно умножению на $\frac{1}{4}(1 + \sigma_i(x)\sigma_j(y) + \sigma_i(x)\sigma_l(z) + \sigma_l(z)\sigma_j(y))$.

⁹ Конечно, этот инвариант определен по модулю инвариантов порядка 3. Группы инвариантов порядка 3 для длинных и обычных (компактных) орнаментов совпадают. Для 3-орнаментов они порождены инвариантами $V_{1,2}(0, 0, 1)$ (порядка 2), $V_{1,2}(0, 0, 2)$, $V_{1,2}(0, 1, 1)$ и $V_{1,2}(1, 0, 1)$.

Аналогичные диаграммные формулы для инвариантов $I_{111,111}^{+-}$, $I_{111,111}^{-+}$ и $I_{111,111}^{--}$ получаются обращением ориентаций второй и/или третьей прямой.

Вернемся к обычным компактным орнаментам и обозначим через $A_{111,111,111}$ сигнатуру $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ сложности 6. Каждый циклический порядок ее групп индуцирует циклический порядок точек конфигурации на каждой окружности, который может совпадать или не совпадать с циклическим порядком, определяемым ориентацией окружности. В зависимости от этих совпадений и несовпадений получаются 4 класса эквивалентности конфигураций сигнатуры $A_{111,111,111}$. Каждому из этих классов может соответствовать инвариант порядка 6, характеристические числа которого равны ± 1 для квазиорнаментов, строго уважающих конфигурации этого класса, и равны 0 для остальных квазиорнаментов сложности 6. Но количество слагаемых в выражении такого инварианта, если он существует, через сегментно-стрелочные диаграммы огромно. В частности, каждое слагаемое диаграммного представления инварианта $I_{111,111}^{++}$ для длинных орнаментов появится в представлении $I_{111,111,111}^{+++}$ с поддиаграммой $\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}$, приписанной снизу или сверху. Вычисление пока не завершено.

§ 11. Открытые вопросы

Справедливо ли обобщение предположения 1 на графики A -расширений в $K^A \times (\mathbb{R}^2)^A$?

Совпадают ли классы инвариантов, порожденных вертикально упорядоченными сегментно-стрелочными диаграммами и горизонтальными диаграммами (см. п. 10.1)?

Известно несколько явных конструкций семейств инвариантов Васильева для орнаментов:

- 1) инварианты типа моментов индексов (см. [5] и п. 2.2) и их произведения (см. [6] и § 9);
- 2) антисимметричное произведение инвариантов конечного порядка (см. [6]);
- 3) представления линейных комбинаций базированных хордовых диаграмм (см. [11]);
- 4) представления линейных комбинаций хордовых диаграмм с многочленами от индексов (см. [7]).

Представление семейства 1) в терминах сегментно-стрелочных диаграмм с точками по крайней мере трех цветов в каждой группе описано выше. Ясно, что оно существует и для инвариантов семейства 4), когда каждой хорде приписан многочлен без свободного члена. Можно ли таким же образом представить инварианты остальных семейств? Конечно, хорды, т.е. группы точек диаграмм, состоящие из одного сегмента без стрелок, также допустимы, но необходимы ли они? Недостаток таких диаграмм с группами без стрелок состоит в том, что у них нет естественной гомологической интерпретации (ср. с п. 10.2). Аналогично, в определение сегментно-стрелочных диаграмм легко включить базовые точки и/или хорды, соединяющие точки одной и той же окружности. Линейные комбинации должным образом обобщенных сумм (13) по таким обобщенным диаграммам также порождают инва-

рианты конечного порядка и среди них все инварианты семейств 3) и/или 2) соответственно. Но опять теряется гомологическая интерпретация этих инвариантов.

И наконец глобальные (в рамках теории инвариантов Васильева для орнаментов) вопросы. Порождают ли сегментно-стрелочные диаграммы все инварианты конечного порядка для орнаментов? Классифицируют ли они орнаменты? Если нет, то те же вопросы для вертикально упорядоченных сегментно-стрелочных диаграмм.

Список литературы

1. *Polyak M., Viro O.* On the Casson knot invariant // J. Knot Theory Ramifications (to appear); <http://www.math.uu.se/~viro/casson.ps>.
2. *Polyak M., Viro O.* Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants // Internat. Math. Res. Notices. 1994. V. 11. P. 445–453.
3. *Goussarov M., Polyak M., Viro O.* Finite type invariants of classical and virtual knots // Topology (to appear); <http://www.math.uu.se/~viro/pw.ps>.
4. *Vassiliev V. A.* Cohomology of knot spaces // Theory of singularities and its applications. Adv. Soviet Math. / ed. V.I. Arnold. V. 1. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1990. P. 23–69.
5. *Vassiliev V. A.* Invariants of ornaments // Singularities and bifurcations. Adv. Soviet Math. / ed. V.I. Arnold. V. 21. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994. P. 225–261.
6. *Merkov A. B.* Finite-order invariants of ornaments // J. Math. Sci. 1998. V. 90. №4. P. 2215–2273; <http://www.botik.ru/~duzhin/as-papers/finv-dvi.zip>.
7. *Merkov A. B.* Vassiliev invariants classify flat braids // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1999. V. 190. P. 83–102.
8. *Арнольд В. И.* О некоторых топологических инвариантах алгебраических функций // Труды ММО. 1970. Т. 21. С. 27–46.
9. *Vassiliev V. A.* Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.
10. *Васильев В. А.* Топология дополнений к дискриминантам. М.: Фазис, 1997.
11. *Polyak M.* Invariants of plane curves via Gauss diagrams // Preprint. Bonn: Max-Planck-Institut MPI/116-94, 1994.
12. *Merkov A. B.* Vassiliev invariants classify plane curves and doodles // Preprint, 1998; <http://www.botik.ru/~duzhin/as-papers/ficd-dvi.zip>.
13. *Горески М., Мак-Фёрсон Р.* Стратифицированная теория Морса. М.: Мир, 1991.
14. *Ziegler G. M., Živaljević R. T.* Homotopy type of arrangements via diagrams of spaces // Math. Ann. 1993. V. 295. P. 527–548.
15. *Björner A., Welker V.* The homology of “ k -equal” manifolds and related partition lattices // Adv. Math. 1995. V. 110. №2. P. 277–313.
16. *Björner A., Wachs M. L.* Shellable non-pure complexes and posets. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 348. P. 1299–1327.
17. *Фукс Д. Б.* Когомологии групп кос mod 2 // Функц. анализ и его прилож. 1970. Т. 4. №2. С. 62–73.
18. *Васильев В. А.* Частное сообщение.

Институт системного анализа РАН, Москва
E-mail: merx@ium.ips.ras.ru

Поступила в редакцию
24.01.2000