Общероссийский математический портал

В. А. Артамонов, Автоморфизмы тела рациональных квантовых функций, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 12, 3–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm526>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:42:19

УДК 512.55+512.667

В. А. Артамонов

Автоморфизмы тела рациональных квантовых функций

В работе описываются автоморфизмы тела частных алгебры квантовых многочленов, в которых число переменных не менее трех.

Библиография: 19 названий.

Введение

Пусть D – тело с заданным множеством автоморфизмов

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n, \quad (1)$$

где $n \geq 2$. Предположим, что заданы также элементы

$$q_{ij} \in D^*, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

удовлетворяющие условиям

$$q_{ii} = q_{ij}q_{ji} = Q_{ijr}Q_{jri}Q_{rij} = 1, \quad \alpha_i(\alpha_j(d)) = q_{ij}\alpha_j(\alpha_i(d))q_{ji}, \quad (2)$$

где $Q_{ijr} = q_{ij}\alpha_j(q_{ir})$ и $d \in D$. Положим

$$Q = (q_{ij}) \in \text{Mat}(n, D) \quad \text{и} \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Элементы q_{ij} матрицы Q называются *системой мультипараметров*. Обозначим через

$$\Lambda = D_{Q, \alpha}[X_1, \dots, X_n] \quad (3)$$

ассоциативное кольцо, порожденное элементами тела D и элементами

$$X_1, \dots, X_n \quad (4)$$

с определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} X_i d &= \alpha_i(d) X_i, \quad d \in D, \quad i = 1, \dots, n; \\ X_i X_j &= q_{ij} X_j X_i, \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned} \quad (5)$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 99-01-00382, 00-15-96128) и программы “Университеты России” (грант № 5527).

Кольцо (5) называется *кольцом квантовых многочленов*. Отметим, что мультипликативная полугруппа в Λ , порожденная элементом $X_1 \cdots X_n$, удовлетворяет условию Оре. Локализованное кольцо $\Lambda_{X_1 \cdots X_n}$ называется *лорановским кольцом квантовых многочленов*. Это кольцо в случае, когда D – поле с тождественными автоморфизмами (1), рассмотрено в работе [1], где оно названо мультипликативным аналогом алгебр Вейля. Если D – поле с тождественными автоморфизмами (1), то алгебра Λ возникает в некоммутативной алгебраической геометрии [2] как координатное кольцо $\mathcal{O}_Q(\mathbb{A}^n)$ квантового аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ размерности n . Обзор результатов по проективным модулям над кольцом Λ и ряд смежных вопросов изложены в обзоре [3], см. также статью [4] и обзор [5].

Различные свойства кольца Λ в зависимости от мультипликативных свойств системы мультипараметров изучались в работах [6]–[8]. В них при некоторых предположениях доказано, что первичные идеалы вполне первичны, и получено полное описание первичных идеалов в Λ . В работах [9]–[11] изучены дифференцирования и автоморфизмы алгебры Λ при условии, что D – поле с тождественными автоморфизмами (1). В [5] описаны автоморфизмы алгебры Λ в предположении, что мультипараметры

$$q_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n, \quad (6)$$

находятся в общем положении.

В работах [12]–[14] рассматриваются тела частных $k_q(X, Y)$ алгебры $k_q[X, Y]$, где $q \in k^*$ не является корнем из 1. Алгебра $k_q[X, Y]$ является частным случаем кольца Λ , когда $D = k$ является полем с тождественными автоморфизмами α_1, α_2 и $q = q_{12}$. В [12] отмечено, что тело $k_q(X, Y)$ совпадает с телом $D_1^q(k)$ частных квантовой алгебры Вейля $A_1^q(k)$, которая порождается двумя элементами a, b с определяющим соотношением $ab - qba = 1$. В [13] изучаются инварианты конечных групп G автоморфизмов тела $k_q(X, Y)$, переводящих в себя либо $k_q[X, Y]$, либо $A_1^q(k)$. Показано, что подтело инвариантов изоморфно $k_{q'}[X, Y]$, где $q' = q^{|G|}$.

В работе В. А. Исковских [15] описана группа автоморфизмов поля рациональных функций $k(X, Y)$. В [12] поставлена задача описания группы автоморфизмов тела $k_q(X, Y)$ в предположении, что q не является корнем из 1. Эта задача частично решена в [14]. В этой же работе показано, что в теле $k_q(X, Y)$ централизатор любого элемента, не лежащего в k , является полем. Целью настоящей работы является обобщение результатов работы [14] на случай общих квантовых многочленов, в которых число переменных не менее трех.

Работа посвящается памяти А. И. Кострикина.

§ 1. Квантовые многочлены и их тела частных

Кольцо Λ из (3) является левым и правым векторным пространством над телом D , базис которого состоит из одночленов

$$u = X^m = X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}, \quad m = (m_1, \dots, m_n) \in (\mathbb{N} \cup 0)^n. \quad (7)$$

Базис кольца $\Lambda_{X_1 \cdots X_n}$ лорановских многочленов как левого (правого) векторного пространства над телом D составляют одночлены (7) с условием $m = (m_1, \dots, m_n)$

$\in (\mathbb{Z} \cup 0)^n$. В частности, кольца Λ из (3) и $\Lambda_{X_1 \dots X_n}$ являются нётеровыми слева и справа областями с телом частных

$$F = D_{Q, \alpha}(X_1, \dots, X_n). \quad (8)$$

Каждый автоморфизм из (1) тела D продолжается на F , причем

$$\alpha_i(f) = X_i f X_i^{-1} \quad (9)$$

для всех $f \in F$.

Заметим, что минимальное подтело в F , содержащее D и некоторую переменную X_i , является телом $D_{\alpha_i}(X_i)$ (с матрицей Q , все элементы которой являются единицами).

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.1. В мультипликативной группе D^* тела D выделим подгруппу N , порожденную коммутантом $[D^*, D^*]$ и всеми элементами вида $z^{-1} \alpha_i(z)$, где $z \in D^*$ и $i = 1, \dots, n$.

Нетрудно проверить, что N является нормальной подгруппой в мультипликативной группе D^* и D^*/N является мультипликативной абелевой группой.

Следующая формула часто будет использоваться в дальнейшем. Для любых двух одночленов из $\Lambda_{X_1 \dots X_n}$ справедливо равенство

$$(\lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n})(\nu X_1^{s_1} \dots X_n^{s_n}) = \lambda \nu \left[\prod_{i < j} q_{ji}^{m_j s_i} \right] u \cdot X_1^{m_1 + s_1} \dots X_n^{m_n + s_n}, \quad (10)$$

где $u = u(\mu, m_1, \dots, u_m, s_1, \dots, s_n) \in N \triangleleft D^*$ (см. обозначение 1.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть $\lambda \nu \in D^*$ и $m_1, \dots, m_n, s_1, \dots, s_n \in \mathbb{Z}$. Тогда в $\Lambda_{X_1 \dots X_n}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} & (\lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n})^{-1} (\nu X_1^{s_1} \dots X_n^{s_n}) (\lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}) \\ &= z \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} q_{ji}^{s_j m_i - s_i m_j} \right) (\nu X_1^{s_1} \dots X_n^{s_n}), \end{aligned}$$

где $z \in N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $v = \lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}$, $w = \nu X_1^{s_1} \dots X_n^{s_n}$. Из (5) получаем, что $X_i^{-1} X_j X_i = q_{ji} X_j$. Отсюда

$$\begin{aligned} v^{-1} w v &= \nu z_1 (v^{-1} X_1 v)^{s_1} \dots (v^{-1} X_n v)^{s_n} \\ &= \nu z_2 \left[\left(\prod_{k=1}^n q_{1k}^{m_k} \right) X_1 \right]^{s_1} \dots \left[\left(\prod_{k=1}^n q_{nk}^{m_k} \right) X_n \right]^{s_n} \\ &= z \left(\prod_{k,j=1}^n q_{jk}^{m_k s_j} \right) w = z \left(\prod_{1 \leq k < j \leq n} q_{jk}^{m_k s_j - m_j s_k} \right) w, \end{aligned}$$

где $z, z_1, z_2 \in N$.

Мы будем сравнивать одночлены, входящие в ненулевой элемент $f \in \Lambda$ (и $\Lambda_{X_1 \dots X_n}$), используя лексикографический порядок для мультииндексов. Поэтому мы можем говорить о *младшем члене* многочлена. Несложно доказывается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Младший член произведения многочленов равен произведению младших членов сомножителей.*

В дальнейшем нам потребуется кольцо косых лорановских рядов. Для его построения необходимо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Обозначим через $\mathcal{X}$ множество $\mathbb{Z}^n$ с дополнительным элементом ∞ . Тогда $\mathcal{X}$ является аддитивным абелевым моноидом, в котором $a + \infty = \infty$ для всех $a \in \mathcal{X}$. Пусть лексикографический порядок в $\mathbb{Z}^n$ продолжается в $\mathcal{X}$, причем $a < \infty$ для всех $a \in \mathbb{Z}^n$. Тогда $\mathcal{X}$ является аддитивным упорядоченным абелевым моноидом с наибольшим элементом ∞ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b, c \in \mathcal{X}$ и $a < b$. Тогда $a \in \mathbb{Z}^n$. Если $b, c \in \mathbb{Z}^n$, то $a + c < b + c$. Предположим, что либо $b = \infty$, либо $c = \infty$. Тогда $a + c \leq \infty = b + c$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.5. Зададим *нормирование* $f \mapsto \|f\|$ мультипликативной подгруппе кольца Λ со значением в аддитивном абелевом моноиде $\mathcal{X}$ следующим образом. Пусть $f \in \Lambda$ — ненулевой многочлен с младшим одночленом

$$\mu X_1^{l_1} \cdots X_n^{l_n}, \quad \mu \in D^*, \quad l_1, \dots, l_n \geq 0,$$

в смысле лексикографического порядка в $\mathbb{Z}^n$. Полагаем $\|f\| = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$. Если $f = 0$, то полагаем $\|f\| = \infty$.

Из (5) легко выводится, что

$$\|fg\| = \|f\| + \|g\|, \quad \|f + g\| \geq \min(\|f\|, \|g\|) \quad (11)$$

для всех $f, g \in \Lambda$. Поэтому это нормирование продолжается до нормирования $F = D_{Q,\alpha}(X_1, \dots, X_n) \rightarrow \mathcal{X}$, именно, если $f, g \in \Lambda \setminus 0$, то $\|f^{-1}g\| = -\|f\| + \|g\|$ и $\|0\| = \infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. *Пусть $f, g \in \Lambda \setminus 0$ и*

$$\|f\| = (s_1, \dots, s_n), \quad \|g\| = (m_1, \dots, m_n).$$

Тогда существует единственный элемент $\gamma \in D^$ такой, что*

$$f^{-1}g = \gamma X_1^{m_1-s_1} \cdots X_n^{m_n-s_n} + u, \quad u \in F,$$

причем $\|u\| > \|f^{-1}g\|$ в смысле лексикографического порядка в $\mathbb{Z}^n$ при условии, что $u \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению

$$\begin{aligned} f &= \nu X_1^{s_1} \cdots X_n^{s_n} + f_1, \quad f_1 \in F, \quad \text{и} \quad \|f_1\| > \|f\|, \quad \text{если} \quad f_1 \neq 0; \\ g &= \zeta X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n} + g_1, \quad g_1 \in F, \quad \text{и} \quad \|g_1\| > \|g\|, \quad \text{если} \quad g_1 \neq 0. \end{aligned}$$

В этом случае из (5) и (10) вытекает существование такого элемента $\gamma \in D^*$, что

$$(\nu X_1^{s_1} \cdots X_n^{s_n})^{-1} (\zeta X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}) = \gamma X_1^{m_1-s_1} \cdots X_n^{m_n-s_n}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f^{-1}g &= f^{-1}(\nu X_1^{s_1} \cdots X_n^{s_n} \gamma X_1^{m_1-s_1} \cdots X_n^{m_n-s_n} + g_1) \\ &= f^{-1}(f \gamma X_1^{m_1-s_1} \cdots X_n^{m_n-s_n} - f_1 \gamma X_1^{m_1-s_1} \cdots X_n^{m_n-s_n} + g_1) \\ &= \gamma X_1^{m_1-s_1} \cdots X_n^{m_n-s_n} + f^{-1}(-f_1 \gamma X_1^{m_1-s_1} \cdots X_n^{m_n-s_n} + g_1), \end{aligned}$$

где

$$\|f^{-1}(-f_1 \gamma X_1^{m_1-s_1} \cdots X_n^{m_n-s_n} + g_1)\| > (m_1 - s_1, \dots, m_n - s_n).$$

Ясно, что γ определено однозначно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. Пусть $a \in F^*$ и $\|a\| > 0$. Тогда $(1-a)^{-1} = 1 + a + a_1$, где $\|a_1\| = 2\|a\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\|1-a\| = 0$, поскольку $\|a\| > 0$. Поэтому в силу (11)

$$\begin{aligned} \|a_1\| &= \|a\| + \|1-a\| = \|a_1(1-a)\| \\ &= \|(1-a)^{-1} - 1 - a\| \|1-a\| \\ &= \|1 - (1+a)(1-a)\| = \|1 - 1 + a^2\| = \|a^2\| = 2\|a\|. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. Пусть $a, u \in F$ и $\infty > \|a\| > 0$, $\|u\| > \|X_j\|$ для некоторого $j = 1, \dots, n$. Тогда

$$(1-a)^{-1}(X_j + u)(1-a) = X_j + (u - [X_j, a]) + \hat{u},$$

причем по (11) $\|\hat{u}\| \geq \min(\|a\| + \|u\|; 2\|a\| + \|X_j\|)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 1.7

$$\begin{aligned} &(1-a)^{-1}(X_j + u)(1-a) \\ &= (1+a+a_1)(X_j + u)(1-a) \\ &= X_j - X_j a + u - u a + a X_j - a X_j a + a_1 X_j (1-a) + (a+a_1)u(1-a) \\ &= X_j - [X_j, a] + u + \hat{u}, \end{aligned}$$

где

$$\hat{u} = -ua - aX_ja + a_1X_j(1-a) + (a+a_1)u(1-a).$$

Из (11) и предложения 1.7 вытекает, что

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\| &\geq \min(\|u\| + \|a\|; 2\|a\| + \|X_j\|; \|a_1\| + \|X_j\|; \|a\| + \|u\|) \\ &> \min(\|a\| + \|u\|; 2\|a\| + \|X_j\|). \end{aligned}$$

В работе [4] введено следующее ограничение на множество всех мультипараметров (6):

- (*) образы всех мультипараметров (6) независимы в мультипликативной группе D^*/N , где N введено в обозначении 1.1.

Ограничение подобного типа впервые введено в статье [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Если условие (*) выполнено, то кольцо Λ называется *кольцом общих квантовых многочленов*.

С этого момента мы будем всегда предполагать, что Λ является кольцом общих квантовых многочленов с числом переменных $n \geq 3$. Нам потребуется следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. Пусть $u \in F$ и $X_t u = q_{ij} u X_t$, где $1 \leq i, j, t \leq n$ и $i \neq j$. Тогда либо $t = j$, $u = X_i^{-1} f(X_j)$, $f(X_j) \in D_{\alpha_j}(X_j)$, либо $t = i$, $u = X_j f(X_i)$, $f(X_i) \in D_{\alpha_i}(X_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = \beta X_1^{l_1} \cdots X_n^{l_n} + v$, где $\|v\| > \|u\|$ и $\beta \in D^*$. Положим

$$w = X_1^{l_1} \cdots X_{t-1}^{l_{t-1}} X_t^{l_t+1} X_{t+1}^{l_{t+1}} \cdots X_n^{l_n}.$$

По (10) получаем

$$X_t u = \beta q_{t1}^{l_1} \cdots q_{t,t-1}^{l_{t-1}} n_1 w, \quad q_{ij} u X_i = \beta q_{ij} q_{t,t+1}^{-l_{t+1}} \cdots q_{t,n}^{-l_n} n_2 w,$$

где $n_1, n_2 \in N$. Следовательно, по модулю N получаем

$$q_{t1}^{l_1} \cdots q_{t,t-1}^{l_{t-1}} \equiv q_{ij} q_{t,t+1}^{-l_{t+1}} \cdots q_{t,n}^{-l_n},$$

т.е.

$$q_{1t}^{-l_1} \cdots q_{t-1,t}^{-l_{t-1}} q_{t,t+1}^{l_{t+1}} \cdots q_{t,n}^{l_n} \equiv q_{ij}.$$

В силу (*) получаем, что либо $t = i$, либо $t = j$. В обоих случаях для всех $k = 1, \dots, n$ имеем

$$l_k = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq j, i; \\ -1, & \text{если } k = i; \\ 1, & \text{если } k = j. \end{cases}$$

Таким образом,

$$u = \begin{cases} \beta X_i^{-1} X_j^{l_j} + v, & \text{если } t = j; \\ \beta X_j X_i^{l_i} + v, & \text{если } t = i. \end{cases}$$

Элемент v удовлетворяет тому же уравнению $X_t v = q_{ij} v X_t$. Отсюда вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.11. Пусть

$$u = \beta X_1^{l_1} \dots X_n^{l_n}, \quad \beta \in D^*, \quad l_1, \dots, l_n \in \mathbb{Z}.$$

Предположим, что $l_i \neq 0$ для некоторого $1 \leq i \neq j \leq n$. Тогда найдется такой элемент $\delta \in D^*$, что

$$u = [X_j, v] = X_j v - v X_j, \quad \text{где} \quad v = \delta X_1^{l_1} \dots X_{j_1}^{l_{j-1}} X_j^{l_j-1} X_{j+1}^{l_{j+1}} \dots X_n^{l_n}. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v из (12). По (10) получаем

$$\begin{aligned} X_j v - v X_j &= \delta X_j X_1^{l_1} \dots X_{j_1}^{l_{j-1}} X_j^{l_j-1} X_{j+1}^{l_{j+1}} \dots X_n^{l_n} \\ &\quad - \delta X_1^{l_1} \dots X_{j_1}^{l_{j-1}} X_j^{l_j-1} X_{j+1}^{l_{j+1}} \dots X_n^{l_n} X_j \\ &= \delta q_{j1}^{l_1} \dots q_{j,j-1}^{l_{j-1}} n_1 \beta^{-1} u - \delta q_{j,j+1}^{-l_{j+1}} \dots q_{jn}^{-l_n} n_2 \beta q^{-1} u \\ &= \delta (q_{j1}^{l_1} \dots q_{j,j-1}^{l_{j-1}} n_1 - q_{j,j+1}^{-l_{j+1}} \dots q_{jn}^{-l_n} n_2) \beta^{-1} u, \end{aligned}$$

где $n_1, n_2 \in N$ и N – подгруппа из обозначения 1.1. Таким образом, уравнение $[X_j, v] = u$ разрешимо относительно δ в том и только том случае, если $q_{j1}^{-l_1} \dots q_{j,j-1}^{-l_{j-1}} \neq q_{j,j+1}^{l_{j+1}} \dots q_{jn}^{l_n} \pmod{N}$. В силу свойства (*) это условие всегда выполнено, поскольку $l_i \neq 0$ для некоторого $i \neq j$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.12. Пусть

$$u, v \in F^*, \quad \|u\| > \|X_i\|, \quad \|v\| > \|X_j\|,$$

и

$$(X_i + u)(X_j + v) = q_{ij}(X_j + v)(X_i + u). \quad (13)$$

Предположим, что u_0, v_0 – младшие одночлены u, v соответственно. Тогда имеет место один из следующих случаев:

- 1) $\|u\| + \|X_j\| > \|v\| + \|X_i\|$, $X_i v_0 = q_{ij} v_0 X_i$ и $v_0 = \lambda X_i^l X_j$, $l > 0$;
- 2) $\|u\| + \|X_j\| < \|v\| + \|X_i\|$, $u_0 X_j = q_{ij} X_j u_0$ и $u_0 = \lambda' X_j^{l'} X_i$, $l' > 0$;
- 3) $\|u\| + \|X_j\| = \|v\| + \|X_i\|$, $u_0 X_j + X_i v_0 = q_{ij}(v_0 X_i + X_j u_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (13) влечет

$$u X_j + X_i v + uv = q_{ij}(v X_i + X_j u + vu). \quad (14)$$

По предположению

$$\|uv\| = \|vu\| > \min(\|u\| + \|X_j\|; \|v\| + \|X_i\|).$$

Предположим сначала, что $\|u\| + \|X_j\| > \|v\| + \|X_i\|$. Тогда (14) влечет $X_i v_0 = q_{ij} v_0 X_i$ и по предположению 1.10 получаем $v_0 = \lambda X_i^l X_j$. Так как $\|v_0\| = \|v\| > \|X_j\|$, то $l > 0$.

Предположим теперь, что $\|u\| + \|X_j\| < \|v\| + \|X_i\|$. Тогда $u_0 X_j = q_{ij} X_j u_0$ и $q_{ji} u_0 X_j = X_j u_0$. Таким образом, $u_0 = \lambda' X_j^{l'} X_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.13. Пусть q_{ij}, u, v, u_0, v_0 из предложения 1.12. Предположим, что q_{ij} лежит в центре D и автоморфизмы (1) действуют тождественно на D . Пусть $\|v\| - \|X_j\| \geq \|u\| - \|X_i\| > 0$. Тогда существует такой одночлен a , что $u_0 = [X_i, a]$ и

$$\begin{aligned} (1-a)^{-1}(X_i+u)(1-a) &= X_i + \tilde{u}, \\ (1-a)^{-1}(X_j+v)(1-a) &= X_i + \tilde{v}. \end{aligned}$$

Если $\|v\| - \|X_j\| > \|u\| - \|X_i\| > 0$, то $\|\tilde{u}\| > \|u\|$, $\|\tilde{v}\| = \|v\|$. Если же $\|v\| - \|X_j\| = \|u\| - \|X_i\| > 0$, то $v_0 = [X_i, a]$ и $\|\tilde{u}\| > \|u\|$, $\|\tilde{v}\| > \|v\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\|v\| - \|X_j\| > \|u\| - \|X_i\| > 0$. Из предложения 1.12 (случай 2)) получаем, что $u_0 = \lambda' X_j^{l'} X_i$, и поэтому

$$0 < \|u\| - \|X_i\| = \|u_0\| - \|X_i\| = l' \|X_j\|,$$

т.е. $l' > 0$. По предложению 1.11 получаем

$$u_0 = [X_i, a], \quad (15)$$

где $a = \lambda'' X_j^{l'}$ для некоторого $\lambda'' \in D^*$. Поэтому $\|a\| = l' \|X_j\| > 0$. В силу предложения 1.8 имеем

$$\begin{aligned} (1-a)^{-1}(X_i+u)(1-a) &= X_i + (u - [X_i, a]) + \hat{u}, \\ (1-a)^{-1}(X_j+v)(1-a) &= X_j + (v - [X_j, a]) + \hat{v} = X_j + v + \hat{v}, \end{aligned}$$

поскольку по предположению $[X_i, a] = [X_i, \lambda'' X_j^{l'}] = 0$. Положим $\tilde{u} = (u - [X_i, a]) + \hat{u}$, $\tilde{v} = v + \hat{v}$. По предложению 1.8 получаем

$$\|\tilde{u}\| \geq \min(\|a\| + \|u\|; 2\|a\| + \|X_i\|), \quad \|\tilde{v}\| = \|v + \hat{v}\| = \|v\|.$$

Следовательно, $\|\tilde{u}\| \geq \min(\|u - [X_i, a]\|; \|\hat{u}\|) > \|u\|$.

Предположим теперь, что $\|v\| - \|X_j\| = \|u\| - \|X_i\|$. В силу предложения 1.12 (случай 3), см. (14)) и по предположению получаем

$$u_0 X_j + X_i v_0 = q_{ij}(v_0 X_i + X_j u_0). \quad (16)$$

Итак, существует такой одночлен $\tilde{a} = X_1^{s_1} \dots X_n^{s_n}$, что

$$u_0 = \lambda X_i \tilde{a}, \quad v_0 = \mu X_j \tilde{a}, \quad \lambda, \mu \in D^*,$$

и поэтому $\|\tilde{a}\| > 0$. Это означает, что $s_t > 0$ для некоторого $t = 1, \dots, n$. Пусть $t \neq i$. В силу предложения 1.11 существует такое $\delta \in D^*$, что $u_0 = [X_i, a]$, $a = \delta \tilde{a}$. Положим $v'_0 = [X_j, a] - v_0$. Тогда в силу (16)

$$[X_i, a] X_j + X_i [X_j, a] + X_i v'_0 = q_{ij}([X_j, a] X_i + v'_0 X_i + X_j k[X_i, a]),$$

откуда $X_i v'_0 = q_{ij} v'_0 X_i$, поскольку $q_{ij} a = a q_{ij}$. Предположим, что $v'_0 \neq 0$. По предложению 1.10 имеем $v'_0 = \zeta X_j X_i^l, \zeta \in D^*$. В этом случае $\|\tilde{a}\| = \|a\| = \|v'_0\| - \|X_j\| = l \|X_i\|$. Отсюда вытекает, что $\tilde{a} = X_i^l$ и $u_0 = [X_i, \delta X_i^l] = 0$. Но тогда по предположению получаем $\|X_j\| = \|v\| + \|X_i\|$ и $\|v\| = \|X_j\| - \|X_i\|$. Но $\|v\| > \|X_j\|$, что противоречит предположению. Итак, $v'_0 = 0$.

Случай $t = j$ аналогичен.

§2. Автоморфизмы

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.1. Обозначим через $\text{Aut } F$ группу всех автоморфизмов кольца F , действующих тождественно на теле D .

ТЕОРЕМА 2.2. Если $\gamma \in \text{Aut } F$, то существуют такие элементы

$$\gamma_1, \dots, \gamma_n \in D^*, \quad u_1, \dots, u_n \in F$$

и такое целое число $\varepsilon = \pm 1$, что

$$\gamma(X_i) = \gamma_i X_i^\varepsilon + u_i, \quad \|u_i\| > \varepsilon \|X_i\|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 1.6

$$\gamma(X_i) = \gamma_i X_1^{m_{i1}} \dots X_n^{m_{in}} + u_i, \quad \gamma_i \in D^*,$$

где $\|u_i\| > (m_{i1}, \dots, m_{in})$. Если $u \neq v$, то, сравнивая младшие одночлены в

$$\gamma(X_u)\gamma(X_v) = q_{uv}\gamma(X_v)\gamma(X_u),$$

получаем, что

$$\begin{aligned} (\gamma_u X_1^{m_{u1}} \dots X_n^{m_{un}})(\gamma_v X_1^{m_{v1}} \dots X_n^{m_{vn}}) \\ = q_{uv}(\gamma_v X_1^{m_{v1}} \dots X_n^{m_{vn}})(\gamma_u X_1^{m_{u1}} \dots X_n^{m_{un}}). \end{aligned}$$

Отсюда в силу (10)

$$\begin{aligned} \left(\gamma_u \gamma_v \prod_{i < j} q_{ji}^{m_{uj} m_{vi}} \right) X_1^{m_{u1} + m_{v1}} \dots X_n^{m_{un} + m_{vn}} \\ = \left(\gamma_u \gamma_v q_{uv} \prod_{i < j} q_{ji}^{m_{vj} m_{ui}} \right) X_1^{m_{v1} + m_{u1}} \dots X_n^{m_{vn} + m_{un}}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\prod_{i < j} q_{ji}^{m_{uj} m_{vi}} = q_{uv} \prod_{i < j} q_{ji}^{m_{vj} m_{ui}},$$

или

$$\prod_{i < j} q_{ji}^{m_{uj} m_{vi} - m_{vj} m_{ui}} = q_{uv}.$$

По свойству (*) последнее равенство влечет

$$m_{uj} m_{vi} - m_{vj} m_{ui} = \begin{vmatrix} m_{uj} & m_{ui} \\ m_{vj} & m_{vi} \end{vmatrix} = \begin{cases} \delta_{uj} \delta_{vi}, & u > v; \\ \delta_{vj} \delta_{ui}, & v > u. \end{cases}$$

Рассмотрим матрицу

$$M_{uv} = \begin{pmatrix} m_{u1} & \dots & m_{un} \\ m_{v1} & \dots & m_{vn} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $m_{us} \neq 0$ при некотором индексе $s \neq u, v$. Тогда при любом $t \neq s$

$$\begin{vmatrix} m_{ut} & m_{us} \\ m_{vt} & m_{vs} \end{vmatrix} = 0.$$

Это означает, что ранг матрицы M_{uv} равен 1, что невозможно, ибо

$$\begin{vmatrix} m_{uu} & m_{uv} \\ m_{vu} & m_{vv} \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Итак, $m_{us} = 0$ при $s \neq u, v$. Так как число переменных не меньше трех, то, заменяя X_v на X_t , $t \neq v$, и повторяя те же рассуждения, получаем, что и $m_{uv} = 0$. Итак, для любых $1 \leq u \neq v \leq n$ выполнено соотношение

$$m_{uu} = m_{vv} = \varepsilon = \pm 1, \quad m_{uv} = 0.$$

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \varepsilon$ из условий теоремы 2.2. Тогда отображение $\theta: F \rightarrow F$, при котором $\theta(d) = d$ для всех $d \in D$ и

$$\theta(X_i) = \gamma_i X_i^\varepsilon, \quad \gamma_i \in D^*, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (18)$$

для любых $i = 1, \dots, n$, является автоморфизмом F . При этом если $\varepsilon = 1$, то элементы $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ центральны в D . Если $\varepsilon = -1$, то $\alpha_i \alpha_j (q_{ji}) \alpha_i (\gamma_j) \gamma_i = q_{ij} \alpha_j (\gamma_i) \gamma_j$, $\alpha_i^2(d) = \gamma_i d \gamma_i^{-1}$. В частности, элементы $\alpha_i (\gamma_i) \gamma_i^{-1}$ лежат в центре D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\gamma \in \text{Aut } F$, то

$$\gamma(X_i)d = \alpha_i(d)\gamma(X_i), \quad (19)$$

$$\gamma(X_i)\gamma(X_j) = q_{ij}\gamma(X_j)\gamma(X_i). \quad (20)$$

Сравнивая младшие одночлены левой и правой частей (19), (20), мы получаем

$$\theta(X_i)d = \alpha_i(d)\theta(X_i), \quad \theta(X_i)\theta(X_j) = q_{ij}\theta(X_j)\theta(X_i).$$

Доказательство последних утверждений вытекает из применения θ к соотношениям (2), (5).

Пусть $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \varepsilon$ из условий теоремы 2.2. Тогда $\theta^{-1}(X_i) = \delta_i X_i^\varepsilon$, где

$$\delta_i = \begin{cases} \gamma_i^{-1}, & \text{если } \varepsilon = 1; \\ \alpha_i(\gamma_i), & \text{если } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Таким образом, если $\varepsilon = 1$, то

$$\gamma_i^{-1}(\gamma_i X_i + u_i) = X_i + \gamma_i^{-1} u_i,$$

где $\|\gamma_i^{-1} u_i\| = \|u_i\| > \|X_i\|$. Если $\varepsilon = -1$, то

$$\begin{aligned} \gamma \theta^{-1}(X_i) &= \gamma(\alpha_i(\gamma_i) X_i^{-1}) = \alpha_i(\gamma_i)(\gamma(X_i))^{-1} \\ &= \alpha_i(\gamma_i)(\gamma_i X_i^{-1} + u_i)^{-1} = \alpha_i(\gamma_i)\{[1 + u_i X_i \gamma_i^{-1}](\gamma_i X_i^{-1})\}^{-1} \\ &= \alpha_i(\gamma_i) X_i \gamma_i^{-1} (1 + u_i X_i \gamma_i^{-1})^{-1} = \alpha_i(\gamma_i) \alpha_i(\gamma_i^{-1}) X_i (1 + u_i X_i \gamma_i^{-1})^{-1} \\ &= X_i (1 + u_i X_i \gamma_i^{-1})^{-1}. \end{aligned}$$

По предположению $\|u_i\| > -\|X_i\|$ и $\|u_i X_i\| > 0$. Поэтому $\|1 + u_i X_i \gamma_i^{-1}\| = 0$. Отсюда следует, что

$$\|(1 + u_i X_i \gamma_i^{-1})^{-1}\| = -\|1 + u_i X_i \gamma_i^{-1}\| = 0.$$

Это означает, что $\gamma \theta^{-1}(X_i) = X_i + v_i$, $\|v_i\| > \|X_i\|$, если $v_i \neq 0$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.4. Обозначим через $\text{EAut } F$ множество всех автоморфизмов $\theta \in \text{Aut } F$ вида (18). Через $\text{IAut } F$ обозначим множество всех автоморфизмов γ вида

$$\gamma(X_i) = X_i + v_i, \quad \|v_i\| > \|X_i\|. \quad (21)$$

Обозначим через $\text{Aut}^+ F$ множество всех таких автоморфизмов $\gamma \in \text{Aut } F$, что для любого $i = 1, \dots, n$

$$\gamma(X_i) = \gamma_i X_i + u_i, \quad \gamma_i \in k^*, \quad \|u_i\| > \|X_i\|. \quad (22)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Ясно, что $\text{EAut } F$ и $\text{IAut } F$ являются подгруппами в $\text{Aut } F$, причем их пересечение тривиально. Фактически в теореме 2.3 доказано, что $\text{Aut } F = (\text{IAut } F)(\text{EAut } F)$. Отметим также, что группа $\text{Aut}^+ F$ состоит из всех таких автоморфизмов $\gamma \in \text{Aut } F$, что $\|\gamma(f)\| = \|f\|$ для всех $f \in F$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. $\text{Aut}^+ F$ является подгруппой в группе $\text{Aut } F$, причем $\text{IAut } F \triangleleft \text{Aut}^+ F$. Более того, $\text{Aut}^+ F$ является полупрямым произведением нормальной абелевой подгруппы

$$\text{Aut}^+ F \cap \text{EAut } F \quad (23)$$

и подгруппы $\text{IAut } F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma \in \text{IAut } F$ имеет вид (22). Как отмечено в теореме 2.3 и в замечании 2.5, $\gamma = \theta \lambda$, где $\theta(X_i) = \gamma_i X_i$ для всех i и $\lambda \in \text{IAut } F$. При этом $\theta^{-1}(X_i) = \gamma_i^{-1} X_i$. Следовательно, для того чтобы доказать утверждение, достаточно проверить, что $\theta^{-1} \lambda \theta \in \text{IAut } F$. Для любого индекса i имеем

$$\theta^{-1} \lambda \theta(X_i) = \theta^{-1} \lambda(\gamma_i X_i) = \gamma_i \theta^{-1}(X_i + v_i) = X_i + \gamma_i(\theta^{-1}(v_i)),$$

где $\|\gamma_i(\theta^{-1}(v_i))\| = \|v_i\| > \|X_i\|$. Поэтому $\theta^{-1} \lambda \theta \in \text{IAut } F$.

Если θ из группы (23), то $\theta(X_i) = \gamma_i X_i$, $1 \leq i \leq n$, где $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ лежат в центре D по теореме 2.3. Поэтому группа (23) абелева.

Следующая теорема вытекает из предложения 1.13.

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть все мультипараметры (6) лежат в центре D и автоморфизмы (1) действуют тождественно на D . Предположим, что $\gamma \in \text{IAut } F$ имеет вид (21). Выберем такой индекс $i = 1, \dots, n$, что

$$\|v_i\| - \|X_i\| \leq \|v_j\| - \|X_j\|$$

для любого $j = 1, \dots, n$. Тогда найдется такой одночлен a , что $\|a\| = \|v_i\| - \|X_i\|$ и для любого индекса $j = 1, \dots, n$ выполнено условие

$$(1 - a)^{-1} \gamma(X_j)(1 - a) = X_j + \tilde{v}_j,$$

где $\|\tilde{v}_j\| \geq \|v_j\|$, $\|\tilde{v}_i\| > \|v_i\|$.

§3. Лорановские ряды

Приведем мальцевскую конструкцию [16] тела $\mathcal{F}$ квантовых лорановских рядов. Пусть $\mathcal{L}$ — упорядоченный аддитивный моноид из §1.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3.1. Обозначим через $\mathcal{X}$ семейство всех артиновых подмножеств $X \subseteq \mathcal{L}$, содержащих ∞ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. $\mathcal{X}$ является подрешеткой в решетке всех подмножеств в $\mathcal{L}$. Если $X \in \mathcal{X}$ и $\infty \in Y \subseteq X$, то $Y \in \mathcal{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X, Y \in \mathcal{X}$. Предположим, что $z_1 > z_2 > \dots$ — счетная строго убывающая цепь элементов из $X \cup Y$. Тогда либо в X , либо в Y существует счетная строго убывающая цепь элементов, что невозможно. Кроме того, $\infty \in X \cup Y$. Следовательно, $X \cup Y \in \mathcal{X}$.

Пусть $X \in \mathcal{X}$ и $\infty \in Y \subseteq X$. Тогда множество Y артиново и поэтому $Y \in \mathcal{X}$.

Следующее определение восходит к работе А. И. Мальцева [16], а также к работам [17]–[19].

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3.3. Для любого отображения $f: \mathcal{L} \rightarrow D$ положим

$$\text{supp } f = \{a \in \mathbb{Z}^n : f(a) \neq 0\}.$$

Обозначим через $\mathcal{F}$ множество всех таких отображений $f: \mathcal{L} \rightarrow D$, что $f(\infty) = 0$ и $\text{supp } f \cup \infty \in \mathcal{X}$. Если $f, g \in \mathcal{F}$ и $a \in \mathcal{L}$, то полагаем

$$\begin{aligned} (f + g)(a) &= f(a) + g(a), \\ (fg)(a) &= \sum_{b+c=a} f(b)g(c) \left[\prod_{i < j} q_{ji}^{b_j c_i} \right] u(g(c), b, c), \end{aligned} \quad (24)$$

где $b = (b_1, \dots, b_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^n$ и $u(g(c), b, c) \in N$ из (10).

ТЕОРЕМА 3.4. $\mathcal{F}$ является телом относительно операций (24).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{Z}$ линейно упорядочено, то в силу предложения 3.2, как и в [16], [17], [18; теорема 2.1], [19], сумма и произведение (24) определены корректно, поскольку множество всех таких пар $(b, c) \in \text{supp } f \times \text{supp } g$, что $b + c = a$, конечно. Как и в Λ , произведение (24) ассоциативно и $\mathcal{F}$ является ассоциативным кольцом. Необходимо лишь показать, что $\mathcal{F}$ является телом. Пусть $f \in \mathcal{F} \setminus 0$ и $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$ — наименьший элемент в $\text{supp } f$. Докажем существование такого элемента $g \in \mathcal{F}$, что $gf = fg = 1$. Пусть $\delta_l: \mathcal{Z} \rightarrow D$, где

$$\delta_l(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } l = t; \\ 0, & \text{если } l \neq t. \end{cases}$$

Тогда $f = \delta_l h$, где $s \geq 0$ для любого $s \in \text{supp } h$. По [18; теорема 2.2] элемент h обратим в $\mathcal{F}$. Следовательно,

$$f^{-1} = h^{-1} \delta_l^{-1} = h^{-1} \delta_{-l} \in \mathcal{F}.$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3.5. Определим нормирование $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Z}$, полагая $\|0\| = \infty$, и $\|f\| = l \in \mathbb{Z}^n$, если $f \neq 0$ и l — наименьший элемент в $\text{supp } f$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Достаточно очевидно, что соотношения (12) справедливы для нормирования из 3.5.

ТЕОРЕМА 3.7. Существует вложение колец $\phi: F \rightarrow \mathcal{F}$, сохраняющее нормирования.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f \in \Lambda \setminus 0$ и

$$f = \sum a_{i_1, \dots, i_n} X_1^{l_1} \cdots X_n^{l_n}, \quad a_{i_1, \dots, i_n} \in D,$$

то зададим $\phi(f) \in \mathcal{F}$, полагая

$$[\phi(f)](c) = \begin{cases} a_{i_1, \dots, i_n}, & \text{если } c = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n; \\ 0, & \text{если } c = \infty. \end{cases}$$

Тогда $\|\phi(f)\| = \|f\|$. Ясно, что $\phi: \Lambda \rightarrow \mathcal{F}$ является вложением колец. Поскольку $\mathcal{F}$ — тело, гомоморфизм ϕ продолжается до гомоморфизма колец $\phi: F \rightarrow \mathcal{F}$, согласованного с нормированиями.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.8. Элемент $f \in \mathcal{F} \setminus 0$ можно отождествить с лорановским рядом

$$f = \sum_{l \in \text{supp } f} f(l) X^l,$$

где $X^l = X_1^{l_1} \cdots X_n^{l_n}$, если $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Доказательство следующего утверждения вытекает из определения $\mathcal{F}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. Пусть $\gamma \in \text{EAut } F$, причем

$$\gamma(X_i) = \gamma_i X_i, \quad \gamma_i \in D^*, \quad i = 1, \dots, n.$$

Если $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$, то

$$\gamma(X^l) = \gamma_1^{l_1} \cdots \gamma_n^{l_n} u_{l_1, \dots, l_n} X^l, \quad u_{l_1, \dots, l_n} \in N. \quad (25)$$

Автоморфизм γ продолжается до автоморфизма $\mathcal{F}$, причем для $f \in \mathcal{F} \setminus 0$ из замечания 3.8 и $l \in \mathbb{Z}^n$

$$[\gamma(f)](l) = \gamma_1^{l_1} \cdots \gamma_n^{l_n} u_{l_1, \dots, l_n},$$

где $u_{l_1, \dots, l_n} \in N$ из (25).

Для дальнейшего нам потребуется ряд свойств множества $\mathcal{X}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. Пусть $X \in \mathcal{X}$, причем $x > 0$ для всех $x \in X$. Предположим, что зафиксирован элемент $l \in \mathbb{Z}^n$, $l > 0$. Рассмотрим множество Y всех таких $x \in X \setminus \infty$, что для некоторого $k \geq 1$ существует последовательность $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k$ элементов из X , причем $x = x_i$ для некоторого i и

$$l = x_1 + \dots + x_k. \quad (26)$$

Тогда множество Y конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $n = 1$, то в равенстве (26)

$$0 < x_1 < \dots < x_k \leq l.$$

Поэтому каждое x_i принимает конечное число значений.

Пусть для $n - 1$ утверждение доказано и в (26)

$$l = (l_1, \dots, l_n), \quad x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}).$$

Если $l_1 = 0$, то $x_{11} = \dots = x_{k1} = 0$. В этом случае можно воспользоваться соображениями индукции.

Итак, можно считать, что $l_1 > 0$. Так как $0 \leq x_{11} \leq \dots \leq x_{k1}$, то найдется такой индекс $0 \leq s < k$, что

$$0 = x_{11} = \dots = x_{s1} < x_{s+1,1} \leq \dots \leq x_{k1}.$$

Следовательно, $l_1 = x_{s+1,1} + \dots + x_{kn}$ и для $x_{s+1,1}, \dots, x_{kn}$ и $k-s$ имеется конечное число возможностей. В силу артиновости X найдется такое число $m' \in \mathbb{Z}$, что если $b \in \mathbb{Z}$ и $(a, b, \dots) \in X$, причем $0 < a \leq l_1$, то $m' \leq b$.

Перейдем теперь к рассмотрению вторых координат. Пусть

$$0 = x_{12} = \dots = x_{t2} < x_{t+1,2} \leq \dots \leq x_{s2}.$$

Тогда

$$l_2 = x_{t+1,2} + \dots + x_{s2} + x_{s+1,2} + \dots + x_{k2}, \quad (27)$$

откуда

$$x_{t+1,2} + \dots + x_{s2} = l_2 - (x_{s+1,2} + \dots + x_{k2}) \leq l - (k - s)m'.$$

Таким образом, для $s - t$ и для $x_{t+1,2}, \dots, x_{s2}$ имеется конечное число возможностей. В силу (27)

$$x_{s+1,2} + \dots + x_{k2} = l - x_{t+1,2} - \dots - x_{s2} \leq l_2, \quad x_{s+1,2}, \dots, x_{k2} \geq m'.$$

Поэтому для $x_{t+1,2}, \dots, x_{s2}$ также имеется конечное число возможностей. Продолжая этот процесс, получаем требуемое утверждение.

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что выполнено условие (*).

ТЕОРЕМА 3.11. Пусть D — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики с тождественными автоморфизмами (1). Предположим, что $u \in \mathcal{F}$, причем $\|u\| = (s_1, \dots, s_n) > 0$ и $d > 1$ — наибольший общий делитель чисел $s_1, \dots, s_n$. Тогда существует и притом единственный с точностью до множителя $\mu \in D$, $\mu^d = 1$, такой элемент $v \in \mathcal{F}$, что $v^d = u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u_0 — наименьший одночлен из u и $u_0 = \tau X_1^{s_1} \dots X_n^{s_n}$. Положим $t_i = s_i/d$, $i = 1, \dots, n$.

Для доказательства теоремы потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 3.12. Существует такой одночлен $v_0 = \zeta X_1^{t_1} \dots X_n^{t_n}$, что $v_0^d = u_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По (10) получаем, что

$$v_0^d = \zeta^d \delta X_1^{s_1} \dots X_n^{s_n}, \quad (28)$$

где δ — произведение мультипараметров q_{ij} , возникающее из (10). Отсюда $\zeta^d = \delta^{-1} \tau$. Так как поле D алгебраически замкнуто, то это уравнение относительно ζ имеет решение, которое определено однозначно с точностью до множителя, являющегося корнем степени d из 1.

Построим по индукции одночлены $v_0, v_1, \dots$, в которых для любого $k \geq 1$ младший член

$$u - (v_0 + \dots + v_{k-1})^d \quad (29)$$

равен

$$\sum_{i=0}^d v_0^i v_k v_0^{d-i-1}, \quad (30)$$

причем

$$\|v_k\| + (d-1)\|v_0\| = \|u - (v_0 + \dots + v_{k-1})^d\| = \left\| \sum_{i=0}^d v_0^i v_k v_0^{d-i-1} \right\|. \quad (31)$$

Заметим, что если элемент (29) равен нулю, то теорема доказана.

Элемент v_0 уже построен в лемме 3.12. Пусть для некоторого $m \geq 0$ уже построены элементы $v_0, \dots, v_m$.

ЛЕММА 3.13. Для любого индекса k справедливо неравенство $\|v_k\| > \|v_{k-1}\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу выбора v_0, v_1 получаем, что $\|v_1\| > \|v_0\|$. Пусть уже доказано, что $\|v_0\| < \dots < \|v_k\|$. Тогда элемент (31) является младшим членом в (29). Поэтому в силу индукции

$$u - (v_0 + \dots + v_k)^d = u - (v_0 + \dots + v_{k-1})^d - \sum_{i=0}^d v_0^i v_k v_0^{d-i-1} + \Phi, \quad (32)$$

где по индукции

$$\|\Phi\| > \left\| \sum_{i=0}^d v_0^i v_k v_0^{d-i-1} \right\| = \|v_k\| + (d-1)\|v_0\|. \quad (33)$$

Поэтому

$$\|u - (v_0 + \dots + v_k)^d\| = \|v_{k+1}\| + (d-1)\|v_0\| \geq \|\Phi\| > \|v_k\| + (d-1)\|v_0\|.$$

Отсюда $\|v_{k+1}\| > \|v_k\|$.

Приступим к построению элемента v_{m+1} . В силу леммы 3.13, (32), (33)

$$\begin{aligned} \|u - (v_0 + \dots + v_m)^d\| &> \|u - (v_0 + \dots + v_{m-1})^d\| \\ &= \|v_m\| + (d-1)\|v_0\| > (d-1)\|v_0\|. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} (q_1, \dots, q_n) &= \|u - (v_0 + \dots + v_m)^d\|, \\ (l_1, \dots, l_n) &= (q_1, \dots, q_n) - (d-1)\|v_0\| > 0. \end{aligned}$$

Будем искать v_{m+1} в виде $v_{m+1} = \omega X_1^{l_1} \dots X_n^{l_n}$, причем выполняются условия (29), (30) с $k = m+1$. По предложению 1.2 для любого $i = 1, \dots, d-1$

$$\begin{aligned} v_0^i v_{m+1} v_0^{d-1-i} &= v_0^{d-1} [v_0^{1+i-d} v_{m+1} v_0^{d-i-1}] \\ &= v_0^{d-1} \left\{ \left[\prod_{1 \leq k < j \leq n} q_{jk}^{(t_k l_j - t_j l_k)(d-i-1)} \right] v_{m+1} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sum_{i=0}^d v_0^i v_{m+1} v_0^{d-i-1} = (1 + \theta + \dots + \theta^{d-1}) v_0^{d-1} v_{m+1}, \quad (34)$$

где

$$\theta = \prod_{1 \leq k < j \leq n} q_{jk}^{t_k l_j - t_j l_k}. \quad (35)$$

Рассмотрим, при каких условиях элемент $1 + \theta + \dots + \theta^{d-1}$ из (35) равен 0. Поскольку D – поле нулевой характеристики, то это возможно только в случае, если $\theta \neq 1$ и θ является корнем из 1.

Пусть $\theta^N = 1$ для некоторого натурального числа N . Тогда

$$\prod_{1 \leq k < j \leq n} q_{jk}^{(t_k l_j - t_j l_k)N} = 1.$$

По условию (*) это означает, что $(t_k l_j - t_j l_k)N = 0$ для всех $k < j$. Отсюда $t_k l_j - t_j l_k = 0$ и поэтому $\theta = 1$. Но тогда $1 + \theta + \dots + \theta^{d-1} = d \neq 0$.

Итак, если младший член (29) с $k = m + 1$ равен

$$\nu X_1^{q_1} \dots X_n^{q_n}, \quad \nu \in D^*,$$

то из (34) получаем

$$\begin{aligned} \nu X_1^{q_1} \dots X_n^{q_n} &= (1 + \theta + \dots + \theta^{d-1}) v_0^{d-1} v_{m+1} \\ &= \omega (1 + \theta + \dots + \theta^{d-1}) v_0^{d-1} \delta X_1^{q_1} \dots X_n^{q_n}, \end{aligned} \quad (36)$$

где δ – произведение мультипараметров с показателями, зависящими от показателей v_0 и $q_1, \dots, q_n$. Из уравнения (36) находим ω и тем самым строим v_{m+1} .

Итак, мы получили элемент $v = v_0 + v_1 + \dots \in \mathcal{F}$, поскольку $\text{supp } v = \{\|v_k\| : k \geq 0\} \cup \infty$. Кроме того, $v^k = u$.

Отметим, что элементы $v_1, v_2, \dots$ однозначно определяются по элементу v_0 , который определен с точностью до множителя $\nu \in D$, где $\nu^d = 1$. Поэтому v определен с точностью до этого множителя $\nu \in D$. Теорема 3.11 доказана.

Следующая теорема обобщает теорему 2.2 работы [14].

ТЕОРЕМА 3.14. Пусть D – поле нулевой характеристики и автоморфизмы (1) действуют тождественно на D . Предположим, что выполнено свойство (*) и $f \in \mathcal{F} \setminus D$. Тогда централизатор элемента f в $\mathcal{F}$ коммутативен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что поле D алгебраически замкнуто. Нам потребуются следующие леммы.

ЛЕММА 3.15. Пусть $h = \lambda X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}$, $g = \nu X_1^{s_1} \dots X_n^{s_n}$, где $\lambda, \nu \in D^*$. Предположим, что

$$\|h\| = (m_1, \dots, m_n), \quad \|g\| = (s_1, \dots, s_n) \geq 0.$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $hg = gh$;
- 2) существуют такие натуральные числа r, t , что $r\|h\| = t\|g\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условие 1) в силу (10) эквивалентно равенству

$$\prod_{i < j} q_{ji}^{m_j s_i} = \prod_{i < j} q_{ji}^{s_j m_i}. \quad (37)$$

По свойству (*) равенство (37) эквивалентно тому, что $m_j s_i = s_j m_i$ для любых i, j , т.е. ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} m_1 & \dots & m_n \\ s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix}$$

равен 1. Отсюда

$$r\|h\| = r(m_1, \dots, m_n) = t(s_1, \dots, s_n) = t\|g\|$$

для некоторых $r, t \in \mathbb{Z} \setminus 0$. Без ограничения общности можно считать, что $r > 0$. Если $t < 0$, то $t\|g\| < 0 < r\|h\|$, что невозможно.

Докажем теперь утверждение теоремы. Если $\|f\| = 0$, то $f = \lambda + f_1$, где $\lambda \in D^*$ и $\|f_1\| > 0$. Так как каждый элемент из D централен по условию, мы можем заменить элемент f на $f_1 = f - \lambda$. Если $\|f\| < 0$, то мы можем заменить элемент f на f^{-1} , причем $\|f^{-1}\| = -\|f\| > 0$. Таким образом, без ограничения общности мы можем предполагать, что $\|f\| > 0$.

ЛЕММА 3.16. Пусть $u, h \in \mathcal{F}$ и $\|u\| = (s_1, \dots, s_n)$, причем наибольший общий делитель чисел $s_1, \dots, s_n$ равен $d > 1$. Пусть $v \in \mathcal{F}$, причем $v^d = u$ в соответствии с теоремой 3.11. Если $hu = uh$, то $hv = vh$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$(h^{-1}vh)^d = h^{-1}v^d h = h^{-1}uh = h.$$

По теореме 3.11 получаем, что

$$h^{-1}vh = \nu v, \quad \text{где } \nu \in D, \quad \nu^d = 1.$$

Предположим, что

$$h_0 = \tau X_1^{p_1} \dots X_n^{p_n}, \quad v_0 = \xi X_1^{t_1} \dots X_n^{t_n}$$

— младшие члены h и v соответственно. Тогда $h_0^{-1}v_0 h_0 = \nu v_0$. По предложению 1.2 получаем

$$\xi \left[\prod_{1 \leq k < j \leq n} q_{jk}^{p_k t_j - p_j t_k} \right] X_1^{t_1} \dots X_n^{t_n} = \nu \xi X_1^{t_1} \dots X_n^{t_n}. \quad (38)$$

Так как $\nu^d = 1$, то в силу свойства (*) для всех $k < j$ выполняются равенства $d(p_k t_j - p_j t_k) = 0$. Отсюда $p_k t_j - p_j t_k = 0$ для всех k, j . Поэтому в (38) получаем $\nu = 1$, т.е. $hv = vh$.

Пусть C — централизатор элемента f , где

$$\|f\| = (s_1, \dots, s_n) > 0.$$

В силу леммы 3.16 централизатор f совпадает с централизатором такого элемента v , что $v^d = f$, где d — наибольший общий делитель элементов $s_1, \dots, s_n$. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что $d = 1$.

ЛЕММА 3.17. Пусть g лежит в централизаторе C элемента f , причем $\|g\| > 0$. Существует такое натуральное число t , что $\|g\| = t\|f\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.15 найдутся такие натуральные числа r, t , что $r\|g\| = t\|f\|$. Без ограничения общности можно предполагать, что числа r, t взаимно просты. Тогда r делит все числа $s_1, \dots, s_n$. Отсюда $r = 1$.

Завершим доказательство теоремы. По лемме 3.17 существует такое $\lambda \in D$, что $\|g - \lambda f^t\| > \|g\|$, причем $g - \lambda f^t \in C$. Как и в [14; теорема 2.2], мы завершаем доказательство.

ТЕОРЕМА 3.18. Пусть элемент $f \in \mathcal{F}$ перестановочен с элементами (4) и с каждым элементом из D . Тогда $f \in D$, причем f является центральным элементом тела $\mathcal{F}$. В частности, центр тела $\mathcal{F}$ содержится в D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем отождествлять элементы F с их образами в $\mathcal{F}$. Пусть $f \neq 0$ и $\|f\| = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$. По (24)

$$\begin{aligned} (fX_i)(\|f\| + \|X_i\|) &= f(\|f\|)q_{i,i+1}^{-l_{i+1}} \cdots q_{in}^{-l_n} u(1, l, \|X_i\|), \\ u(1, \|f\|, \|X_i\|) &\in N. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (X_i f)(\|f\| + \|X_i\|) &= q_{i,1}^{l_1} \cdots q_{i,i-1}^{l_{i-1}} u(f(\|f\|), \|f\|, \|X_i\|), \\ u(f(\|f\|), \|f\|, \|X_i\|) &\in N. \end{aligned}$$

Так как элемент f перестановочен с элементами (4), то в D^* получаем

$$q_{i,i+1}^{-l_{i+1}} \cdots q_{in}^{-l_n} \equiv q_{i,1}^{l_1} \cdots q_{i,i-1}^{l_{i-1}} \pmod{N}.$$

В силу свойства (*) мы получаем $l_1 = \dots = l_{i-1} = l_{i+1} = \dots = l_n = 0$. Так как $i = 1, \dots, n$ — произвольный индекс, то $\|f\| = 0$ и $f(0) \in D$ — центральный элемент тела $\mathcal{F}$. Более того, $f - f(0)$ обладает тем же свойством перестановочности, что и f . Следовательно, $\|f - f(0)\| = 0$, если $f - f(0) \neq 0$, что невозможно. Итак, $f = f(0) \in D^*$.

ТЕОРЕМА 3.19. Предположим, что каждый мультипараметр (6) лежит в центре тела D и автоморфизмы (1) действуют тождественным образом на D . Пусть $\gamma \in \text{IAut } F$. Тогда существует такой элемент $z \in \mathcal{F}$, что $\|z\| > 0$ и $\gamma(f) = (1 - z)^{-1} f (1 - z)$ для всех $f \in F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ имеет вид (21). По теореме 2.7 существуют такая последовательность одночленов $a(1), a(2), \dots$ и последовательность элементов $u_i(1) = v_i, u_i(2), \dots$ в F , где $i = 1, \dots, n$, что для всех $k \geq 1$ и всех $i = 1, \dots, n$

$$\left[\prod_{j=1, \dots, k} (1 - a(j)) \right]^{-1} \gamma(X_i) \left[\prod_{j=1, \dots, k} (1 - a(j)) \right] = X_i + u_i(k+1),$$

где

$$\|a(k)\| = \min \|u_i(k)\|, \quad \min \|u_i(k+1)\| > \min \|u_i(k)\|. \quad (39)$$

Мы утверждаем, что

$$h = \prod_{k \geq 1} (1 - a(k)) \in \mathcal{F}. \quad (40)$$

Действительно, пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$. Рассмотрим строго возрастающую последовательность

$$X = \{\|a(1)\| < \|a(2)\| < \dots\} \cup \infty.$$

В силу предложения 3.10 для любого $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$ в h из (40) имеется лишь конечное число слагаемых вида $\alpha X_1^{l_1} \dots X_n^{l_n}$.

СЛЕДСТВИЕ 3.20. *Пусть каждый мультипараметр из (6) лежит в центре тела D и автоморфизмы (1) действуют тождественно на теле D . Тогда группа $\text{IAut } F$ не имеет кручения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma \in \text{IAut } F$ имеет конечный порядок $k \geq 2$ и $\gamma(f) = (1 - z)^{-1}f(1 - z)$, где z из теоремы 3.19. В этом случае $(1 - z)^k$ перестановочно с элементами (4) и потому $(1 - z)^k \in D$ в силу теоремы 3.18.

Предположим, что $z \neq 0$. Тогда $\|z\| > 0$ по теореме 3.19 и поэтому $(1 - z)^k - 1 \notin D$, что противоречит предположению.

ТЕОРЕМА 3.21. *Пусть каждый мультипараметр из (6) лежит в центре тела D и автоморфизмы (1) действуют тождественно на теле D . Тогда каждая конечная подгруппа в $\text{Aut}^+ F$ является абелевой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma \in \text{Aut}^+ F$. По предложению 2.6 имеем $\gamma = \theta\tau$, где θ из группы (23) и $\tau \in \text{IAut } F$. При этом отображение $\gamma \mapsto \theta$ является гомоморфизмом групп

$$\Phi: \text{Aut}^+ F \rightarrow \text{Aut}^+ F \cap \text{EAut } F, \quad \ker \Phi = \text{IAut } F.$$

Если G — конечная подгруппа в группе (23), то $G \cap \ker \Phi$ является конечной подгруппой в $\text{IAut } F$. По следствию 3.20 это пересечение тривиально.

Таким образом, Φ индуцирует вложение группы G в группу (23). Остается заметить, что по предложению 2.6 группа (23) абелева.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.22. *Пусть каждый мультипараметр из (6) лежит в центре тела D и автоморфизмы (1) действуют тождественно на теле D . Предположим, что $\gamma \in \text{Aut}^+ F$ имеет вид (22). Тогда существует такой элемент $z \in \mathcal{F}$, что $\|z\| > 0$ и для любого индекса $i = 1, \dots, n$*

$$\gamma(X_i) = \gamma_i(1 - z)^{-1}X_i(1 - z), \quad \gamma_i \in D^*. \quad (41)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечено в теореме 2.3 и в замечании 2.5, $\gamma = \theta\lambda$, где $\theta(X_i) = \gamma_i X_i$ для всех i и $\lambda \in \text{IAut } F$. Кроме того, по теореме 3.19 найдется такой элемент $u \in \mathcal{F}$, что $\|u\| > 0$ и $\lambda(f) = (1 - u)^{-1}f(1 - u)$ для всех $f \in \mathcal{F}$. Отсюда

$$\begin{aligned}\gamma(X_i) &= \theta[(1 - u)^{-1}f(1 - u)] = (1 - \theta(u))^{-1}(\gamma_i X_i)(1 - \theta(u)) \\ &= \gamma_i(1 - \theta(u))^{-1}X_i(1 - \theta(u)).\end{aligned}$$

Остается положить $z = \theta(u)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.23. *Предположим, что все мультипараметры из (6) лежат в центре тела D и автоморфизмы (1) действуют тождественно на теле D . Пусть $\gamma \in \text{Aut}^+ F$ имеет вид (22). Если $m \geq 1$, то для любого $i = 1, \dots, n$*

$$\gamma^m(X_i) = \gamma_i^m \left[\prod_{j=m-1}^0 (1 - \theta^j(z)) \right]^{-1} X_i \left[\prod_{j=m-1}^0 (1 - \theta^j(z)) \right]. \quad (42)$$

В частности, если γ имеет конечный порядок d , то $\gamma_i^d = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$. Кроме того,

$$\prod_{i=d-1}^0 (1 - \theta^i(z)) = 1. \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обозначениях предложения 2.6 имеем $\gamma = \theta\lambda$. В силу этого предложения получаем $\theta^d = 1$, откуда вытекает первое утверждение. Кроме того, для любого натурального числа j имеем

$$\gamma^j = (\theta\lambda)^j = \theta^j \prod_{s=j-1}^0 (\theta^{-s}\lambda\theta^s).$$

Для любого $i = 1, \dots, n$, получаем

$$(\theta^{-s}\lambda\theta^s)(X_i) = (1 - \theta^{-s}(z))^{-1}X_i(1 - \theta^{-s}(z)).$$

Таким образом, γ^m имеет вид (42). Если γ имеет порядок d , то

$$X_i = \left[\prod_{j=d-1}^0 (1 - \theta^{-j}(z))^{-1} \right] X_i \left[\prod_{j=d-1}^0 (1 - \theta^{-j}(z)) \right].$$

Следовательно, по теореме 3.18 элемент

$$e = \prod_{j=d-1}^0 (1 - \theta^j(z))$$

лежит в k . Но $e = 1 + e'$, где $\|e'\| > 0$. Поэтому $e = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.24. Пусть $D = k$ — поле нулевой характеристики с тождественными автоморфизмами (1). Предположим, что $z \in \mathcal{F}$, причем $\infty > \|z\| > 0$ и θ из группы (23) имеет порядок d , причем выполнено равенство (43). Тогда существует такой элемент $w \in \mathcal{F}$, что $\|w\| > 0$ и

$$1 - z = (1 - \theta(w))(1 - w)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть z_0 — минимальный одночлен, входящий в z . Заметим, что $\theta(z_0) \neq z_0$. Действительно, из (43) имеем

$$0 = \prod_{j=d-1}^0 (1 - \theta^j(z)) - 1 = -z_0 - \theta(z_0) - \dots - \theta^{d-1}(z_0) + z', \quad (44)$$

где $\|z'\| > \|z_0\|$. Таким образом, если $\theta(z_0) = z_0$, то в (44) получаем $dz_0 = 0$ и $z_0 = 0$, что невозможно.

Итак, $\theta(z_0) \neq z_0$. В этом случае в силу определения θ получаем, что $\theta(z_0) = \lambda z_0$, $\lambda \neq 1$. Положим $w_1 = (\lambda - 1)^{-1} z_0$. Тогда

$$\begin{aligned} (1 - \theta(w_1))^{-1}(1 - z)(1 - w_1) &= 1 + \theta(w_1) + z_0 - w_1 + \widehat{z} \\ &= 1 + (\lambda - 1)^{-1} \lambda z_0 - z_0 - (\lambda - 1)^{-1} z_0 + \widehat{z} \\ &= 1 + [(\lambda - 1)^{-1} \lambda - 1 - (\lambda - 1)^{-1}] z_0 + \widehat{z} = 1 + \widehat{z}, \end{aligned}$$

где $\|\widehat{z}\| > \|z_0\|$. При этом

$$\begin{aligned} \prod_{j=d-1}^0 (1 - \theta^j(\widehat{z})) &= \prod_{j=d-1}^0 [(1 - \theta^{j+1}(w_1))^{-1}(1 - \theta^j(z))(1 - \theta^j(w_1))] \\ &= (1 - w_1)^{-1} \left[\prod_{j=d-1}^0 (1 - \theta^j(z)) \right] (1 - w_1) \\ &= (1 - w_1)^{-1} (1 - w_1) = 1. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, получаем последовательность одночленов $w_1, w_2, \dots$, причем $0 < \|w_1\| < \|w_2\| < \dots$. Как и в (40), получаем, что

$$\prod_{j \geq 1} (1 - w_j) = 1 - w \in \mathcal{F}.$$

Кроме того, $(1 - \theta(w))^{-1}(1 - z)(1 - w) = 1$. Отсюда получаем требуемое утверждение.

ТЕОРЕМА 3.25. Пусть $D = k$ — поле нулевой характеристики с тождественными автоморфизмами (1). Предположим, что $\gamma \in \text{Aut}^+ F$ имеет конечный порядок и θ из предложения 3.22. Тогда существует такой элемент $w \in \mathcal{F}$, что $\gamma = \text{Ad}(1 - w) \cdot \theta \cdot \text{Ad}(1 - w)^{-1}$, где $\text{Ad}(1 - w)$ — внутренний автоморфизм $\mathcal{F}$ сопряжения с помощью $1 - w$, т.е. $\text{Ad}(1 - w)f = (1 - w)f(1 - w)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 3.22 имеем

$$\gamma(X_i) = (1 - z)^{-1} \theta(X_i) (1 - z).$$

По предложению 3.24 получаем $1 - z = (1 - \theta(w))(1 - w)^{-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \gamma(X_i) &= (1 - w)(1 - \theta(w))^{-1} \theta(X_i) (1 - \theta(w))(1 - w)^{-1} \\ &= (1 - w) \theta[(1 - w) X_i (1 - w)^{-1}] (1 - w)^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает утверждение.

Из теоремы 3.25 вытекает, что для элемента конечного порядка $\gamma \in \text{Aut}^+ F$ и θ из группы (23); из предложения 3.22 подтело F^γ инвариантов элемента γ имеет вид $F^\gamma = (1 - w) F^\theta (1 - w)^{-1}$, где F^θ — подтело инвариантов θ . Но подтело F^θ является телом частных кольца инвариантов Λ^θ , где Λ — кольцо (3).

Список литературы

1. McConnell J. C., Pettit J. J. Crossed products and multiplicative analogues of Weyl algebras // J. London Math. Soc. 1988. V. 38. № 1. P. 47–55.
2. Демидов Е. Е. Квантовые группы. М.: Факториал, 1998.
3. Артамонов В. А. Квантовая проблема Серра // УМН. 1998. Т. 53. № 4. С. 3–76.
4. Артамонов В. А. Проективные модули над алгебрами квантовых многочленов // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 7. С. 3–12.
5. Artamonov V. A. Quantum polynomial algebras // J. Math. Sci. 1997. V. 87. № 3. P. 3441–3462.
6. Brown K. A., Goodearl K. R. Prime spectra of quantum semisimple groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 348. № 6. P. 2465–2501.
7. Goodearl K. G., Letzter E. S. Prime factor of the coordinate ring of quantum matrices // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 121. № 4. P. 1017–1025.
8. Goodearl K. G., Letzter E. S. Prime and primitive spectra of multiparameter quantum affine spaces // Trends in ring theory. Proceedings of a conference at Miskolc, Hungary, July 15–20, 1996. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. P. 39–58.
9. Alev J., Chamarie M. Dérivations et automorphismes de quelques algèbres quantiques // Comm. Algebra. 1992. V. 20. № 6. P. 1787–1802.
10. Kirkman E., Procesi C., Small L. A q -analog for the Virasoro algebra // Comm. Algebra. 1994. V. 20. № 10. P. 3755–3774.
11. Osborn J. M., Passman D. S. Derivations of skew polynomial rings // J. Algebra. 1995. V. 176. № 2. P. 417–448.
12. Alev J., Dumas F. Automorphismes de certains complétés de corps de Weyl quantiques // Collect. Math. 1995. V. 46. № 1–2. P. 1–9.
13. Alev J., Dumas F. Invariants du corps de Weyl sous l'action de groupes finis // Comm. Algebra. 1997. V. 25. № 5. P. 1655–1672.
14. Artamonov V. A., Cohn P. M. On the skew field of rational functions on the quantum plane // J. Math. Sci. 1999. V. 93. № 6. P. 824–829.
15. Исковских В. А. Образующие и соотношения в двумерной группе Кремоны // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1983. № 5. С. 43–48.
16. Мальцев А. И. О включении групповых алгебр в алгебры с делением // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. С. 1499–1501.
17. Liu Zhongkui. PF-rings of generalized power series // Bull. Austral. Math. Soc. 1998. V. 57. P. 427–432.

18. *Ribenboim P.* Rings of generalized power series II: units and zero divisors // J. Algebra. 1994. V. 168. P. 71–89.
19. *Ribenboim P.* Semisimple rings and von Neumann regular rings of generalized power series // J. Algebra. 1997. V. 198. P. 327–338.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `artamon@mech.math.msu.su`

Поступила в редакцию
09.12.1999