Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Данилов, О почти периодических мерозначных функциях, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 12, 27–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm527>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:12:43

УДК 517.9

Л. И. Данилов

О почти периодических мерозначных функциях

Рассматриваются слабо почти периодические мерозначные функции $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t]$ со значениями в пространстве $\mathcal{M}(U)$ борелевских знакопеременных мер на полном сепарабельном метрическом пространстве U . На линейном пространстве $\mathcal{M}(U)$ вводится норма $\|\cdot\|_w$, которая на множестве вероятностных борелевских мер определяет метрику, эквивалентную метрике Леви–Прохорова. Устанавливается связь между почти периодичностью мерозначной функции $t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in (\mathcal{M}(U), \|\cdot\|_w)$ и ее слабой почти периодичностью (как по Бору, так и по Степанову).

Библиография: 20 названий.

Пусть (U, ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathcal{M}(U)$ – линейное пространство борелевских знакопеременных мер (зарядов), определенных на σ -алгебре $\mathcal{B}(U)$ борелевских множеств $\mathcal{O} \subset U$, наделенное нормой

$$\|\mu\|_w = \sup_{F \in \mathcal{L}(U)} \left| \int_U F(x) \mu[dx] \right|, \quad \mu[\cdot] \in \mathcal{M}(U),$$

где $\mathcal{L}(U)$ – множество функций $U \ni x \rightarrow F(x) \in \mathbb{R}$ таких, что $0 \leq F(x) \leq 1$ и $|F(x) - F(y)| \leq \rho(x, y)$ для всех $x, y \in U$. Обозначим через $\mathcal{M}_0(U)$ множество вероятностных борелевских мер из $\mathcal{M}(U)$. На множестве $\mathcal{M}_0(U)$ норма $\|\cdot\|_w$ определяет метрику, эквивалентную метрике Леви–Прохорова ρ_0 [1; с. 377].

Пусть $CAP(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ и $S_p(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ – множества почти периодических (п.п.) по Бору и п.п. по Степанову степени $p \geq 1$ мерозначных функций $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t]$ со значениями в линейном нормированном пространстве $(\mathcal{M}(U), \|\cdot\|_w)$. Мерозначная функция $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(U)$ называется *слабо почти периодической по Бору* (слабо п.п. по Степанову степени $p \geq 1$), если для любой непрерывной ограниченной функции $F \in C_b(U) = C_b(U, \mathbb{R})$ функция $t \rightarrow \int_U F(x) \mu[dx; t]$ п.п. по Бору (п.п. по Степанову степени p). Соответствующие множества слабо п.п. функций обозначим через $CAP^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ и $S_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$.

Мерозначные функции используются в задачах теории управления [2]–[4]. Слабо п.п. по Степанову мерозначные функции при исследовании оптимального п.п. управления рассматривались в [5], [6]. В [7] доказано, что многозначные отображения $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \text{supp } \mu[\cdot; t]$, где $\mu[\cdot; \cdot] \in S_1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_0(U))$, и только они представимы в виде $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \overline{f_j(t)}$, $t \in \mathbb{R}$, где $f_j(\cdot)$ – п.п. по Степанову функции ($\text{supp } \mu$ – носитель меры $\mu \in \mathcal{M}_0(U)$, $\overline{A}$ – замыкание множества $A \subset U$). В ряде задач возникает необходимость использовать также функции $\mu[\cdot; t]$ со знакопеременной мерой (в частности, при изучении систем интегро-дифференциальных уравнений [8; приложение А], систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием [9], а также в задачах управления системами с распределенными параметрами [10]).

В настоящей работе рассматриваются слабо почти периодические мерозначные функции $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(U)$. Устанавливается связь между слабой почти периодичностью функции $t \rightarrow \mu[\cdot; t]$ и почти периодичностью этой функции со значениями в линейном нормированном пространстве $(\mathcal{M}(U), \|\cdot\|_w)$.

В § 1 приведены определения и сформулирован ряд утверждений, которые существенно используются в дальнейшем. Относительно утверждений о п.п. функциях см. [11], [12], о борелевских мерах – [13]. Основные результаты содержатся во втором и третьем параграфах. Пусть $\mathcal{M}^+(U)$ – множество неотрицательных мер из $\mathcal{M}(U)$, $|\mu| \in \mathcal{M}^+(U)$ – полная вариация меры $\mu \in \mathcal{M}(U)$. В § 2 доказано, что мерозначная функция $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(U)$ слабо п.п. по Бору тогда и только тогда, когда $\mu[\cdot; \cdot] \in CAP(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ и найдется компакт $K \subset (\mathcal{M}(U), \|\cdot\|_w)$ такой, что $|\mu|[\cdot; t] \in K$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Доказательство основано на следующем утверждении (которое вытекает из теоремы 2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ – банахово пространство и $f_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$, $j \in \mathbb{N}$, – последовательность функций таких, что при всех $t \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{j \in \mathbb{N}} f_j(t)$ безусловно сходится. Предположим, что для всех (непустых) множеств $J \subset \mathbb{N}$ функции $t \rightarrow \sum_{j \in J} f_j(t)$ п.п. по Бору. Тогда

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \sum_{j \geq l} f_j(t) \right\| \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow +\infty.$$

Аналогичное утверждение (являющееся следствием теоремы 4) справедливо также для п.п. по Степанову функций $f_j \in S_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $j \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ – банахово пространство и $f_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$, $j \in \mathbb{N}$, – последовательность функций таких, что для любого (непустого) множества $J \subset \mathbb{N}$ ряд $\sum_{j \in J} f_j(t)$ при почти всех $t \in \mathbb{R}$ (за исключением множества нулевой меры, зависящего от J) сходится к некоторой функции $f(J; t)$ из $S_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Тогда

$$\|f(\{j \in \mathbb{N} : j \geq l\}; \cdot)\|_{S_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})} \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow +\infty.$$

В [14] была доказана эквивалентность понятий почти периодичности и слабой почти периодичности (как по Бору, так и по Степанову) для мерозначных функций $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in (\mathcal{M}_0(U), \rho_0)$. При доказательстве использовались частный случай предложения 1 для пространства $\mathcal{H} = \mathbb{R}$ и функций $f_j \geq 0$, $j \in \mathbb{N}$, а также равномерная аппроксимация п.п. по Степанову функций элементарными п.п. функциями [15]. Неотрицательность функций f_j использовалась существенно, и предложенные в [14] доказательства не переносятся на общий случай.

В § 3 определяются разные множества п.п. по Степанову мерозначных функций и устанавливаются соотношения между ними. В общем случае условия $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ и $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ независимы. Выделяется множество $\tilde{S}_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ мерозначных функций $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(U)$ таких, что для любой периодической функции $\mathbb{R} \ni t \rightarrow F(\cdot, t) \in C_b(U)$, для которой $F(x, \cdot)$ – измеримая функция при всех $x \in U$ и $\text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} \|F(\cdot, t)\|_{C_b(U)} < +\infty$, функция $t \rightarrow \int_U F(x, t) \mu[dx; t]$ п.п. по Степанову (степени p). Для функций

$\mu[\cdot; \cdot] \in \tilde{S}_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ справедливы утверждения, аналогичные утверждениям для п.п. по Бору мерозначных функций. Если $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ и $\mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}^+(U)$ п.в., то $\mu[\cdot; \cdot] \in \tilde{S}_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$.

В последних двух параграфах доказываются приведенные в предыдущих разделах теоремы 2 и 4.

§ 1. Определения, обозначения и некоторые утверждения

Пусть (U, ρ) – метрическое пространство. Функция $f: T \rightarrow U$, где $T \subset \mathbb{R}$ – измеримое (по Лебегу) множество, называется *элементарной*, если найдутся измеримые (по Лебегу) непересекающиеся множества $T_j \subset T$ и точки $x_j \in U$ (множество индексов не более чем счетно) такие, что $m(T \setminus \bigcup T_j) = 0$ ($m(\cdot)$ – мера Лебега) и $f(t) = x_j$ при всех $t \in T_j$. Функция $f: T \rightarrow U$ (определенная при почти всех (п.в.) $t \in T$) *измерима*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется элементарная функция $f_\varepsilon: T \rightarrow U$ такая, что $\rho(f(t), f_\varepsilon(t)) < \varepsilon$ при п.в. $t \in T$.

Зафиксируем точку $x_0 \in U$. Через $M_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geq 1$, обозначим множество измеримых функций $f: \mathbb{R} \rightarrow U$ (совпадающие почти всюду (п.в.) функции отождествляются) таких, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int_t^{t+1} \rho^p(f(t), x_0) dt < +\infty.$$

На $M_p(\mathbb{R}, U)$ вводится метрика

$$D_p^{(\rho)}(f_1, f_2) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\int_t^{t+1} \rho^p(f_1(t), f_2(t)) dt \right)^{1/p}, \quad f_1, f_2 \in M_p(\mathbb{R}, U).$$

Множество функций $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, для которых

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{L \subset [t, t+1]: m(L) \leq \delta} \int_L \rho^p(f(t), x_0) dt = 0,$$

обозначим через $M'_p(\mathbb{R}, U)$.

Для любого $\varepsilon > 0$ число $\tau \in \mathbb{R}$ называется ε -почти периодом функции $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, если $D_p^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) < \varepsilon$. Функция $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$ принадлежит множеству $S_p(\mathbb{R}, U)$ *почти периодических* (п.п.) *по Степанову* степени $p \geq 1$ функций, если для любого $\varepsilon > 0$ множество ε -почти периодов функции f относительно плотно [11]. Справедливо вложение $S_p(\mathbb{R}, U) \subset M'_p(\mathbb{R}, U)$. Последовательность $\{\tau_j\} \subset \mathbb{R}$ называется *f-возвращающей* для функции $f \in M_p(\mathbb{R}, U)$, если $D_p^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau_j)) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$. Каждой функции $f \in S_p(\mathbb{R}, U)$ ставится в соответствие модуль (группа по сложению) $\text{Mod } f \subset \mathbb{R}$, состоящий из тех чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, для которых $e^{i\lambda\tau_j} \rightarrow 1$ ($i^2 = -1$) при $j \rightarrow +\infty$ для любой f -возвращающей последовательности $\{\tau_j\}$. Если функция $f \in S_p(\mathbb{R}, U)$ не является (п.в.) постоянной, то $\text{Mod } f$ – счетное множество.

На множестве $L_\infty(\mathbb{R}, U)$ измеримых и в существенном ограниченных функций $f: \mathbb{R} \rightarrow U$ рассматривается метрика

$$D_\infty^{(\rho)}(f_1, f_2) = \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} \rho(f_1(t), f_2(t)), \quad f_1, f_2 \in L_\infty(\mathbb{R}, U).$$

Число $\tau \in \mathbb{R}$ называется ε -почти периодом функции $f \in L_\infty(\mathbb{R}, U)$, если $D_\infty^{(\rho)}(f(\cdot), f(\cdot + \tau)) < \varepsilon$. Непрерывная ограниченная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow U$ называется *почти периодической по Бору* (равномерной п.п.), если для любого $\varepsilon > 0$ относительно плотно множество ε -почти периодов функции f [11]. Множество п.п. по Бору функций обозначим через $CAP(\mathbb{R}, U)$. Любая функция $f \in CAP(\mathbb{R}, U)$ равномерно непрерывна и $CAP(\mathbb{R}, U) \subset S_p(\mathbb{R}, U) \subset S_1(\mathbb{R}, U)$. Для функции $f \in CAP(\mathbb{R}, U)$ с помощью метрики $D_\infty^{(\rho)}$ (как и для функций из $S_p(\mathbb{R}, U)$) определяются f -возвращающие последовательности $\{\tau_j\}$ (и $\text{Mod } f$). При этом f -возвращающие последовательности для п.п. функций f не зависят от того, какому из рассматриваемых пространств их считать принадлежащими.

Если $f \in CAP(\mathbb{R}, U)$, то $\{f(t) : t \in \mathbb{R}\} \subset U$ – вполне ограниченное множество. Если $f \in S_p(\mathbb{R}, U)$, $p \geq 1$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует вполне ограниченное множество $K_\varepsilon \subset U$ такое, что $\sup_{t \in \mathbb{R}} m(\{\xi \in [t, t+1] : f(\xi) \notin K_\varepsilon\}) < \varepsilon$.

В случае $U = \mathbb{R}$ будут использоваться краткие обозначения $M_p(\mathbb{R})$, $M'_p(\mathbb{R})$, $S_p(\mathbb{R})$ и $CAP(\mathbb{R})$. Для измеримого множества $T \subset \mathbb{R}$ обычным образом определяются пространства $L_p(T, U)$, $p \geq 1$, и $L_\infty(T, U)$.

Для модулей $\Lambda_j \subset \mathbb{R}$ через $\sum_j \Lambda_j$ обозначается наименьший модуль (группа по сложению), содержащий все множества Λ_j .

Если $f, f_i \in S_p(\mathbb{R}, U)$, $i \in \mathbb{N}$, то $\text{Mod } f \subset \sum_i \text{Mod } f_i$ в том и только том случае, когда всякая f_i -возвращающая для всех $i \in \mathbb{N}$ последовательность $\{\tau_j\} \subset \mathbb{R}$ является f -возвращающей. Если $D_p^{(\rho)}(f, f_i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow +\infty$, то $\text{Mod } f \subset \sum_i \text{Mod } f_i$.

Пусть $C_b(U)$ – банахово пространство непрерывных ограниченных функций $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|F\|_{C_b(U)} = \sup_{x \in U} |F(x)|$, $C_b^+(U)$ – множество неотрицательных функций из $C_b(U)$, $\mathcal{L}(U) = \{F \in C_b(U) : 0 \leq F(x) \leq 1 \text{ и } |F(x) - F(y)| \leq \rho(x, y) \text{ для всех } x, y \in U\}$, $F(\cdot|_A)$ – сужение функции $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ на множество $A \subset U$. Для любых функции $F \in C_b(U)$, числа $\varepsilon > 0$ и компакта $K \subset U$ существует функция $G \in C_b(U)$ такая, что $\lambda G(\cdot) + \gamma \in \mathcal{L}(U)$ для некоторых чисел $\lambda > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, $\inf_{y \in U} F(y) \leq G(x) \leq \sup_{y \in U} F(y)$ для всех $x \in U$ и $|F(x) - G(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in K$.

Будем далее предполагать, что пространство (U, ρ) полное и сепарабельное. Пусть $\mathcal{B}(U)$ – множество борелевских подмножеств пространства U (наименьшая σ -алгебра, содержащая открытые множества), $\mathcal{M}(U)$ – линейное пространство борелевских знакопеременных мер (зарядов) $\mu: \mathcal{B}(U) \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{M}^+(U)$ – множество неотрицательных мер $\mu \in \mathcal{M}(U)$. Через $\mu[\theta]$ будем обозначать значение меры $\mu \in \mathcal{M}(U)$ на множестве $\theta \in \mathcal{B}(U)$ и через $\mu(F)$ значение линейного непрерывного функционала

$$C_b(U) \ni F \rightarrow \mu(F) = \int_U F(x) \mu[dx],$$

δ_x – мера Дирака, сосредоточенная в точке $x \in U$. Для мер $\mu \in \mathcal{M}(U)$ справедливо представление $\mu = \mu^+ - \mu^-$, где $\mu^\pm \in \mathcal{M}^+(U)$ и $\mu^+[\theta_\mu] = \mu^-[U \setminus \theta_\mu] = 0$ для некоторого множества $\theta_\mu \in \mathcal{B}(U)$; $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, $|\mu|[U] = \sup\{\mu(F) : F \in C_b(U), \|F\|_{C_b(U)} \leq 1\}$. Каждая мера $\mu \in \mathcal{M}(U)$ является радоновской, т.е. для любых $\theta \in \mathcal{B}(U)$ и $\varepsilon > 0$ существует компакт $K \subset \theta$ такой, что $|\mu|[\theta \setminus K] < \varepsilon$. На линейном пространстве $\mathcal{M}(U)$ определим норму

$$\|\mu\|_w = \sup_{F \in \mathcal{L}(U)} |\mu(F)|, \quad \mu \in \mathcal{M}(U).$$

Пространство $(\mathcal{M}(U), \|\cdot\|_w)$ – сепарабельное и является полным тогда и только тогда, когда найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $\rho(x, y) \geq \varepsilon$ для всех $x, y \in U$, $x \neq y$. Множество $\mathcal{M}^+(U)$ (в отличие от пространства $\mathcal{M}(U)$) всегда полное. Для любых числа $b \geq 0$ и семейства компактов $K_\delta \subset U$, $\delta > 0$, обозначим $\mathcal{K}(b, \{K_\delta\}) = \{\mu \in \mathcal{M}(U) : |\mu|[U] \leq b \text{ и } |\mu|[U \setminus K_\delta] \leq \delta \text{ для всех } \delta > 0\}$. Множества $\mathcal{K}(b, \{K_\delta\}) \subset (\mathcal{M}(U), \|\cdot\|_w)$ выпуклые и компактные, $\mathcal{K}_U$ – совокупность всех множеств $\mathcal{K}(b, \{K_\delta\})$.

Если $K \subset \mathcal{M}^+(U)$ и K – компактное множество, то $K \subset A$ для некоторого множества $A \in \mathcal{K}_U$. Если $\mu, \mu_j \in A \in \mathcal{K}_U$, $j \in \mathbb{N}$, то $\|\mu - \mu_j\|_w \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$ тогда и только тогда, когда $\mu_j(F) \rightarrow \mu(F)$ при $j \rightarrow +\infty$ для всех функций $F \in C_b(U)$. Поэтому если $A \in \mathcal{K}_U$ или $A = \mathcal{M}^+(U)$, то для любой функции $F \in C_b(U)$ функция $A \ni \mu \rightarrow \mu(F) \in \mathbb{R}$ непрерывна.

ЛЕММА 1. Если (V, ρ_V) – полное метрическое пространство, $f \in CAP(\mathbb{R}, V)$ и функция $\mathbb{R} \ni t \rightarrow F(\cdot, t) \in C_b(V)$ принадлежит пространству $CAP(\mathbb{R}, C_b(V))$, то $F(f(\cdot), \cdot) \in CAP(\mathbb{R})$ и $\text{Mod } F(f(\cdot), \cdot) \subset \text{Mod } f(\cdot) + \text{Mod } F(\cdot, \cdot)$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть (U, ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство, функция $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in A \in \mathcal{K}_U$ принадлежит пространству $CAP(\mathbb{R}, (\mathcal{M}(U), \|\cdot\|_w))$ и $F(\cdot, \cdot) \in CAP(\mathbb{R}, C_b(U))$. Тогда $\mu(F(\cdot, \cdot); \cdot) \in CAP(\mathbb{R})$ и $\text{Mod } \mu(F(\cdot, \cdot); \cdot) \subset \text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] + \text{Mod } F(\cdot, \cdot)$.

ЛЕММА 2. Пусть (V, ρ_V) – полное метрическое пространство, $f \in S_p(\mathbb{R}, V)$, $p \geq 1$, $V \ni x \rightarrow F(x, t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, – непрерывные функции такие, что $|F(x, t)| \leq a_1 \rho(x, x_0) + a_2$ для всех $x \in V$, $t \in \mathbb{R}$, где $a_1, a_2 \geq 0$, $x_0 \in V$, и $F(\cdot|_K, \cdot) \in S_1(\mathbb{R}, C_b(K))$ для всех (непустых) компактных множеств $K \subset V$. Тогда $F(f(\cdot), \cdot) \in S_p(\mathbb{R})$ и $\text{Mod } F(f(\cdot), \cdot) \subset \text{Mod } f(\cdot) + \sum_j \text{Mod } F(\cdot|_{K_j}, \cdot)$, где $K_j \subset V$, $j \in \mathbb{N}$, – любые компактные множества, для которых $\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} m(\{\xi \in [t, t+1] : f(\xi) \notin \bigcup_{i \leq j} K_i\}) = 0$.

Лемма 1 хорошо известна (см., например, [16]). Лемма 2 непосредственно следует из результатов работ [15] и [17].

Для произвольной функции $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(U)$ следующие условия эквивалентны:

- 1) $t \rightarrow \mu[\emptyset; t]$ – измеримая функция для любого множества $\emptyset \in \mathcal{B}(U)$;
- 2) $t \rightarrow \mu(F; t)$ – измеримая функция для любой функции $F \in C_b(U)$;
- 3) $t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in (\mathcal{M}(U), \|\cdot\|_w)$ – измеримая функция.

Пусть $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(U)$ – измеримая функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любого отрезка $[a, b]$, $a \leq b$, найдутся измеримое множество $T \subset [a, b]$ и множество $A \in \mathcal{K}_U$ такие, что $m([a, b] \setminus T) < \varepsilon$ и $\mu[\cdot; t] \in A$ для всех $t \in T$. Функция $t \rightarrow |\mu[\cdot; t]|$ также измерима, и для любого $\varepsilon > 0$ существует элементарная функция $\mathbb{R} \ni t \rightarrow F(\cdot, t) \in C_b(U)$, для которой $\|F(\cdot, t)\|_{C_b(U)} \leq 1$ и $\mu(F(\cdot, t); t) \geq |\mu|[U; t] - \varepsilon$ п.в. $t \in \mathbb{R}$.

§ 2. Мерозначные слабо почти периодические по Бору функции

Через $CAP^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ обозначается множество слабо п.п. по Бору мерозначных функций $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(U)$ (таких, что $\mu(F; \cdot) \in CAP(\mathbb{R})$ для всех $F \in C_b(U)$).

ТЕОРЕМА 1. Пусть (U, ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство и $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(U)$ – произвольная мерозначная функция. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\mu[\cdot; \cdot] \in CAP^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$;
- 2) $\mu[\cdot; \cdot] \in CAP(\mathbb{R}, (\mathcal{M}(U), \|\cdot\|_w))$ и найдется множество $A \in \mathcal{H}_U$ такое, что $\mu[\cdot; t] \in A$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Если выполнены условия 1) и 2), то

$$\text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] = \sum_{F \in C_b(U)} \text{Mod } \mu(F; \cdot). \quad (1)$$

При доказательстве теоремы 1 используются лемма 3 и теорема 2. Доказательство теоремы 2 приведено в § 4.

Если $\mu[\cdot; \cdot] \in CAP(\mathbb{R}, (\mathcal{M}(U), \|\cdot\|_w))$, то не всегда $\mu[\cdot; t] \in A$ при всех $t \in \mathbb{R}$, где A – некоторое множество из $\mathcal{H}_U$. Действительно, пусть $U = [-1, 1]$, $q > 1$, $\mu[\cdot; t] = |\sin t|^{-1/q}(\delta_{\sin t}[\cdot] - \delta_0[\cdot])$ при $t \neq n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, и $\mu[\cdot; t] = 0$ в противном случае. Тогда $t \rightarrow \mu[\cdot; t]$ – непрерывная периодическая с периодом 2π функция и $\int_0^{2\pi} (|\mu[U; t]|)^q dt = +\infty$.

Если $\mu \in CAP(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ и $\mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}^+(U)$, $t \in \mathbb{R}$, то существует множество $A \in \mathcal{H}_U$ такое, что $\mu[\cdot; t] \in A$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Через $\bar{A}$ обозначается замыкание множества $A \subset U$, $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$, $\rho(x, \emptyset) = 1$, $x \in U$; $\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$, $\rho(A, \emptyset) = 1$, $B \subset U$; $A^\delta = \{x \in U : \rho(x, A) < \delta\}$, $\delta > 0$, $\emptyset^\delta = \emptyset$; $\text{supp } F = \overline{\{x \in U : F(x) \neq 0\}}$, $F \in C_b(U)$.

Если $F_j \in C_b^+(U)$, $j \in \mathbb{N}$, и $F_j(x) \downarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$ ($F_j(x) \geq F_{j+1}(x)$, $j \in \mathbb{N}$, и $F_j(x) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$) для всех $x \in U$, то $\max_{x \in K} F_j(x) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$ для любого (непустого) компакта $K \subset U$. Поэтому $\max_{\mu \in A} |\mu(F_j)| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$ для любого множества $A \in \mathcal{H}_U$.

ЛЕММА 3. Пусть $B \subset \mathcal{M}(U)$ – непустое множество такое, что

$$\sup_{\mu \in B} |\mu(F)| < +\infty$$

для всех $F \in C_b(U)$ и для любой последовательности функций $F_j \in C_b^+(U)$, $j \in \mathbb{N}$, для которой $F_j(x) \downarrow 0$, $j \rightarrow +\infty$, при всех $x \in U$, имеем

$$\sup_{\mu \in B} |\mu(F_j)| \rightarrow 0, \quad j \rightarrow +\infty.$$

Тогда $B \subset A$ для некоторого множества $A \in \mathcal{H}_U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что множество B содержит вместе с каждой мерой μ также и меру $-\mu$. Существование числа $b \geq 0$ такого, что $|\mu[U]| \leq b$ для всех мер $\mu \in B$, следует из условия леммы и принципа равномерной ограниченности. Покажем, что для любых $\varepsilon, \delta > 0$ существует компакт $K_{\varepsilon, \delta} \subset U$ такой, что $|\mu[U \setminus K_{\varepsilon, \delta}^\delta]| < \varepsilon$ для всех $\mu \in B$. Допустим противное. Тогда найдутся числа $\varepsilon, \delta > 0$ такие, что для любого компакта $K \subset U$ существует мера $\mu \in B$, для

которой $|\mu|[U \setminus K^\delta] \geq \varepsilon$. В этом случае можно выбрать меры $\mu_j \in B$ и компакты $K_j \subset U$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $K_j \subset K_{j+1}$, $|\mu_i|[U \setminus K_j] < 2^{i-j-4}\varepsilon$, $i = 1, \dots, j$, и $|\mu_{j+1}|[U \setminus K_j^\delta] \geq \varepsilon$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Обозначим $X_j = K_{j+1} \setminus K_j^\delta$. Имеем $|\mu_{j+1}|[X_j] \geq |\mu_{j+1}|[U \setminus K_j^\delta] - |\mu_{j+1}|[U \setminus K_{j+1}] > \varepsilon - \varepsilon/16$, $j \in \mathbb{N}$. Изменяя в случае необходимости знак у мер μ_{j+1} , можно считать, что $\mu_{j+1}^+[X_j] \geq \mu_{j+1}^-[X_j]$. Найдутся компакты $K_j^\pm \subset X_j$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $K_j^+ \cap K_j^- = \emptyset$, $\mu_{j+1}^\pm[K_j^\pm] > \mu_{j+1}^\pm[X_j] - \varepsilon/8$, $\mu_{j+1}^\pm[K_j^\mp] = 0$. Для всех $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$, справедливы неравенства $\rho(X_i, X_j) \geq \delta$. Выберем числа $\delta_j \in (0, \delta/3]$, $j \in \mathbb{N}$, так, что $|\mu_i|[X_j^{\delta_j} \setminus X_j] < 2^{i-j-6}\varepsilon$ при всех $i = 1, \dots, j+1$. Пусть $G_j \in C_b^+(U)$, $j \in \mathbb{N}$, — функции, для которых $0 \leq G_j(x) \leq 1$ при всех $x \in U$, $G_j(x) = 1$ при $x \in K_j^+$ и $G_j(x) = 0$ при $x \in K_j^- \cup (U \setminus X_j^{\delta_j})$. Имеем

$$\begin{aligned} \mu_{j+1}(G_j) &\geq \mu_{j+1}^+[K_j^+] - \mu_{j+1}^-[X_j \setminus K_j^-] - |\mu_{j+1}|[X_j^{\delta_j} \setminus X_j] \\ &> \mu_{j+1}^+[K_j^+] - \frac{\varepsilon}{8} - \frac{\varepsilon}{32} > \frac{1}{2} |\mu_{j+1}|[X_j] - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{32} > \frac{3\varepsilon}{16} \end{aligned}$$

для всех $j \in \mathbb{N}$. При этом $\rho(\text{supp } G_i, \text{supp } G_j) \geq \delta/3$ для всех $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Определим функции $F_j(x) = \sum_{i \geq j} G_i(x)$, $x \in U$, $j \in \mathbb{N}$; $F_j \in C_b^+(U)$ и $F_j(x) \downarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$ для всех $x \in U$. Поэтому $\sup_{\mu \in B} |\mu(F_j)| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$. С другой стороны, для всех $j \in \mathbb{N}$ имеем $\mu_{j+1}(F_j) = \mu_{j+1}(G_j) + \sum_{i \geq j+1} \mu_{j+1}(G_i)$, при этом $\mu_{j+1}(G_j) > 3\varepsilon/16$ и

$$|\mu_{j+1}(G_i)| \leq |\mu_{j+1}|[X_i^{\delta_i} \setminus X_i] + |\mu_{j+1}|[X_i] < 2^{j-i-5}\varepsilon + |\mu_{j+1}|[U \setminus K_i] < 5 \cdot 2^{j-i-5}\varepsilon,$$

$i \geq j+1$. Следовательно, $\mu_{j+1}(F_j) > \varepsilon/32$, $j \in \mathbb{N}$. Полученное противоречие доказывает существование требуемого компакта $K_{\varepsilon, \delta} \subset U$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдём компакты $K_j \subset U$, $j \in \mathbb{N}$, такие, что $|\mu|[U \setminus K_j^{1/j}] < 2^{-j}\varepsilon$ для всех мер $\mu \in B$. Положим $K = \bigcap_j \overline{K_j^{1/j}}$. Множество K компактное и

$$|\mu|[U \setminus K] \leq \sum_j |\mu|[U \setminus K_j^{1/j}] < \varepsilon$$

для всех мер $\mu \in B$. Лемма доказана.

Пусть $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ — (вещественное или комплексное) банахово пространство, $\mathcal{S}_l$ — совокупность непустых подмножеств множества $\{j \in \mathbb{N} : j \geq l\}$, $\mathcal{S}'_l$ — совокупность конечных подмножеств из $\mathcal{S}_l$, $l \in \mathbb{N}$. Множество последовательностей $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$, для которых ряд $\sum_{j \in \mathbb{N}} x_j$ безусловно (при любом порядке суммирования) сходится, обозначим через $Q_{\mathcal{H}}$. Сумма безусловно сходящегося ряда не зависит от порядка суммирования.

Пусть $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$. Обозначим $N_l[\{x_j\}] = \sup_{J \in \mathcal{S}'_l} \|\sum_{j \in J} x_j\|$ (возможно, $N_l[\{x_j\}] = +\infty$), $l \in \mathbb{N}$. Справедливы неравенства $N_l[\{x_j\}] \geq N_{l+1}[\{x_j\}]$, $l \in \mathbb{N}$. Для множества $J \in \mathcal{S}_1$ ряд $\sum_{j \in J} x_j$ сходится, если существует

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \sum_{j \in J, j \leq l} x_j = \sum_{j \in J} x_j.$$

Следующие условия эквивалентны:

- 1) $\{x_j\} \in Q_{\mathcal{H}}$;
- 2) для любого непустого множества $J \subset \mathbb{N}$ ряд $\sum_{j \in J} x_j$ сходится;
- 3) $N_1[\{x_j\}] < +\infty$ и $N_l[\{x_j\}] \rightarrow 0$ при $l \rightarrow +\infty$.

Для непустого множества T обозначим через $Q_{\mathcal{H}}(T)$ множество последовательностей $\{f_j\}$ функций $f_j: T \rightarrow \mathcal{H}$, $j \in \mathbb{N}$, таких, что $\{f_j(t)\} \in Q_{\mathcal{H}}$ для всех $t \in T$. Для $\{f_j\} \in Q_{\mathcal{H}}(T)$ и $J \in \mathcal{S}_1$ положим $f(J; t) = \sum_{j \in J} f_j(t)$, $t \in T$; $f(\{j\}; \cdot) = f_j(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}$, $f(\emptyset; t) = 0$, $t \in T$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ – (вещественное или комплексное) банахово пространство и $\{f_j\} \in Q_{\mathcal{H}}(\mathbb{R})$. Предположим, что $f(J; \cdot) \in CAP(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ для всех непустых множеств $J \subset \mathbb{N}$. Тогда $\sup_{t \in \mathbb{R}} N_l[\{f_j(t)\}] \rightarrow 0$ при $l \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) и вложение

$$\sum_{F \in C_b(U)} \text{Mod } \mu(F; \cdot) \subset \text{Mod } \mu[\cdot; \cdot]$$

вытекают из следствия леммы 1. Докажем, что из 1) следует 2). Пусть $\mu[\cdot; \cdot] \in CAP^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$, $F_j \in C_b^+(U)$, $j \in \mathbb{N}$, и $F_j(x) \downarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$ для всех $x \in U$. Обозначим $f_j(t) = \mu(F_j - F_{j+1}; t)$, $j \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}$. Так как для всех непустых множеств $J \subset \mathbb{N}$ функция $U \ni x \rightarrow \sum_{j \in J} (F_j(x) - F_{j+1}(x))$ непрерывна (и ограничена), то $f(J; \cdot) \in CAP(\mathbb{R})$. С другой стороны, для всех $l \in \mathbb{N}$ имеем $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\mu(F_l; t)| \leq \sup_{t \in \mathbb{R}} N_l[\{f_j(t)\}]$. Поэтому из теоремы 2 получаем $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\mu(F_l; t)| \rightarrow 0$ при $l \rightarrow +\infty$. Из леммы 3 вытекает существование множества $\mathcal{K}(b, \{K_\delta\}) \in \mathcal{K}_U$ такого, что $\mu[\cdot; t] \in \mathcal{K}(b, \{K_\delta\})$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем любое число $\varepsilon' > 0$: $\varepsilon'b < \varepsilon$. Множество $\mathcal{L}(K_\varepsilon) = \{F(\cdot|_{K_\varepsilon}) : F \in \mathcal{L}(U)\} \subset C_b(K_\varepsilon)$ компактно, поэтому найдутся функции $F_j^{(\varepsilon)} \in \mathcal{L}(U)$, $j = 1, \dots, n(\varepsilon)$, для которых множество $\{F_j^{(\varepsilon)}(\cdot|_{K_\varepsilon})\}_{j=1, \dots, n(\varepsilon)}$ образует ε' -сеть для $\mathcal{L}(K_\varepsilon)$. Для любой функции $F \in \mathcal{L}(U)$ найдется номер $j \in \{1, \dots, n(\varepsilon)\}$ такой, что $\max_{x \in K_\varepsilon} |F(x) - F_j^{(\varepsilon)}(x)| < \varepsilon'$. Следовательно, для всех $\mu \in \mathcal{K}(b, \{K_\delta\})$ имеем

$$|\mu(F) - \mu(F_j^{(\varepsilon)})| \leq 2|\mu|[U \setminus K_\varepsilon] + \varepsilon'b < 3\varepsilon.$$

Если τ – любой общий ε -почти период функций $\mu(F_j^{(\varepsilon)}; \cdot)$, $j = 1, \dots, n(\varepsilon)$ (множество таких чисел относительно плотно [11]), то

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\mu[\cdot; t] - \mu[\cdot; t + \tau]\|_w &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{F \in \mathcal{L}(U)} |\mu(F; t) - \mu(F; t + \tau)| \\ &\leq 6\varepsilon + \sup_{t \in \mathbb{R}} \max_{j=1, \dots, n(\varepsilon)} |\mu(F_j^{(\varepsilon)}; t) - \mu(F_j^{(\varepsilon)}; t + \tau)| < 7\varepsilon. \end{aligned} \quad (2)$$

Так как число $\varepsilon > 0$ выбирается произвольно, то $\mu[\cdot; \cdot] \in CAP(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$. Пусть $\varepsilon_i \rightarrow +0$ при $i \rightarrow +\infty$ и $\{\tau_i\}$ есть $\mu(F_j^{(\varepsilon_i)}; \cdot)$ -возвращающая для всех $i \in \mathbb{N}$ и $j = 1, \dots, n(\varepsilon_i)$ последовательность. Тогда из (2) следует, что $\{\tau_i\}$ – также $\mu[\cdot; \cdot]$ -возвращающая последовательность. Поэтому

$$\text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] \subset \sum_{i, j} \text{Mod } \mu(F_j^{(\varepsilon_i)}; \cdot) \subset \sum_{F \in C_b(U)} \text{Mod } \mu(F; \cdot).$$

Вместе с обратным вложением это доказывает равенство (1). Теорема доказана.

§ 3. Мерозначные слабо почти периодические по Степанову функции

Пусть (U, ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство, $L_\infty^\circ(\mathbb{R}, C_b(U))$ – банахово пространство (определенных при п.в. $t \in \mathbb{R}$) в существенном ограниченных функций $\mathbb{R} \ni t \rightarrow F(\cdot, t) \in C_b(U)$ (отождествляются функции, которые при п.в. $t \in \mathbb{R}$ совпадают) таких, что для любого $x \in U$ функция $\mathbb{R} \ni t \rightarrow F(x, t) \in \mathbb{R}$ измерима (тогда для любого непустого компакта $K \subset U$ измерима функция $\mathbb{R} \ni t \rightarrow F(\cdot|_K, t) \in (C_b(K), \|\cdot\|_{C_b(K)})$). На $L_\infty^\circ(\mathbb{R}, C_b(U))$ рассматривается норма $\|F\|_\infty = \text{ess sup}_{t \in \mathbb{R}} \|F(\cdot, t)\|_{C_b(U)}$, $F \in L_\infty^\circ(\mathbb{R}, C_b(U))$. Для любой измеримой мерозначной функции $t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(U)$ и любой функции $F \in L_\infty^\circ(\mathbb{R}, C_b(U))$ функция $t \rightarrow \mu(F(\cdot, t); t)$ также измерима. Обозначим через $\mathcal{F}_U$ множество линейных (замкнутых) подпространств Φ банахова пространства $L_\infty^\circ(\mathbb{R}, C_b(U))$, для которых выполнены следующие условия:

- 1) $|F(\cdot, \cdot)| \in \Phi$ для всех функций $\mathbb{R} \ni t \rightarrow F(\cdot, t) \in C_b(U)$ из Φ ;
- 2) $F_1(\cdot, \cdot)F_2(\cdot, \cdot) \in \Phi$ для всех функций $F_i(\cdot, \cdot) \in \Phi$, $i = 1, 2$;
- 3) подпространство Φ содержит все постоянные по t функции $t \rightarrow F(\cdot, t) = F(\cdot) \in C_b(U)$;
- 4) для любой функции $F(\cdot, \cdot) \in \Phi$, любого непустого компакта $K \subset U$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся измеримое множество $T \subset \mathbb{R}$ и компакт $\mathcal{C} \subset C_b(K)$ такие, что $\sup_{t \in \mathbb{R}} m([t, t+1] \setminus T) < \varepsilon$ и $F(\cdot|_K, t) \in \mathcal{C}$ при всех $t \in T$;
- 5) если $F(\cdot, \cdot) \in L_\infty^\circ(\mathbb{R}, C_b(U))$, $F_j(\cdot, \cdot) \in \Phi$, $j \in \mathbb{N}$, при п.в. $t \in \mathbb{R}$ для любого непустого компакта $K \subset U$ $\max_{x \in K} |F(x, t) - F_j(x, t)| \rightarrow 0$, $j \rightarrow +\infty$, при этом также $\|F(\cdot|_K, \cdot) - F_j(\cdot|_K, \cdot)\|_{M_1(\mathbb{R}, C_b(K))} \rightarrow 0$, $j \rightarrow +\infty$ (для любого компакта $K \subset U$, $K \neq \emptyset$), то $F(\cdot, \cdot) \in \Phi$.

Для подпространств $\Phi \in \mathcal{F}_U$ обозначим $\Phi^+ = \{F \in \Phi : \text{при п.в. } t \in \mathbb{R} \ F(x, t) \geq 0 \text{ для всех } x \in U\}$, $B_1(\Phi) = \{F \in \Phi : \|F\|_\infty \leq 1\}$. Пусть $\Phi_{ap} = \{F(\cdot, \cdot) \in L_\infty^\circ(\mathbb{R}, C_b(U)) : F(\cdot|_K, \cdot) \in S_1(\mathbb{R}, C_b(K)) \text{ для любого непустого компакта } K \subset U\}$; Φ_τ , $\tau > 0$, – линейное подпространство пространства $L_\infty^\circ(\mathbb{R}, C_b(U))$, состоящее из периодических по t функций $\mathbb{R} \ni t \rightarrow F(\cdot, t) \in C_b(U)$ с периодом τ ; Φ_0 – подпространство постоянных по t функций $U \times \mathbb{R} \ni (x, t) \rightarrow F(x, t) = F(x)$, $F \in C_b(U)$. Подпространства Φ_{ap} , Φ_τ , $\tau > 0$, и Φ_0 принадлежат $\mathcal{F}_U$.

Обозначим через $S_p^{(\Phi)}(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$, $p \geq 1$, $\Phi \in \mathcal{F}_U$, множество (п.в. определенных) мерозначных функций $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(U)$ таких, что $\mu(F(\cdot, \cdot); \cdot) \in S_p(\mathbb{R})$ для всех функций $F(\cdot, \cdot) \in \Phi$. Мерозначные функции $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p^{(\Phi)}(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ измеримы. В дальнейшем будут рассматриваться (линейные) пространства $S_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U)) = S_p^{(\Phi_0)}(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ (слабо п.п. по Степанову мерозначных функций степени p) и $\tilde{S}_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U)) = S_p^{(\Phi_{ap})}(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ (будет показано, что $\tilde{S}_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U)) = S_p^{(\Phi_\tau)}(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ для всех $\tau > 0$).

Для любых открытого множества $\mathcal{O} \subset U$ и мерозначной функции $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p^{(\Phi)}(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ положим $\lambda_\mu^{(\Phi)}[\mathcal{O}] = \sup\{\|\mu(F(\cdot, \cdot); \cdot)\|_{M_p(\mathbb{R})} : F \in B_1(\Phi) \text{ и при п.в. } t \in \mathbb{R} \ F(x, t) = 0 \text{ для всех } x \in U \setminus \mathcal{O}\}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть (U, ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство и $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p^{(\Phi)}(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$, $p \geq 1$, $\Phi \in \mathcal{F}_U$. Тогда $\lambda_\mu^{(\Phi)}[U] < +\infty$ и для

любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subset U$ такой, что $\lambda_\mu^{(\Phi)}[U \setminus K_\varepsilon] < \varepsilon$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть (U, ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство и либо $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ и $\mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}^+(U)$ п.в., либо $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p^{(\Phi\tau)}(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$, $\tau > 0$, $p \geq 1$. Тогда $|\mu|[U; \cdot] \in M_p(\mathbb{R})$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subset U$ такой, что $\| |\mu|[U \setminus K_\varepsilon; \cdot] \|_{M_p(\mathbb{R})} < \varepsilon$.

Для доказательства следствия достаточно заметить, что для любого открытого множества $\theta \subset U$ $\| \mu[\theta; \cdot] \|_{M_p(\mathbb{R})} = \lambda_\mu^{(\Phi_0)}[\theta]$, если $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ и $\mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}^+(U)$ п.в., $\| |\mu|[\theta; \cdot] \|_{M_p(\mathbb{R})} \leq (-[-1/\tau])^{1/p} \lambda_\mu^{(\Phi\tau)}[\theta]$, где $[\xi]$ – целая часть числа $\xi \in \mathbb{R}$, если $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p^{(\Phi\tau)}(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$, $\tau > 0$.

Пусть $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ – банахово пространство и $T \subset \mathbb{R}$ – непустое измеримое множество. Обозначим через $\tilde{Q}_{\mathcal{H}}(T)$ множество последовательностей $\{f_j\}$ (определенных при п.в. $t \in T$) измеримых функций $f_j: T \rightarrow \mathcal{H}$, $j \in \mathbb{N}$, таких, что для любого непустого множества $J \subset \mathbb{N}$ ряд $\sum_{j \in J} f_j(t) = f(J; t)$ сходится при п.в. $t \in T$.

Доказательство следующей теоремы, которая используется при доказательстве теоремы 3, приведено в § 5.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ – банахово пространство, $\{f_j\} \in \tilde{Q}_{\mathcal{H}}(\mathbb{R})$, $p \geq 1$. Предположим, что $f(J; \cdot) \in S_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ для любого непустого множества $J \subset \mathbb{N}$. Тогда

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \sup_{J \in \mathcal{J}_l} \|f(J; \cdot)\|_{M_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Так как линейное отображение $\Phi \ni F \rightarrow \mu(F(\cdot, \cdot); \cdot) \in M_p(\mathbb{R})$ имеет замкнутый график, то оно непрерывно. Следовательно, $\lambda_\mu^{(\Phi)}[\theta] \leq \lambda_\mu^{(\Phi)}[U] < +\infty$ для любого открытого множества $\theta \subset U$ и полунорма $F \rightarrow \lambda_\mu^{(\Phi)}(F) = \sup_{G \in B_1(\Phi)} \|\mu(G(\cdot, \cdot)F(\cdot, \cdot); \cdot)\|_{M_p(\mathbb{R})}$ непрерывна на банаховом пространстве $(\Phi, \|\cdot\|_\infty)$. Разобьем доказательство на несколько лемм.

ЛЕММА 4. Пусть $F_j \in \Phi^+$, $j \in \mathbb{N}$, при п.в. $t \in \mathbb{R}$ $F_j(x, t) \downarrow 0$, $j \rightarrow +\infty$, для всех $x \in U$ и $\|F_j(\cdot|_K, \cdot)\|_{M_1(\mathbb{R}, C_b(K))} \rightarrow 0$, $j \rightarrow +\infty$, для любого непустого компакта $K \subset U$. Тогда

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|\mu(G(\cdot, \cdot)F_j(\cdot, \cdot); \cdot)\|_{M_p(\mathbb{R})} = 0 \quad (3)$$

для любой функции $G \in \Phi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $f_j(t) = \mu(G(\cdot, t)(F_j(\cdot, t) - F_{j+1}(\cdot, t)); t)$, $t \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. Так как для любого непустого множества $J \subset \mathbb{N}$ функция $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \tilde{F}_J(\cdot, t) = \sum_{j \in J} G(\cdot, t)(F_j(\cdot, t) - F_{j+1}(\cdot, t)) \in C_b(U)$ принадлежит пространству $L_\infty^\circ(\mathbb{R}, C_b(U))$, ряд при п.в. $t \in \mathbb{R}$ сходится равномерно на компактах $K \subset U$ и $\|\tilde{F}_J(\cdot|_K, \cdot) - \tilde{F}_{J \cap \{1, \dots, l\}}(\cdot|_K, \cdot)\|_{M_1(\mathbb{R}, C_b(K))} \rightarrow 0$ при $l \rightarrow +\infty$ для любого непустого компакта $K \subset U$, то $\tilde{F}_J(\cdot, \cdot) \in \Phi$ и, следовательно, $f(J; \cdot) \in S_p(\mathbb{R})$, где $f(J; t) = \sum_{j \in J} f_j(t)$, $t \in \mathbb{R}$. С другой стороны,

$$\|\mu(G(\cdot, \cdot)F_j(\cdot, \cdot); \cdot)\|_{M_p(\mathbb{R})} = \left\| \sum_{i \geq j} f_i(\cdot) \right\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq \sup_{J \in \mathcal{J}_j} \|f(J; \cdot)\|_{M_p(\mathbb{R})}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Поэтому равенство (3) следует из теоремы 4. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $F_j \in \Phi^+$, $j \in \mathbb{N}$, при п.в. $t \in \mathbb{R}$ $F_j(x, t) \downarrow 0$, $j \rightarrow +\infty$, для всех $x \in U$ и $\|F_j(\cdot|_K, \cdot)\|_{M_1(\mathbb{R}, C_b(K))} \rightarrow 0$, $j \rightarrow +\infty$, для любого непустого компакта $K \subset U$. Тогда $\lambda_\mu^{(\Phi)}(F_j) \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Тогда найдутся число $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{F_{j_k}\}$ такие, что $\lambda_\mu^{(\Phi)}(F_{j_k}) > \varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda_\mu^{(\Phi)}(F_j) > \varepsilon$ для самой последовательности $\{F_j\}$. Найдутся функции $G_j \in B_1(\Phi)$, $j \in \mathbb{N}$, для которых $\|\mu(G_j(\cdot, \cdot)F_j(\cdot, \cdot); \cdot)\|_{M_p(\mathbb{R})} > \varepsilon$. Определим последовательно при $s = 1, 2, \dots$ числа $j_s \in \mathbb{N}$. Положим $j_1 = 1$. Если число j_s при некотором $s \in \mathbb{N}$ уже определено, то число $j_{s+1} > j_s$ выберем в соответствии с леммой 4 так, что $\|\mu(G_{j_s}(\cdot, \cdot)F_{j_{s+1}}(\cdot, \cdot); \cdot)\|_{M_p(\mathbb{R})} < \varepsilon/2$. Для любого непустого множества $J \subset \mathbb{N}$ при п.в. $t \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{s \in J} G_{j_s}(x, t)(F_{j_s}(x, t) - F_{j_{s+1}}(x, t))$, $x \in U$, сходится равномерно на компактных множествах $K \subset U$ к некоторой функции $(x, t) \rightarrow \tilde{F}_J(x, t)$ из пространства $L_\infty(\mathbb{R}, C_b(U))$, при этом $\|\tilde{F}_J(\cdot|_K, \cdot) - \tilde{F}_{J \cap \{1, \dots, l\}}(\cdot|_K, \cdot)\|_{M_1(\mathbb{R}, C_b(K))} \rightarrow 0$ при $l \rightarrow +\infty$ для любого непустого компакта $K \subset U$. Поэтому $\tilde{F}_J(\cdot, \cdot) \in \Phi$ и $\mu(\tilde{F}_J(\cdot, \cdot); \cdot) \in S_p(\mathbb{R})$. Из теоремы 4 получаем, что $\|\mu(\tilde{F}_{\{s\}}(\cdot, \cdot); \cdot)\|_{M_p(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$. С другой стороны, для всех $s \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \|\mu(\tilde{F}_{\{s\}}(\cdot, \cdot); \cdot)\|_{M_p(\mathbb{R})} &\geq \|\mu(G_{j_s}(\cdot, \cdot)F_{j_s}(\cdot, \cdot); \cdot)\|_{M_p(\mathbb{R})} \\ &\quad - \|\mu(G_{j_s}(\cdot, \cdot)F_{j_{s+1}}(\cdot, \cdot); \cdot)\|_{M_p(\mathbb{R})} \\ &> \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Отметим, что для любого открытого множества $\mathcal{O} \subset U$ $\lambda_\mu^{(\Phi)}[\mathcal{O}] = \sup\{\lambda_\mu^{(\Phi)}(F) : F \in B_1(\Phi) \text{ и при п.в. } t \in \mathbb{R} \ F(x, t) = 0 \text{ для всех } x \in U \setminus \mathcal{O}\}$. Кроме того, если $G \in \Phi$ и при п.в. $t \in \mathbb{R}$ $G(x, t) = 1$ для всех $x \in \mathcal{O}$, то $\lambda_\mu^{(\Phi)}[\mathcal{O}] \leq \lambda_\mu^{(\Phi)}(G)$.

ЛЕММА 6. Для любых открытых множеств $\mathcal{O}_i \subset U$, $i \in \mathbb{N}$, справедливо неравенство

$$\lambda_\mu^{(\Phi)}\left[\bigcup_{i=1}^{+\infty} \mathcal{O}_i\right] \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_\mu^{(\Phi)}[\mathcal{O}_i]. \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что

$$\lambda_\mu^{(\Phi)}\left[\bigcup_{i \leq j} \mathcal{O}_i\right] \leq \sum_{i \leq j} \lambda_\mu^{(\Phi)}[\mathcal{O}_i], \quad j \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Выберем функцию $F \in B_1(\Phi)$ такую, что при п.в. $t \in \mathbb{R}$ $F(x, t) = 0$ для всех $x \in U \setminus \bigcup_{i \leq j} \mathcal{O}_i$. Определим функции $\Theta_i(x) = \rho(x, U \setminus \mathcal{O}_i) \left(\sum_{k \leq j} \rho(x, U \setminus \mathcal{O}_k)\right)^{-1}$, если $x \in \bigcup_{i \leq j} \mathcal{O}_i$, и $\Theta_i(x) = 0$, если $x \in U \setminus \bigcup_{i \leq j} \mathcal{O}_i$, $i = 1, \dots, j$. Имеем $\Theta_i(\cdot)F(\cdot, \cdot) \in \Phi$ и при п.в. $t \in \mathbb{R}$ $\Theta_i(x)F(x, t) = 0$ для всех $x \notin \mathcal{O}_i$, $i = 1, \dots, j$, $F(x, t) = \sum_{i \leq j} \Theta_i(x)F(x, t)$, $x \in U$. Отсюда

$$\lambda_\mu^{(\Phi)}(F) \leq \sum_{i \leq j} \lambda_\mu^{(\Phi)}(\Theta_i F) \leq \sum_{i \leq j} \lambda_\mu^{(\Phi)}[\mathcal{O}_i].$$

Из произвольности выбора функции F следует неравенство (5). Обозначим $Y_j(x) = \max\{0, 1 - j\rho(x, U \setminus \bigcup_{i \leq j} \mathcal{O}_i)\}$, $x \in U$, $j \in \mathbb{N}$; $Y_j \in C_b^+(U)$ и $Y_j(x) \downarrow 0$, $j \rightarrow +\infty$, для всех $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_i$. Выберем любую функцию $F \in B_1(\Phi)$, для которой при п.в. $t \in \mathbb{R}$ $F(x, t) = 0$ для всех $x \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_i$. Тогда $F^\pm = \pm \frac{1}{2}(F \pm |F|) \in \Phi$, при п.в. $t \in \mathbb{R}$ $Y_j(\cdot)F^\pm(\cdot, t) \in C_b^+(U)$ и $Y_j(x)F^\pm(x, t) \downarrow 0$, $j \rightarrow +\infty$, для всех $x \in U$. Из свойства 4), характеризующего подпространство Φ , следует, что $\|Y_j(\cdot|_K)F^\pm(\cdot|_K, \cdot)\|_{M_1(\mathbb{R}, C_b(K))} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$ для любого непустого компакта $K \subset U$. Поэтому (в силу леммы 5)

$$0 \leq \lambda_\mu^{(\Phi)}(Y_j F) \leq \lambda_\mu^{(\Phi)}(Y_j F^+) + \lambda_\mu^{(\Phi)}(Y_j F^-) \rightarrow 0 \quad (6)$$

при $j \rightarrow +\infty$. Так как

$$\lambda_\mu^{(\Phi)}((1 - Y_j)F) \leq \lambda_\mu^{(\Phi)}\left[\bigcup_{i \leq j} \mathcal{O}_i\right] \leq \sum_{i \leq j} \lambda_\mu^{(\Phi)}[\mathcal{O}_i] \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_\mu^{(\Phi)}[\mathcal{O}_i], \quad j \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

то из (6) и (7) при $j \rightarrow +\infty$ получаем $\lambda_\mu^{(\Phi)}(F) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_\mu^{(\Phi)}[\mathcal{O}_i]$. Неравенство (4) следует из полученной оценки и произвольности выбора функции F . Лемма доказана.

Пусть точки $x_j \in U$, $j \in \mathbb{N}$, образуют счетное плотное множество в пространстве U . Для всех $j, n \in \mathbb{N}$ определим функции $U \ni x \rightarrow \Theta_j^n(x) \in \mathbb{R}$: $\Theta_j^n(x) = 0$, если $\rho(x, \bigcup_{i \leq j} x_i) \leq 1/(2n)$, $\Theta_j^n(x) = 2n\rho(x, \bigcup_{i \leq j} x_i) - 1$, если $1/(2n) < \rho(x, \bigcup_{i \leq j} x_i) \leq 1/n$, и $\Theta_j^n(x) = 1$, если $\rho(x, \bigcup_{i \leq j} x_i) > 1/n$. Имеем $\Theta_j^n \in C_b^+(U)$ и $\Theta_j^n(x) \downarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$ для всех $x \in U$ (и $n \in \mathbb{N}$). Обозначим $\Theta_j^n(x, t) = \Theta_j^n(x)$, $x \in U$, $t \in \mathbb{R}$. Выберем любое $\varepsilon > 0$. Из леммы 5 следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ можно найти такое число $j(n) \in \mathbb{N}$, что $\lambda_\mu^{(\Phi)}(\Theta_{j(n)}^n(\cdot, \cdot)) < 2^{-n}\varepsilon$. Обозначим $\tilde{K}_n = \{x \in U : \rho(x, \bigcup_{i \leq j(n)} x_i) \leq 1/n\}$, $K_\varepsilon = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \tilde{K}_n$. Множество K_ε компактно. Так как $\lambda_\mu^{(\Phi)}[U \setminus \tilde{K}_n] \leq \lambda_\mu^{(\Phi)}(\Theta_{j(n)}^n(\cdot, \cdot)) < 2^{-n}\varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то из леммы 6 получаем

$$\lambda_\mu^{(\Phi)}[U \setminus K_\varepsilon] \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_\mu^{(\Phi)}[U \setminus \tilde{K}_n] < \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\varepsilon = \varepsilon.$$

Теорема 3 доказана.

ТЕОРЕМА 5. Пусть (U, ρ) — полное сепарабельное метрическое пространство и $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(U)$ — измеримая мерозначная функция. Предположим, что $|\mu|[U; \cdot] \in M_p(\mathbb{R})$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subset U$ такой, что $\|\mu|[U \setminus K_\varepsilon; \cdot]\|_{M_p(\mathbb{R})} < \varepsilon$, $p \geq 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$;
- 2) $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p(\mathbb{R}, (\mathcal{M}(U), \|\cdot\|_w))$.

При выполнении этих условий

$$\text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] = \sum_{F \in \mathcal{L}(U)} \text{Mod } \mu(F; \cdot) = \sum_{F \in C_b(U)} \text{Mod } \mu(F; \cdot).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) $\Rightarrow$ 1). Если $G \in \mathcal{L}(U)$, то всякий ε -почти период функции $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ является также ε -почти периодом функции $\mu(G; \cdot) \in M_p(\mathbb{R})$. Поэтому $\mu(G; \cdot) \in S_p(\mathbb{R})$ и $\text{Mod } \mu(G; \cdot) \subset \text{Mod } \mu[\cdot; \cdot]$. Пусть $F \in C_b(U)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $G_\varepsilon \in C_b(U)$ такая, что $\lambda G_\varepsilon + \gamma \in \mathcal{L}(U)$ для некоторых $\lambda > 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, $\|G_\varepsilon\|_{C_b(U)} \leq \|F\|_{C_b(U)}$ и $\max_{x \in K_\varepsilon} |F(x) - G_\varepsilon(x)| < \varepsilon$. Так как $\mu(G_\varepsilon; \cdot) \in S_p(\mathbb{R})$, $\text{Mod } \mu(G_\varepsilon; \cdot) \subset \text{Mod } \mu[\cdot; \cdot]$, $\|\mu(F; \cdot) - \mu(G_\varepsilon; \cdot)\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq (2\|F\|_{C_b(U)} + \|\mu[U; \cdot]\|_{M_p(\mathbb{R})})\varepsilon$ и число $\varepsilon > 0$ можно выбирать сколь угодно малым, то $\mu(F; \cdot) \in S_p(\mathbb{R})$ и $\text{Mod } \mu(F; \cdot) \subset \sum_{G \in \mathcal{L}(U)} \text{Mod } \mu(G; \cdot) \subset \text{Mod } \mu[\cdot; \cdot]$.

1) $\Rightarrow$ 2). Воспользуемся схемой доказательства импликации 1) $\Rightarrow$ 2) в теореме 1. Так как $\|\mu[\cdot; t]\|_w \leq |\mu[U; t]|$ п.в., то $\mu[\cdot; \cdot] \in M_p(\mathbb{R}, (\mathcal{M}(U), \|\cdot\|_w))$. Пусть $\varepsilon > 0$. Множество $\mathcal{L}(K_\varepsilon)$ компактно, поэтому найдутся функции $G_j^{(\varepsilon)} \in \mathcal{L}(U)$, $j = 1, \dots, n(\varepsilon)$, для которых функции $G_j^{(\varepsilon)}(\cdot|_{K_\varepsilon})$ образуют ε -сеть для $\mathcal{L}(K_\varepsilon)$. Пусть τ — общий $\frac{\varepsilon}{n(\varepsilon)}$ -почти период функций $\mu(G_j^{(\varepsilon)}; \cdot) \in S_p(\mathbb{R})$, $j = 1, \dots, n(\varepsilon)$ (множество таких чисел относительно плотно). При п.в. $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} & \sup_{G \in \mathcal{L}(U)} |\mu(G; \cdot) - \mu(G; t + \tau)| \\ & \leq \varepsilon |\mu[U; t]| + \varepsilon |\mu[U; t + \tau]| + |\mu[U \setminus K_\varepsilon; t]| + |\mu[U \setminus K_\varepsilon; t + \tau]| \\ & \quad + \max_{j=1, \dots, n(\varepsilon)} |\mu(G_j^{(\varepsilon)}; t) - \mu(G_j^{(\varepsilon)}; t + \tau)|, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \|\mu[\cdot; \cdot] - \mu[\cdot; \cdot + \tau]\|_{M_p(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))} \\ & \leq 2\varepsilon + 2\varepsilon \|\mu[U; \cdot]\|_{M_p(\mathbb{R})} + \sum_{j=1}^{n(\varepsilon)} \|\mu(G_j^{(\varepsilon)}; \cdot) - \mu(G_j^{(\varepsilon)}; \cdot + \tau)\|_{M_p(\mathbb{R})} \\ & < 3\varepsilon + 2\varepsilon \|\mu[U; \cdot]\|_{M_p(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

В силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ отсюда следует $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$. Если $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow +\infty$, то всякая $\mu(G_j^{(\varepsilon_i)}; \cdot)$ -возвращающаяся для всех $j = 1, \dots, n(\varepsilon_i)$, $i \in \mathbb{N}$, последовательность $\{\tau_i\}$ является также $\mu[\cdot; \cdot]$ -возвращающейся, поэтому $\text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] \subset \sum_{G \in \mathcal{L}(U)} \text{Mod } \mu(G; \cdot) \subset \sum_{F \in C_b(U)} \text{Mod } \mu(F; \cdot)$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть (U, ρ) — полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}^+(U)$ — произвольная мерозначная функция, $p \geq 1$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$;
- 2) $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p(\mathbb{R}, (\mathcal{M}(U), \|\cdot\|_w))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) вытекает из теоремы 5 и следствия теоремы 3. Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) непосредственно следует из леммы 2 (так как пространство $(\mathcal{M}^+(U), \|\cdot\|_w)$ полное и для любой функции $F \in C_b(U)$ функция $\mathcal{M}^+(U) \ni \mu \rightarrow \tilde{F}(\mu) = \mu(F) \in \mathbb{R}$ непрерывна и $|\tilde{F}(\mu)| \leq \|F\|_{C_b(U)} \|\mu\|_w$, $\mu \in \mathcal{M}^+(U)$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из следствия теоремы 5 и результатов работы [14] (а также из [7; теорема 1]) вытекает следующее утверждение: если (U, ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство, $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$, $p \geq 1$, и $\mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}^+(U)$ п.в., то для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество $T \subset \mathbb{R}$ и множество $A \in \mathcal{H}_U$ такие, что $\chi_T \in S_1(\mathbb{R})$ (χ_T – характеристическая функция множества T), $\text{Mod } \chi_T \subset \text{Mod } \mu[\cdot; \cdot]$, $\sup_{t \in \mathbb{R}} m([t, t+1] \setminus T) < \varepsilon$, $\mu[\cdot; t] \in A$ для всех $t \in T$ и $\|\chi_{\mathbb{R} \setminus T}(\cdot) \mu[U; \cdot]\|_{M_p(\mathbb{R})} < \varepsilon$.

Приведем примеры, показывающие, что условия 1) и 2) из теоремы 5 могут независимо выполняться или не выполняться, если условия теоремы 5 не выполнены.

В примере 1 приведены компактное метрическое пространство (U, ρ) и измеримая мерозначная функция $[0, 1) \ni t \rightarrow \tilde{\mu}[\cdot; t] \in \mathcal{M}(U)$ такие, что $|\tilde{\mu}[U; \cdot]| \notin L_p([0, 1), \mathbb{R})$, $\tilde{\mu}[\cdot; \cdot] \notin L_p([0, 1), \mathcal{M}(U))$, но $\tilde{\mu}(F; \cdot) \in L_p([0, 1), \mathbb{R})$ для всех $F \in C_b(U)$. Если $t \rightarrow \mu[\cdot; t]$ – периодическое с единичным периодом продолжение на $\mathbb{R}$ функции $\tilde{\mu}[\cdot; \cdot]$, то $|\mu[U; \cdot]| \notin M_p(\mathbb{R})$, $\mu[\cdot; \cdot] \notin S_p(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$, но $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$.

ПРИМЕР 1. Пусть (U, ρ) – замкнутый единичный шар в $\mathbb{R}^d$, $d \geq 4p$, $p \geq 1$, с евклидовой метрикой ρ . Для $\varepsilon \in (0, 1]$ обозначим через $k(\varepsilon)$ максимальное число точек $x_1(\varepsilon), \dots, x_{k(\varepsilon)}(\varepsilon) \in U$ таких, что $\rho(x_{i_1}(\varepsilon), x_{i_2}(\varepsilon)) \geq \varepsilon$ для всех $i_1 \neq i_2$. Справедлива оценка $k(\varepsilon) \geq \varepsilon^{-d}$. Определим функции $\mathbb{R} \ni t \rightarrow f_j(t) \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$: если $t \notin [0, 1)$, то положим $f_j(t) = 0$, если $t \in [0, 1)$, то $f_j(t) = -1$ в случае $t \in [(s-1)2^{-j}, s2^{-j}]$, где $s \in 2\mathbb{N} - 1$, и $f_j(t) = 1$ в случае $t \in [(s-1)2^{-j}, s2^{-j}]$, $s \in 2\mathbb{N}$. Обозначим $n_l = \sum_{s=0}^l (2s)^4$, $l \in \mathbb{Z}_+$. Для всех $n \in \mathbb{N}$ на полуинтервале $[0, 1)$ определим функции f_n : если $n_{l-1} < n \leq n_l$, $l = l(n) \in \mathbb{N}$, то положим $f_n(t) = 2^{l/p}(2l)^{-4}f_{n_l-n+1}(2^l t - 1)$, $t \in [0, 1)$. Так как для всех $a_j \in [-1, 1]$, $j = 1, \dots, 2m$, $m \in \mathbb{N}$, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{2m} a_j f_j \right\|_{L_p([0, 1), \mathbb{R})}^p &= 2^{-2m} \sum_{\pm} |\pm a_1 \pm \dots \pm a_{2m}|^p \\ &\leq 2^{-2m} \sum_{\pm} |\pm 1 \pm \dots \pm 1|^p \leq c_p (2m)^{p/2} \end{aligned}$$

(суммирование производится по всем комбинациям знаков), где константа $c_p > 0$ зависит от p , то для всех $a_n \in [-1, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, справедлива оценка

$$\left\| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tilde{f}_n \right\|_{L_p([0, 1), \mathbb{R})}^p \leq c_p \sum_{n=1}^{+\infty} (2l)^{-2p} < +\infty. \quad (8)$$

Пусть $\varepsilon_l = (2l)^{-4/d}$, $l \in \mathbb{N}$. Обозначим $j(n) = n_{l(n)} - n + 1$, $j(n) \in \{1, \dots, (2l(n))^4\}$. Положим $\tilde{\mu}[\cdot; t] = \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{f}_n(t) \delta_{x_{j(n)}(\varepsilon_{l(n)})}[\cdot]$, $t \in [0, 1)$ (где $\delta_x[\cdot]$ – мера Дирака, сосредоточенная в точке $x \in U$). Из (8) следует, что $\tilde{\mu}(F; \cdot) \in L_p([0, 1), \mathbb{R})$ для всех функций $F \in C_b(U)$. С другой стороны, для всех $t \in [2^{-l}, 2^{-l+1})$, $l \in \mathbb{N}$, справедлива оценка $\|\tilde{\mu}[\cdot; t]\|_w \geq \frac{1}{2}\varepsilon_l |\tilde{\mu}[U; t] - \frac{1}{2}\varepsilon_l \tilde{\mu}[U; t]|$, при этом $|\tilde{\mu}[U; t]| = 2^{l/p}$. Следовательно, $\|\tilde{\mu}[U; \cdot]\|_{L_p([0, 1), \mathbb{R})} = +\infty$ и

$$\|\tilde{\mu}[\cdot; \cdot]\|_{L_p([0, 1), \mathcal{M}(U))} \geq \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^{+\infty} \varepsilon_l^p \right)^{1/p} - \frac{1}{2} \left(\sum_{l=1}^{+\infty} \varepsilon_l^p (2l)^{-2p} \right)^{1/p} = +\infty.$$

ПРИМЕР 2. Пусть $(U, \rho) = \mathbb{N}$ с метрикой $\rho(n_1, n_2) = 2$ при всех $n_1 \neq n_2$ (в этом случае $\|\mu\|_w = |\mu|[U]$ для всех мер $\mu \in \mathcal{M}(U)$). Положим $a_l = \frac{1}{3}((-2)^{l-1} - 1)$, $l \in \mathbb{N}$. Множества $A_l = a_l + 2^l\mathbb{Z}$ при разных $l \in \mathbb{N}$ не пересекаются и $\bigcup_{l \in \mathbb{N}} A_l = \mathbb{Z}$ [18]. Пусть $[0, 1) \ni t \rightarrow \tilde{f}_n(t) \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, — функции из примера 1. Для всех $t \in \mathcal{A}_l = A_l + [0, 1)$, $l \in \mathbb{N}$, положим $\mu[\cdot; t] = \sum_{n=n_{l-1}+1}^{n_l} \tilde{f}_n(t - [t]) \delta_n[\cdot]$ ($[t]$ — целая часть числа t). Так как $\int_m^{m+1} (|\mu|[U; t])^p dt = 1$ для всех $m \in \mathbb{Z}$, то $|\mu|[U; \cdot] \in M_p(\mathbb{R})$. Пусть $F \in C_b(U)$ и $a_n = F(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\mu(F; t) = \sum_{n=n_{l-1}+1}^{n_l} a_n \tilde{f}_n(t - [t])$ при $t \in \mathcal{A}_l$, $l \in \mathbb{N}$. Положим $g_s(t) = \mu(F; t)$, если $t \in \bigcup_{l \leq s} \mathcal{A}_l$, и $g_s(t) = 0$ в противном случае, $s \in \mathbb{N}$. Функция $g_s(\cdot)$ — периодическая с периодом 2^s . Из неравенства

$$\left\| \sum_{n=n_{l-1}+1}^{n_l} a_n \tilde{f}_n \right\|_{L_p([0,1), \mathbb{R})}^p \leq c_p (2l)^{-2p} \|F\|_{C_b(U)}$$

получаем $\|\mu(F; \cdot) - g_s(\cdot)\|_{M_p(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$. Поэтому $\mu(F; \cdot) \in S_p(\mathbb{R})$ для всех функций $F \in C_b(U)$. С другой стороны,

$$\|\mu[\cdot; \cdot + a_m] - \mu[\cdot; \cdot + a_l]\|_{M_p(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))} \geq 2^{1/p}$$

для всех $m, l \in \mathbb{N}$, $m \neq l$, поэтому $\mu[\cdot; \cdot] \notin S_p(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$.

ПРИМЕР 3. Пусть $U = [0, 1]$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $x, y \in [0, 1]$, $p \geq 1$. Рассмотрим мерозначную функцию $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] = \sum_{l=1}^{+\infty} l^{3/4} \chi_{\mathcal{A}_l}(t) (\delta_{1/l}[\cdot] - \delta_0[\cdot])$, где $\chi_{\mathcal{A}_l}$ — характеристические функции множеств $\mathcal{A}_l$, определенных в примере 2. Имеем $|\mu|[U; \cdot] \notin M_p(\mathbb{R})$. Пусть $\mu_s[\cdot; t] = \mu[\cdot; t]$, если $t \in \bigcup_{l \leq s} \mathcal{A}_l$, и $\mu_s[\cdot; t] = 0$ в противном случае, $s \in \mathbb{N}$. Так как функции $t \rightarrow \mu_s[\cdot; t]$ — периодические (с периодом 2^s) и $\|\mu[\cdot; t]\|_w = l^{-1/4}$ для всех $t \in \mathcal{A}_l$, то $\|\mu[\cdot; \cdot] - \mu_s[\cdot; \cdot]\|_{M_p(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$. Следовательно, $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$. Выберем функцию $F(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$. Тогда $\mu(F; t) = l^{1/4}$ для всех $t \in \mathcal{A}_l$, $l \in \mathbb{N}$, поэтому $\mu(F; \cdot) \notin M_p(\mathbb{R})$.

ПРИМЕР 4. Пусть $U = \{x_l, y_l\}_{l \in \mathbb{N}}$. Обозначим $\mathcal{C}_l = \{x_l, y_l\}$, $l \in \mathbb{N}$. Положим $\rho(x_l, y_l) = 1/l$; если точки $z_1, z_2 \in U$ принадлежат разным множествам $\mathcal{C}_l$, то полагаем $\rho(z_1, z_2) = 1$. Рассмотрим мерозначную функцию $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] = \sum_{l \in \mathbb{N}} \chi_{\mathcal{A}_l}(t) (\delta_{x_l}[\cdot] - \delta_{y_l}[\cdot]) \in \mathcal{M}(U)$. Так как $|\mu|[U; t] = 2$ и $\|\mu[\cdot; t]\|_w = 1/l$ для всех $t \in \mathcal{A}_l$, $l \in \mathbb{N}$, то $|\mu|[U; \cdot] \in M_p(\mathbb{R})$ и (см. пример 3) $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$, $p \geq 1$. Выберем функцию $F \in C_b(U)$ так, что $F(x_l) = (-1)^l$ и $F(y_l) = 0$ для всех $l \in \mathbb{N}$. Тогда $\mu(F; t) = (-1)^l$, если $t \in \mathcal{A}_l$, $l \in \mathbb{N}$. Следовательно (см. [18; пример 2.1]), $\mu(F; \cdot) \notin S_p(\mathbb{R})$.

Для мерозначных функций $\mu[\cdot; \cdot]$ из примеров 2 и 4 $|\mu|[U; \cdot] \in M_p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$, но не существует компакта $K \subset U$ такого, что $\|\mu|[U \setminus K; \cdot]\|_{M_p(\mathbb{R})} \leq 1$.

ЛЕММА 7. Пусть (U, ρ) — полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(U)$ — (п.в. определенная) мерозначная функция, $p \geq 1$, $\tau > 0$. Предположим, что $\mu(F(\cdot, \cdot); \cdot) \in M'_p(\mathbb{R})$ для всех функций $F(\cdot, \cdot) \in \Phi_\tau$. Тогда $|\mu|[U; \cdot] \in M'_p(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $\tau = 1$. Линейное отображение $(\Phi_1, \|\cdot\|_\infty) \ni F(\cdot, \cdot) \rightarrow \mu(F(\cdot, \cdot); \cdot) \in M_p(\mathbb{R})$ имеет замкнутый график и, следовательно, непрерывно. Так как для любых $\xi \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ существует функция $F(\cdot, \cdot) \in B_1(\Phi_1)$ (можно считать, что $t \rightarrow F(\cdot, t) \in (C_b(U), \|\cdot\|_{C_b(U)})$ – элементарная функция) такая, что $\mu(F(\cdot, t); t) \geq |\mu|[U; t] - \varepsilon$ при п.в. $t \in [\xi, \xi + 1]$, то $|\mu|[U; \cdot] \in M_p(\mathbb{R})$. Допустим, что доказываемое утверждение неверно. Тогда найдется число $\delta > 0$ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют число $n_\varepsilon \in \mathbb{Z}$, измеримое множество $T_\varepsilon(n_\varepsilon) \subset [n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1]$ и функция $F_\varepsilon(\cdot, \cdot) \in B_1(\Phi_1)$ такие, что $m(T_\varepsilon(n_\varepsilon)) \leq \varepsilon$ и $\int_{T_\varepsilon(n_\varepsilon)} |\mu(F_\varepsilon(\cdot, t); t)|^p dt \geq \delta$. Обозначим $T_\varepsilon(n) = T_\varepsilon(n_\varepsilon) + n - n_\varepsilon$, $n \in \mathbb{Z}$, $T_\varepsilon = T_\varepsilon(n_\varepsilon) + n\mathbb{Z}$. Положим $\varepsilon(1) = 1$. Определим последовательно при $j = 2, 3, \dots$ числа $\varepsilon(j) \in (0, 1/j]$ так, что

$$\sup_{n \in \mathbb{Z}} \int_{T_{\varepsilon(j)}(n)} |\mu(F_{\varepsilon(j)}(\cdot, t); t)|^p dt < 2^{-1-j+s}\delta, \quad s = 1, \dots, j-1.$$

Обозначим $\tilde{T}_j = T_{\varepsilon(j)} \setminus \bigcup_{s \geq j+1} T_{\varepsilon(s)}$, $\tilde{T}_j(n) = \tilde{T}_j \cap [n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$. Пусть $F(\cdot, t) = F_{\varepsilon(j)}(\cdot, t)$, если $t \in \tilde{T}_j$, $j \in \mathbb{N}$, и $F(\cdot, t) = 0$, если $t \notin \bigcup_j \tilde{T}_j$; $F(\cdot, \cdot) \in B_1(\Phi_1)$. Для всех $j \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{T}_j(n_{\varepsilon(j)})} |\mu(F(\cdot, t); t)|^p dt &\geq \int_{T_{\varepsilon(j)}(n_{\varepsilon(j)})} |\mu(F_{\varepsilon(j)}(\cdot, t); t)|^p dt \\ &\quad - \sum_{s \geq j+1} \int_{T_{\varepsilon(s)}(n_{\varepsilon(j)})} |\mu(F_{\varepsilon(s)}(\cdot, t); t)|^p dt \\ &\geq \delta - \sum_{s \geq j+1} 2^{-1-s+j}\delta = \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Поэтому $\mu(F(\cdot, \cdot); \cdot) \notin M'_p(\mathbb{R})$ (так как $m(T_{\varepsilon(j)}(n_{\varepsilon(j)})) \leq 1/j$), что противоречит условию леммы. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 6. Пусть (U, ρ) – полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(U)$ – измеримая мерозначная функция, $p \geq 1$. Предположим, что $|\mu|[U; \cdot] \in M_p(\mathbb{R})$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subset U$ такой, что $\| |\mu|[U \setminus K_\varepsilon; \cdot] \|_{M_p(\mathbb{R})} < \varepsilon$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $\mu[\cdot; \cdot] \in \tilde{S}_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$;
- 2) $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p(\mathbb{R}, (\mathcal{M}(U), \|\cdot\|_w))$ и $|\mu|[U; \cdot] \in M'_p(\mathbb{R})$.

При выполнении условий 1) и 2)

$$\text{Mod } \mu(F(\cdot, \cdot); \cdot) \subset \text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] + \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{Mod } F(\cdot|_{K_{\varepsilon_j}}, \cdot) \quad (9)$$

для любых функции $F(\cdot, \cdot) \in \Phi_{ap}$ и чисел $\varepsilon_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, для которых $\varepsilon_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для измеримой функции $t \rightarrow \mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}(U)$ следующие условия эквивалентны:

- 1) $|\mu|[U; \cdot] \in M'_p(\mathbb{R})$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется компакт $K_\varepsilon \subset U$ такой, что $\| |\mu|[U \setminus K_\varepsilon; \cdot] \|_{M_p(\mathbb{R})} < \varepsilon$;
- 2) $|\mu|[U; \cdot] \in M_p(\mathbb{R})$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое множество $T \subset \mathbb{R}$ и множество $A \in \mathcal{K}_U$ такие, что $\sup_{t \in \mathbb{R}} m([t, t+1] \setminus T) < \varepsilon$, $\| \chi_{\mathbb{R} \setminus T}(\cdot) |\mu|[U; \cdot] \|_{M_p(\mathbb{R})} < \varepsilon$ и $\mu[\cdot; t] \in A$ для всех $t \in T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Так как $\Phi_\tau \subset \Phi_{ap}$, $\tau > 0$, то импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из теоремы 5 и леммы 7. Предположим, что выполнено условие 2), $F(\cdot, \cdot) \in \Phi_{ap}$ и $\varepsilon_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$. Для любого $j \in \mathbb{N}$ найдутся (см. [7; теорема 2], [19]) измеримые непересекающиеся множества $T_i^{(j)} \subset \mathbb{R}$ и функции $F_i^{(j)}(\cdot) \in C_b(U)$, $i = 1, \dots, n(j)$, такие, что $\chi_{T_i^{(j)}}(\cdot) \in S_1(\mathbb{R})$, $\text{Mod } \chi_{T_i^{(j)}}(\cdot) \subset \text{Mod } F(\cdot|_{K_{\varepsilon_j}}, \cdot)$, $\sup_{t \in \mathbb{R}} m([t, t+1] \setminus \bigcup_{i=1}^{n(j)} T_i^{(j)}) < 1/j$, $\|F_i^{(j)}(\cdot)\|_{C_b(U)} \leq \|F(\cdot, \cdot)\|_\infty$ и $\|F(\cdot|_{K_{\varepsilon_j}}, t) - F_i^{(j)}(\cdot|_{K_{\varepsilon_j}})\|_{C_b(K_{\varepsilon_j})} < 1/j$ для всех $t \in T_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, n(j)$. Положим $F_j(\cdot, t) = \sum_{i=1}^{n(j)} F_i^{(j)}(\cdot) \chi_{T_i^{(j)}}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$. Из теоремы 5 следует, что $\mu(F_i^{(j)}; \cdot) \in S_p(\mathbb{R})$ и $\text{Mod } \mu(F_i^{(j)}; \cdot) \subset \text{Mod } \mu[\cdot; \cdot]$. Поэтому [7; равенство (1) и лемма 2] $\mu(F_j(\cdot, \cdot); \cdot) \in S_p(\mathbb{R})$ и

$$\begin{aligned} \text{Mod } \mu(F_j(\cdot, \cdot); \cdot) &\subset \text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] + \sum_{i=1}^{n(j)} \text{Mod } \chi_{T_i^{(j)}}(\cdot) \\ &\subset \text{Mod } \mu[\cdot; \cdot] + \sum_j \text{Mod } F(\cdot|_{K_{\varepsilon_j}}, \cdot). \end{aligned}$$

С другой стороны, из условия $|\mu|[U; \cdot] \in M'_p(\mathbb{R})$ получаем, что $\|\mu(F(\cdot, \cdot); \cdot) - \mu(F_j(\cdot, \cdot); \cdot)\|_{M_p(\mathbb{R})} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$. Следовательно, $\mu(F(\cdot, \cdot); \cdot) \in S_p(\mathbb{R})$ и выполнено вложение (9). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. $\tilde{S}_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U)) = S_p^{(\Phi_\tau)}(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$ для всех $\tau > 0$ (и $p \geq 1$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из вложения $\Phi_\tau \subset \Phi_{ap}$, $\tau > 0$, следует $\tilde{S}_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U)) \subset S_p^{(\Phi_\tau)}(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$. Пусть $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p^{(\Phi_\tau)}(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$. Так как $\Phi_0 \subset \Phi_\tau$, то $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$. Из леммы 7 получаем, что $|\mu|[U; \cdot] \in M'_p(\mathbb{R})$. Поэтому (а также в силу следствия теоремы 3) выполнено условие 2) теоремы 6 и, следовательно, $\mu[\cdot; \cdot] \in \tilde{S}_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$. Следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$, $p \geq 1$, и $\mu[\cdot; t] \in \mathcal{M}^+(U)$ н.в., то $\mu[\cdot; \cdot] \in \tilde{S}_p^w(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$.

Приведем пример, показывающий, что существуют мерозначные функции $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$, удовлетворяющие условиям теоремы 6, для которых $|\mu|[U; \cdot] \notin M'_p(\mathbb{R})$.

ПРИМЕР 5. Пусть $U = [0, 1]$, $\rho(x, y) = |x - y|$, $x, y \in [0, 1]$, $p \geq 1$. Определим мерозначные функции $[0, 1] \ni t \rightarrow \mu_l[\cdot; t] \in \mathcal{M}(U)$, $l \in \mathbb{N}$: если $t \in [0, 1/l]$, то

$\mu_l[\theta; t] = \frac{\pi}{2} l^{1/p} \int_{\theta} \sin l\pi x dx$, $\theta \in \mathcal{B}(U)$; если $t \in [1/l, 1)$, то $\mu_l[\cdot; t] = 0$. Пусть $\mathcal{A}_l = A_l + [0, 1)$, $l \in \mathbb{N}$, — множества из примера 2. Определим мерозначную функцию $\mu[\cdot; \cdot]$: если $t \in \mathcal{A}_l$, $l \in \mathbb{N}$, то положим $\mu[\cdot; \cdot] = \mu_l[\cdot; t - [t]]$. Так как $\|\mu_l[U; \cdot]\|_{L_p([0, 1), \mathbb{R})} = 1$ и $\mu_l[\cdot; t] = 0$ при $t \in [1/l, 1)$, то $|\mu[U; \cdot]| \in M_p(\mathbb{R})$ и $|\mu[U; \cdot]| \notin M'_p(\mathbb{R})$. Если $F \in C_b(U)$, то $\int_0^1 |\mu_l(F; t)|^p dt \rightarrow 0$ при $l \rightarrow +\infty$, поэтому (см. пример 3) $\mu(F; \cdot) \in S_p(\mathbb{R})$. Следовательно (в силу теоремы 5), $\mu[\cdot; \cdot] \in S_p(\mathbb{R}, \mathcal{M}(U))$.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Если $\{f_j\} \in Q_{\mathcal{H}}(T)$, $T \neq \emptyset$, то будем использовать (когда это не приводит к недоразумению) краткое обозначение $N_l(t) = N_l[\{f_j(t)\}]$, $t \in T$, $l \in \mathbb{N}$.

ЛЕММА 8. Пусть $\{f_j\} \in Q_{\mathcal{H}}(T)$, $T \neq \emptyset$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любой последовательности $\{t_l\} \subset T$ можно найти подпоследовательность $\{t_{l_s}\}$ и множество $J \in \mathcal{S}_1$ такие, что для всех $s \in \mathbb{N}$

$$\|f(J; t_{l_{s+1}}) - f(J; t_{l_s})\| > \frac{1}{2} N_{l_{s+1}}[\{f_j(t_{l_{s+1}})\}] - \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем последовательно при $s = 1, 2, \dots$ находить числа $l_s \in \mathbb{N}$ и множества $J_s \subset \mathbb{N}$. Положим $l_1 = 1$, $J_1 = \{1\}$. Предположим, что числа l_k и множества J_k уже выбраны для всех $k = 1, \dots, s$, $s \in \mathbb{N}$. Выберем число $l_{s+1} \in \mathbb{N}$ так, что $l_{s+1} > l_s$, $l_{s+1} > \max\{j : j \in \bigcup_{k \leq s} J_k\}$ и $N_{l_{s+1}}(t_{l_s}) < \frac{1}{3}\varepsilon$. Найдется множество $J'_{s+1} \in \mathcal{S}'_{l_{s+1}}$ такое, что $\|f(J'_{s+1}; t_{l_{s+1}})\| > N_{l_{s+1}}(t_{l_{s+1}}) - \frac{2}{3}\varepsilon$. Если $\|f(\bigcup_{k \leq s} J_k; t_{l_{s+1}}) - f(\bigcup_{k \leq s} J_k; t_{l_s})\| > \frac{1}{2} N_{l_{s+1}}(t_{l_{s+1}}) - \frac{1}{3}\varepsilon$, то положим $J_{s+1} = \emptyset$. В противном случае полагаем $J_{s+1} = J'_{s+1}$. В обоих случаях справедливо неравенство

$$\left\| f\left(\bigcup_{k \leq s+1} J_k; t_{l_{s+1}}\right) - f\left(\bigcup_{k \leq s} J_k; t_{l_s}\right) \right\| > \frac{1}{2} N_{l_{s+1}}(t_{l_{s+1}}) - \frac{\varepsilon}{3}. \quad (10)$$

Продолжим неограниченно нахождение чисел l_s и множеств J_s ($J_{s_1} \cap J_{s_2} = \emptyset$ при $s_1 \neq s_2$). Обозначим $J = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} J_s$. Для любого $s \in \mathbb{N}$ имеем $\|f(\bigcup_{k \geq s+1} J_k; t_{l_s})\| \leq N_{l_{s+1}}(t_{l_s}) < \frac{1}{3}\varepsilon$. Отсюда и из неравенства (10) для всех $s \in \mathbb{N}$ получаем требуемую оценку

$$\begin{aligned} \|f(J; t_{l_{s+1}}) - f(J; t_{l_s})\| &\geq \left\| f\left(\bigcup_{k \leq s+1} J_k; t_{l_{s+1}}\right) - f\left(\bigcup_{k \leq s} J_k; t_{l_s}\right) \right\| \\ &\quad - \left\| f\left(\bigcup_{k \geq s+2} J_k; t_{l_{s+1}}\right) - f\left(\bigcup_{k \geq s+1} J_k; t_{l_s}\right) \right\| \\ &> \frac{1}{2} N_{l_{s+1}}(t_{l_{s+1}}) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть (V, ρ_V) – компактное метрическое пространство и $\{f_j\} \in Q\mathcal{H}(T)$, где $T \subset V$, $T \neq \emptyset$. Предположим, что для всех непустых множеств $J \subset \mathbb{N}$ функции $T \ni t \rightarrow f(J; t) \in \mathcal{H}$ непрерывны и непрерывно продолжаются на метрическое пространство (V, ρ_V) . Тогда $\lim_{l \rightarrow +\infty} \sup_{t \in T} N_l[\{f_j(t)\}] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Тогда найдутся $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{t_l\} \subset T$ такие, что $N_l(t_l) \geq \varepsilon$ для всех $l \in \mathbb{N}$. Переходя, если нужно, к подпоследовательности и учитывая неравенства $N_l(t) \geq N_{l+1}(t)$, $l \in \mathbb{N}$, $t \in T$, можно считать, что последовательность $\{t_l\} \subset T \subset V$ сходится при $l \rightarrow +\infty$ к некоторой точке $t_0 \in V$. В силу леммы 8 найдутся подпоследовательность $\{t_{l_s}\}$ и множество $J \in \mathcal{S}_1$ такие, что $\|f(J; t_{l_{s+1}}) - f(J; t_{l_s})\| > \frac{1}{2}N_{l_{s+1}}(t_{l_{s+1}}) - \frac{1}{4}\varepsilon \geq \frac{1}{4}\varepsilon$ для всех $s \in \mathbb{N}$. С другой стороны, функция $f(J; \cdot)$ непрерывно продолжается на метрическое пространство (V, ρ_V) и $t_{l_s} \rightarrow t_0$ при $s \rightarrow +\infty$, поэтому $\|f(J; t_{l_{s+1}}) - f(J; t_{l_s})\| \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$. Полученное противоречие доказывает лемму.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\{f_j\} \in Q\mathcal{H}([0, +\infty))$. Предположим, что для всех непустых множеств $J \subset \mathbb{N}$ функции $[0, +\infty) \ni t \rightarrow f(J; t) \in \mathcal{H}$ непрерывны и существует предел $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(J; t) \in \mathcal{H}$. Тогда $\lim_{l \rightarrow +\infty} \sup_{t \geq 0} N_l[\{f_j(t)\}] = 0$.

Для доказательства следствия достаточно заметить, что функции $[0, \pi/2) \ni \varphi \rightarrow f_j(\operatorname{tg} \varphi)$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяют условиям леммы 9 (при этом $V = [0, \pi/2)$).

Непрерывная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ имеет среднее значение $M(f)$, если существует предел

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f(t) dt = M(f) \in \mathcal{H}.$$

ЛЕММА 10. Пусть $\{f_j\} \in Q\mathcal{H}(\mathbb{R})$ и для любого множества $J \in \mathcal{S}_1$ функции $f(J; \cdot)$ непрерывны и имеют среднее значение $M(f(J; \cdot)) \in \mathcal{H}$. Определим непрерывные функции

$$g_j(\eta) = \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f_j(t) dt, \quad \eta > 0, \quad g_j(0) = f_j(0), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\{g_j\} \in Q\mathcal{H}([0, +\infty))$ и $\sup_{\eta \geq 0} N_l[\{g_j(\eta)\}] \rightarrow 0$ при $l \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого множества $J \in \mathcal{S}_1$ обозначим

$$g(J; \eta) = \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f(J; t) dt, \quad \eta > 0, \quad g(J; 0) = f(J; 0).$$

Функции $g(J; \cdot)$ непрерывны. Из леммы 9 следует, что $\sum_{j \in J, j \leq l} f_j(t) \rightarrow f(J; t)$ при $l \rightarrow +\infty$ равномерно на каждом отрезке $[-\eta, \eta]$, $\eta \geq 0$. Поэтому

$$\sum_{j \in J, j \leq l} g_j(\eta) \rightarrow \sum_{j \in J} g_j(\eta) = g(J; \eta)$$

при $l \rightarrow +\infty$ для всех $\eta \geq 0$. Отсюда получаем $\{g_j\} \in Q\mathcal{H}([0, +\infty))$. Равенство $\lim_{l \rightarrow +\infty} \sup_{\eta \geq 0} N_l[\{g_j(\eta)\}] = 0$ вытекает из следствия леммы 9, так как каждая функция $\eta \rightarrow g(J; \eta)$, $J \in \mathcal{S}_1$, имеет предел $M(f(J; \cdot)) \in \mathcal{H}$ при $\eta \rightarrow +\infty$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ – (вещественное или комплексное) банахово пространство, $\{f_j\} \in Q_{\mathcal{H}}(\mathbb{R})$. Предположим, что $f(J; \cdot) \in CAP(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ для всех непустых множеств $J \subset \mathbb{N}$. Тогда $\text{Mod } f(J; \cdot) \subset \sum_j \text{Mod } f_j(\cdot)$ для всех $J \subset \mathbb{N}$, $J \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Удобно считать пространство $\mathcal{H}$ комплексным. Поэтому в случае вещественного пространства $\mathcal{H}$ будем рассматривать его комплексификацию (условия теоремы от этого не изменятся). Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\lambda \notin \sum_j \text{Mod } f_j$. Обозначим $f_j^\lambda(t) = e^{-i\lambda t} f_j(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\{f_j^\lambda\} \in Q_{\mathcal{H}}(\mathbb{R})$. Для любого множества $J \in \mathcal{S}_1$ функция $t \rightarrow e^{-i\lambda t} f(J; t) = f^\lambda(J; t) = \sum_{j \in J} f_j^\lambda(t)$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит пространству $CAP(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и, следовательно, имеет среднее значение. Обозначим

$$g^\lambda(J; \eta) = \frac{1}{2\eta} \int_{-\eta}^{\eta} f^\lambda(J; t) dt, \quad \eta > 0, \quad g^\lambda(J; 0) = f(J; 0), \quad J \in \mathcal{S}_1;$$

$$g_j^\lambda(\cdot) = g^\lambda(\{j\}; \cdot), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Пусть $J \in \mathcal{S}_1 \setminus \mathcal{S}_{l+1}$, $l \in \mathbb{N}$. Справедливо неравенство

$$\sup_{\eta \geq 0} \|g^\lambda(J; \eta) - g^\lambda(J \cap \{1, \dots, l\}; \eta)\| \leq \sup_{\eta \geq 0} N_{l+1}[\{g_j^\lambda(\eta)\}].$$

Так как модуль $\text{Mod } f$ любой функции $f \in CAP(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ совпадает с модулем ее показателей Фурье [11], [12], то из выбора числа λ следует, что $g^\lambda(J \cap \{1, \dots, l\}; \eta) \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow +\infty$. Поэтому

$$\|M(f^\lambda(J; \cdot))\| \leq \sup_{\eta \geq 0} N_{l+1}[\{g_j^\lambda(\eta)\}].$$

В силу леммы 10 отсюда (при $l \rightarrow +\infty$) для любого непустого множества $J \subset \mathbb{N}$ получаем $M(f^\lambda(J; \cdot)) = 0$. Поэтому любое число $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sum_j \text{Mod } f_j$ не является показателем Фурье функции $f(J; \cdot) \in CAP(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ и, следовательно, $\text{Mod } f(J; \cdot) \subset \sum_j \text{Mod } f_j$. Теорема 7 доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2. Выберем любой счетный плотный в $\mathbb{R}$ модуль $\Lambda = \{\lambda_\nu, \nu \in \mathbb{N}\}$, для которого $\sum_j \text{Mod } f_j \subset \Lambda$. Определим на $\mathbb{R}$ метрику

$$\rho_\Lambda(t_1, t_2) = \sum_{\nu} 2^{-\nu} |e^{i\lambda_\nu t_1} - e^{i\lambda_\nu t_2}|, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Полношение $(B_\Lambda, \rho_\Lambda)$ метрического пространства $(\mathbb{R}, \rho_\Lambda)$ компактно (относительная компактификация Бора [20; гл. 1]). Функции $f \in CAP(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, для которых $\text{Mod } f \subset \Lambda$, равномерно непрерывны на $(\mathbb{R}, \rho_\Lambda)$ и, следовательно, продолжаются до непрерывных функций на метрическом пространстве $(B_\Lambda, \rho_\Lambda)$. Поэтому из теоремы 7 следует, что для всех непустых множеств $J \subset \mathbb{N}$ функции $(\mathbb{R}, \rho_\Lambda) \ni t \rightarrow f(J; t) \in \mathcal{H}$ непрерывны и имеют непрерывное продолжение на метрический компакт B_Λ . Осталось воспользоваться леммой 9. Теорема доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 4

ЛЕММА 11. Пусть $\{f_j\} \in \tilde{Q}\mathcal{H}(T)$, где $T \subset \mathbb{R}$ — измеримое множество, для которого $0 < m(T) < +\infty$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ существует такое $l \in \mathbb{N}$, что для любого множества $J \in \mathcal{S}'_l$ справедливо неравенство $m(\{t \in T : \|f(J; t)\| \geq \varepsilon\}) < \delta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Тогда найдутся числа $\varepsilon, \delta > 0$ такие, что для каждого $l \in \mathbb{N}$ существует множество $J \in \mathcal{S}'_l$, для которого $m(\{t \in T : \|f(J; t)\| \geq \varepsilon\}) \geq \delta$. Отсюда следует существование множеств $J_s \in \mathcal{S}'_1$, $s \in \mathbb{N}$, таких, что $\max\{j : j \in J_s\} < \min\{j : j \in J_{s+1}\}$ и $m(\{t \in T : \|f(J_s; t)\| \geq \varepsilon\}) \geq \delta$ для всех $s \in \mathbb{N}$. Множество $\tilde{T} = \bigcap_{l \in \mathbb{N}} \bigcup_{s \geq l} \{t \in T : \|f(J_s; t)\| \geq \varepsilon\}$ измеримо и $m(\tilde{T}) \geq \delta$. Обозначим $J' = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} J_s$. Если $t \in \tilde{T}$, то $\|f(J_s; t)\| \geq \varepsilon$ для бесконечного числа индексов s , поэтому ряд $\sum_{j \in J'} f_j(t)$ для всех $t \in \tilde{T}$ не сходится. Последнее (так как $m(T) > 0$) противоречит предположению $\{f_j\} \in \tilde{Q}\mathcal{H}(T)$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 8. Пусть $\{f_j\} \in \tilde{Q}\mathcal{H}(T)$, где $T \subset \mathbb{R}$ — измеримое множество, для которого $0 < m(T) < +\infty$, $p \geq 1$ и для любого непустого множества $J \subset \mathbb{N}$ функция $T \ni t \rightarrow f(J; t) = \sum_{j \in J} f_j(t)$ принадлежит $L_p(T, \mathcal{H})$. Тогда

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \sup_{J \in \mathcal{S}'_l} \int_T \|f(J; t)\|^p dt = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим противное. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $l \in \mathbb{N}$ существует множество $J \in \mathcal{S}'_l$, для которого $\int_T \|f(J; t)\|^p dt \geq \varepsilon^p$. Положим $l_1 = 1$, $T_1 = T$. Выберем множество $J_1 \in \mathcal{S}'_1$, для которого

$$\int_T \|f(J_1; t)\|^p dt \geq \varepsilon^p. \quad (11)$$

Существует число $\delta_1 > 0$ такое, что для всех измеримых множеств $T' \subset T$, для которых $m(T') \leq \delta_1$, выполняется неравенство

$$\int_{T'} \|f(J_1; t)\|^p dt \leq \frac{1}{4} \varepsilon^p. \quad (12)$$

Будем далее последовательно при $s = 2, 3, \dots$ определять числа $\delta_s, \delta'_s > 0$, $l_s \in \mathbb{N}$, множества $J_s \in \mathcal{S}'_{l_s}$ (для которых $l_s < l_{s+1}$ и $\max\{j : j \in J_s\} < \min\{j : j \in J_{s+1}\}$ при всех $s \in \mathbb{N}$) и измеримые множества $T_s \subset T$. Предположим, что они уже определены для некоторого $s \in \mathbb{N}$ (число δ'_1 не определяется). Найдем число $\delta'_{s+1} > 0$ такое, что $\delta'_{s+1} < 2^{-k} \delta_{s+1-k}$ для всех $k = 1, \dots, s$ и

$$\int_{T''} \left\| f \left(\bigcup_{k \leq s} J_k; t \right) \right\|^p dt \leq 2^{-2p} \varepsilon^p$$

для всех измеримых множеств $T'' \subset T$, для которых $m(T'') \leq \delta'_{s+1}$. Выберем число $l_{s+1} \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялись следующие два условия:

- 1) $l_{s+1} > \max\{j : j \in J_s\}$;
- 2) для любого множества $J \in \mathcal{S}'_{l_{s+1}}$ справедливо неравенство

$$m(\{t \in T : \|f(J; t)\| \geq 2^{-s-2}(m(T))^{-1/p}\varepsilon\}) \leq \delta'_{s+1}$$

(последнего можно добиться в силу леммы 11).

После этого множество $J_{s+1} \in \mathcal{S}'_{l_{s+1}}$ выберем так, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_T \|f(J_{s+1}; t)\|^p dt \geq \varepsilon^p. \quad (13)$$

Найдем такое число $\delta_{s+1} > 0$, что

$$\int_{T'} \|f(J_{s+1}; t)\|^p dt \leq \frac{1}{4} \varepsilon^p \quad (14)$$

для всех измеримых множеств $T' \subset T$, для которых $m(T') \leq \delta_{s+1}$. Положим $T_{s+1} = \{t \in T : \|f(J_{s+1}; t)\| \geq 2^{-s-2}(m(T))^{-1/p}\varepsilon\}$. Тогда $m(T_{s+1}) \leq \delta'_{s+1}$ и, следовательно,

$$\int_{T_{s+1}} \left\| f\left(\bigcup_{k \leq s} J_k; t\right) \right\|^p dt \leq 2^{-2p}\varepsilon^p. \quad (15)$$

Продолжим неограниченно нахождение чисел δ_s, δ'_s, l_s и множеств $J_s \in \mathcal{S}'_{l_s}, T_s \subset T$. Положим $T'_s = T_s \setminus \bigcup_{k > s} T_k, s \in \mathbb{N}$. Множества T'_s при разных s не пересекаются. Так как $m(T_k) \leq \delta'_k$ для всех $k \geq 2$, то $m(\bigcup_{k > s} T_k) \leq \sum_{k \geq s+1} 2^{s-k}\delta_s = \delta_s$. Поэтому из (12)–(15) получаем

$$\int_{T'_s} \|f(J_s; t)\|^p dt \geq \varepsilon^p - \frac{1}{4} \varepsilon^p \geq \left(\frac{3\varepsilon}{4}\right)^p, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (16)$$

При п.в. $t \in T'_s, s \in \mathbb{N}$, имеем $\|f(G_k; t)\| < 2^{-k-1}(m(T))^{-1/p}\varepsilon$ для всех $k \geq s+1$. Обозначим $J = \bigcup_{s \in \mathbb{N}} J_s$. Из (15) и (16) вытекают неравенства

$$\begin{aligned} \left(\int_{T'_s} \|f(J; t)\|^p dt\right)^{1/p} &\geq \left(\int_{T'_s} \|f(J_s; t)\|^p dt\right)^{1/p} - \left(\int_{T'_s} \left\| f\left(\bigcup_{k < s} J_k; t\right) \right\|^p dt\right)^{1/p} \\ &\quad - \sum_{k \geq s+1} \left(\int_{T'_s} \|f(J_k; t)\|^p dt\right)^{1/p} \\ &\geq \frac{3\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} - \sum_{k \geq s+1} 2^{-k-1}\varepsilon \geq \frac{\varepsilon}{4}, \quad s \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(второй интеграл в средней части неравенств отсутствует при $s = 1$). Так как множества $T'_s \subset T, s \in \mathbb{N}$, не пересекаются, то отсюда получаем

$$\int_T \|f(J; t)\|^p dt = +\infty,$$

что противоречит условиям теоремы. Теорема 8 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. В условиях теоремы 8 для любого множества $J \in \mathcal{S}_l$, $l \in \mathbb{N}$, имеем $\sum_{j \in J, j \leq k} f_j(t) \rightarrow f(J; t)$ п.в. при $k \rightarrow +\infty$. Поэтому из леммы Фату следует, что для всех $l \in \mathbb{N}$

$$\sup_{J \in \mathcal{S}'_l} \int_T \|f(J; t)\|^p dt = \sup_{J \in \mathcal{S}_l} \int_T \|f(J; t)\|^p dt.$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 4. Рассмотрим преобразование Бохнера, ставящее в соответствие функциям $\mathbb{R} \ni t \rightarrow f(t) \in \mathcal{H}$ из пространства $S_p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ функции $\mathbb{R} \ni t \rightarrow f(\cdot + t) \in L_p([0, 1], \mathcal{H})$ из пространства $SAP(\mathbb{R}, L_p([0, 1], \mathcal{H}))$. Из теоремы 8 (и замечания после нее) следует, что для любого непустого множества $J \subset \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{j \in J, j \leq l} f_j(\cdot + t) - \sum_{j \in J} f_j(\cdot + t) \right\|_{L_p([0, 1], \mathcal{H})} \rightarrow 0$$

при $l \rightarrow +\infty$, поэтому $\{f_j(\cdot + t)\} \in Q_{L_p([0, 1], \mathcal{H})}$ и $f(J; \cdot + t) = \sum_{j \in J} f_j(\cdot + t)$ (ряд сходится в пространстве $L_p([0, 1], \mathcal{H})$) для всех $t \in \mathbb{R}$. Так как для любого непустого множества $J \subset \mathbb{N}$ функция $t \rightarrow f(J; \cdot + t)$ принадлежит пространству $SAP(\mathbb{R}, L_p([0, 1], \mathcal{H}))$, то доказываемое утверждение следует из теоремы 2. Теорема доказана.

Список литературы

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1989.
2. *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.
3. *Ченцов А. Г.* Приложение теории меры к задачам управления. Свердловск, 1985.
4. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977.
5. *Иванов А. Г.* Оптимальное управление почти периодическими движениями // ПММ. 1992. Т. 56. №5. С. 133–142.
6. *Иванов А. Г.* Об оптимальном управлении почти периодическими движениями при наличии ограничений на средние типа равенств и неравенств. I, II, III // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33. №2. С. 167–176; №3. С. 316–323; №4. С. 478–485.
7. *Данилов Л. И.* Мерозначные почти периодические функции и почти периодические сечения многозначных отображений // Матем. сб. 1997. Т. 188. №10. С. 3–24.
8. *Пинчи Э.* Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М.: ИЛ, 1961.
9. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
10. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.
11. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953.
12. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978.
13. *Вахания Н. Н., Тарчеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1985.
14. *Данилов Л. И.* Мерозначные почти периодические функции // Матем. заметки. 1997. Т. 61. №1. С. 57–68.
15. *Данилов Л. И.* О равномерной аппроксимации почти периодических по Степанову функций // Изв. вузов. Сер. матем. 1998. №5. С. 10–18.
16. *Красносельский М. А., Бурд В. Ш., Колесов Ю. С.* Нелинейные почти периодические колебания. М.: Наука, 1970.

17. Данилов Л. И. Об операторах суперпозиции, сохраняющих почти периодичность // Деп. в ВИНТИ. 26.05.98. № 1589-В98.
18. Данилов Л. И., Иванов А. Г. К теореме о поточечном максимуме в почти периодическом случае // Изв. вузов. Сер. матем. 1994. № 6. С. 50–59.
19. Данилов Л. И. Почти периодические сечения многозначных отображений // Изв. отдела математики и информатики УдГУ. № 1. Ижевск, 1993. С. 16–78.
20. Панков А. А. Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. Киев: Наукова думка, 1985.

Физико-технический институт
Удмуртского научного центра УрО РАН, Ижевск

Поступила в редакцию
10.01.1999 и 13.04.2000