Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Дубинин, Теоремы искажения для полиномов на окружности, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 12, 51–60

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm528>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 14:37:52

УДК 517.54+512.62

В. Н. Дубинин

Теоремы искажения для полиномов на окружности

Доказываются неравенства для производных от функций $\operatorname{Re} P(z)$, $|P(z)|^2$ и $\arg P(z)$ по переменной $\varphi = \arg z$ для алгебраического полинома $P(z)$ в точках окружности $|z| = 1$. Полученные оценки зависят, в частности, от свободного члена и старшего коэффициента полинома $P(z)$ и усиливают классические неравенства Бернштейна и Турана. Метод доказательства основан на технике обобщенных приведенных модулей.

Библиография: 12 названий.

Введение

В данной работе рассматриваются произвольные алгебраические полиномы вида

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n, \quad c_n \neq 0, \quad n \geq 1,$$

с комплексными коэффициентами c_k , $k = 0, 1, \dots, n$. Нас интересуют оценки производных

$$(\operatorname{Re} P(z))'_\varphi, \quad (|P(z)|^2)'_\varphi \quad \text{и} \quad (\arg P(z))'_\varphi$$

в точках $z = e^{i\varphi}$ единичной окружности $|z| = 1$. Полученные оценки зависят от модулей коэффициентов c_0 , c_n и следующих величин:

$$\begin{aligned} m(P) &= \min_{|z|=1} \operatorname{Re} P(z), & M(P) &= \max_{|z|=1} \operatorname{Re} P(z), \\ m^*(P) &= \min_{|z|=1} |P(z)|, & M^*(P) &= \max_{|z|=1} |P(z)|. \end{aligned}$$

Оценка первой производной приводит к усилению классического неравенства

$$M^*(P') \leq n M^*(P), \tag{1}$$

восходящего к работам Бернштейна [1] (см. также [2; с. 233]). Доказательство соответствующей теоремы и следствия из нее приведены в § 2. В § 3 даны неравенства для двух других производных, связанных с логарифмической производной полинома $P(z)$. Оценку производной $(\arg P(z))'_\varphi$ мы проводим отдельно для полиномов $P(z)$, не имеющих нулей в круге $|z| < 1$ (теорема 3) и полиномов $P(z)$, нули которых лежат в круге $|z| \leq 1$ (теорема 4). На этом пути усиливается известное неравенство $\operatorname{Re}(zP'(z)/P(z)) \leq n/2$ в первом случае и классическое неравенство Турана [3] во втором. Все приведенные оценки точные и достигаются для полиномов вида $c_0 + c_n z^n$ при некоторых c_0 и c_n .

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00443) и программы “Университеты России” (грант № 991282).

Отметим, что неравенства для полиномов и их производных имеют богатую историю и многочисленные приложения. Значительная часть таких неравенств собрана в книге [2], в которой также приводится обширная библиография. Из работ последних лет приведем дополнительно статьи [4]–[8], в которых даны обобщения и усиления указанных выше неравенств Бернштейна и Турана в различных направлениях. Большая часть этих обобщений связана либо с введением новых параметров, либо с переходом от точечных неравенств к интегралам. Наши обобщения иного рода, и они зависят от свободного члена и старшего коэффициента полинома $P(z)$. Основным инструментом при доказательстве теорем 1–4 является лемма для регулярных функций, имеющая самостоятельный интерес (§1). Нам удобно рассматривать эту лемму как результат развития техники обобщенных приведенных модулей [9].

§1. Приведенные модули и лемма для регулярных функций

Понятие приведенного модуля области восходит к классическим работам Греча и Тейхмюллера. К настоящему времени известны различные обобщения и модификации этого понятия. Ввиду многочисленных приложений в теории функций и новизны применительно к оценкам полиномов дадим здесь полное определение приведенного модуля. Пусть B – открытое множество на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$. Пусть $z_l, l = 1, \dots, m$, – различные точки множества B ; $\delta_l, l = 1, \dots, m$, – произвольные вещественные числа, не все равные нулю, и пусть $\mu_l, \nu_l, l = 1, \dots, m$, – произвольные положительные числа. Введем следующие обозначения: $Z = \{z_l\}$, $\Delta = \{\delta_l\}$, $\Psi = \{\psi_l\}$, $\psi_l = \psi_l(r) = \mu_l r^{\nu_l}, l = 1, \dots, m$. Здесь и ниже символы $\{\cdot\}$ и $\sum$ означают соответственно совокупность и суммирование по всевозможным индексам, указанным в контексте, за исключением тех, при которых слагаемое в $\sum$ либо равно ∞ , либо неопределено. Замкнутое множество $E(z_0, r)$, зависящее от параметра $r > 0$, назовем *почти кругом* с центром в точке $z_0 \neq \infty$ радиуса r , если для достаточно малых r существуют непрерывные положительные функции $r_j(r)$, $j = 1, 2$, такие, что

$$\{z : |z - z_0| \leq r_1(r)\} \subset E(z_0, r) \subset \{z : |z - z_0| \leq r_2(r)\}, \quad r > 0,$$

и $r_j(r) \sim r, r \rightarrow 0, j = 1, 2$. Почти круг с центром в бесконечности определим как $E(\infty, r) = \{z : 1/z \in E(0, r)\}$, где $E(0, r)$ – некоторый почти круг с центром в начале. При малых $r > 0$ рассмотрим обобщенный конденсатор

$$C(r; B, Z, \Delta, \Psi) = \{\overline{\mathbb{C}}_z \setminus B, E(z_1, \psi_1(r)), \dots, E(z_m, \psi_m(r))\}$$

с предписанными значениями соответственно $0, \delta_1, \dots, \delta_m$ [9]. Модулем этого конденсатора называется величина

$$|C(r; B, Z, \Delta, \Psi)| = \sup \left\{ \iint_{\mathbb{C}_z} |\nabla v|^2 dx dy \right\}^{-1},$$

где верхняя грань берется по всем допустимым функциям $v(z)$, т.е. вещественнозначным функциям $v(z)$, непрерывным на $\overline{\mathbb{C}}_z$, удовлетворяющим условию Липшица в некоторой окрестности каждой точки плоскости $\mathbb{C}_z$, за исключением, может быть, конечного числа таких точек, и таким, что $v(z) = 0$ в окрестности множества $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus B$ и $v(z) = \delta_l$ в окрестности $E(z_l, \psi_l(r))$, $l = 1, \dots, m$ (здесь $z = x + iy$

и $1/0 = +\infty$). Приведенным модулем множества B относительно совокупностей Z, Δ и Ψ мы называем предел

$$M(B, Z, \Delta, \Psi) = \lim_{r \rightarrow 0} \left(|C(r; B, Z, \Delta, \Psi)| + \frac{\nu}{2\pi} \log r \right), \quad (2)$$

где $\nu = (\sum \delta_l^2 \nu_l^{-1})^{-1}$. В случае, когда B – область, $m = 1$, $\delta_1 = 1$ и $\psi_1(r) \equiv r$, понятие приведенного модуля совпадает с классическим. Общий случай введен и изучен в [9]–[11] и других публикациях автора. В частности, в работе [10] показано, что если множество $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus B$ имеет положительную гармоническую меру, то для любых Z, Δ и Ψ приведенный модуль существует и выражается через внутренние радиусы и функции Грина связанных компонент множества B относительно точек z_l . Ситуация, когда множество $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus B$ имеет гармоническую меру нуль, эквивалентна случаю $B = \overline{\mathbb{C}}_z$ и требует дополнительных ограничений на Δ и Ψ . Именно, при дополнительном условии $\sum \delta_l \nu_l^{-1} = 0$ приведенный модуль комплексной сферы существует и справедлива формула

$$M(\overline{\mathbb{C}}_z, Z, \Delta, \Psi) = \frac{\nu^2}{2\pi} \left(- \sum \frac{\delta_l^2}{\nu_l^2} \log \mu_l - \sum \frac{\delta_l \delta_k}{\nu_l \nu_k} \log |z_l - z_k| \right) \quad (3)$$

(см. [9], [11]). В данной работе применяется частный случай приведенного модуля (2), для которого мы введем специальное обозначение. Положим $B = \overline{\mathbb{C}}_z$, $Z = \{z, 0, \infty\}$, где $|z| = 1$, $\Delta = \{-1, 1, 1\}$ и $\Psi = \{\mu_1 \sqrt{r}, \mu_2 r, \mu_2 r\}$. Обобщенный конденсатор будет состоять из трех пластин

$$C(r; z, \mu_1, \mu_2) \stackrel{\text{def}}{=} \{E(z, \mu_1 \sqrt{r}), E(0, \mu_2 r), E(\infty, \mu_2 r)\}.$$

Допустимая функция $v(z)$ равна минус единице в некоторой окрестности множества $E(z, \mu_1 \sqrt{r})$ и единице в окрестностях $E(0, \mu_2 r)$ и $E(\infty, \mu_2 r)$. Приведенный модуль (2) равен

$$M(z, \mu_1, \mu_2) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow 0} \left(|C(r; z, \mu_1, \mu_2)| + \frac{1}{8\pi} \log r \right).$$

Наконец, формула (3) дает

$$M(z, \mu_1, \mu_2) = -\frac{1}{16\pi} \log(\mu_2 \mu_1^2). \quad (4)$$

Относительно других случаев приведенного модуля отметим, что они наиболее эффективны в сочетании с симметризационными методами [9]. Следующее утверждение является основным инструментом при доказательстве теорем искажения в данной работе.

ЛЕММА. Пусть G – открытое множество в области $|z| > 1$, граница которого состоит из конечного числа кусочно аналитических кривых, включая окружность $|z| = 1$, и пусть $\infty \in G$. Предположим, что существует функция $\omega = F(z)$, удовлетворяющая следующим условиям: $F(z)$ регулярна на множестве $G \setminus \{\infty\}$; в окрестности бесконечности имеет место разложение

$$F(z) = \alpha z + \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots, \quad \alpha \neq 0;$$

граница множества G переходит в смысле граничного соответствия при отображении $\omega = F(z)$ в круг $|\omega| \leq 1$, причем окружность $|z| = 1$ — в окружность $|\omega| = 1$. Тогда в точках регулярности на окружности $|z| = 1$ справедливо неравенство

$$\frac{\partial|F(z)|}{\partial|z|} \leq \sqrt{|\alpha|}. \quad (5)$$

Знак равенства достигается для функции $F(z) = \alpha z$, где $|\alpha| = 1$, и $G = \{z : |z| > 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим следующее свойство функции $\omega = F(z)$: любая точка ω , $|\omega| > 1$, является образом внутренней и только внутренней точки множества $|z| \geq 1$ при отображении $\omega = F(z)$. Действительно, $F(\infty) = \infty$, и если для данной точки ω , $|\omega| > 1$, предположить противное, то на радиальном луче $\{\omega t : t \geq 1\}$ найдется образ некоторой граничной точки z^* множества G . Соответствующая точка $F(z^*)$ лежит в круге $|\omega| \leq 1$, и мы приходим к противоречию: $|\omega| \leq |F(z^*)| \leq 1 < |\omega|$. Аналогичные соображения показывают, что в условиях леммы каждая точка ω , $|\omega| > 1$, является образом только одной точки z , $|z| > 1$, при отображении $\omega = F(z)$, $z \in G$. Докажем теперь неравенство (5) в фиксированной регулярной точке z_0 на окружности $|z| = 1$. Можно считать, что $\partial|F(z)|/\partial|z| > 0$ при $z = z_0$. В этом случае $\partial|F(z)|/\partial|z| = |F'(z_0)|$ и точки, близкие к z_0 и лежащие вне единичного круга, переходят во внешность единичного круга. Рассмотрим симметричный относительно окружности $|z| = 1$ конденсатор $C(r; z_0, 1, 1)$, пластины которого ограничены гладкими кривыми. Такой конденсатор имеет потенциальную функцию, т.е. вещественную функцию $u(z)$, непрерывную на всей комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}_z$, равную минус единице на множестве $E(z_0, \sqrt{r})$, единице на $E(0, r)$, $E(\infty, r)$ и гармоническую в $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus [E(z_0, \sqrt{r}) \cup E(0, r) \cup E(\infty, r)]$. Из принципа Дирихле [12] заключаем, что

$$|C(r; z_0, 1, 1)|^{-1} = I(u, \mathbb{C}_z). \quad (6)$$

Здесь и всюду ниже принято обозначение

$$I(v, \sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \iint_{\sigma} |\nabla v|^2 d\sigma.$$

Введем вспомогательную функцию $v(\omega)$, непрерывную на комплексной сфере $\overline{\mathbb{C}}_{\omega}$, симметричную относительно окружности $|\omega| = 1$ и в точках множества $|\omega| > 1$ равную $u(F^{-1}(\omega))$. Нетрудно видеть, что функция $v(\omega)$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности каждой точки плоскости $\mathbb{C}_{\omega}$, за исключением, может быть, конечного числа таких точек. Далее, она равна минус единице в окрестности некоторого множества $E(F(z_0), |F'(z_0)|\sqrt{r})$ и единице в окрестностях множеств $E(0, \mu r)$, $E(\infty, \mu r)$, где $\mu = 1/|\alpha|$. Таким образом, эта функция допустима для симметричного относительно $|\omega| = 1$ конденсатора вида $C(r; F(z_0), |F'(z_0)|, \mu)$. По определению модуля

$$|C(r; F(z_0), |F'(z_0)|, \mu)|^{-1} \leq I(v, \mathbb{C}_{\omega}). \quad (7)$$

Ввиду симметрии и конформной инвариантности интеграла Дирихле имеем

$$I(u, \mathbb{C}_z) = 2I(u, \{z : |z| > 1\}) \geq 2I(v, \{\omega : |\omega| > 1\}) = I(v, \mathbb{C}_{\omega}).$$

Учитывая (6) и (7), получаем

$$|C(r; z_0, 1, 1)| \leq |C(r; F(z_0), |F'(z_0)|, \mu)|.$$

Отсюда

$$M(z_0, 1, 1) \leq M(F(z_0), |F'(z_0)|, \mu).$$

Применение формулы (4) приводит к неравенству (5). Знак равенства в (5) проверяется непосредственно. Лемма доказана.

§ 2. Усиление неравенства Бернштейна

Всюду ниже приняты обозначения из введения. Следующий результат усиливает классическое неравенство (1).

ТЕОРЕМА 1. *Для любого полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$ и любой точки z на окружности $|z| = 1$, в которой $\operatorname{Re} P(z)$ отлична от $m(P)$ и $M(P)$, справедливо неравенство*

$$\frac{|(\operatorname{Re} P(z))'_\varphi|}{\sqrt{(\operatorname{Re} P(z) - m(P))(M(P) - \operatorname{Re} P(z))}} \leq n - 1 + \sqrt{\frac{2|c_n|}{M(P) - m(P)}}. \quad (8)$$

Равенство в (8) достигается в случае $P(z) = c_0 + c_n z^n$ для любых точек z , $|z| = 1$, $z^n \neq \pm |c_n|/c_n$, где c_0 и c_n — произвольные комплексные числа, $c_n \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать $n \geq 2$ и $c_n \neq 0$. Обозначим через γ интервал $(2m(P), 2M(P))$, $\bar{\gamma}$ — замыкание, а $|\gamma|$ — длина этого интервала. На множестве $G = \{z : |z| > 1, P(z) + \overline{P(1/\bar{z})} \notin \bar{\gamma}\}$ определим функцию

$$\omega = F(z) \equiv z^{-n+1} \Phi(P(z) + \overline{P(1/\bar{z})}),$$

где $\zeta = \Phi(w)$ — однозначная ветвь сложной функции

$$\zeta = \frac{\sqrt{w_1/(1-w_1)} + i}{\sqrt{w_1/(1-w_1)} - i}, \quad w_1 = \frac{w - 2m(P)}{2M(P) - 2m(P)}, \quad (9)$$

конформно и однолистно отображающая внешность отрезка $\bar{\gamma}$ на внешность единичного круга $|\zeta| \leq 1$ так, что $\Phi(\infty) = \infty$ и $\Phi(2m(P)) = -1$. Заметим, что функция $\omega = F(z)$ переводит окружность $|z| = 1$ в окружность $|\omega| = 1$. Далее, в окрестности бесконечности имеет место разложение

$$\Phi(w) = \frac{4}{|\gamma|} w + \dots,$$

а в точках интервала γ продолженная в смысле граничного соответствия функция $\Phi(w)$ удовлетворяет равенству

$$|\Phi'(w)| = \frac{(w_1(1-w_1))^{-1/2}}{|\gamma|}. \quad (10)$$

Учитывая тот факт, что в точках окружности $|z| = 1$, где $\operatorname{Re} P(z)$ отлична от $m(P)$ и $M(P)$, выполняется

$$\begin{aligned} \frac{\partial |\Phi(w)|}{\partial |z|} &= \left| \frac{d\Phi(w)}{dz} \right| = |\Phi'(w)| \left| P'(z) - \frac{\overline{P'(1/\bar{z})}}{z^2} \right| \\ &= 2|\Phi'(w) \operatorname{Im}(zP'(z))| = 2|\Phi'(w)(\operatorname{Re} P(z))'_\varphi|, \end{aligned}$$

закключаем, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial|F(z)|}{\partial|z|} &= (-n+1)|z|^{-n}|\Phi(w)| + |z|^{-n+1}\frac{\partial|\Phi(w)|}{\partial|z|} \\ &= -n+1+2|\Phi'(2\operatorname{Re}P(z))(\operatorname{Re}P(z))'_\varphi|,\end{aligned}$$

где точки z как и выше. Ввиду (10) неравенство (8) сводится к неравенству

$$\frac{\partial|F(z)|}{\partial|z|} \leq \sqrt{\frac{4|c_n|}{|\gamma|}}, \quad |z|=1.$$

Осталось применить лемму. Знак равенства в (8) проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь несколько следствий теоремы 1. Прежде всего заметим, что произвольный тригонометрический полином с вещественными коэффициентами

$$T_n(\varphi) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad a_n^2 + b_n^2 \neq 0,$$

можно рассматривать как действительную часть алгебраического полинома $P(z)$ на окружности $|z|=1$:

$$P(z) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k - ib_k)z^k.$$

Неравенство (8) в терминах таких полиномов примет вид

$$\frac{|T'_n(\varphi)|}{\sqrt{(T_n(\varphi) - m(T_n))(M(T_n) - T_n(\varphi))}} \leq n-1 + \sqrt{\frac{2\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{M(T_n) - m(T_n)}},$$

$-\infty < \varphi < \infty$, где $m(T_n) = \min_{[0, 2\pi]} T_n(\varphi)$, $M(T_n) = \max_{[0, 2\pi]} T_n(\varphi)$. Подставляя в последнее неравенство вместо $T_n(\varphi)$ полином $T_{nl}(\varphi) \equiv T_n(l\varphi)$, $l = 1, 2, \dots$, деля обе части неравенства на l и устремляя l к бесконечности, получим в итоге

$$\frac{|T'_n(\varphi)|}{\sqrt{(T_n(\varphi) - m(T_n))(M(T_n) - T_n(\varphi))}} \leq n.$$

Данное неравенство равносильно неравенству Бернштейна–Сегё [2; с. 232]:

$$(T'_n(\varphi))^2 + n^2(T_n(\varphi))^2 \leq n^2 \left(\max_{[0, 2\pi]} |T_n(\varphi)| \right)^2.$$

Отсюда приходим к первоначальному неравенству Бернштейна

$$|T'_n(\varphi)| \leq n \max_{[0, 2\pi]} |T_n(\varphi)|, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

справедливому для любых тригонометрических полиномов $T_n(\varphi)$ [1; гл. I, п. 10]. Далее, замена среднего геометрического на среднее арифметическое в неравенстве (8) дает точную оценку для алгебраических полиномов:

$$|\operatorname{Im}(zP'(z))| \leq (n-1) \frac{M(P) - m(P)}{2} + \sqrt{|c_n|} \frac{M(P) - m(P)}{2}$$

с равенством для $P(z) = c_0 + c_n z^n$ и некоторых z . Можно показать, что эта оценка не выполняется, если мнимую часть слева заменить на модуль. Учитывая соотношения

$$M(P) - m(P) \leq |M(P)| + |m(P)| \leq 2M^*(P)$$

и пользуясь тем, что при вращении полинома $P(z) \rightarrow e^{i\theta} P(z)$ величина $M^*(P)$ не меняется, получим из последней оценки неравенство

$$|P'(z)| \leq (n-1)M^*(P) + \sqrt{|c_n|M^*(P)}, \quad (11)$$

справедливое для любого полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$ и любых точек z на окружности $|z| = 1$. Равенство в (11) достигается в случае $P(z) = c_n z^n$. Заметим, что в силу неравенства Коши $|c_n| \leq M^*(P)$, так что неравенство (11) и предыдущие неравенства усиливают неравенство Бернштейна (1).

§3. Оценки, связанные с логарифмической производной

В данном параграфе доказываются неравенства для производных $(|P(z)|^2)'_\varphi$ и $(\arg P(z))'_\varphi$, которые связаны с логарифмической производной полинома $P(z)$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} (|P(z)|^2)'_\varphi &= -2|P(z)|^2 |z| \frac{\partial \arg P(z)}{\partial |z|} = -2|P(z)|^2 \operatorname{Im} \frac{zP'(z)}{P(z)}, \\ (\arg P(z))'_\varphi &= |z| \frac{\partial \log |P(z)|}{\partial |z|} = \operatorname{Re} \frac{zP'(z)}{P(z)}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. *Для любого полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$ и любой точки z на окружности $|z| = 1$, в которой $|P(z)|$ отличен от $m^*(P)$ и $M^*(P)$, справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} & \frac{|(|P(z)|^2)'_\varphi|}{\sqrt{(|P(z)|^2 - (m^*(P))^2)((M^*(P))^2 - |P(z)|^2)}} \\ & \leq n-1 + 2\sqrt{\frac{|c_0 c_n|}{(M^*(P))^2 - (m^*(P))^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Равенство в (12) достигается в случае $P(z) = c_0 + c_n z^n$ для любых точек z , $|z| = 1$, $z^n \neq \pm c_0/c_n$, где c_0 и c_n — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию $|c_0| = |c_n| \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать $n \geq 2$, $c_0 \neq 0$ и $c_n \neq 0$. Далее действуем аналогично доказательству теоремы 1 с заменой величин $2m(P)$ и $2M(P)$ на соответственно $(m^*(P))^2$ и $(M^*(P))^2$ и с изменением функции $\omega = F(z)$. Именно, полагаем $\gamma = ((m^*(P))^2, (M^*(P))^2)$, $\bar{\gamma}$ — замыкание и $|\gamma|$ — длина интервала γ . Функция $\zeta = \Phi(w)$ совпадает с прежней функцией (9) с учетом указанной выше замены, и для нее справедливо равенство (10). Новая функция $\omega = F(z)$ вводится на множестве $G = \{z : |z| > 1, P(z)\overline{P(1/\bar{z})} \notin \bar{\gamma}\}$ следующим образом:

$$\omega = F(z) \equiv z^{-n+1} \Phi(P(z)\overline{P(1/\bar{z})}).$$

В точках окружности $|z| = 1$, где $|P(z)|$ отличен от $m^*(P)$ и $M^*(P)$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial |F(z)|}{\partial |z|} &= -n + 1 + \frac{\partial |\Phi(w)|}{\partial |z|} = -n + 1 + |\Phi'(w)| \left| P'(z) \overline{P}(z) - \frac{P(z) \overline{P'(z)}}{z^2} \right| \\ &= -n + 1 + 2 |\Phi'(|P(z)|^2) \operatorname{Im}(z P'(z) \overline{P(z)})| \\ &= -n + 1 + |\Phi'(|P(z)|^2) (|P(z)|^2)'_{\varphi}|. \end{aligned}$$

Ввиду (10) неравенство (12) сводится к неравенству

$$\frac{\partial |F(z)|}{\partial |z|} \leq 2 \sqrt{\frac{|c_0 c_n|}{|\gamma|}}, \quad |z| = 1,$$

которое вытекает из леммы. Что касается проверки знака равенства в (12), то для полинома $P(z) = c_0 + c_n z^n$ с $|c_0| = |c_n|$ имеем $m^*(P) = 0$, $M^*(P) = 2|c_0|$ и правая часть в (12) очевидно равна n . Левая часть также равна n , ибо

$$\begin{aligned} |(|P(z)|^2)'_{\varphi}| &= 2|P(z)|^2 \left| \operatorname{Im} \frac{z P'(z)}{P(z)} \right| = 2n|c_0 + c_n z^n|^2 \left| \operatorname{Im} \frac{(c_n/c_0) z^n}{1 + (c_n/c_0) z^n} \right| \\ &= 2n|c_0 + c_n z^n|^2 \sqrt{\left| 1 + \left(\frac{c_n}{c_0} \right) z^n \right|^{-2} - \frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем фактом, что функция $w = \zeta/(1 + \zeta)$ отображает окружность $|\zeta| = 1$ на прямую $\operatorname{Re} w = \frac{1}{2}$. Теорема доказана.

Отметим точное неравенство

$$|(|P(z)|^2)'_{\varphi}| \leq n \frac{(M^*(P))^2 - (m^*(P))^2}{2},$$

которое получается из (12) заменой среднего геометрического на арифметическое, а также заменой полинома $P(z)$ на $P(z^l)$ с последующим делением на l и $l \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 3. Если полином $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$ не имеет нулей в круге $|z| < 1$, то для любой точки z на окружности $|z| = 1$ выполняется неравенство

$$(\arg P(z))'_{\varphi} \leq \frac{n-1}{2} + \sqrt{\frac{|c_n/c_0|}{4}}. \quad (13)$$

Знак равенства достигается для полинома $P(z) = c_0 + c_n z^n$ и любых точек z на окружности $|z| = 1$, где c_0 и c_n — произвольные комплексные числа, удовлетворяющие условию $|c_0| = |c_n| \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $c_n \neq 0$ и полином $P(z)$ не имеет нулей в замкнутом круге $|z| \leq 1$. Применим лемму § 1 к функции

$$\omega = F(z) \equiv \frac{z^{-n+1} P(z)}{\overline{P(1/\bar{z})}},$$

заданной на множестве $G \stackrel{\text{def}}{=} \{z : |z| > 1\}$. Эта функция аналитическая в $\overline{G}$ и имеет на этом множестве только один полюс в бесконечности, в окрестности которого справедливо разложение

$$F(z) = \frac{c_n}{\bar{c}_0} z + \dots.$$

Образ множества $\overline{G}$ при отображении $\omega = F(z)$ накрывает множество $|\omega| \geq 1$, при этом окружность $|z| = 1$ остается на месте. В точках этой окружности имеем

$$\frac{\partial |F(z)|}{\partial |z|} = \frac{\partial \log |F(z)|}{\partial |z|} = \operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F(z)} = -n + 1 + 2(\arg P(z))'_\varphi.$$

Таким образом, по лемме справедливо неравенство (13). Случай равенства в (13) проверяется прямым вычислением с учетом концовки доказательства предыдущей теоремы. Теорема доказана.

Поскольку в теореме 3 нули полинома $P(z)$ расположены на множестве $|z| \geq 1$, то $|c_0/c_n| \geq 1$ и неравенство (13) дает хорошо известное неравенство

$$(\arg P(z))'_\varphi = \operatorname{Re} \frac{zP'(z)}{P(z)} \leq \frac{n}{2}$$

(см., например, [8; с. 48]). Отметим, что без ограничения на нули полинома $P(z)$ величина $\operatorname{Re}(zP'(z)/P(z))$ может принимать на окружности $|z| = 1$ сколь угодно большие значения. Однако для некоторых точек на этой окружности существует верхняя граница. Например, в точках z , где достигается максимум модуля $M^*(P)$, необходимо выполняется $\operatorname{Im}(zP'(z)/P(z)) = 0$ и, следовательно, $|\operatorname{Re}(zP'(z)/P(z))| = |P'(z)|/M^*(P)$. Из неравенства (11) для таких точек вытекает

$$\left| \operatorname{Re} \frac{zP'(z)}{P(z)} \right| \leq n - 1 + \sqrt{\frac{|c_n|}{M^*(P)}}.$$

Равенство достигается для полиномов $P(z) = c_n z^n$.

Повторяя доказательство теоремы 3 с заменой функции $\omega = F(z)$ на новую

$$F(z) = \frac{z^{n+1} \overline{P(1/\bar{z})}}{P(z)}, \quad |z| \geq 1,$$

получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 4. *Если все нули полинома $P(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n$, $c_n \neq 0$, лежат в круге $|z| \leq 1$, то для любой точки z на окружности $|z| = 1$ выполняется неравенство*

$$(\arg P(z))'_\varphi \geq \frac{n+1}{2} - \sqrt{\frac{|c_0/c_n|}{4}}. \quad (14)$$

Знак равенства достигается для полинома из теоремы 3.

Левая часть неравенства (14) не превосходит $|zP'(z)/P(z)|$, и, следовательно, в условиях теоремы 4 на окружности $|z| = 1$ выполняется

$$|P'(z)| \geq |P(z)| \frac{n+1 - \sqrt{|c_0/c_n|}}{2}.$$

Знак равенства достигается для полинома $P(z) = c_0 + c_n z^n$ в точках z , для которых $z^n = c_0/c_n$, где $|c_0| = |c_n| \neq 0$. Переходя в последнем неравенстве к максимуму, получим следующий результат:

$$M^*(P') \geq M^*(P) \frac{n+1 - \sqrt{|c_0/c_n|}}{2},$$

что усиливает классическое неравенство Турана [3]:

$$M^*(P') \geq \frac{n}{2} M^*(P),$$

с равенством для полиномов $P(z) = c_0 + c_n z^n$, $|c_0| = |c_n| \neq 0$.

Недавно получены интегральные обобщения неравенства Турана, а также его обобщения, связанные с “полярной” производной. В этих же направлениях обобщаются известные уточнения и обобщения неравенства Турана для полиномов $P(z)$ с нулями в круге $|z| \leq K$, данные Маликом и Говилом (см. [4], [7]). Однако указанные обобщения не содержат приведенных выше неравенств с участием c_0 и c_n .

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложенный метод доказательства позволяет выявить все случаи равенства в теоремах 1–4. Вместе с тем в известной нам литературе авторы ограничиваются указанием точности оценки и полинома, для которого выполняется равенство. Следуя “традиции” и не желая увеличивать объем статьи, затушевывая тем самым суть вопроса, отметим лишь, что равенство в теоремах 3 и 4 достигается для “self-inversive” полиномов, т.е. полиномов вида $P(z) = \alpha Q(z)$, где $Q(z) = z^n \overline{P(1/\bar{z})}$ и $|\alpha| = 1$.

Автор этой статьи выражает благодарность факультету математики Хельсинкского университета и лично М. Вуоринену за организацию визита в Финляндию и гостеприимство, без которых данная публикация была бы невозможна. Автор благодарен также участникам семинара А. А. Гончара за конструктивное обсуждение приведенных доказательств.

Список литературы

1. Бернштейн С. Н. Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1952.
2. Borwein P., Erdelyi T. Polynomials and polynomial inequalities. New York: Springer-Verlag, 1995.
3. Turan P. Über die Ableitung von Polynomen // Compositio Math. 1939. V. 7. P. 89–95.
4. Aziz A., Ahemad N. Integral mean estimates for polynomials whose zeros are within a circle // Glas. Mat. Ser. III. 1996. V. 31(51). P. 229–237.
5. Aziz A., Shah W. M. Inequalities for the polar derivative of a polynomial // Indian J. Pure Appl. Math. 1998. V. 29. №2. P. 163–173.
6. Aziz A., Rather N. A. L^p inequalities for polynomials // Glas. Mat. Ser. III. 1997. V. 32(52). P. 39–43.
7. Aziz A., Rather N. A. A refinement of a theorem of Paul Turan concerning polynomials // Math. Inequal. Appl. 1998. V. 1. №2. P. 231–238.
8. Jain V. K. Generalization of certain well known inequalities for polynomials // Glas. Mat. Ser. III. 1997. V. 32(52). P. 45–51.
9. Дубинин В. Н. Приведенные модули открытых множеств в теории аналитических функций // Докл. РАН. 1998. Т. 363. №6. С. 731–734.
10. Дубинин В. Н. Асимптотика модуля вырождающегося конденсатора и некоторые ее применения // Записки научн. сем. ПОМИ. 1997. Т. 237. С. 56–73.
11. Дубинин В. Н., Ковалев Л. В. Приведенный модуль комплексной сферы // Записки научн. сем. ПОМИ. 1998. Т. 254. С. 76–94.
12. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.

Институт прикладной математики ДВО РАН,
Владивосток
E-mail: dubinin@iam-mail.febras.ru

Поступила в редакцию
14.12.1999 и 27.07.2000