Общероссийский математический портал

Н. Б. Енгибарян, Постановка и решение некоторых задач факторизации интегральных операторов, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 12, 61–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm529>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 17:06:14

УДК 517.9

Н. Б. Енгибарян

Постановка и решение некоторых задач факторизации интегральных операторов

Рассматривается задача факторизации

$$I - K = (I - U_-)(I - U_+),$$

где I – единичный оператор, K – заданный интегральный оператор типа Фредгольма:

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x, t)f(t) dt, \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty,$$

$U_{\pm}$ – искомые, верхний и нижний, вольтерровые операторы. Вводятся такие классы обобщенных вольтерровых операторов $U_{\pm}$, в случае которых $I - U_{\pm}$ могут быть необратимыми в рассматриваемых пространствах определенных на (a, b) функций. Путем сочетания метода нелинейных уравнений факторизации и априорных оценок получены новые результаты по существованию и свойствам решения задачи при $k \geq 0$ как в докритическом случае $\mu < 1$, так и в критическом случае $\mu = 1$, где $\mu = r(K)$ – спектральный радиус оператора K . Поставлена и изучена также задача невольтерровой факторизации, когда ядра операторов U_+ и U_- обращаются в нуль на некоторых частях S_- и S_+ области $S = (a, b)^2$, причем $S_+ \cup S_- = S$.

Библиография: 16 названий.

§ 1. Введение

Рассмотрим интегральное уравнение типа Фредгольма второго рода

$$(I - K)f = g, \tag{1.1}$$

где I – единичный оператор, а K – интегральный оператор:

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x, t)f(t) dt, \quad -\infty \leq a < b \leq +\infty. \tag{1.2}$$

При соответствующих ограничениях на ядро k оператор K действует в том или ином банаховом пространстве (В.пространстве) $E(a, b)$ измеримых на (a, b) функций. В классах ядер, которые будут рассмотрены нами, имеет место обычное правило композиции: если $K_3 = K_1K_2$, то

$$k_3(x, y) = \int_a^b k_1(x, t)k_2(t, y) dt, \tag{1.3}$$

где k_m – ядро оператора K_m ($m = 1, 2, 3$).

Введем формально вольтерровые операторы вида

$$(U_+ f)(x) = \int_a^x u_+(x, t) f(t) dt, \quad (U_- f)(x) = \int_x^b u_-(x, t) f(t) dt. \quad (1.4)$$

Ядра $u_+(x, t)$ и $u_-(x, t)$ считаются равными нулю при $x < t$ и $x > t$ соответственно. Рассмотрим следующие две задачи факторизации:

$$I - K = (I - U_+)(I - U_-), \quad (1.5)$$

$$(I - K)^{-1} = (I + U_-)(I + U_+), \quad (1.6)$$

где $U_{\pm}$ суть искомые операторы вида (1.4). Эти задачи представляют не только самостоятельный интерес, но и важны в связи с их применением к уравнению (1.1).

В монографии И. П. Гохберга и М. Г. Крейна [1] изложена теория факторизации (1.6) в случае, когда $[a, b]$ — конечный промежуток, а $I - K$ — обратимый в $L_2(a, b)$ оператор с квадратируемым ядром. Основы теории вольтерровой факторизации интегральных операторов Винера–Хопфа второго рода изложены в [2], [3] и других работах.

В работах автора [4], [5] начал развиваться метод нелинейных уравнений факторизации (НУФ) интегральных операторов. Метод НУФ стал простой и общей конструкцией, охватывающей функциональные уравнения с квадратичной нелинейностью, сопряженные с линейными интегральными уравнениями и краевыми задачами для интегро-дифференциальных уравнений (см. [6]–[9]). В [10]–[13] и других работах метод НУФ из прикладного метода превратился в теоретический аппарат изучения вопросов вольтерровой и более общей факторизации интегральных и других операторов, разрешимости соответствующих однородных и неоднородных уравнений. С применением НУФ стало возможным построение факторизации необратимого оператора $I - K$.

В этой работе рассмотрена задача факторизации (1.5) в случае $\mu \equiv r(K) \leq 1$, где $r(K)$ — спектральный радиус оператора K в соответствующем В.пространстве. Путем сочетания метода НУФ, априорных оценок и расширения классов вольтерровых операторов получены новые результаты по существованию факторизации и ее свойствам как в докритическом случае $\mu < 1$, так и в критическом случае $\mu = 1$. Задача рассмотрена в классах непрерывных, полярных и более общих ядер. Поставлена и изучена также задача невольтерровой факторизации, когда носители ядер $u_{\pm}$ не являются треугольниками.

§ 2. Классы интегральных операторов

2.1. Операторы типа Фредгольма. Введем некоторые обозначения.

Через $\bar{A}$ обозначается замыкание множества $A \subset \mathbb{R}^n$. Все функции, которые будут рассмотрены нами, предполагаются вещественнозначными и измеримыми по Лебегу. Пусть функции f и g определены на множестве $A \subset \mathbb{R}^n$. Запись $f > g$ означает, что $f(x) > g(x)$ почти всюду на A . Запись $f \succ g$ означает, что $f \geq g$ и $f(x) > g(x)$ на множестве положительной меры.

Пусть $\eta(x) > 0$ на $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Обозначим через M_{η} В.пространство η -измеримых функций (см. [14]): $f \in M_{\eta}$, если $\exists c \geq 0$ такое, что $|f(x)| \leq c\eta(x)$. Точная нижняя грань таких чисел c называется η -нормой $\|f\|_{\eta}$ функции f . Если $\eta(x) \equiv 1$, то M_{η} обращается в пространство $M \equiv L_{\infty}$ ограниченных (в существенном) функций с нормой $\|f\|_M = \sup \operatorname{ess}_{x \in (a, b)} |f(x)|$.

Пусть $\zeta(x) > 0$ на (a, b) . Обозначим через L_ζ В.пространство функций на (a, b) , суммируемых по мере $\zeta(x) dx$ (т.е. с весом ζ). Если $\zeta(x) \equiv 1$, то $L_\zeta = L_1(a, b)$. Имеем $M_\zeta = L_\zeta^*$.

Пусть $a \geq -\infty$, $S_l = (a, l] \times (a, l]$ и $S = S_b$. Обозначим через G_η и G'_ζ В.пространства функций на S_b , удовлетворяющих соответственно условиям

$$\int_a^b |k(x, t)| \eta(t) dt \leq \lambda \eta(x), \quad \lambda < +\infty, \quad (2.1)$$

$$\int_a^b |k(x, t)| \zeta(x) dx \leq \mu \zeta(t), \quad \mu < +\infty. \quad (2.2)$$

Нормы в G_η и G'_ζ определяются как точные нижние грани таких чисел λ и μ соответственно. Указанные пространства являются банаховыми алгебрами с умножением $*$, определяемым согласно (1.3).

Обозначим через $\mathbb{G}_\eta$ и $\mathbb{G}'_\zeta$ алгебры интегральных операторов вида (1.2) с ядрами из G_η и G'_ζ соответственно. Оператор $K \in \mathbb{G}_\eta$ непрерывно действует в пространстве M_η , а оператор $K \in \mathbb{G}'_\zeta$ — в L_ζ , причем

$$\|K\|_{M_\eta} \leq \|k\|_{G_\eta}, \quad \|K\|_{L_\zeta} \leq \|k\|_{G'_\zeta}. \quad (2.3)$$

Перечислим некоторые известные классы интегральных операторов, содержащихся в $\mathbb{G}_\eta$ и $\mathbb{G}'_\zeta$.

а) Класс $\mathbb{G}'_{st} \subset \mathbb{G}'_1$ стохастических интегральных операторов (где $\mathbb{G}'_1 = \mathbb{G}'_\zeta$ при $\zeta(x) \equiv 1$), ядра которых удовлетворяют условиям

$$k \geq 0, \quad \int_a^b k(x, t) dx \equiv 1. \quad (2.4)$$

Стохастические операторы играют важную роль в теории вероятностей.

б) Класс $\mathbb{G}'_{sub} \subset \mathbb{G}'_1$ так называемых субстохастических операторов с ядрами

$$k \geq 0, \quad \int_a^b k(x, t) dx \leq 1.$$

Имеем $\mathbb{G}'_1 \subset \mathbb{G}'_{sub}$. Такие операторы возникают в теории полумарковских процессов и в физической кинетике.

в) Класс $WH \subset \mathbb{G}_1 \cap \mathbb{G}'_1$ интегральных операторов Винера–Хопфа:

$$(Kf)(x) = \int_0^\infty k_0(x-t)f(t) dt, \quad \mu \equiv \int_{-\infty}^\infty |k_0(x)| dx < +\infty. \quad (2.5)$$

В любом из пространств $L_p(0, \infty)$, $1 \leq p \leq +\infty$, имеет место оценка $\|K\| \leq \mu$.

г) Классы $\mathbb{Q}_0$ и $\mathbb{Q}_q$ интегральных операторов на конечном промежутке с непрерывными и полярными ядрами соответственно (см. [15]). Имеем $\mathbb{Q}_0, \mathbb{Q}_q \subset \mathbb{G}_1 \cap \mathbb{G}'_1$, $0 \leq q < 1$ (q — степень полярности).

2.2. Классы вольтеровых операторов. Сама постановка задачи вольтерровой факторизации (1.7) предполагает существование обратного оператора $(I - K)^{-1}$. Теория этой факторизации, изложенная в [1], основана на следующей концепции о вольтерровости абстрактного оператора U : U вполне непрерывный и его спектр состоит из единственной точки $\lambda = 0$. Такие операторы вида (1.4) мы условно назовем A -вольтеровыми (AV) операторами.

Задачи факторизации (1.5) и (1.6) формально свободны от требования обратимости $I - K$. Однако если ограничиться классом AV операторов, то $I - U_{\pm}$ и $I - K$ автоматически должны быть обратимыми. Поэтому в классах AV операторов $U_{\pm}$ задачи (1.5) и (1.7) эквивалентны с точки зрения существования.

На пути осмысления факторизаций (1.5) и (1.6) в случаях необратимого $I - K$ следует так расширить класс вольтеровых операторов, чтобы $I - U_{\pm}$ могли быть необратимы. С этой целью ниже мы введем понятие B -вольтеррового оператора.

Обозначим через S_l^+ и S_l^- следующие области в $\mathbb{R}^2$:

$$S_l^+ = \{(x, y) : a < y < x < l \leq b\}, \quad S_l^- = \{(x, y) : a < x < y < l \leq b\}, \\ S^{\pm} = S_b^{\pm}.$$

Мы определим классы B^+ и B^- правых и левых B -вольтеровых (BV) операторов, исходя из следующих требований: если $U_{\pm} \in B^{\pm}$, то

а) ядра u_+ и u_- суть измеримые функции в “треугольниках” S^+ и S^- соответственно, вне замкнутых треугольников они считаются равными нулю;

б) операторы $U_{\pm}$, а также операторы $|U_{\pm}|$ с ядрами $|u_{\pm}|$ непрерывно действуют из одного функционального B -пространства $E(a, b)$ в B -пространство, которое может не совпасть с E .

Приведем некоторые примеры BV операторов, которые не являются AV операторами. Сначала рассмотрим классы $WH^{\pm} \subset WH$ операторов свертки на полупрямой: $U_{\pm} \in WH^{\pm}$, если

$$(U_+ f)(x) = \int_0^x v_+(x-t)f(t) dt, \quad (U_- f)(x) = \int_x^{\infty} v_-(t-x)f(t) dt, \quad (2.6)$$

где $v_{\pm} \in L_1(0, \infty)$. Если $v_{\pm} \not\equiv 0$, то указанные операторы некомпактны в $L_p(0, \infty)$, $p \geq 1$, и обладают непрерывным спектром.

Рассмотрим теперь два модельных примера на конечном интервале $[0, 1]$:

$$(U_+ f)(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} f(t) dt, \quad (U_- f)(x) = \int_x^1 \frac{1}{1-x} f(t) dt. \quad (2.7)$$

Если $f \in C[0, 1]$, то считается, что $(U_- f)(1) = f(1)$. Оператор $U_- \in B^-$ непрерывно действует в $C[0, 1]$ и обладает неподвижным элементом $\eta(x) \equiv 1$, а $U_+ \in B^+$ непрерывно действует в $L_1(0, 1)$ и переводит $C[0, 1]$ в некоторый класс непрерывных на $[0, 1)$ функций, имеющих логарифмическую особенность в точке $x = 1$. Можно показать, что U_+ некомпактен в $L_1(0, 1)$.

В конце пункта введем понятие согласованной пары (U_+, U_-) BV операторов, сопряженной с факторизацией (1.5). Пару (U_+, U_-) операторов из $B^+ \times B^-$ мы назовем *согласованной* в B -пространстве $E(a, b)$, если оператор $I - U_-$ переводит $E(a, b)$ в некоторое его подпространство E_1 , а оператор U_+ переводит E_1 в E .

Операторы $U_{\pm}$, определенные согласно (2.7), составляют согласованную пару в $C[0, 1]$, причем E_1 является некоторым классом непрерывных на $[0, 1]$ функций, обращающихся в нуль в точке 1. Оператор U_+ не действует в исходном пространстве $C[0, 1]$.

§3. Нелинейное уравнение факторизации

3.1. Вывод нелинейного уравнения факторизации. Рассмотрим задачу факторизации (1.5). Для определенности будем считать, что ядро k принадлежит одному из классов G_η и G'_ζ , а $U_\pm$ являются BV операторами, для которых имеет место правило композиции (1.3). Свойства $U_\pm$ будут уточнены в процессе построения факторизации.

Из (1.5) имеем $U_+ + U_- = K + U_+ U_-$. Перейдя к ядрам, получим

$$u_+(x, y) + u_-(x, y) = k(x, y) + \int_a^{\min(x; y)} u_+(x, t) u_-(t, y) dt.$$

Рассматривая в отдельности случаи $x > y$ и $x < y$, мы приходим к следующей системе нелинейных интегральных уравнений относительно искомых ядер $u_\pm$:

$$\begin{aligned} u_+(x, y) &= k(x, y) + \int_a^y u_+(x, t) u_-(t, y) dt, & x > y, \\ u_-(x, y) &= k(x, y) + \int_a^x u_+(x, t) u_-(t, y) dt, & x < y. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Система (3.1) называется *нелинейным уравнением факторизации* (НУФ) для задачи (1.5).

3.2. Основные априорные оценки: случай $k \in G'_\zeta$. Одним из основных способов установления разрешимости НУФ является изучение последовательных приближений (см. [10]–[13]). Рассмотрим следующие итерации для (3.1), предел которых назовем *основным решением* (ОР) НУФ:

$$\begin{aligned} u_{n+1}^+(x, y) &= k(x, y) + \int_a^y u_n^+(x, t) u_n^-(t, y) dt, & x > y, \\ u_{n+1}^-(x, y) &= k(x, y) + \int_a^x u_n^+(x, t) u_n^-(t, y) dt, & x < y, \\ u_0^\pm &= 0, & n = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Если $k \in G_\eta$ или $k \in G'_\zeta$, то итерации (3.2) определяют последовательности $u_n^\pm$ в G_η и G'_ζ соответственно. Если k неотрицательно, то

$$0 \leq u_n^\pm \uparrow \quad \text{по } n. \quad (3.3)$$

Складывая соотношения (3.2), получаем

$$u_{n+1}^+(x, y) + u_{n+1}^-(x, y) = k(x, y) + \int_a^{\min(x; y)} u_n^+(x, t) u_n^-(t, y) dt. \quad (3.4)$$

Пусть выполнены условия

$$k \in G'_\zeta, \quad k \geq 0. \quad (3.5)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \nu(y) &= \int_a^b \zeta(x)k(x, y) dx, \\ \alpha_n^+(y) &= \int_y^b \zeta(x)u_n^+(x, y) dx, \quad \alpha_n^-(y) = \int_a^y \zeta(x)u_n^-(x, y) dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Умножая (3.4) на $\zeta(x)$ и интегрируя по x от a до b , получаем

$$\alpha_{n+1}^+(y) + \alpha_{n+1}^-(y) = \nu(y) + \int_a^y \alpha_n^+(t)u_n^-(t, y) dt. \quad (3.7)$$

Прежде чем сформулировать лемму 3.1, напомним определение сходимости по слабо* топологии (см. [16]). Пусть E^* – сопряженное пространство к В.пространству E . Последовательность $(f_n) \subset E^*$ слабо* сходится к $f \in E^*$, если $f_n(g) \rightarrow f(g) \quad \forall g \in E$.

ЛЕММА 3.1. Пусть выполнены условия

$$k \in G'_\zeta, \quad k \geq 0, \quad \nu(y) \leq \mu\zeta(y), \quad \mu \leq 1. \quad (3.8)$$

Тогда:

а) последовательность α_n^+ обладает свойствами

$$\alpha_n^+ \in M_\zeta, \quad 0 \leq \alpha_n^+ \uparrow \quad \text{по } n, \quad \alpha_n^+(y) \leq \mu\zeta(y) \quad (3.9)$$

и слабо* сходится в пространстве $M_\zeta = L_\zeta^*$ к функции α_+ такой, что

$$0 \leq \alpha_+(y) \leq \mu\zeta(y), \quad \|\alpha_+\|_{M_\zeta} \leq \mu; \quad (3.10)$$

б) последовательность вольтерровых операторов $U_n^+ \in \mathbb{G}'_\zeta$ с ядрами u_n^+ сильно сходится в L_ζ к оператору $U_+ \in \mathbb{G}'_\zeta$ с ядром u_+ , удовлетворяющим условию

$$\int_y^b \zeta(x)u_+(x, y) dx = \alpha_+(y) \quad (\leq \mu\zeta(y)); \quad (3.11)$$

в) имеет место оценка

$$\int_a^y \gamma_+(t)u_n^-(t, y) dt \leq \mu\gamma_n^+(y) \leq \mu\zeta(y), \quad (3.12)$$

где

$$\gamma_n^+(y) = \zeta(y) - \alpha_n^+(y), \quad \gamma_+(t) = \zeta(t) - \alpha_+(t) \geq (1 - \mu)\zeta(t). \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем оценку (3.9) индукцией по n . Пусть неравенство имеет место для некоторого $n \geq 0$. Из (3.7) с учетом (3.8) и (3.10) получаем

$$\alpha_{n+1}^+(y) \leq \mu\zeta(y) - \left[\alpha_n^-(y) - \mu \int_a^y \zeta(t) u_n^-(t, y) dt \right] \leq \mu\zeta(y).$$

Пусть φ — произвольная неотрицательная функция из L_ζ . Умножая обе части неравенства (3.9) на $\varphi(y)$ и интегрируя от a до b , получаем

$$(\varphi, \alpha_n^+) \equiv \int_a^b \varphi(y) \alpha_n^+(y) dy \leq \mu(\varphi, \zeta).$$

Из теоремы Б. Леви (см. [16]) следует, что последовательность $\varphi \alpha_n^+$ сходится в $L_1(a, b)$. Ясно, что эта последовательность почти всюду сходится к функции $\varphi \alpha_+$, где α_+ — точечный предел α_n^+ . Если же функция $\varphi \in L_\zeta$ знакопеременная, то достаточно представить ее в виде $\varphi_1 - \varphi_2$, $0 \leq \varphi_{1,2} \in L_\zeta$. Из сказанного выше следует утверждение а) леммы. Утверждение б) следует из монотонности u_n^+ и из оценки (3.9). Действительно, пусть $\psi_n = U_n^+ \varphi$, где $0 \leq \varphi \in L_\zeta$. Имеем $(\zeta, \psi_n) = (\alpha_n^+, \varphi)$, откуда и из утверждения а) леммы следует сильная сходимость последовательности U_n^+ в L_ζ . Остальные утверждения (равенство (3.11) и $u_+ \in G'_\zeta$) легко доказываются с использованием теоремы Б. Леви. Докажем оценку (3.12). Из (3.7) имеем

$$\mu \alpha_n^+(y) + \alpha_n^-(y) \leq \mu\zeta(y) + \int_a^y \alpha_n^+(t) u_n^-(t, y) dt,$$

откуда следует неравенство

$$\int_a^y \gamma_n^+(t) u_n^-(t, y) dt \leq \mu \gamma_n^+(y),$$

что влечет за собой (3.12). Лемма доказана.

3.3. Случай $k \in G_\eta$. Лемма 3.1 имеет свой аналог в случае, когда

$$k \in G_\eta, \quad k \geq 0, \quad \int_a^b k(x, t) \eta(t) dt \leq \mu \eta(x), \quad \eta > 0, \quad \mu \leq 1. \quad (3.14)$$

Некоторое отличие от ситуации предыдущего пункта обусловлено тем, что в пространстве M_η конус неотрицательных функций не является вполне правильным, даже правильным (в отличие от L_ζ). Имеет место

ЛЕММА 3.2. Пусть ядро k удовлетворяет условиям (3.14). Тогда:

а) имеет место оценка

$$\beta_n^-(x) \equiv \int_x^b u_n^-(x, y) \eta(y) dy \leq \mu \eta(x), \quad (3.15)$$

последовательность β_n^- слабо* сходится в $M_\eta = L_\eta^*$ к функции β_- :

$$\beta_-(x) \leq \mu \eta(x); \quad (3.16)$$

б) последовательность $U_n^- \in \mathbb{G}_\eta$ слабо* сходится в M_η к оператору $U_- \in \mathbb{G}_\eta$ с ядром $u_- \geq 0$ таким, что

$$\int_x^b u_-(x, y) \eta(y) dy = \beta_-(x) \quad (\leq \mu \eta(x)); \quad (3.17)$$

в) имеет место оценка

$$\int_a^x u_n^+(x, y) \gamma_-(y) dy \leq \mu \gamma_n^-(x), \quad (3.18)$$

где

$$\gamma_n^- = \eta - \beta_n^-, \quad \gamma_- = \eta - \beta_- \geq (1 - \mu) \eta. \quad (3.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (3.15) доказывается аналогично (3.9): соотношение (3.4) умножается на $\eta(y)$ и интегрируется по y от a до b , из полученного соотношения доказывается (3.15) индукцией по n . Слабо* сходимость β_n^- следует из ее монотонности и ограниченности сверху (оценки (3.15)). Докажем слабо* сходимость последовательности U_n^- . Пусть $\psi_n = U_n^- \varphi$, где $0 \leq \varphi \leq c\eta$. Имеем $\psi_n(x) \leq c\beta_n^-(x)$. Пусть $f \in L_\eta$ и $f \geq 0$. С учетом (3.15) получаем $(f, \psi_n) \leq c\mu(f, \eta)$. Из этой оценки и монотонности (ψ_n) следует ее слабо* сходимость в $M_\eta = L_\eta^*$ (случай знакопеременных φ, f рассматривается стандартным образом).

Оценка (3.18) доказывается аналогично (3.12). Лемма доказана.

3.4. Случай знакопеременного ядра. Леммы 3.1 и 3.2, а также некоторые последующие результаты по факторизации (1.5) в случае $k \geq 0$ могут быть распространены на случай знакопеременного ядра. При этом условия накладываются на функцию $|k(x, y)|$. Переход к знакопеременному ядру осуществляется с помощью следующей леммы.

ЛЕММА 3.3 (о мажоранте). Пусть $k \geq 0$ и w удовлетворяет неравенству $|w(x, y)| \leq k(x, y)$ почти всюду на S . Пусть $u_n^\pm$ определяются из (3.2), а $v_n^\pm$ — из аналогичных соотношений, в которых ядро k заменено ядром w . Тогда имеют место неравенства

$$|v_n^\pm(x, y)| \leq u_n^\pm(x, y), \quad |\delta_n^\pm(x, y)| \leq \varepsilon_n^\pm(x, y), \quad (3.20)$$

где

$$\delta_n^\pm = v_{n+1}^\pm - v_n^\pm, \quad \varepsilon_n^\pm = u_{n+1}^\pm - u_n^\pm.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перейдя в выражениях для $v_{n+1}^\pm$ к модулям, получим

$$|v_{n+1}^\pm(x, y)| \leq |w(x, y)| + \int_a^{\min(x, y)} |v_n^+(x, t)| |v_n^-(t, y)| dt, \quad x \geq y. \quad (3.21)$$

Путем сравнения (3.21) с (3.2) индукцией по n доказываются оценки $|v_n^\pm| \leq u_n^\pm$. Из (3.2) имеем

$$\varepsilon_n^\pm(x, y) = \int_a^{\min(x, y)} [u_n^+(x, t) \varepsilon_{n-1}^-(t, y) + \varepsilon_{n-1}^+(x, t) u_{n-1}^-(t, y)] dt, \quad x \geq y. \quad (3.22)$$

Перейдя в аналогичных выражениях для $\delta_n^\pm$ к модулям, получим

$$|\delta_n^\pm(x, y)| \leq \int_a^{\min(x; y)} [|v_n^+(x, t)| |\delta_{n-1}^-(t, y)| + |\delta_{n-1}^-(x, t)| |v_{n-1}^-(t, y)|] dt, \quad x \geq y. \quad (3.23)$$

Вторая группа неравенств (3.20) доказывается индукцией по n путем сравнения (3.22) и (3.23) с учетом первых из неравенств (3.20). Лемма доказана.

§ 4. Факторизационные теоремы

Леммы 3.1, 3.2 и 3.3 позволяют доказать разрешимость НУФ (3.1) и соответствующей задачи факторизации (1.5) в ряде случаев, когда спектральный радиус $r(|K|) \leq 1$, где $|K|$ – оператор с ядром $|k|$. В настоящем параграфе будут приведены некоторые результаты в этом направлении.

4.1. Докритический случай обратимого оператора $I - K$. Начнем с рассмотрения НУФ (3.1) в случае, когда ядро k удовлетворяет условиям (3.8) леммы 3.1, причем $\mu < 1$. Тогда K – сжимающий оператор в пространстве L_ζ .

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть ядро k удовлетворяет условиям (3.8) и $\mu < 1$. Тогда существует факторизация (1.5) как равенство операторов, действующих в L_ζ . Вольтерровы операторы $U_\pm \in \mathbb{G}'_\zeta$ являются сильными пределами в L_ζ последовательностей $U_n^\pm$, ядра которых определяются из итераций (3.2). Имеют место оценки (3.11) и

$$\int_a^y \gamma_+(t) u_-(t, y) dt \leq \mu \gamma_+(y), \quad (4.1)$$

где γ_+ определяется согласно (3.13),

$$(1 - \mu)\zeta(t) \leq \gamma_+(t) \leq \zeta(t). \quad (4.2)$$

Для спектральных радиусов операторов $U_\pm$ в L_ζ справедливы оценки

$$r(U_\pm) \leq \mu (< 1). \quad (4.3)$$

Факторы $I - U_\pm$, фигурирующие в разложении (1.5), обладают обратными в L_ζ : $(I - U_\pm)^{-1} = I + V_\pm$, где $V_\pm \in \mathbb{G}'_\zeta$ суть BV операторы с положительными ядрами. Имеет место факторизация вида (1.6):

$$(I - K)^{-1} = (I + V_-)(I + V_+). \quad (4.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценки снизу (3.13) для γ_+ и неравенства (3.12) следует, что при $\mu < 1$ последовательность операторов U_n^- ограничена по норме в пространстве L_ζ числом $(1 - \mu)^{-1}$ и сильно сходится к оператору $U^- \in \mathbb{G}'_\zeta$ с ядром u_- , удовлетворяющим неравенству (4.1). Сильная сходимость U_n^+ содержится в лемме 3.1. Из оценки (3.11) следует $\|U_+\|_{L_\zeta} \leq \mu$, стало быть, и $r(U^+) \leq \mu$. Из оценки (4.1) следует $\|U_-\|_{L_{\gamma_-}} \leq \mu$. Из неравенств (4.2) следует эквивалентность норм в L_{γ_-} и L_ζ , поэтому $r(U_-) \leq \mu$ в L_ζ .

Из неравенств (4.3) следует, что операторы $I - U_{\pm}$ обладают обратными $I + V_{\pm}$, которые являются суммами равномерно сходящихся рядов Неймана в банаховой алгебре $\mathbb{G}'_{\zeta}$ (расширение $\mathbb{G}'_{\zeta}$ единицей):

$$V_{\pm} = \sum_{m=1}^{\infty} U_{\pm}^m,$$

откуда, в частности, следует положительность ядер $V_{\pm}$.

Законность предельного перехода в итерациях (3.2) следует из сильной сходимости $U_n^{\pm}$. Следовательно, (u_-, u_+) является основным решением НУФ (3.1) и имеет место факторизация (1.5). Из обратимости $I - U_{\pm}$ следует существование факторизации (4.4). Теорема доказана.

В теореме 4.1 заслуживает внимания не только сам факт существования факторизации (1.5) в классе G'_{ζ} , но и равномерные оценки (4.3), которые не расходятся при приближении μ к критическому значению 1.

Имеет место аналог теоремы 4.1 в случае, когда ядро k удовлетворяет условиям (3.14) с $\mu < 1$. В этом случае утверждается лишь слабая* сходимость последовательностей U_n^+ (в M_{η}).

4.2. Случай непрерывного или полярного ядра. В настоящем пункте будет рассмотрена задача факторизации (1.5) в случае, когда $[a, b]$ – конечный промежуток, а $k > 0$ принадлежит классу Q_q ($0 \leq q < 1$) непрерывных или полярных ядер, т.е. имеет вид

$$k(x, t) = |x - t|^{-q} \omega(x, t), \quad \omega \in C[0, 1]^2, \quad \omega > 0, \quad 0 \leq q < 1.$$

Предполагается также, что

$$\mu = r(K) \leq 1. \quad (4.5)$$

Здесь $r(K)$ – спектральный радиус оператора K в В.пространстве $C[a, b]$ (или $L_2(a, b)$). Из сделанных предположений и из теоремы Ентча (см. [15]) следует, что число μ является положительным собственным значением K , которому соответствуют положительные “правая” и “левая” собственные функции $\eta \in C[a, b]$ и $\zeta \in C[a, b]$ соответственно:

$$\int_a^b k(x, y) \eta(y) dy = \mu \eta(x), \quad \int_a^b \zeta(x) k(x, y) dx = \mu \zeta(y). \quad (4.6)$$

Из (4.6) следует, что при выполнении условий (4.5) ядро k одновременно удовлетворяет условиям лемм 3.1 и 3.2. Нормы в пространствах M_{η} и L_{ζ} эквивалентны нормам пространств $M(a, b)$ и $L_1(a, b)$ соответственно. В докритическом случае $\mu < 1$ из теоремы 4.1 следует существование факторизации (1.5), причем $u_{\pm} \in G_1 \cap G'_1$. Тогда операторы $U_{\pm}$ действуют в $L_1(a, b)$, $M(a, b)$ и в интерполяционных пространствах $L_p(a, b)$, $1 \leq p \leq \infty$, причем во всех этих пространствах

$$r(U_{\pm}) \leq \mu. \quad (4.7)$$

В работе автора [11] получены результаты по принадлежности $U_{\pm} \in Q_q$ в случае полярного ядра k . Этот вопрос мы здесь обсуждать не будем.

Прежде чем перейти к рассмотрению критического случая $\mu = 1$, сделаем одно общее замечание о структуре НУФ (3.1). Пусть ядро определено на $S = [a, b]^2$ и $l \in [a, b]$. Обозначим через K_l интегральный оператор

$$(K_l f)(x) = \int_a^b k(x, t) f(t) dt, \quad x \in [a, l]. \quad (4.8)$$

Одним из проявлений вольтерровости нелинейной системы (3.1) является то, что в ней верхний предел интегрирования l не фигурирует в явном виде. Поэтому путем решения НУФ (3.1) факторизуется не только оператор $I - K_b$ (где $K_b = K$), но и семейство операторов $I - K_l$, $l \leq b$, с помощью соответствующих сужений функций $u_{\pm}$. Этот факт является континуальным аналогом рекуррентного процесса в методе последовательных исключений Гаусса решения линейных алгебраических систем.

Рассмотрим теперь НУФ (3.1) в критическом случае, когда в (4.5) и (4.6) $\mu = 1$. Пусть $l < b$. Из строгой положительности η , k и из (4.6) имеем

$$\int_a^l k(x, t) \eta(t) dt \leq \mu_l \eta(x), \quad (4.9)$$

где

$$\mu_l = 1 - \delta_l < 1, \quad \delta_l = \min_{x \in [a, l]} \frac{1}{\eta(x)} \int_l^b k(x, t) \eta(t) dt > 0.$$

Из (4.9) следует, что оператор K_l является докритическим $\forall l < b$. Поэтому вольтерровые операторы $U_{\pm}$ принадлежат классу $G_1 \cap G'_1$ на $[a, l]$. Нам остается изучить поведение функций $u_{\pm}(x, y)$ при близких к b значениях x и y . Начнем с рассмотрения одного элементарного модельного примера, когда K — одномерный оператор.

Пусть

$$k(x, y) = \eta(x) \zeta(y), \quad \eta, \zeta \in C[a, b], \quad \int_a^b \eta(x) \zeta(x) dx = 1. \quad (4.10)$$

Решение НУФ (3.1) имеет вид

$$u_+(x, y) = \eta(x) \zeta(y) \left[\int_x^b \eta(t) \zeta(t) dt \right]^{-1}, \quad u_-(x, y) = \eta(x) \zeta(y) \left[\int_y^1 \eta(t) \zeta(t) dt \right]^{-1}. \quad (4.11)$$

Из (4.11) видно, что функции $u_+(x, y)$ и $u_-(x, y)$ растут как $(b-x)^{-1}$ и $(b-y)^{-1}$ соответственно в окрестности точки (b, b) . С помощью функций (4.11) строится факторизация (1.5) по крайней мере как равенство операторов, действующих в $M(a, b)$. Ниже нами будет показано, что эти качественные факты остаются в силе в общем случае полярных ядер. Заметим, что формулы (4.11) содержат интересную информацию о свойствах $u_{\pm}$ также в том случае, когда $\eta, \zeta > 0$ на $[a, b]$ и могут обращаться в нуль в точке b .

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $[a, b]$ — конечный промежуток и выполнены условия

$$k(x, y) > 0, \quad k \in Q_q, \quad 0 \leq q < 1, \quad \mu \equiv r(K) = 1. \quad (4.12)$$

Тогда имеет место факторизация (1.5) как равенство операторов в $M(a, b)$. ВВ ядра $u_{\pm}$ являются основным решением НУФ (3.1). Операторы $I - U_{\pm}$

составляют согласованную факторизационную пару в $M(a, b)$. Если $\exists f(b-)$, то $[(I - U_-)f](b-) = 0$. Имеют место равенства

$$\int_x^b u_-(x, t)\eta(t) dt = \eta(x), \quad \int_y^b \zeta(t)u_+(t, y) dt = \zeta(y). \quad (4.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим интегралы

$$\int_a^x u_+(x, y)\eta(y) dy, \quad \beta_-(x) \equiv \int_x^b u_-(x, y)\eta(y) dy.$$

Принадлежность первого интеграла к $L_1(a, b)$ следует из (3.11). Из (3.17) следует, что $\beta_- \in M(a, b)$. Умножая обе части равенств (3.1) на $\eta(y)$, интегрируя по y от a до b и складывая полученные равенства, приходим к следующему однородному уравнению относительно ограниченной неотрицательной функции $\gamma_- = \eta - \beta_-$:

$$\gamma_-(x) = \int_a^x u_+(x, t)\gamma_-(t) dt. \quad (4.14)$$

На каждом интервале $[a, l]$, где $l < b$, (4.14) представляет собой однородное уравнение со сжимающим в $M(a, b)$ оператором U_l^+ . Поэтому $\gamma_-(x) = 0$ на $[a, b)$. Аналогично доказывается второе из равенств (4.13). Из (4.13) следует, что

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_x^b u_-(x, t)\eta(t) dt = \eta(b) \quad (> 0).$$

Покажем, что аналогичное равенство имеет место для любой функции $f \in M(a, b)$, если $\exists f(b-) = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow b} \int_x^b u_-(x, t)f(t) dt = f(b-). \quad (4.15)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\eta(b) = 1$. Пусть $\varepsilon > 0$ и число $\delta > 0$ выбрано так, что при $b - \delta < x < b$ выполняется неравенство $[f(b-) - \varepsilon]\eta(x) < f(x) < [f(b-) + \varepsilon]\eta(x)$ (почти всюду). Тогда при $b - \delta < x < b$ с учетом (4.13) будем иметь

$$[f(b-) - \varepsilon]\eta(x) \leq \varphi(x) \leq [f(b-) + \varepsilon]\eta(x), \quad \text{где } \varphi = U_-f,$$

откуда следует (4.15).

Из установленных выше свойств операторов $U_{\pm}$ следует, что при $f \in M(a, b)$ функции $\varphi = (I - K)f$ и $\psi = (I - U_-)(I - U_+)f$ совпадают по крайней мере как элементы из $L_1(a, b)$. Поскольку $\varphi \in M(a, b)$, то эти функции совпадают как элементы из $M(a, b)$. Теорема доказана.

4.3. Случай непрерывного ядра. Рассмотрим вопрос непрерывности вольтерровых ядер $u_{\pm}$ в случае непрерывного ядра k . Проще всего изучить этот вопрос путем сочетания метода НУФ с результатами монографии [1]. В [1] доказано, что в классе непрерывных ядер, когда $k \in C[a, b]^2$, а искомые вольтерровые ядра $u_{\pm}$ предполагаются непрерывными в замкнутых треугольниках $\bar{S}^+$ и $\bar{S}^-$ соответственно, для существования факторизации (4.4) необходимо и достаточно, чтобы операторы $I - K_l$ были обратимы в $L_2(a, b) \forall l \in [a, b]$. В условиях теоремы 4.2 если ядро k непрерывное, то вышеприведенное условие существования факторизации (4.4) выполняется для произвольного оператора $I - K_{\tau}$, $\tau \in [a, b]$. Отсюда непосредственно следует, что оператор $I - K_{\tau}$ допускает “прямую” факторизацию (1.5) с ядрами $u_{\tau}^{\pm} \in C[\bar{S}_{\tau}^{\pm}]$. Эта факторизация единственна.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $[a, b]$ – конечный промежуток, $k \in Q_0 = C[a, b]^2$ и выполняются условия (4.12). Тогда НУФ (3.1) обладает единственным решением (u_+, u_-) таким, что $u_{\pm} \in C[\bar{S}^{\pm} \setminus (b, b)]$. Имеют место равенства (4.13). Операторы $I - U_{\pm}$ составляют согласованную факторизационную пару в $C[a, b]$. Оператор $I - U_-$ переводит $C[a, b]$ в класс непрерывных на $[a, b]$ функций, равных нулю в точке b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании результатов [1] построенное выше семейство решений НУФ (3.1) $(u_{\tau}^{\pm})$ обладает следующим свойством. Из сделанного в п. 4.2 замечания о вольтерровой структуре НУФ (3.1) следует, что ядра $u_{\tau}^{\pm}$, соответствующие значению $\tau > l$, являются продолжением ядер $u_l^{\pm}$ на “большие” треугольники. Поэтому семейства (u_{τ}^+) , (u_{τ}^-) определяют функции u_+ , u_- , непрерывные в полузамкнутых треугольниках $\bar{S}^+ \setminus \{x = b\}$ и $\bar{S}^- \setminus \{y = b\}$ соответственно. Второе из уравнений (3.2) можно интерпретировать как линейное уравнение Вольтерра с непрерывным ядром $u_+(x, t)$ относительно $u_-(x, y)$, где $a \leq x \leq \tau$, а $y \in [a, b]$ – параметр. Поэтому из этого уравнения при фиксированном $\tau < b$ однозначно определяется функция $\tilde{u}_-(x, y)$, непрерывная в прямоугольнике $[a, \tau] \times [a, b]$. Сужение этой функции в трапецию $\{a \leq x \leq \tau, x \leq y \leq b\}$ совпадает с u_- . Аналогичный факт можно доказать для функции u_+ .

Итак, в случае непрерывного положительного ядра k функции $u_{\pm}$ непрерывны в замкнутых треугольниках $\bar{S}^{\pm}$, за исключением общей вершины (b, b) . Пусть $f \in C[a, b]$, $\varphi = (I - K)f \in C[a, b]$, $\rho = (I - U_-)f$, $\psi = (I - U_+)\rho$. Из установленных свойств $u_{\pm}$, включая формулу (4.15), следует, что $\rho \in C[a, b]$ и $\rho(b-) = 0$. Очевидно, $\psi \in C[a, b]$. Согласно теореме 4.2 φ и ψ совпадают почти всюду на $[a, b]$. Поэтому с точностью до доопределения функции ψ в точке b она совпадает с $\varphi \in C[a, b]$. Теорема доказана.

4.4. Некоторые замечания о теоремах 4.1–4.3. Единственность факторизации (1.5) утверждается только в теореме 4.3. Аналогичный факт нетрудно получить в условиях теоремы 4.2 в случае слабо полярного ядра, когда $q < \frac{1}{2}$. Тогда $k \in L_2(S)$. В условиях теорем 4.1 и 4.2 факторизация (1.5), вообще говоря, неединственная. Так обстоит дело, например, в случае интегральных операторов Винера–Хопфа.

В условиях теоремы 4.2 функции η и ζ являются правым и левым неподвижными векторами операторов U_- и U_+ соответственно (см. равенства (4.13)). В других классах ядер возможны случаи, когда η и ζ “аннулируются” совместным действием $I - U_-$ и $I - U_+$, т.е., например, $(I - U_-)\eta$ отличен от нуля, но $(I - U_+)(I - U_-)\eta = 0$.

Так обстоит дело в случае факторизации интегральных операторов Винера–Хопфа с консервативным ядром (см. [13]).

В условиях теорем 4.2 и 4.3 факторизация была построена с использованием факта существования неподвижных положительных векторов η и ζ . Было бы желательным построить факторизацию, исходя только из существования ζ , а затем использовать факторизацию для построения неподвижного вектора η . Этот вопрос выглядит важным, в частности, в случае стохастических ядер.

Предположения о полярности ядра k в теореме 4.2 и о строгой положительности k в теоремах 4.2 и 4.3 могут быть ослаблены. Доказательства указанных теорем фактически опираются на следующие два свойства ядра k : а) существование строго положительных и непрерывных неподвижных векторов η и ζ ; б) оператор $I - K_l$ обратим в $C[a, l] \ \forall l \in [a, b]$.

Важной особенностью теорем 4.1–4.3 являются утверждения о неотрицательности вольтерровых ядер $u_{\pm}$ и априорные оценки $r(U_{\pm}) \leq \mu$ в соответствующих пространствах.

§ 5. Задача невольтерровой факторизации

5.1. Постановка задачи. Нелинейное уравнение факторизации. Метод НУФ позволяет решить достаточно общие задачи факторизации вида (1.5) в таких случаях, когда операторы $U_{\pm}$ не являются вольтеррового типа. Ниже мы рассмотрим одну группу таких задач, следуя при этом схеме работы автора [12].

Пусть B – некоторая банахова алгебра интегральных операторов вида (1.2) с умножением (1.3). Пусть “квадрат” $S = (a, b)^2$ разбит на два измеримых подмножества S^+ и S^- , т.е. $S^+ \cup S^- = S$ и $S^+ \cap S^- = \emptyset$. Обозначим через B^+ и B^- подклассы интегральных операторов из B , ядра которых равны нулю вне S^+ и S^- соответственно. Имеем $B = B^+ \oplus B^-$. Обозначим через $P_{\pm}$ проекторы, переводящие B (или соответствующие ядра) в $B^{\pm}$.

Рассмотрим следующую задачу факторизации: для $K \in B$ найти $U_{\pm} \in B^{\pm}$ такие, чтобы

$$I - K = (I - U_+)(I - U_-). \quad (5.1)$$

Сформулированная задача содержит различные содержательные частные случаи (по геометрии областей $S^{\pm}$), имеющие полезные приложения. В конце параграфа мы вкратце остановимся на двух частных случаях.

Раскрывая скобки в (5.1) и переходя к ядрам, получаем

$$u_+ + u_- = k + u_+ * u_-.$$

Применяя к обеим частям этого равенства проекторы P_+ и P_- , приходим к следующим нелинейным уравнениям факторизации:

$$u_{\pm} = k_{\pm} + P_{\pm}(u_+ * u_-), \quad (5.2)$$

где

$$k_{\pm} = P_{\pm}(k).$$

5.2. Обобщение теоремы 4.1. В доказательствах леммы 3.1 и теоремы 4.1 вольтерровость операторов $U_{\pm}$ принципиальной роли не играет. Эти предположения легко распространяются на НУФ (5.2).

Обозначим $S_y^{\pm} = \{x : (x, y) \in S^{\pm}\}$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть ядро $k \in G'_\zeta$ удовлетворяет условиям (3.8), причем $\mu < 1$. Тогда существует основное решение НУФ (5.2). Имеют место оценки

$$\alpha_+(y) \equiv \int_{S_y^+} \zeta(x) u_+(x, y) dx \leq \mu \zeta(y), \quad (5.3)$$

$$\int_{S_y^-} \gamma_+(x) u_-(x, y) dx \leq \mu \gamma_+(y), \quad (5.4)$$

где

$$\gamma_+(x) = \zeta(x) - \alpha_+(x), \quad (1 - \mu)\zeta(x) \leq \gamma_+(x) \leq \zeta(x).$$

Существует факторизация (5.1) как равенство операторов в L_ζ , причем

$$r(U_\pm) \leq \mu. \quad (5.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующие итерации для НУФ (5.2):

$$u_{n+1}^\pm = k_\pm + P_\pm(u_n^+ * u_n^-), \quad u_0^\pm = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (5.6)$$

складывая которые, в раскрытом виде будем иметь

$$u_{n+1}^+(x, y) + u_{n+1}^-(x, y) = k(x, y) + \int_a^b u_n^+(x, t) u_n^-(t, y) dt. \quad (5.7)$$

Из (5.6) видно, что $0 \leq u_n^\pm \uparrow$ по n .

Умножая обе части (5.7) на $\zeta(x)$ и интегрируя по x от a до b , получаем соотношение вида (3.7), в котором

$$\alpha_n^\pm(y) = \int_{S_y^\pm} \zeta(x) u_n^\pm(x, y) dx.$$

Продолжение доказательства теоремы 5.1 совпадает с доказательством леммы 3.1 и теоремы 4.1. Теорема доказана.

5.3. Примеры. Приведем два простых частных случая факторизации (5.1), представляющих прикладной интерес.

а) Пусть S^+ — следующий треугольник:

$$\{(x, y) : a + h^+ < x < b, a < y < x - h^+\}, \quad 0 < h^+ < b - a.$$

Тогда факторизация (5.1) существует не только при $\mu < 1$, но и при $\mu = 1$, при некоторых слабых ограничениях на ядро k , причем тогда $r(U_+) < 1$, $r(U_-) \leq \mu$. Оператор $I - U_-$, в свою очередь, может быть факторизован: $I - U_- = (I - W)(I - V_-)$, где носитель ядра v_+ заключен в треугольнике

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b - h^-, x + h^- \leq y \leq b\}, \quad 0 < h^- < b - a,$$

а носитель ядра w — в полосе

$$\Pi = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \max(x - h^+, a) \leq y \leq \min(y + h^-, b)\}.$$

В результате строится трехфакторное разложение

$$I - K = (I - U_+)(I - W)(I - V_-), \quad (5.8)$$

где U_+ , W , V_- суть операторы с неотрицательными ядрами, причем при $\mu = 1$ необратимым может быть только $I - W$. Указанный процесс разложения можно продолжить. Обратим внимание на то обстоятельство, что при вольтерровой факторизации оператора $I - W$ носители ядер факторов будут заключены в полосе Π .

б) Рассмотрим второй пример. Пусть S^- — следующая трапеция:

$$\{(x, y) : a < x < l, x < y < b\}, \quad l \in (a, b).$$

Тогда НУФ (5.2) на промежутке $[a, l]$ имеет вольтерровскую структуру и совпадает с уравнением (3.1). Факторизация (5.1) может оказаться полезной в тех случаях, когда

$$k \geq 0, \quad r(K) = 1, \quad r(K_l) < 1.$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность академику В. С. Владимирову за важные обсуждения подходов и результатов настоящей работы.

Список литературы

1. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1967.
2. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13. №5. С. 3–120.
3. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1972.
4. Енгибарян Н. Б. Нестационарная диффузия излучения // Астрофизика. 1966. Т. 2. №2. С. 197–204.
5. Енгибарян Н. Б. О факторизации симметрических интегральных операторов // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203. №1. С. 19–21.
6. Амбарцумян В. А. Научные труды. Т. 1. Ереван, 1960.
7. Владимиров В. С. Приближенное решение одной краевой задачи // Прикл. матем. и мех. 1958. Т. 19. С. 315.
8. Kagiwada H. H., Kalaba R. E., Shumitsky A. An initial-value method for fredholm integral equation // J. Math. Anal. Appl. 1967. V. 19. P. 197–203.
9. Енгибарян Н. Б., Мнацаканян М. А. О факторизации интегральных операторов // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206. №4. С. 792–795.
10. Енгибарян Н. Б., Арутюнян А. А. Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения // Матем. сб. 1975. Т. 97 (139). №1. С. 35–58.
11. Енгибарян Н. Б. Некоторые факторизационные теоремы для интегральных операторов // Докл. АН СССР. 1976. Т. 230. №5. С. 1021–1024.
12. Енгибарян Н. Б. О нелинейных уравнениях факторизации операторов // Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики. Ереван: Изд-во ЕрГУ, 1982. С. 123–128.
13. Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б. Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения // Итоги науки и техники. Матем. анализ. Т. 22. М.: ВИНТИ, 1984. С. 175–244.
14. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Гостехиздат, 1962.
15. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.