Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. С. Казарян, Д. Ватерман, Теоремы о представлении функций рядами, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 12, 123–140

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm531>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 12:05:30

УДК 517.51

К. С. Казарян, Д. Ватерман

Теоремы о представлении функций рядами

Установлено, что если система функций Φ такова, что каждая измеримая конечная почти всюду функция может быть представлена Φ -рядом, который сходится по мере, то это же верно и для измеримых функций, которые могут равняться плюс или минус бесконечности на множествах положительной меры.

Библиография: 13 названий.

Введение. Изучение представления функций тригонометрическими рядами и влияние этих рассмотрений на различные разделы математического анализа освещены очень хорошо (см., например, статьи П. Л. Ульянова [1] и Ж.-П. Кахана [2]). В данной статье рассматривается вопрос о представлении функций рядами по общим системам функций. Некоторые вопросы такого характера были поставлены в знаменитой диссертации Н. Н. Лузина [3], [4]. Его подход к этим проблемам был основан на представлении произвольной измеримой конечной почти всюду (к.п.в.) функции в виде производной некоторой непрерывной функции. Он доказал, что для любой измеримой к.п.в. функции существует тригонометрический ряд, суммируемый к ней п.в. методом Абеля.

Те задачи Н. Н. Лузина в этом направлении, которые остались нерешенными, впоследствии интенсивно изучались Д. Е. Меньшовым [5], [6], [7; гл. 15], который использовал другой метод, связанный с исправлением функций на множествах малой меры. А. А. Талалян модифицировал и развил методы Меньшова в своей диссертации. Он доказал, что любая измеримая функция может быть представлена в виде ряда по полной ортогональной системе, который сходится по мере к данной функции. В серии статей Талалян старался найти минимальные условия на систему функций, достаточные для того, чтобы любая измеримая к.п.в. функция могла быть представлена в виде ряда по этой системе, сходящегося к ней по мере. Он установил (см. [8], [9; § 1]) следующий результат.

ТЕОРЕМА (А. А. Талалян). Пусть $F = \{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – система определенных на $[0, 1]$ функций такая, что

$$\inf_n |\{x : f_n(x) \neq 0\}| > 0, \quad (1)$$

и существует число $p \in [1, \infty)$ такое, что для любой функции $f \in L^p_{[0,1]}$ найдется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$, который сходится по мере к f . Тогда для любой измеримой функции ϕ можно найти ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n f_n$, который сходится по мере к ϕ .

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке фонда DGICYT, Испания (грант № PB97-0030).

Талалян отметил (см. [8], [9; § 1]), что он не смог доказать предыдущую теорему без условия (1). В данной статье мы докажем, что это условие можно убрать.

Функция f в теореме Талаляна может принимать значения $+\infty$ и $-\infty$ на некоторых множествах положительной меры. Лузин в своей диссертации уделил большое внимание представлению таких функций. Он доказал, что множество, где производная функции бесконечна, не может иметь положительную меру. Представляется, что его интерес к таким функциям был вызван использовавшимся им подходом.

Мы покажем, что если система функций Φ такова, что любая измеримая конечная почти всюду функция может быть представлена рядом по системе Φ , который сходится по мере, то то же самое верно и для произвольной измеримой функции, которая может равняться плюс или минус бесконечности на множествах положительной меры.

Нам также удалось продвинуться в задаче описания пространств, которые мы называем R -пространствами. Налагаемые нами условия вытекают из метода доказательства. Эти пространства в некотором смысле близки к пространствам, появившимся в [10]. Известным примером пространства, которое не является R -пространством, является пространство аналитических функций на $[0, 1]$.

В последние годы векторнозначные функции и ряды с векторнозначными коэффициентами естественным образом возникли в различных областях исследований. Поэтому не нуждается в пояснениях интерес к изучению представлений векторнозначных функций рядами с векторнозначными коэффициентами. При доказательстве нашего результата для векторнозначных функций не возникает никаких затруднений. Мы не рассматривали другие результаты о представлении функций с точки зрения того, возникают ли какие-либо проблемы при изучении аналогичных вопросов для векторнозначных функций.

1. Определения и предварительные результаты. *Квазинормой* (или *нормой Фреше*) на линейном пространстве X называется действительная функция $\|\cdot\|$ на X такая, что

$$\begin{aligned} \|x\| \geq 0 \text{ и } \|x\| = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } x = 0, \\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \|-x\| = \|x\|, \\ \lim_{\alpha_n \rightarrow 0} \|\alpha_n x\| = 0 \text{ и } \lim_{\|x_n\| \rightarrow 0} \|\alpha x_n\| = 0, \end{aligned}$$

где α — число. Полное квазинормированное линейное пространство называется *F-пространством* (или *пространством Фреше*) (см. [11; гл. I, разд. 2]).

Мы рассматриваем пространства измеримых действительных функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, отождествляя функции, совпадающие п.в. Комплекснозначные функции рассматриваются как частный случай векторнозначных функций. Действительные и натуральные числа будут обозначаться через $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ соответственно.

Пусть χ_E — характеристическая функция множества $E \subseteq [0, 1]$. Скажем, что F -пространство функций $\mathbf{F}$ является *простым F-пространством*, если $\chi_{[0,1]} \in \mathbf{F}$ и для любой $f \in \mathbf{F}$ и любого измеримого подмножества $E \subseteq [0, 1]$ $\chi_E \cdot f \in \mathbf{F}$.

Простое F -пространство $\mathbf{F}$ будем называть *регулярным*, если для любого измеримого подмножества $E \subseteq [0, 1]$, $|E| > 0$, существует функция $f \in \mathbf{F}$ такая, что

$$\|\chi_E \cdot f\|_{\mathbf{F}} \neq 0 \text{ и } \chi_E(x) \cdot |f(x)| \leq 1 \text{ для п.в. } x \in [0, 1],$$

где $\|f\|_{\mathbf{F}}$ – квазинорма функции f в пространстве $\mathbf{F}$.

F -пространство $\mathbf{F}$ действительных функций называется F -*решеткой*, если из того, что $f, g \in \mathbf{F}$ и $|f(x)| \leq |g(x)|$ п.в. на $[0, 1]$, следует, что $\|f\|_{\mathbf{F}} \leq \|g\|_{\mathbf{F}}$.

Квазинорма простого F -пространства $\mathbf{F}$ называется *абсолютно непрерывной*, если для любой $f \in \mathbf{F}$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого подмножества $E \subseteq [0, 1]$, $|E| < \delta$,

$$\|\chi_E \cdot f\|_{\mathbf{F}} < \varepsilon.$$

Легко заметить, что пространства $L_{[0,1]}^p$, $0 < p \leq \infty$, пространства Орлича и Лоренца являются регулярными F -решетками с абсолютно непрерывными квазинормами. По поводу представления классов Орлича см. [12].

Через L_D^0 мы обозначим линейное метрическое пространство измеримых функций, определенных на измеримом множестве D , с квазинормой

$$\|f\|_{L_D^0} = \int_D \frac{|f(x)|}{1 + |f(x)|} dx.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\mathbf{F}$ – F -пространство функций, определенных на $[0, 1]$. Система определенных на $[0, 1]$ функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *m -представляющей системой пространства $\mathbf{F}$* , если для любой $f \in \mathbf{F}$ существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$, $a_n \in \mathbb{R}$, который сходится по мере к функции f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\mathbf{F}$ – F -пространство определенных на $[0, 1]$ функций. Тогда скажем, что $\mathbf{F}$ является *R -пространством*, если любая m -представляющая система пространства $\mathbf{F}$ является m -представляющей системой пространства $L_{[0,1]}^0$.

Нижеследующее предложение должно пояснить свойства различных пространств, введенных нами. Так как оно не понадобится в наших рассмотрениях, мы отложим его доказательство до конца статьи.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Если $\mathbf{F}$ является регулярной F -решеткой действительных функций, определенных на $[0, 1]$, то топология $\mathbf{F}$ сильнее, чем топология $L_{[0,1]}^0$.

Если $\mathbf{B}$ – абстрактное банахово пространство, то можно изучать теоремы представления только для сильно измеримых (с.и.) $\mathbf{B}$ -значных функций, т.е. для $\mathbf{B}$ -значных функций, которые п.в. являются пределами $\mathbf{B}$ -значных простых функций.

Скажем, что простая функция g является *d -простой функцией порядка m* , если она является линейной комбинацией характеристических функций двоичных интервалов, т.е.

$$g(x) = \sum_{i=1}^{2^m} b_i \chi_{\Delta_m^i}(x) \quad (1 \leq i \leq 2^m),$$

где $\Delta_m^i = [(i-1)/2^m, i/2^m)$, $i = 1, 2, \dots, 2^m$.

При доказательстве леммы 1 мы будем применять следующее предложение, доказанное Банахом (см. [13; с. 25]).

ЛЕММА (С. Банах). Пусть U – линейный непрерывный оператор, определенный на F -пространстве $\mathbf{E}$, образ которого также является F -пространством $\mathbf{E}_1$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\eta > 0$ такое, что образ открытого шара $\{x \in \mathbf{E} : \|x\|_{\mathbf{E}} < \varepsilon\}$ под действием U содержит открытый шар $\{y \in \mathbf{E}_1 : \|y\|_{\mathbf{E}_1} < \eta\}$.

2. Основные результаты и доказательства. Основными результатами статьи являются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathbf{F}$ – регулярная F -решетка определенных на $[0, 1]$ функций с абсолютно непрерывной квазинормой. Тогда $\mathbf{F}$ является R -пространством.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – m -представляющая система пространства $L_{[0,1]}^0$. Тогда для любой измеримой функции, которая может равняться плюс или минус бесконечности на множествах положительной меры, существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$, который сходится по мере к f .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mathbf{F}$ – регулярная F -решетка определенных на $[0, 1]$ функций с абсолютно непрерывной квазинормой. Пусть также $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ – m -представляющая система пространства $\mathbf{F}$. Тогда для любого целого положительного N система $\{f_n\}_{n=N}^{\infty}$ является m -представляющей системой пространства $L_{[0,1]}^0$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является m -представляющей системой пространства $L_{[0,1]}^0$, а $\mathbf{B}$ – произвольное банахово пространство. Тогда для любой с.и. $\mathbf{B}$ -значной функции $\mathbf{f}$ существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n$, $x_n \in \mathbf{B}$, который сходится по мере к функции $\mathbf{f}$.

Мы установим пять лемм, являющихся основой доказательства. Теоремы 1–3 выводятся из леммы 4 приблизительно одним и тем же способом. Аналогичным образом теорема 4 следует из леммы 5. Лемма 1 является основным инструментом доказательств леммы 3 и леммы 5.

Вначале выведем теорему 2 из леммы 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Предположим, что f является произвольной измеримой функцией, которая может принимать бесконечные значения на множествах положительной меры. Пусть $G_1 = \{t \in [0, 1] : |f(t)| < \infty\}$, $G_2 = \{t \in [0, 1] : f(t) = +\infty\}$, $G_3 = \{t \in [0, 1] : f(t) = -\infty\}$. Определим

$$\psi_1(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } t \in G_1; \\ 1, & \text{если } t \in G_2; \\ -1, & \text{если } t \in G_3. \end{cases}$$

Полагая $\varepsilon_k = 2^{-k-2}$ при $k = 1, 2, \dots$, по лемме 4 мы находим полином

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{j_1} a_i f_i, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

такой, что

$$\|Q_1 - \psi_1\|_{L^0_{[0,1]}} < \varepsilon_1$$

и для любого измеримого множества $D \subseteq [0, 1]$

$$\sup_{1 \leq k \leq j_1} \left\| \sum_{i=1}^{j_1} a_i f_i \right\|_{L^0_D} < \varepsilon_1 + \|\psi_1\|_{L^0_D}.$$

Далее, положим

$$\psi_2(t) = \begin{cases} \psi_1(t) - Q_1(t), & \text{если } t \in G_1; \\ 1, & \text{если } t \in G_2; \\ -1, & \text{если } t \in G_3. \end{cases}$$

Снова применяя лемму 4, мы получим полином

$$Q_2 = \sum_{i=j_1+1}^{j_2} a_i f_i, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

такой, что

$$\|Q_2 - \psi_2\|_{L^0_{[0,1]}} < \varepsilon_2$$

и для любого измеримого множества $D \subseteq [0, 1]$

$$\sup_{j_1+1 \leq k \leq j_2} \left\| \sum_{i=j_1+1}^{j_2} a_i f_i \right\|_{L^0_D} < \varepsilon_2 + \|\psi_2\|_{L^0_D}.$$

На n -м шаге мы полагаем

$$\psi_n(t) = \begin{cases} \psi_{n-1}(t) - Q_{n-1}(t), & \text{если } t \in G_1; \\ 1, & \text{если } t \in G_2; \\ -1, & \text{если } t \in G_3, \end{cases}$$

и по лемме 4 находим полином

$$Q_n = \sum_{i=j_{n-1}+1}^{j_n} a_i f_i, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

такой, что

$$\|Q_n - \psi_n\|_{L^0_{[0,1]}} < \varepsilon_n$$

и для любого измеримого множества $D \subseteq [0, 1]$

$$\sup_{j_{n-1}+1 \leq k \leq j_n} \left\| \sum_{i=j_{n-1}+1}^{j_n} a_i f_i \right\|_{L^0_D} < \varepsilon_n + \|\psi_n\|_{L^0_D}.$$

Ясно, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ сходится по мере к функции f .

ЛЕММА 1. Пусть $\mathbf{F}$ является простым F -пространством действительных функций, заданных на $[0, 1]$, и пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — t -представляющая система пространства $\mathbf{F}$, а $\{r_k\}$ — система функций Радемахера.

Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует $\eta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой d -простой функции g порядка t , для которой $\|g\|_{\mathbf{F}} < \eta$, и для любого $N \in \mathbb{N}$ можно найти возрастающую последовательность $\{s_j\}_{j=1}^\infty$, $s_j \in \mathbb{N}$, $s_1 > t$, и простые функции g_j такие, что

- 1) $\|(r_{s_j} - r_{s_{j+1}}) \cdot g - g_j\|_{\mathbf{F}} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow +\infty$;
- 2) $g_j = \sum_{n=1}^\infty c_n^j f_n$ в $L_{[0,1]}^0$, $\sup_k \|\sum_{n=1}^k c_n^j f_n\|_{L_{[0,1]}^0} < \varepsilon$;
- 3) $\lim_{j \rightarrow \infty} c_n^j = 0$ для любого n ($1 \leq n \leq N$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим F -пространство $\mathbf{E}$ последовательностей коэффициентов $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $a_n \in \mathbb{R}$. Для любой $f \in \mathbf{F}$ обозначим через $a(f)$ класс всех последовательностей $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ таких, что ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n f_n$ сходится по мере к той же функции $f \in \mathbf{F}$. Если мы определим

$$\|a(f)\|_{\mathbf{E}} = \inf_{\{a_n\} \in a(f)} \sup_k \left\| \sum_{n=1}^k a_n f_n \right\|_{L_{[0,1]}^0} + \|f\|_{\mathbf{F}},$$

то легко проверяется, что все аксиомы F -пространства выполняются для $\mathbf{E}$.

Оператор $U: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{F}$, определенный равенством

$$U(a(f)) = f,$$

очевидно является линейным и ограниченным. По лемме Банаха существует $\eta > 0$ такое, что если $\|f\|_{\mathbf{F}} < \eta$, то можно найти ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n f_n$, который сходится к f в $L_{[0,1]}^0$ и

$$\sup_p \left\| \sum_{n=1}^p a_n f_n \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \frac{1}{4} \varepsilon.$$

Обозначим $\phi_k = r_k g$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любого k мы можем найти ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n^{(k)} f_n$ такой, что

$$\sum_{n=1}^\infty a_n^{(k)} f_n = r_k \cdot g \text{ в } L_{[0,1]}^0 \text{ и } \sup_p \left\| \sum_{n=1}^p a_n^{(k)} f_n \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \frac{1}{4} \varepsilon. \quad (2)$$

Для любого n , $1 \leq n \leq N$, верно одно из следующих двух условий:

- а) $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_n^{(k)}| = +\infty$;
- б) существует возрастающая подпоследовательность натуральных чисел $\{m_k\}_{k=1}^\infty$, $m_k \in \mathbb{N}$, $m_k > t$, такая, что последовательность $\{a_n^{(m_k)}\}_{k=1}^\infty$ имеет конечный предел.

Таким образом, множество чисел $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq N$, может быть разбито на два непересекающихся множества Ω_0 и Ω_0^c таких, что для каждого n существует возрастающая последовательность $\Lambda_0 = \{k_j\}_{j=1}^\infty$, $k_j \in \mathbb{N}$, $k_j > m$, для которой выполняются следующие условия:

если $n \in \Omega_0$, то $\lim_{j \rightarrow \infty} a_n^{(k_j)} = +\infty$ или $-\infty$;

если $n \in \Omega_0^c$, то $\{a_n^{(k_j)}\}_{j=1}^\infty$ имеет конечный предел.

Пусть ν_1 – наименьшее целое число, лежащее в Ω_0 , и пусть $n_1 = k_1$. По определению Ω_0 мы получаем, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{a_{\nu_1}^{(n_1)}}{a_{\nu_1}^{(k_j)}} = 0.$$

Таким образом, из (2) мы можем найти такое $n_2 > n_1$, $n_2 \in \Lambda_0$, что

$$\left| \frac{a_{\nu_1}^{(n_1)}}{a_{\nu_1}^{(n_2)}} \right| < \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \sup_p \left\| \frac{a_{\nu_1}^{(n_1)}}{a_{\nu_1}^{(n_2)}} \cdot \sum_{n=1}^p a_n^{(n_2)} f_n \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \frac{1}{8} \varepsilon. \quad (3)$$

Если мы обозначим

$$\phi_1^1 = r_{n_1} \cdot g - \frac{a_{\nu_1}^{(n_1)}}{a_{\nu_1}^{(n_2)}} \cdot r_{n_2} \cdot g,$$

то

$$\phi_1^1 = \sum_{n=1}^\infty \left(a_n^{(n_1)} - \frac{a_{\nu_1}^{(n_1)}}{a_{\nu_1}^{(n_2)}} a_n^{(n_2)} \right) f_n := \sum_{n=1}^\infty b_n^{2,1} f_n,$$

где ряд сходится в $L_{[0,1]}^0$. Из (2) и (3) мы получаем, что

$$\sup_\ell \left\| \sum_{n=1}^\ell b_n^{2,1} f_n \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) \varepsilon.$$

Сходным образом мы находим затем такое $n_3 > n_2$, $n_3 \in \Lambda_0$, что

$$\left| \frac{a_{\nu_1}^{(n_2)}}{a_{\nu_1}^{(n_3)}} \right| < \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad \sup_p \left\| \frac{a_{\nu_1}^{(n_2)}}{a_{\nu_1}^{(n_3)}} \cdot \sum_{n=1}^p a_n^{(n_3)} f_n \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \frac{1}{8} \varepsilon,$$

и определяем функцию

$$\phi_2^1 = r_{n_2} \cdot g - \frac{a_{\nu_1}^{(n_2)}}{a_{\nu_1}^{(n_3)}} r_{n_3} \cdot g = \sum_{n=1}^\infty b_n^{3,1} f_n.$$

На k -м шаге мы находим такое $n_{k+1} > n_k$, $n_{k+1} \in \Lambda_0$, что

$$\left| \frac{a_{\nu_1}^{(n_k)}}{a_{\nu_1}^{(n_{k+1})}} \right| < \frac{1}{2^k} \quad \text{и} \quad \sup_p \left\| \frac{a_{\nu_1}^{(n_k)}}{a_{\nu_1}^{(n_{k+1})}} \cdot \sum_{n=1}^p a_n^{(n_{k+1})} f_n \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \frac{1}{8} \varepsilon.$$

Определив функцию

$$\phi_k^1 = r_{n_k} \cdot g - \frac{a_{\nu_1}^{(n_k)}}{a_{\nu_1}^{(n_{k+1})}} r_{n_{k+1}} \cdot g = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(n_k)} - \frac{a_{\nu_1}^{(n_k)}}{a_{\nu_1}^{(n_{k+1})}} a_n^{(n_{k+1})} \right) f_n := \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{k,1} f_n,$$

мы получаем

$$\sup_{\ell} \left\| \sum_{n=1}^{\ell} b_n^{k,1} f_n \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) \varepsilon.$$

Из нашей конструкции очевидно, что

$$\|r_{n_k} \cdot g - \phi_k^1\|_{\mathbf{F}} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Заметим, что $b_{\nu_1}^{k,1} = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что если $n \in \Omega_0$, то $\{b_n^{k,1}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет конечный предел. Если $n \in \Omega_0^c$ и $n \neq \nu_1$, то верно одно из следующих двух условий:

- a₁) $\lim_{k \rightarrow \infty} |b_n^{k,1}| = +\infty$,
- b₁) существует подпоследовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что последовательность $\{b_{n_k}^{\mu_k,1}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет конечный предел.

Таким образом, множество $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n \leq N$, может быть разбито на два непересекающихся множества Ω_1 и Ω_1^c , $\Omega_1, \Omega_1^c \subset \Omega_0$, такие, что для каждого n существует подпоследовательность $\Lambda_1 := \{l_j\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности Λ_0 , для которой выполняются следующие условия:

- если $n \in \Omega_1$, то $\lim_{j \rightarrow \infty} b_n^{l_j,1} = +\infty$ или $-\infty$;
- если $n \in \Omega_1^c$, то $\{b_n^{l_j,1}\}_{j=1}^{\infty}$ имеет конечный предел.

Затем мы выбираем ν_2 — наименьшее целое число, принадлежащее Ω_1 , $\nu_2 > \nu_1$, и повторяем построение, беря функции ϕ_k^1 вместо функций $r_k \cdot g$. Обозначим $m_1 = l_1$ и найдем такое $m_2 \in \Lambda_1$, $m_2 > m_1$, что

$$\left| \frac{b_{\nu_2}^{m_1,1}}{b_{\nu_2}^{m_2,1}} \right| < \frac{1}{4} \quad \text{и} \quad \sup_p \left\| \frac{b_{\nu_2}^{m_1,1}}{b_{\nu_2}^{m_2,1}} \cdot \sum_{n=1}^p b_n^{m_2,1} f_n \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \frac{1}{16} \varepsilon,$$

и положим

$$\phi_1^2 = \phi_{m_1}^1 - \frac{b_{\nu_2}^{m_1,1}}{b_{\nu_2}^{m_2,1}} \cdot \phi_{m_2}^1.$$

На следующем шаге мы находим $m_3 \in \Lambda_1$, $m_3 > m_2$, такое, что

$$\left| \frac{b_{\nu_2}^{m_2,1}}{b_{\nu_2}^{m_3,1}} \right| < \frac{1}{8} \quad \text{и} \quad \sup_p \left\| \frac{b_{\nu_2}^{m_2,1}}{b_{\nu_2}^{m_3,1}} \cdot \sum_{n=1}^p b_n^{m_3,1} f_n \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \frac{1}{16} \varepsilon,$$

и полагаем

$$\phi_2^2 = \phi_{m_2}^1 - \frac{b_{\nu_2}^{m_2,1}}{b_{\nu_2}^{m_3,1}} \phi_{m_3}^1.$$

На k -м шаге мы находим такое $m_{k+1} \in \Lambda_1$, $m_{k+1} > m_k$, что

$$\left| \frac{b_{\nu_2}^{m_k,1}}{b_{\nu_2}^{m_{k+1},1}} \right| < \frac{1}{2^{k+1}} \quad \text{и} \quad \sup_p \left\| \frac{b_{\nu_2}^{m_k,1}}{b_{\nu_2}^{m_{k+1},1}} \cdot \sum_{n=1}^p b_n^{m_{k+1},1} f_n \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \frac{1}{16} \varepsilon,$$

и полагаем

$$\phi_k^2 = \phi_{m_k}^1 - \frac{b_{\nu_2}^{m_k,1}}{b_{\nu_2}^{m_{k+1},1}} \phi_{m_{k+1}}^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n^{m_k,1} - \frac{b_{\nu_2}^{m_k,1}}{b_{\nu_2}^{m_{k+1},1}} b_n^{m_{k+1},1} \right) f_n := \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{k,2} f_n.$$

Тогда

$$\sup_{\ell} \left\| \sum_{n=1}^{\ell} b_n^{k,2} f_n \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) \varepsilon.$$

Из наших построений очевидно следует, что

$$\|r_{n_{m_k}} \cdot g - \phi_k^2\|_{\mathbf{F}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

и мы заметим, что $b_{\nu_1}^{k,2} = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Очевидно, что после конечного числа шагов, скажем, после m_0 , где $1 \leq m_0 \leq N$, мы придем к условию $\Omega_{m_0} = \emptyset$. Затем мы построим такие функции $\{\phi_j^{m_0}\}_{j=1}^{\infty}$, что для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел $\{s_j\}_{j=1}^{\infty}$

$$\|r_{s_j} \cdot g - \phi_j^{m_0}\|_{\mathbf{F}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty, \quad (4)$$

где

$$\phi_j^{m_0} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{j,m_0} f_n, \quad (5)$$

$$\sup_{\ell} \left\| \sum_{n=1}^{\ell} b_n^{j,m_0} f_n \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m_0}} \right) \varepsilon \quad (6)$$

и для любого n , $1 \leq n \leq N$, последовательность $\{b_n^{j,m_0}\}_{j=1}^{\infty}$ имеет конечный предел.

Таким образом, если мы обозначим

$$g_j = \phi_j^{m_0} - \phi_{j+1}^{m_0} \quad \text{и} \quad c_n^j = b_n^{j,m_0} - b_n^{j+1,m_0},$$

то из (4)–(6) мы получим, что

$$\begin{aligned} & \| (r_{s_j} - r_{s_{j+1}}) \cdot g - g_j \|_{\mathbf{F}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty, \\ & g_j = \sum_{i=2}^{\infty} c_i^j f_i \quad \text{в} \quad L_{[0,1]}^0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} c_n^j = 0 \quad \text{для всех} \quad n \in [0, N] \end{aligned}$$

и

$$\sup_{\ell} \left\| \sum_{i=2}^{\ell} c_i^j f_i \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \varepsilon,$$

что и завершает доказательство.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathbf{F}$ – регулярная F -решетка заданных на $[0, 1]$ функций с абсолютно непрерывной квазинормой и $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ – m -представляющая система пространства $\mathbf{F}$.

Тогда для любой d -простой функции g порядка m и для любых $\varepsilon \in (0, 1)$, $N \in \mathbb{N}$, существуют набор натуральных чисел $m < l < n_1 < n_2 < \dots < n_{2^l}$ и полином

$$\sum_{i=N+1}^M a_i f_i, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad M > N,$$

такие, что если

$$g^*(x) = \frac{1}{2}(r_{2j-1}(x) - r_{2j}(x)) \cdot g(x) \quad \text{для } x \in \Delta_j, \quad \text{где } \Delta_j = \Delta_l^j, \quad (7)$$

то будут выполнены следующие условия

- а) $\|\sum_{i=N+1}^M a_i f_i - g^*\|_{L_{[0,1]}^0} < \varepsilon$;
- б) для любого измеримого множества $D \subset [0, 1]$

$$\sup_{N+1 \leq k \leq M} \left\| \sum_{i=N+1}^k a_i f_i \right\|_{L_D^0} < \varepsilon + \|g^*\|_{L_D^0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим лемму 1, взяв $\eta_1 := \eta(\varepsilon/8)$. Положим $\delta = \max(\varepsilon/8; \eta_1)$ и найдем $l > m$ такое, что $\|g \cdot \chi_{\Delta_j}\|_{\mathbf{F}} < \delta$ для каждого j , $1 \leq j \leq 2^l$. Это возможно, поскольку $\mathbf{F}$ является регулярной F -решеткой.

Теперь мы можем применить лемму 1 для функции $\frac{1}{2}g \cdot \chi_{\Delta_1}$, взяв $\varepsilon/8$ вместо ε . Легко видеть, что существуют индексы $n_1 > l$ и $n_2 > n_1$ и полином с действительными коэффициентами

$$P_1 = \sum_{i=N+1}^{k_1} a_i f_i$$

такие, что

$$\left\| \frac{1}{2}(r_{n_1} - r_{n_2}) \cdot g \cdot \chi_{\Delta_1} - P_1 \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \frac{\varepsilon}{4}$$

и

$$\sup_{N+1 \leq k \leq k_1} \left\| \sum_{i=N+1}^k a_i f_i \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \frac{\varepsilon}{8}.$$

На следующем шаге мы применим лемму 1 для $\frac{1}{2}g \cdot \chi_{\Delta_2}$ и получим полином с действительными коэффициентами

$$P_2 = \sum_{i=k_1+1}^{k_2} a_i f_i$$

такой, что для некоторых индексов $n_4 > n_3 > n_2$

$$\left\| \frac{1}{2}(r_{n_3} - r_{n_4}) \cdot g \cdot \chi_{\Delta_2} - P_2 \right\|_{L^0_{[0,1]}} < \frac{\varepsilon}{8}$$

и

$$\sup_{k_1+1 \leq k \leq k_2} \left\| \sum_{i=k_1+1}^k a_i f_i \right\|_{L^0_{[0,1]}} < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Повторяя приведенные выше рассуждения 2^l раз, мы получим, что существуют полиномы

$$P_{j+1} = \sum_{i=k_j+1}^{k_{j+1}} a_i f_i, \quad 0 \leq j \leq 2^l - 1, \quad k_0 = N,$$

такие, что для некоторых индексов $n_{2j} > n_{2j-1} > n_{2j-2}$

$$\left\| \frac{1}{2}(r_{n_{2j-1}} - r_{n_{2j}}) \cdot g \cdot \chi_{\Delta_j} - P_j \right\|_{L^0_{[0,1]}} < \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \quad (8)$$

и

$$\sup_{k_j+1 \leq k \leq k_{j+1}} \left\| \sum_{n=k_j+1}^k a_n f_n \right\|_{L^0_{[0,1]}} < \frac{\varepsilon}{8}. \quad (9)$$

Таким образом, если мы определим g^* с помощью (7), то условие а) моментально следует из (8).

Докажем б). Предположим, что $k_{j-1} + 1 \leq k < k_j$, $1 \leq j \leq 2^n$. Обозначим $D_j = \bigcup_{i=1}^{j-1} \Delta_i$. Тогда из (8), (9) мы будем иметь

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=N+1}^k a_i f_i \right\|_{L^0_D} &< \|g^* \cdot \chi_{D_j}\|_{L^0_D} + \left\| \sum_{i=N+1}^{k_{j-1}} a_i f_i - g^* \cdot \chi_{D_j} \right\|_{L^0_D} + \left\| \sum_{i=k_{j-1}+1}^k a_i f_i \right\|_{L^0_D} \\ &< \|g^*\|_{L^0_D} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{8} < \|g^*\|_{L^0_D} + \varepsilon. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Пусть $\mathbf{F}$ – регулярная F -решетка заданных на $[0, 1]$ функций с абсолютно непрерывной квазинормой и $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ – m -представляющая система пространства $\mathbf{F}$.

Тогда для любой d -простой функции g_0 и для любых $\varepsilon \in (0, 1)$ и $N \in \mathbb{N}$ существует такой полином

$$P = \sum_{i=N+1}^M a_i f_i, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad M > N,$$

что выполняются следующие условия:

$$\|P - g_0\|_{L^0_{[0,1]}} < \varepsilon; \quad (10)$$

для любого измеримого $D \subset [0, 1]$

$$\sup_{N < s \leq M} \left\| \sum_{i=N+1}^s a_i f_i \right\|_{L^0_D} < \varepsilon + 2|E \cap D|, \quad \text{где } E = \{x \in [0, 1] : g_0(x) \neq 0\}. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l_0 \in \mathbb{N}$ таково, что функция g постоянна на любом двоичном интервале $\Delta_{l_0}^i = [(i-1)/2^{l_0}, i/2^{l_0})$, $1 \leq i \leq 2^{l_0}$. Тогда мы определим числовую последовательность $\{s_k\}$ рекуррентным соотношением

$$\beta_1 = \frac{1}{4}, \quad \beta_{k+1} = \frac{1}{4} \cdot (1 - s_k) \quad \text{и} \quad s_k = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k.$$

Ясно, что $\{s_k\}$ возрастает и $\lim s_k = 1$. Выберем число $m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$1 - s_m < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Затем по лемме 2 мы находим набор натуральных чисел $m < l_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_{2 \cdot 2^{l_0}}$ и полином

$$P_0 = \sum_{i=N+1}^{k_1} a_i f_i, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad k_1 > N = k_0,$$

такие, что если

$$g_0^*(x) = \frac{1}{2} (r_{n_{2j-1}}(x) - r_{n_{2j}}(x)) \cdot g_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{l_0}^j,$$

то выполняются следующие условия:

$$\|P_0 - g_0^*\|_{L_{[0,1]}^0} < \frac{\varepsilon}{8(m+1)}$$

и для любого измеримого $D \subset [0, 1]$

$$\sup_{k_0 < s \leq k_1} \left\| \sum_{i=k_0+1}^s a_i f_i \right\|_{L_D^0} < \frac{\varepsilon}{8(m+1)} + \|g_0^*\|_{L_D^0}.$$

Из определения функций Радемахера следует, что

$$|\{x \in E : g_0(x) = g_0^*(x)\}| = \frac{1}{4} \cdot |E| = \beta_1 \cdot |E|.$$

Таким образом, если мы положим $g_1 = g_0 - g_0^*$, то $|\{x \in E : g_1(x) = 0\}| = \beta_1 \cdot |E|$ и $g_1(x) = 0$ при $x \in [0, 1] \setminus E$. По лемме 2 мы находим набор натуральных чисел $l_1 < n_{2 \cdot 2^{l_0}+1} < n_{2 \cdot 2^{l_0}+2} < \cdots < n_{4 \cdot 2^{l_0}}$, $l_1 > \max(l_0; n_{2 \cdot 2^{l_0}})$, и полином

$$P_1 = \sum_{i=k_1+1}^{k_2} a_i f_i, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad k_1 < k_2,$$

такие, что если

$$g_1^*(x) = \frac{1}{2} (r_{n_{2 \cdot 2^{l_0}+2j-1}}(x) - r_{n_{2 \cdot 2^{l_0}+2j}}(x)) \cdot g_1(x) \quad \text{при} \quad x \in \Delta_{l_1}^j,$$

то выполняются следующие условия:

$$\|P_1 - g_1^*\|_{L_{[0,1]}^0} < \frac{\varepsilon}{8(m+1)}$$

и для любого измеримого $D \subset [0, 1]$

$$\sup_{k_1 < s \leq k_2} \left\| \sum_{i=k_1+1}^s a_i f_i \right\|_{L_D^0} < \frac{\varepsilon}{8(m+1)} + \|g_1^*\|_{L_D^0}.$$

Заметим, что

$$g_1^*(x) = g_1(x) = 0, \quad \text{если } x \in G_1 = \{x \in [0, 1] : g_1(x) = 0\},$$

и

$$|\{x \in [0, 1] \setminus G_1 : g_1(x) = g_1^*(x)\}| = \frac{1}{4}(1 - \beta_1) \cdot |E| = \beta_2 \cdot |E|.$$

Действуя таким же образом, мы определим функции

$$g_\nu = g_{\nu-1} - g_{\nu-1}^* \quad (12)$$

и

$$g_\nu^*(x) = \frac{1}{2}(r_{n_{2 \cdot m_\nu + 2j-1}}(x) - r_{n_{2 \cdot m_\nu + 2j}}(x)) \cdot g_\nu(x) \quad \text{при } x \in \Delta_{l_\nu}^j,$$

где $l_\nu > \max(l_{\nu-1}; n_{2 \cdot 2^{l_{\nu-1}}})$, $l_\nu < n_{m_\nu+1} < \dots < n_{m_\nu+2 \cdot 2^{l_\nu}}$, и $m_\nu = \sum_{j=1}^\nu 2^{l_j}$.
Функции g_ν^* определены так, что существуют полиномы

$$P_\nu = \sum_{i=k_{\nu-1}+1}^{k_\nu} a_i f_i, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad k_{\nu-1} < k_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, m,$$

такие, что выполняются следующие условия:

$$\|P_\nu - g_\nu^*\|_{L_{[0,1]}^0} < \frac{\varepsilon}{8m+1} \quad (13)$$

и для любого измеримого $D \subset [0, 1]$ и для любого $\nu = 1, 2, \dots, m$

$$\sup_{k_{\nu-1} < s \leq k_\nu} \left\| \sum_{i=k_{\nu-1}+1}^s a_i f_i \right\|_{L_D^0} < \frac{\varepsilon}{8m+1} + \|g_\nu^*\|_{L_D^0}. \quad (14)$$

Легко заметить, что

$$g_\nu^*(x) = g_\nu(x) = 0 \quad \text{при } x \in G_\nu = \{x \in [0, 1] : g_\nu(x) = 0\}$$

и

$$|\{x \in [0, 1] \setminus G_\nu : g_\nu(x) = g_\nu^*(x)\}| = \frac{1}{4} \left(1 - \sum_{j=1}^\nu \beta_j \right) \cdot |E| = \beta_{\nu+1} \cdot |E|.$$

Таким образом, из (12) мы получим, что

$$\left| \left\{ x \in [0, 1] : g_0(x) \neq \sum_{\nu=0}^m g_\nu^*(x) \right\} \right| = (1 - s_m) \cdot |E| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Чтобы проверить условие (10), заметим, что

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=0}^m P_j - f \right\|_{L_{[0,1]}^0} &< \left\| \sum_{j=0}^m P_j - \sum_{j=0}^m g_j^* \right\|_{L_{[0,1]}^0} + \left\| \sum_{j=0}^m g_j^* - f \right\|_{L_{[0,1]}^0} \\ &< \frac{\varepsilon}{8} + \left\| \sum_{j=0}^m g_j^* - g_0 \right\|_{L_{[0,1]}^0} + \|g_0 - f\|_{L_{[0,1]}^0} \\ &< \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Перейдем к доказательству условия (11). Предположим, что $k_{j-1} + 1 \leq s < k_j$. Тогда из (13) и (14) мы будем иметь

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=N+1}^s a_i f_i \right\|_{L_D^0} &< \left\| \sum_{\nu=1}^{j-1} g_\nu^* \right\|_{L_D^0} + \left\| \sum_{i=1}^{j-1} P_i - \sum_{\nu=1}^{j-1} g_\nu^* \right\|_{L_D^0} + \left\| \sum_{i=k_{j-1}+1}^s a_i f_i \right\|_{L_D^0} \\ &< \left\| \sum_{\nu=1}^{j-1} g_\nu^* \right\|_{L_D^0} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \|g_j^*\|_{L_D^0} < \varepsilon + 2|E \cap D|, \end{aligned}$$

что завершает доказательство.

Следующая лемма легко вытекает из леммы 3.

ЛЕММА 4. Пусть $\mathbf{F}$ — регулярная F -решетка определенных на $[0, 1]$ функций с абсолютно непрерывной квазинормой и $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — m -представляющая система пространства $\mathbf{F}$.

Тогда для любой $f \in L_{[0,1]}^0$ и для любых $\varepsilon \in (0, 1)$ и $N \in \mathbb{N}$ существует полином

$$\sum_{i=N+1}^M a_i f_i, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad M > N,$$

такой, что выполняются следующие условия:

- с) $\left\| \sum_{i=N+1}^M a_i f_i - f \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \varepsilon$;
- д) для любого измеримого множества $D \subset [0, 1]$

$$\sup_{N+1 \leq k \leq M} \left\| \sum_{i=N+1}^k a_i f_i \right\|_{L_D^0} < \varepsilon + \|f\|_{L_D^0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть g — d -простая функция такая, что

$$\|g - f\|_{L^0_{[0,1]}} < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Выберем такое число $n \in \mathbb{N}$, что $2^{-n} < \varepsilon/8$. Пусть

$$g_j = g \cdot \chi_{\Delta_n^j}, \quad 1 \leq j \leq 2^n. \quad (15)$$

Тогда по лемме 3 найдутся полиномы

$$P_j = \sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} a_i f_i, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq 2^n, \quad N = k_0 < k_1 < \dots < k_{2^n},$$

такие, что выполняются следующие условия:

$$\|P_j - g_j\|_{L^0_{[0,1]}} < \frac{\varepsilon}{8} \cdot 2^{-n} \quad (16)$$

и для любого j , $1 \leq j \leq 2^n$,

$$\sup_{k_{j-1} < s \leq k_j} \left\| \sum_{i=k_{j-1}+1}^s a_i f_i \right\|_{L^0_{[0,1]}} < \frac{\varepsilon}{8} \cdot 2^{-n} + |\Delta_n^j| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (17)$$

Из (15), (16) мы моментально получаем, что полином

$$P = \sum_{i=k_0+1}^{k_{2^n}} a_i f_i$$

удовлетворяет условию с).

Пусть $D \subset [0, 1]$ — измеримое подмножество $[0, 1]$, и предположим, что $k_{j-1} + 1 \leq s < k_j$. Тогда из (16), (17) вытекает, что

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=N+1}^s a_i f_i \right\|_{L_D^0} &< \left\| \sum_{\nu=1}^{j-1} g_\nu \right\|_{L_D^0} + \left\| \sum_{\nu=1}^{j-1} P_\nu - \sum_{\nu=1}^{j-1} g_\nu \right\|_{L_D^0} + \left\| \sum_{i=k_{j-1}+1}^s a_i f_i \right\|_{L_D^0} \\ &< \|g\|_{L_D^0} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} \cdot 2^{-n} + \frac{\varepsilon}{4} < \|f\|_{L_D^0} + \varepsilon, \end{aligned}$$

т. е. выполнено d).

ЛЕММА 5. Пусть $\mathbf{F}$ – регулярная F -решетка функций, заданных на $[0, 1]$, с абсолютно непрерывной квазинормой, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ – m -представляющая система пространства $\mathbf{F}$ и $\mathbf{B}$ – произвольное банахово пространство.

Тогда для любой с.и. $\mathbf{B}$ -значной функции $\mathbf{f}$ и любых $\varepsilon \in (0, 1)$ и $N \in \mathbb{N}$ существует такой полином

$$\sum_{i=N+1}^M \mathbf{z}_i f_i, \quad \mathbf{z}_i \in \mathbf{B}, \quad M > N,$$

что

е) $\left\| \sum_{i=N+1}^M \mathbf{z}_i f_i - \mathbf{f} \right\|_{L_{[0,1]}^0} < \varepsilon;$

ф) для любого измеримого $D \subset [0, 1]$

$$\sup_{N+1 \leq k \leq M} \left\| \left\| \sum_{i=N+1}^k \mathbf{z}_i f_i \right\|_{\mathbf{B}} \right\|_{L_D^0} < \varepsilon + \left\| \mathbf{f} \right\|_{\mathbf{B}} \Big|_{L_D^0}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $\mathbf{f}$ мы найдем $\mathbf{B}$ -значную d -простую функцию $\mathbf{g}$ порядка m

$$\mathbf{g}(t) = \sum_{i=1}^{2^m} \mathbf{x}_i \chi_{\Delta_m^i}(t)$$

такую, что

$$\left\| \mathbf{g} - \mathbf{f} \right\|_{\mathbf{B}} \Big|_{L_{[0,1]}^0} < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Выберем $n > m$, $n \in \mathbb{N}$, такое, что $2^{-n} < \varepsilon/8$. Функция $\mathbf{g}$ может быть записана в следующем виде:

$$\mathbf{g}(t) = \sum_{i=1}^{2^n} \mathbf{y}_i \chi_{\Delta_n^i}(t).$$

Затем мы определим

$$g_j = \left\| \mathbf{y}_i \right\|_{\mathbf{B}} \cdot \chi_{\Delta_n^j}, \quad 1 \leq j \leq 2^n.$$

Как и в доказательстве леммы 4, мы определим полиномы

$$P_j = \sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} a_i f_i, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq 2^n, \quad N = k_0 < k_1 < \dots < k_{2^n},$$

такие, что выполняются условия (16), (17). Чтобы доказать, что полином

$$\sum_{i=k_0+1}^{k_{2^n}} \mathbf{z}_i f_i := \sum_{j=1}^{2^n} \frac{\mathbf{y}_i}{\left\| \mathbf{y}_i \right\|_{\mathbf{B}}} P_j$$

удовлетворяет условиям е) и ф), следует повторить соответствующую часть доказательства леммы 4 с очевидными изменениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 1. Предположим, что утверждение предложения 1 неверно. Тогда можно найти $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность функций f_n такие, что

$$|E_n| = |\{x \in [0, 1] : |f_n(x)| \geq \varepsilon_0\}| \geq \varepsilon_0 \quad (18)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\mathbf{F}} < +\infty.$$

Поскольку $|f_n(x)| \in \mathbf{F}$, если мы определим $\phi_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} |f_n(x)|$, то $\phi_k \in \mathbf{F}$ и

$$\|\phi_k\|_{\mathbf{F}} \leq \sum_{n=k}^{\infty} \|f_n\|_{\mathbf{F}} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Мы также имеем, что

$$\{x : \phi_k(x) \geq \varepsilon_0\} \supset \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n$$

для любого $k \in \mathbb{N}$ и из (18)

$$\phi_k(x) \geq \varepsilon_0, \quad \text{если } x \in E_0 = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} E_n \quad \text{и } |E_0| \geq \varepsilon_0. \quad (20)$$

Поскольку $\mathbf{F}$ регулярна, существует функция $g \in \mathbf{F}$ такая, что

$$\|g \cdot \chi_{E_0}\|_{\mathbf{F}} \neq 0 \quad \text{и} \quad |g(x) \cdot \chi_{E_0}(x)| \leq \varepsilon_0 \quad \text{п.в.} \quad (21)$$

Согласно (19) существует такое k_0 , что

$$\|\phi_{k_0}\|_{\mathbf{F}} < \|g \cdot \chi_{E_0}\|_{\mathbf{F}}. \quad (22)$$

Из (20) и (21) мы имеем, что

$$|g(x) \cdot \chi_{E_0}(x)| \leq |\phi_{k_0}(x)| \quad \text{п.в.,}$$

что противоречит условию (22), поскольку $\mathbf{F}$ является F -решеткой. Доказательство завершено.

Список литературы

1. Ульянов П. Л. О работах Н. Н. Лузина по метрической теории функций // УМН. 1985. Т. 40, № 3. С. 15–70.
2. Kahane J.-P., Lemarié-Rieusset P.-G. Fourier series and wavelets. Luxembourg: Gordon & Breach Publ., 1995.
3. Лузин Н. Н. Интеграл и тригонометрический ряд. М.: Гостехиздат, 1951.
4. Лузин Н. Н. Собрание сочинений. Т. 1. М.: Изд-во АН СССР, 1953.
5. Menschoff D. Sur la représentation des fonctions mesurables par des series trigonométriques // Матем. сб. 1941. Т. 9 (51). № 3. С. 667–692.
6. Талалаян А. А., Овсепян Р. И. Теоремы Д. Е. Меньшова о представлении и их влияние на развитие метрической теории функций // УМН. 1992. Т. 47, № 5. С. 15–44.
7. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: ГИФМЛ, 1961.
8. Талалаян А. А. О системах, ряды по которым представляют любые измеримые функции // Матем. сб. 1968. Т. 76 (118). № 1. С. 39–51.
9. Талалаян А. А. Вопросы представления и единственности в теории ортогональных рядов // Итоги науки. Сер. матем. Матем. анализ. 1970. М.: ВИНТИ, 1971. С. 5–64.
10. Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operations. London: Academic Press, 1988.
11. Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
12. Ульянов П. Л. Представления функций рядами и пространства $\varphi(L)$ // УМН. 1972. Т. 27, № 2. С. 3–52.
13. Banach S. Theory of linear operations. Amsterdam: North-Holland, 1987.

Universidad Autónoma de Madrid, Spain;
Syracuse University, Carnegie, Syracuse, NY, USA

Поступила в редакцию
24.02.2000