Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. М. Мухамедов, О равномерных эргодических теоремах для квадратичных процессов на C^* -алгебрах, *Матем. сб.*, 2000, том 191, номер 12, 141–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm532>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:04:12

УДК 517.98+519.217

Ф. М. Мухамедов

О равномерных эргодических теоремах для квадратичных процессов на C^* -алгебрах

В работе исследуются вопросы сходимости временных средних по Чезаро стационарных квантовых квадратичных процессов в равномерной топологии, определенных на C^* -алгебрах.

Дается необходимое и достаточное условие сходимости средних в равномерной топологии. Кроме того, исследуется сходимость средних с весом в равномерной топологии. Доказана сходимость средних с весом Φ -функций Безиковича.

Библиография: 15 названий.

Квадратичные операторы как объект исследования появились в работах Бернштейна. В [1], например, рассматривалось предельное поведение траекторий таких операторов (эта задача естественным образом возникает при изучении некоторых моделей со взаимодействиями). Одной из задач теории квадратичных операторов является изучение их эргодических свойств. Этим вопросам посвящены, например, работы [2]–[5]. В работах [6], [7] исследовались квантовые (некоммутативные) квадратичные процессы, определенные на алгебрах фон Неймана, и изучались некоторые эргодические свойства таких процессов.

В настоящей работе рассматриваются вопросы сходимости временных средних по Чезаро стационарных квантовых квадратичных процессов в равномерной топологии, определенных на C^* -алгебрах.

В §1 дается необходимое и достаточное условие сходимости средних в равномерной топологии. В §2 исследуется сходимость средних с весом в равномерной топологии. Доказана сходимость средних с весом Φ -функций Безиковича.

Автор приносит благодарность рецензенту за полезные замечания.

§1. Равномерная эргодическая теорема

Пусть $\mathfrak{A}$ – C^* -алгебра с единицей. Через β обозначим наименьшую C^* -кросс-норму на $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{A}$, существование которой доказано в [8; предложение 1.22.2, теорема 1.22.6]. Далее, пусть $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ обозначает пополнение $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{A}$ по норме β , для которой будет использован обычный символ $\|\cdot\|$; S и S^2 обозначают совокупность всех состояний на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ соответственно. Введем оператор $U: \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$, который для элементов вида $x \otimes y$ определяется как $U(x \otimes y) = y \otimes x$ и продолжается на все $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ по линейности с сохранением нормы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пара $(P^{(t)}, \varphi)$, где $P^{(t)}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$, $t \geq 1$, – семейство линейных отображений, а $\varphi \in S$ – состояние, называется *квантовым квадратичным стохастическим процессом* (к.к.с.п.), если она удовлетворяет следующим условиям: для каждого $t \geq 1$

- (i) $P^{(t)}1_{\mathfrak{A}} = 1_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}}$, где $1_{\mathfrak{A}}$ и $1_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}}$ – единицы алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ соответственно;

- (ii) $P^{(t)}(\mathfrak{A}_+) \subset (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_+$, где $\mathfrak{A}_+$ и $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_+$ – положительные части $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ соответственно;
- (iii) $P^{(t)}(\mathfrak{A}) \subset \{x \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} : U(x) = x\}$;
- (iv) для $s \geq 1$ имеет место

$$P^{(t+s)}x = (P^{(t)} \circ (\varphi \otimes \varphi \circ P^{(s)}))(P^{(s)}x), \quad (1.1)$$

где

$$(P^{(t)} \circ (\varphi \otimes \varphi \circ P^{(s)}))(a \otimes b) := \varphi \otimes \varphi(P^{(s)}b)P^{(t)}a, \quad a, b \in \mathfrak{A}.$$

Будем говорить, что к.к.с.п. $(P^{(t)}, \varphi)$ является *стационарным*, если для любого $t \geq 1$

$$\varphi \otimes \varphi(P^{(t)}x) = \varphi(x) \quad \forall x \in \mathfrak{A}.$$

Это условие естественно возникает при изучении моделей наследственности, согласующихся с законами Менделя (см. [1], [4], [9]). Поэтому далее (в §§ 1 и 2) мы всегда будем считать, что к.к.с.п. является стационарным.

Если C^* -алгебра $\mathfrak{A}$ совпадает с конечномерной коммутативной алгеброй, т.е. $\mathfrak{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, x = (x_i)_{i=1}^n\}$, то к.к.с.п. $(P^{(t)}, \varphi)$ совпадает с однородным квадратичным стохастическим процессом $(p_{ij,k}^{(t)})_{i,j,k=1}^n$ типа A , определенным в [10]. Действительно, полагая

$$p_{ij,k}^{(t)} = (P^{(t)}e_k)_{ij},$$

где $e_k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, $i, j, k = \overline{1, n}$ и $\varphi = \{m_i\}_{i=1}^n$, $m_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n m_i = 1$, легко видеть, что справедливы все условия, налагаемые на квадратичный стохастический процесс, т.е.

$$p_{ij,k}^{(t)} \geq 0, \quad p_{ij,k}^{(t)} = p_{ji,k}^{(t)}, \quad \sum_{k=1}^n p_{ij,k}^{(t)} = 1, \quad (*)$$

и при этом уравнение (1.1) принимает вид

$$p_{ij,k}^{(t+s)} = \sum_{m,l=1}^n \sum_{q,r=1}^n p_{ij,l}^{(t)} p_{qr,m}^{(t)} p_{lm,k}^{(s)} m_q m_r. \quad (**)$$

Обратно, если мы имеем квадратичный стохастический процесс $(p_{ij,k}^{(t)})_{i,j,k=1}^n$ с начальным состоянием $\{m_i\}_{i=1}^n$, удовлетворяющий (*) и (**), то мы можем определить к.к.с.п. на $l_n^\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, x = (x_i)_{i=1}^n\}$ следующим образом:

$$(P^{(t)}f)_{ij} = \sum_{k=1}^n f_k p_{ij,k}^{(t)}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$\varphi(f) = \sum_{k=1}^n f_k m_k, \quad f = (f_i)_{i=1}^n \in l_n^\infty.$$

Таким образом, определение 1.1 обобщает ранее известное понятие квадратичного стохастического процесса (к.с.п.), изучению которого посвящены работы [10]–[12]. В этих работах показано, что такие процессы возникают при описании некоторых физических, химических, биологических процессов, и обоснована необходимость условия $t \geq 1$ в определении к.с.п.

Приведем пример стационарного к.к.с.п. Для этого напомним, что линейный оператор $T: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ называется *марковским*, если он удовлетворяет условиям $T(\mathfrak{A}_+) \subset \mathfrak{A}_+$ и $T1_{\mathfrak{A}} = 1_{\mathfrak{A}}$.

Состояние $\varphi \in S$ называется *инвариантным* относительно T , если $\varphi(Tx) = \varphi(x)$ для всех $x \in \mathfrak{A}$.

Пусть T^t – марковская полугруппа операторов на $\mathfrak{A}$ с инвариантным состоянием φ , т.е. $\varphi \circ T^t = \varphi$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Определим семейство $H^{(t)}$ следующим образом:

$$H^{(t)}x = \frac{1}{2}(T^{(t)}x \otimes 1 + 1 \otimes T^{(t)}x), \quad x \in \mathfrak{A},$$

где

$$T^{(t)}x = \frac{1}{2^{t-1}}(T^tx + (2^{t-1} - 1)\varphi(x)).$$

Тогда легко проверить, что $(H^{(t)}, \varphi \otimes \varphi)$ является стационарным к.к.с.п. на $\mathfrak{A}$.

Состояние $\nu \in S$ называется *инвариантным* относительно к.к.с.п. $(P^{(t)}, \varphi)$, если выполнено равенство $\nu \otimes \varphi \circ P^{(t)} = \nu$ при всех $t \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Будем говорить, что к.к.с.п. $(P^{(t)}, \varphi)$ является *строго эргодическим*, если он имеет единственное инвариантное состояние φ , т.е. из равенства $\nu \otimes \varphi \circ P^{(t)} = \nu$ при всех $t \geq 1$ следует $\nu = \varphi$.

Далее вместо $(P^{(t)}, \varphi)$ будем использовать просто символ $P^{(t)}$ и будем предполагать, что для любого $x \in \mathfrak{A}$ функция $\|P^{(t)}x\|$ измерима (в смысле Лебега) на $\mathbb{R}_+$.

ЛЕММА 1.1. Пусть $h \in \mathfrak{A}^*$ – инвариантный функционал для строго эргодического к.к.с.п. $P^{(t)}$. Тогда справедливо равенство

$$h = \lambda\varphi, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сперва, что h – положительный функционал. Тогда $\psi = h/h(1_{\mathfrak{A}})$ является состоянием. Так как к.к.с.п. $P^{(t)}$ строго эргодичен, то имеем $h/h(1_{\mathfrak{A}}) = \varphi$, откуда $h = h(1_{\mathfrak{A}})\varphi$.

Пусть теперь h эрмитов, т.е. $h(x^*) = \overline{h(x)}$, тогда для него существует единственное разложение (см. [8; теорема 1.14.3]) такое, что

$$h = h_+ - h_-, \quad \|h\|_1 = \|h_+\|_1 + \|h_-\|_1, \quad (1.2)$$

где $\|\cdot\|_1$ – норма на $\mathfrak{A}^*$. Отсюда для каждого $t \geq 1$

$$h \otimes \varphi \circ P^{(t)} = h_+ \otimes \varphi \circ P^{(t)} - h_- \otimes \varphi \circ P^{(t)} = h_+ - h_-.$$

Так как $\|h_+ \otimes \varphi \circ P^{(t)}\|_1 = h_+(1_{\mathfrak{A}})$, $\|h_- \otimes \varphi \circ P^{(t)}\|_1 = h_-(1_{\mathfrak{A}})$, то из единственности разложения (1.2) находим $h_+ \otimes \varphi \circ P^{(t)} = h_+$, $h_- \otimes \varphi \circ P^{(t)} = h_-$. Из доказанного выше следует $h = \lambda\varphi$.

Пусть h – произвольный функционал. Тогда для него существуют эрмитовы функционалы h_1, h_2 такие, что $h = h_1 + ih_2$. В силу инвариантности h имеем

$$h_1 \otimes \varphi \circ P^{(t)} + ih_2 \otimes \varphi \circ P^{(t)} = h_1 + ih_2,$$

отсюда находим $h_j \otimes \varphi \circ P^{(t)} = h_j$, $j = 1, 2$. Тем самым получаем $h_j = \lambda_j\varphi$, $j = 1, 2$. Таким образом, $h = (\lambda_1 + i\lambda_2)\varphi$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $P^{(t)}$ – к.к.с.п. на C^* -алгебре $\mathfrak{A}$ с единицей. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) к.к.с.п. $P^{(t)}$ является строго эргодическим;
- (ii) для любого $x \in \mathfrak{A}$ имеет место

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T P^{(t)} x dt = \varphi(x) 1_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}},$$

где сходимость равномерная, т.е. по норме;

- (iii) для каждого состояния $\psi \in S^2$ и $x \in \mathfrak{A}$ имеет место

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T \psi(P^{(t)} x) dt = \varphi(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii). Рассмотрим элементы вида

$$y = \varphi \circ P^{(\tau)} x - x, \quad x \in \mathfrak{A}, \quad \tau \geq 1. \quad (1.3)$$

Для таких y в силу (1.1) имеем

$$P^{(t)} y = (P^{(t)} \circ \varphi)(P^{(\tau)} x) - P^{(t)} x = P^{(t+\tau)} x - P^{(t)} x, \quad t \geq 1,$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_1^T P^{(t)} y dt &= \frac{1}{T} \int_1^T (P^{(t+\tau)} x - P^{(t)} x) dt \\ &= \frac{1}{T} \left(\int_T^{T+\tau} P^{(t)} x dt - \int_1^{1+\tau} P^{(t)} x dt \right). \end{aligned}$$

Из этого вытекает, что

$$\left\| \frac{1}{T} \int_1^T P^{(t)} y dt \right\| \leq \frac{2\tau}{T} \|x\| \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

При этом $\varphi(y) = \varphi \otimes \varphi(P^{(\tau)} x) - \varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$. Итак, имеем

$$\frac{1}{T} \int_1^T P^{(t)} y dt \rightarrow \varphi(y) 1_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}} \quad \text{при } T \rightarrow \infty.$$

Замыкание линейной оболочки элементов вида (1.3) обозначим через $\mathfrak{B}$, а через $\mathfrak{B}_0$ обозначим ядро состояния φ , т.е. $\mathfrak{B}_0 = \{x \in \mathfrak{A} : \varphi(x) = 0\}$. Ясно, что $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}_0$. Покажем, что $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$. Предположим противное: $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}_0$, т.е. найдется элемент $x_0 \in \mathfrak{B}_0$ такой, что $x_0 \notin \mathfrak{B}$. По теореме Хана–Банаха существует такой непрерывный функционал h на $\mathfrak{A}$, что $h|_{\mathfrak{B}} = 0$ и $h(x_0) = 1$. Легко видеть, что $h \otimes \varphi \circ P^{(t)} = h$. Тогда в силу леммы 1.1 имеем $h = \lambda \varphi$ в противоречии с $\varphi(x_0) = 0$. Следовательно, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$.

Пусть $y \in \mathfrak{B}_0$. Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ найдем элемент $y_\varepsilon = \varphi \circ P^{(\tau_\varepsilon)} x_\varepsilon - x_\varepsilon$ такой, что $\|y - y_\varepsilon\| < \varepsilon/2$. В силу условия

$$\frac{1}{T} \int_1^T P^{(t)} y_\varepsilon dt \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty$$

выберем T_0 так, что $\left\| \frac{1}{T} \int_1^T P^{(t)} y_\varepsilon dt \right\| < \varepsilon/2$ при всех $T \geq T_0$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{T} \int_1^T P^{(t)} y dt \right\| &\leq \left\| \frac{1}{T} \int_1^T P^{(t)} (y - y_\varepsilon) dt \right\| + \left\| \frac{1}{T} \int_1^T P^{(t)} y_\varepsilon dt \right\| \\ &\leq \|y - y_\varepsilon\| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{при всех } T \geq T_0. \end{aligned}$$

Итак, имеем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T P^{(t)} y dt = 0 = \varphi(y) 1_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}} \quad \text{для всех } y \in \mathfrak{B}_0.$$

Пусть $x \in \mathfrak{A}$. Положим $y = \varphi(x) 1_{\mathfrak{A}} - x$. Очевидно, $y \in \mathfrak{B}_0$ и, следовательно, для y имеет место последнее соотношение, откуда

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T P^{(t)} x dt = \varphi(x) 1_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}}.$$

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидна.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Пусть ν — инвариантное состояние для к.к.с.п. $P^{(t)}$. Из непрерывности $\nu \otimes \varphi \in S^2$ следует, что для любого $x \in \mathfrak{A}$

$$\nu \otimes \varphi \left(\frac{1}{T} \int_1^T P^{(t)} x dt \right) \rightarrow \varphi(x) \quad \text{при } T \rightarrow \infty.$$

С другой стороны,

$$\nu \otimes \varphi \left(\frac{1}{T} \int_1^T P^{(t)} x dt \right) = \frac{1}{T} \int_1^T \nu \otimes \varphi(P^{(t)} x) dt = \nu(x), \quad x \in \mathfrak{A}.$$

Таким образом, $\nu = \varphi$. Теорема доказана.

Заметим, что аналогичная теорема была доказана для автоморфизма компактного метрического пространства в [13; гл. 1, § 7, теорема 2].

§ 2. Равномерная эргодическая теорема с весом

Этот параграф посвящен изучению сходимости в равномерной топологии весовых средних вида

$$\left\{ \frac{1}{T} \int_1^T b(t) P^{(t)} x dt \right\}, \quad \text{где } b(t) \in \mathbb{C}, \quad t \geq 1.$$

Рассмотрим стационарный к.к.с.п. $P^{(t)}$ на C^* -алгебре $\mathfrak{A}$ с единицей. Пусть $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, через μ обозначим нормированную меру Хаара на K и $(Z, \lambda) = \times_{i=1}^s (K, \mu)$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Положим $\mathfrak{M} = C(Z; \mathfrak{A})$ — совокупность всех $\mathfrak{A}$ -значных непрерывных функций на Z . Определим семейства линейных отображений $P_\alpha^{(t)} : C(Z) \rightarrow C(Z) \otimes C(Z)$, $Q_\alpha^{(t)} : \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$, где $C(Z)$ — пространство

всех непрерывных функций на Z , и линейный функционал $\varphi \otimes \lambda: \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{C}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}(P_\alpha^{(t)}f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2}((T_\alpha^{(t)}f)(\mathbf{x}) + (T_\alpha^{(t)}f)(\mathbf{y})), \\ Q_\alpha^{(t)}(x \otimes f) &= P^{(t)}x \otimes P_\alpha^{(t)}f, \quad x \in \mathfrak{A}, \quad f \in C(Z), \\ \varphi \otimes \lambda(f) &= \int_Z \varphi(f(\mathbf{x})) d\lambda(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

где

$$(T_\alpha^{(t)}f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{2^{t-1}}(f(\alpha^t \mathbf{x}) + (2^{t-1} - 1)\lambda(f)),$$

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_s) \in Z$, $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^s \subset K$. Легко видеть, что определенное семейство $(Q_\alpha^{(t)}, \varphi \otimes \lambda)$ является стационарным к.к.с.п., т.е. $(\varphi \otimes \lambda) \otimes (\varphi \otimes \lambda) \circ Q_\alpha^{(t)} = \varphi \otimes \lambda$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. К.к.с.п. $P^{(t)}$ называется *строго перемешивающим*, если для любого $x \in \mathfrak{A}$ имеет место соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T \|P^{(t)}x - \varphi(x)1_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}}\| dt = 0.$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $P^{(t)}$ – к.к.с.п. на $\mathfrak{A}$. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) $P^{(t)}$ – строго перемешивающий;
- (ii) к.к.с.п. $(Q^{(t)}, \varphi \otimes \varphi)$ на $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$, определенный на элементах вида $x \otimes y$ как

$$Q^{(t)}(x \otimes y) = \frac{1}{2}(P^{(t)}x \otimes P^{(t)}y + P^{(t)}y \otimes P^{(t)}x),$$

строго эргодичен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $P^{(t)}$ – строго перемешивающий к.к.с.п. Пусть $x, y \in \ker \varphi$, тогда

$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T \|P^{(t)}x\| dt &= 0, \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T \|P^{(t)}y\| dt &= 0.\end{aligned}$$

Мы воспользуемся следующим простым утверждением, касающимся числовых функций на $(\mathbb{R}_+, \mathfrak{S}, m)$, где $\mathfrak{S}$ – σ -алгебра измеримых по Лебегу множеств, а m – мера Лебега: для любой ограниченной измеримой функции $f(x)$ соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T |f(t)| dm(t) = 0$$

эквивалентно тому, что найдется измеримое множество A в $\mathbb{R}_+$ плотности нуль, т.е. $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} m(A \cap [1, T]) = 0$, такое, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ x \notin A}} |f(x)| = 0.$$

Из этого утверждения вытекает, что для функций $\|P^{(t)}x\|$, $\|P^{(t)}y\|$, $t \geq 1$, найдутся исключительные измеримые множества A_x и A_y плотности нуль такие, что $\|P^{(t)}x\|$ и $\|P^{(t)}y\|$ стремятся к нулю, когда $t \rightarrow \infty$ вне соответствующего исключительного множества A_x и A_y . Множество $A = A_x \cup A_y$ также имеет плотность нуль, и если $t \rightarrow \infty$ вне A , то $\|P^{(t)}x\| \cdot \|P^{(t)}y\|$ стремится к нулю. Снова пользуясь сформулированным утверждением, получаем, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T \|P^{(t)}x\| \cdot \|P^{(t)}y\| dt = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\left\| \frac{1}{T} \int_1^T Q^{(t)}(x \otimes y) dt \right\| \leq \frac{1}{T} \int_1^T \|P^{(t)}x\| \cdot \|P^{(t)}y\| dt \rightarrow 0 \quad \text{при } T \rightarrow \infty.$$

В общем случае для $x, y \in \mathfrak{A}$ положим $x^0 = \varphi(x)1_{\mathfrak{A}} - x$, $y^0 = \varphi(y)1_{\mathfrak{A}} - y$. Ясно, что $x^0, y^0 \in \ker \varphi$, тогда из полученного выше и строгой перемешиваемости к.к.с.п. $P^{(t)}$ имеем

$$\frac{1}{T} \int_1^T Q^{(t)}(x \otimes y) dt \rightarrow \varphi(x)\varphi(y)1_{(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}) \otimes (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})} \quad \text{при } T \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Пусть $z \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$, тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует элемент $\sum_{i=1}^m x_i \otimes y_i$ такой, что $\|z - \sum_{i=1}^m x_i \otimes y_i\| < \varepsilon$. Из (2.1) следует, что существует такое $T_0 \in \mathbb{R}_+$, что

$$\left\| \frac{1}{T} \int_1^T Q^{(t)} \left(\sum_{i=1}^m x_i \otimes y_i \right) dt - \varphi \otimes \varphi \left(\sum_{i=1}^m x_i \otimes y_i \right) 1_{(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}) \otimes (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})} \right\| < \varepsilon$$

при всех $T \geq T_0$. Тогда стандартным образом получим

$$\left\| \frac{1}{T} \int_1^T Q^{(t)} z dt - \varphi \otimes \varphi(z) 1_{(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}) \otimes (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})} \right\| \leq 3\varepsilon \quad \text{при всех } T \geq T_0.$$

Используя теорему 1.1, получаем строгую эргодичность $Q^{(t)}$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть к.к.с.п. $Q^{(t)}$ строго эргодичен и $x \in \ker \varphi$, $x = x^*$. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $T_{0,x} \in \mathbb{R}_+$ такое, что

$$\left\| \frac{1}{T} \int_1^T P^{(t)}x \otimes P^{(t)}x dt \right\| < \varepsilon \quad \text{при всех } T \geq T_{0,x},$$

и для произвольного эрмитова $\psi \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_1^* = \{\nu \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})^* : \|\nu\|_1 \leq 1\}$ имеем

$$\left| \frac{1}{T} \int_1^T \psi \otimes \psi(P^{(t)}x \otimes P^{(t)}x) dt \right| < \varepsilon \quad \text{при всех } T \geq T_{0,x}.$$

Отсюда в силу самосопряженности элемента x получим

$$\frac{1}{T} \int_1^T |\psi(P^{(t)}x)|^2 dt < \varepsilon \quad \text{при всех } T \geq T_{0,x},$$

так что

$$\frac{1}{T} \int_1^T |\psi(P^{(t)}x)| dt < \varepsilon \quad \text{при всех } T \geq T_{0,x} \text{ и } \psi \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_{1,h}^*,$$

где $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_{1,h}^*$ — эрмитова часть $(\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_1^*$. Итак, имеем

$$\frac{1}{T} \int_1^T \sup_{\psi \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_{1,h}^*} |\psi(P^{(t)}x)| dt < \varepsilon \quad \text{при всех } T \geq T_{0,x}. \quad (2.2)$$

Введем следующий функционал

$$\|x\|_* = \sup\{|\psi(x)| : \psi \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_{1,h}^*\}, \quad x \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}.$$

Докажем одну вспомогательную лемму.

ЛЕММА 2.1. *Функционал $\|\cdot\|_*$ является нормой на $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$, и эта норма эквивалентна норме $\|\cdot\|$, т.е. имеет место неравенство*

$$\|x\|_* \leq \|x\| \leq 2\|x\|_* \quad \forall x \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что функционал $\|\cdot\|_*$ положителен. Пусть для некоторого $x \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ $\|x\|_* = 0$. Отсюда следует, что $\varphi(x) = 0$ для всех $\varphi \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_{1,h}^*$. Так как каждый элемент $\psi \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_1^*$ представим в виде $\psi = \varphi_1 + i\varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_{1,h}^*$, то получим $\psi(x) = 0$. В силу произвольности ψ имеем $x = 0$. Остальные условия нормы очевидны. Для доказательства эквивалентности норм заметим, что

$$\|x\| = \sup\{|\psi(x)| : \psi \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_1^*\}.$$

Отсюда следует, что

$$\|x\|_* \leq \|x\| \quad \forall x \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}.$$

Как уже было сказано, каждый функционал $\psi \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_1^*$ представляется в виде $\psi = \varphi_1 + i\varphi_2$, $\varphi_1, \varphi_2 \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_{1,h}^*$. Отсюда имеем

$$\|x\| \leq \sup\{|\varphi_1(x)| : \varphi_1 \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_{1,h}^*\} + \sup\{|\varphi_2(x)| : \varphi_2 \in (\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A})_{1,h}^*\} = 2\|x\|_*.$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2.1. Итак, из (2.2) получим

$$\frac{1}{T} \int_1^T \|P^{(t)}x\|_* dt < \varepsilon \quad \text{при всех } T \geq T_{0,x}, \quad (2.3)$$

откуда в силу леммы 2.1 имеем

$$\frac{1}{T} \int_1^T \|P^{(t)}x\| dt < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при всех } T \geq T_{0,x}.$$

Пусть теперь $x \in \ker \varphi$ — произвольный элемент. Тогда x представляется в виде $x = x_1 + ix_2$, где $x_j = x_j^*$, $x_j \in \ker \varphi$, $j = 1, 2$, и из (2.3) имеем

$$\frac{1}{T} \int_1^T \|P^{(t)}x\| dt < \varepsilon \quad \text{при всех } T \geq \max\{T_{0,x_1}, T_{0,x_2}\}. \quad (2.4)$$

Таким образом, из (2.4) легко следует строгая перемешиваемость к.к.с.п. $P^{(t)}$. Теорема доказана.

Аналогичными рассуждениями мы можем доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $P^{(t)}$ и $P_\alpha^{(t)}$ – строго перемешивающие к.к.с.п. Тогда к.к.с.п. $Q_\alpha^{(t)}$ строго эргодичен.

ЛЕММА 2.2. Пусть T – марковский оператор с инвариантным состоянием φ . Если выполнено равенство

$$\frac{1}{2}(\nu \circ T + \varphi) = \nu, \quad (2.5)$$

то имеет место $\nu = \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \ker \varphi$, т.е. $\varphi(x) = 0$. Тогда

$$\nu(Tx) = 2\nu(x). \quad (2.6)$$

Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\|x\| \leq 1$. Тогда $|\nu(Tx)| \leq 1$ и $|\nu(x)| \leq 1/2$. Из $\varphi \circ T = \varphi$ следует $Tx \in \ker \varphi$, откуда $|\nu(Tx)| \leq 1/2$. Из (2.6) имеем $|\nu(x)| \leq 1/2^2$. Продолжая этот процесс для любого $n \in \mathbb{N}$, получаем $|\nu(x)| \leq 1/2^n$, что означает $\nu(x) = 0$. Отсюда заключаем, что $\ker \varphi \subset \ker \nu$.

Пусть $x \in \ker \nu$. Тогда $\nu(Tx) = -\varphi(x)$. Предположим, что $x \notin \ker \varphi$, что означает $\nu(Tx) \neq 0$. Из (2.5) получаем

$$\begin{aligned} \nu(Tx) + \varphi(x) &= 2\nu(x), \\ \nu(T^2x) + \varphi(x) &= 2\nu(Tx), \end{aligned}$$

отсюда находим

$$\nu(T^2x) - \nu(Tx) = 2(\nu(Tx) - \nu(x)).$$

Аналогичным образом для любого $x \in \mathbb{N}$ получаем

$$\nu(T^{n+1}x) - \nu(T^n x) = 2(\nu(T^n x) - \nu(T^{n-1}x)).$$

Из последнего равенства заключаем

$$\begin{aligned} \nu(T^{n+1}x) - \nu(T^n x) &= 2^n(\nu(Tx) - \nu(x)), \\ \nu(T^{n+1}x) &= \nu(T^n x) + 2^n\nu(Tx), \end{aligned} \quad (2.7)$$

здесь мы воспользовались тем, что $\nu(x) = 0$. В силу $\|x\| \leq 1$ имеем $|\nu(T^{n+1}x)| \leq 1$. Тогда в силу (2.7) получаем $\nu(Tx) = 0$, что противоречит нашему предположению. Тем самым, $\ker \nu \subset \ker \varphi$. Из доказанного выше следует, что $\ker \varphi = \ker \nu$.

Пусть $x \in \mathfrak{A}$ – произвольный элемент из $\mathfrak{A}$. Тогда элемент $y = \varphi(x)1_{\mathfrak{A}} - x$ принадлежит $\ker \varphi$, т.е. $\varphi(y) = 0$. Из доказанного выше равенства следует $\nu(y) = 0$, что означает $\nu(x) = \varphi(x)$. Лемма доказана.

Приведем пример строго перемешивающего к.к.с.п.

Рассмотрим на C^* -алгебре $\mathfrak{A}$ с единицей 1 к.к.с.п. $H^{(t)}$, определенный в §1. На $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$ определим к.к.с.п. $Q^{(t)}$ как в теореме 2.1, т.е.

$$Q^{(t)}(x \otimes y) = \frac{1}{2}(H^{(t)}x \otimes H^{(t)}y + H^{(t)}y \otimes H^{(t)}x), \quad x, y \in \mathfrak{A}.$$

Тогда легко проверить, что для состояния $\tilde{\varphi} = \varphi \otimes \varphi$ справедливо

$$\tilde{\varphi} \otimes \tilde{\varphi} \circ Q^{(t)} = \tilde{\varphi} \quad \text{при } t \geq 1.$$

Покажем, что определенный к.к.с.п. $(Q^{(t)}, \tilde{\varphi})$ строго эргодичен. В самом деле, пусть $\tilde{\psi} \in S^2$ – инвариантное состояние для $Q^{(t)}$, т.е.

$$\tilde{\psi} \otimes \tilde{\varphi} \circ Q^{(t)} = \tilde{\psi}.$$

Согласно определениям $H^{(t)}$ и $Q^{(t)}$ последнее равенство перепишется как

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\psi}(T^t x \otimes 1) + \tilde{\psi}(1 \otimes T^t x)}{2} \varphi(y) + \frac{\tilde{\psi}(T^t y \otimes 1) + \tilde{\psi}(1 \otimes T^t y)}{2} \varphi(x) \right) = \tilde{\psi}(x \otimes y), \quad (2.8)$$

где $x, y \in \mathfrak{A}$.

Из (2.8), полагая по отдельности $x = 1$ и $y = 1$, получаем равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\varphi(y) + \frac{\tilde{\psi}(T^t y \otimes 1) + \tilde{\psi}(1 \otimes T^t y)}{2} \right) &= \tilde{\psi}(1 \otimes y), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\tilde{\psi}(T^t x \otimes 1) + \tilde{\psi}(1 \otimes T^t x)}{2} + \varphi(x) \right) &= \tilde{\psi}(x \otimes 1). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Из последнего следует

$$\tilde{\psi}(x \otimes 1) = \tilde{\psi}(1 \otimes x), \quad x \in \mathfrak{A}. \quad (2.10)$$

Отсюда и из (2.9) находим

$$\frac{1}{2} (\tilde{\psi}(T^t x \otimes 1) + \varphi(x)) = \tilde{\psi}(x \otimes 1).$$

Теперь, полагая $\psi(x) = \tilde{\psi}(x \otimes 1)$ и применяя лемму 2.2, получаем

$$\psi = \varphi,$$

и из (2.8), (2.10) вытекает

$$\tilde{\psi}(x \otimes y) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \text{для всех } x, y \in \mathfrak{A},$$

что означает строгую эргодичность $Q^{(t)}$. В силу теоремы 2.1 получим строгую перемешиваемость $H^{(t)}$.

Через F обозначим совокупность всех наборов $\{\alpha_i\}_{i=1}^s$ таких, что к.к.с.п. $P_\alpha^{(t)}$ – строго перемешивающий, т.е.

$$F = \{ \alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^s : P_\alpha^{(t)} \text{ – строго перемешивающий, } \alpha_i \in K, s \in \mathbb{N} \}.$$

Напомним, что ограниченная последовательность $\{b_n\} \subset \mathbb{C}$ называется *последовательностью Безиковича*, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический полином

$$W_\varepsilon(j) = \sum_s y_s \exp(i\theta_s j)$$

такой, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |b_j - W_\varepsilon(j)| < \varepsilon.$$

По аналогии с этим определением введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Ограниченная измеримая функция $b(t)$, определенная при $t \geq 1$, называется *Ф-функцией Безиковича*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует набор $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^s \in F$, функция $f \in C(Z)$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Z$ такие, что

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_1^T |b(t) - (P_\alpha^{(t)} f)(\mathbf{x}, \mathbf{y})| dt < \varepsilon. \quad (2.11)$$

Пусть $P^{(t)}$ — строго перемешивающий к.к.с.п. на C^* -алгебре $\mathfrak{A}$ и $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^s \in F$. Тогда из теоремы 2.2 получим

$$\frac{1}{T} \int_1^T Q_\alpha^{(t)} \tilde{x} dt \rightarrow \varphi \otimes \lambda(\tilde{x}) 1_{\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}} \quad \text{при } T \rightarrow \infty, \quad \tilde{x} \in \mathfrak{M}. \quad (2.12)$$

Пусть f — произвольная функция из $C(Z)$ и $x \in \mathfrak{A}$. Согласно определению к.к.с.п. $Q_\alpha^{(t)}$ имеем

$$(Q_\alpha^{(t)}(x \otimes f))(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (P_\alpha^{(t)} f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) P^{(t)} x, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in Z.$$

В силу (2.12) получим

$$\frac{1}{T} \int_1^T (P_\alpha^{(t)} f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) P^{(t)} x dt \rightarrow \lambda(f) \varphi(x) 1_{\mathfrak{A}} \quad \text{при } T \rightarrow \infty, \quad x \in \mathfrak{A}. \quad (2.13)$$

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $P^{(t)}$ — строго перемешивающий к.к.с.п. на $\mathfrak{A}$. Тогда для каждой $x \in \mathfrak{A}$ и Ф-функции Безиковича $b(t)$ средние

$$\frac{1}{T} \int_1^T b(t) P^{(t)} x dt \quad (2.14)$$

сходятся равномерно в $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число, $x \in \mathfrak{A}$ и $b(t)$ — Ф-функция Безиковича. Тогда существуют набор $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^s \in F$, функция $f \in C(Z)$ и $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Z$ такие, что справедливо (2.11). Имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{T} \int_1^T b(t) P^{(t)} x dt - \frac{1}{T} \int_1^T (P_\alpha^{(t)} f)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) P^{(t)} x dt \right\| \\ & \leq \frac{1}{T} \int_1^T |b(t) - (P_\alpha^{(t)} f)(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \|P^{(t)} x\| dt \leq \|x\| \varepsilon. \end{aligned}$$

Из (2.13) следует, что средние (2.14) сходятся равномерно в $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичная теорема была доказана в [14], [15] для положительных отображений алгебр фон Неймана с весом — последовательностью Безиковича в квазиравномерной топологии.

Список литературы

1. *Бернштейн С. Н.* Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности // Уч. записки НИ кафедр Украины. 1924. № 1. С. 83–115.
2. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.
3. *Kesten H.* Quadratic transformations: a model for population growth. I, II // Adv. Appl. Prob. 1970. V. 2. P. 1–82; 1970. V. 2. P. 179–228.
4. *Любич Ю. И.* Основные понятия и теоремы эволюционной генетики свободных популяций // УМН. 1971. Т. 26. № 5. С. 51–116.
5. *Сарымсаков Т. А., Ганиходжаев Р. Н.* Эргодический принцип для квадратичных стохастических операторов // Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. наук. 1979. № 6. С. 34–38.
6. *Ганиходжаев Н. Н., Мухамедов Ф. М.* О квантовых квадратичных стохастических процессах // Докл. АН РУз. 1997. № 3. С. 13–16.
7. *Ганиходжаев Н. Н., Мухамедов Ф. М.* О квантовых квадратичных стохастических процессах и некоторые эргодические теоремы для таких процессов // Узб. матем. журн. 1997. № 3. С. 8–20.
8. *Sakai S.* C^* -algebras and W^* -algebras. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
9. *Любич Ю. И.* Математические структуры в популяционной генетике. Киев: Наукова думка, 1983.
10. *Janks R. D.* Quadratic differential systems for interactive population models // J. Differential Equations. 1969. V. 5. № 3. P. 497–514.
11. *Сарымсаков Т. А., Ганиходжаев Н. Н.* Аналитические методы в теории квадратичных стохастических операторов // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305. № 5. С. 1052–1056.
12. *Сарымсаков Т. А., Ганиходжаев Н. Н.* Об эргодическом принципе для квадратичных процессов // Докл. АН СССР. 1991. Т. 316. № 6. С. 1315–1319.
13. *Корнфельд Н. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
14. *Hensz E.* On some ergodic theorems for von Neumann algebras // Probability theory on vector spaces. III. Proc. Conf., Lublin/Pol. 1983. Lecture Notes in Math. V. 1080, 1984. P. 119–123.
15. *Litvinov S.* On weighted ergodic theorems in von Neumann algebras (to appear).

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз,
Ташкент

Поступила в редакцию
06.05.1998 и 25.01.1999