Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Карагулян, Суммы Римана и максимальные функции в $\mathbb{R}^n$, *Матем. сб.*, 2009, том 200, номер 4, 53–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm5328>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 04:56:33

УДК 517.518.121

Г. А. Карагулян

Суммы Римана и максимальные функции в $\mathbb{R}^n$

Исследуются задачи сходимости почти всюду римановых сумм

$$R_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right), \quad x \in \mathbb{T},$$

с помощью техники классических максимальных функций в $\mathbb{R}^n$. Доказана теорема об эквивалентности римановых и обычных максимальных функций, позволяющая использовать технику и результаты теории дифференцирования интегралов в $\mathbb{R}^n$ при исследовании указанных выше задач. При помощи этого метода установлено, что для определенной последовательности $\{n_k\}$ римановы суммы $R_{n_k} f(x)$ сходятся почти всюду к $f \in L^p$, $p > 1$.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: суммы Римана, максимальные функции, покрывающие леммы, подметающие свойства.

§ 1. Введение

Рассмотрим операторы римановых сумм

$$R_n f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x + \frac{k}{n}\right), \quad x \in \mathbb{T}, \quad (1.1)$$

для функций, суммируемых на торе $\mathbb{T} = [0, 1] = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Нетрудно установить, что если функция f непрерывна, то эти суммы сходятся к интегралу от функции f равномерно, а если f интегрируема по Лебегу, то они сходятся в $L^1(\mathbb{T})$. В настоящей работе исследуется ряд задач, касающихся сходимости почти всюду (п.в.) подпоследовательностей римановых операторов. Классическая теорема Б. Иессена [1] является первым результатом в этом направлении.

ТЕОРЕМА А (см. [1]). Пусть $\{n_k\}$ – возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что n_{k+1} делится на n_k . Тогда для любой функции $f \in L^1(\mathbb{T})$ п.в.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{n_k} f(x) = \int_0^1 f(t) dt \quad (1.2)$$

и, более того,

$$\left| \left\{ x \in \mathbb{T} : \sup_k R_{n_k} |f(x)| > \lambda \right\} \right| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1}, \quad \lambda > 0. \quad (1.3)$$

Следующий фундаментальный результат в этом направлении принадлежит У. Рудину [2]. Он построил пример ограниченной функции с расходящимися п.в. римановыми суммами. Им доказана

ТЕОРЕМА В (см. [2]). Пусть D – последовательность натуральных чисел, которая содержит множества D_n , $n = 1, 2, \dots$, каждое из которых состоит из n элементов таких, что ни один элемент из D_n не делит наименьшее общее кратное остальных элементов из D_n . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует ограниченная измеримая функция f такая, что $0 \leq f \leq 1$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty, n \in D} R_n f(x) \geq \frac{1}{2}$$

для каждого x и при этом $\int_0^1 f(x) dx < \varepsilon$.

Например, D может быть последовательностью простых чисел. Используя теорему Дирихле о простых числах в арифметических прогрессиях, Рудин в [2] построил последовательность $\{n_k\}$, которая удовлетворяет условиям теоремы Иессена, а $\{1 + n_k\}$ есть последовательность, состоящая из простых чисел. Отсюда следует, что $R_{n_k} f(x)$ сходится п.в., однако $R_{1+n_k} f(x)$ не сходится п.в. Этот факт показывает, что для сходимости п.в. операторов $R_{n_k} f(x)$ важны арифметические свойства последовательностей $\{n_k\}$.

Следуя работе Л. Дубинса и Ж. Питмана [3], назовем *цепью* возрастающую последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$, для которых n_{k+1} делится на n_k . Для семейств натуральных чисел $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_d$ обозначим через $[\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_d]$ множество всех натуральных чисел, являющихся наименьшим общим кратным некоторой совокупности чисел $n_1 \in \mathcal{S}_1, n_2 \in \mathcal{S}_2, \dots, n_d \in \mathcal{S}_d$. Будем говорить, что $\mathcal{S}$ имеет размерность d , если d – наименьшее целое число, при котором $\mathcal{S}$ – подмножество множества $[\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_d]$ для некоторых цепей $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \dots, \mathcal{S}_d$. Примером множества размерности d является множество натуральных чисел, имеющих факторизацию

$$p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_d^{k_d}, \quad k_1, k_2, \dots, k_d \in \mathbb{N}, \quad (1.4)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_d$ – различные фиксированные простые числа. Дубинс и Питман в [3] обобщили теорему Иессена, доказав следующую теорему.

ТЕОРЕМА С. Если множество натуральных чисел $\mathcal{S}$ имеет размерность d и $f \in L \log^{d-1} L(\mathbb{T})$, то п.в.

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{S}} R_n(f)(x) = \int_0^1 f(x) dx$$

и, более того,

$$m\{x \in \mathbb{T} : \sup_{n \in \mathcal{S}} |R_n(f)(x)| > \lambda\} \leq \frac{C_d}{\lambda} \int_0^1 |f| \log^{d-1}(1 + |f|) dx. \quad (1.5)$$

В доказательстве этой теоремы использованы методы теории мартингалов. В настоящее время известно элементарное доказательство оценки (1.5), предложенное неизвестным рецензентом статьи [4]. Точнее, (1.5) выводится с помощью d итераций оператора из (1.3). Кроме того, неравенство (1.5) может быть получено с помощью интерполяционной теоремы [5; гл. 12, теорема 4.34]. Другое элементарное доказательство предложено Р. Нейром в [6]. И. Вежод и М. Вебер в [4] доказали также, что теорема С “почти окончательна”.

ТЕОРЕМА D. Для любого натурального $d \geq 2$ и любого ε такого, что $0 < \varepsilon < 1$, существуют последовательность n_k размерности d и функция $f \in L \log^{d-\varepsilon} L(\mathbb{T})$ такие, что $R_{n_k} f(x)$ расходится п.в.

Доказательство этой теоремы основано на методе Р. С. Бейкера [7] (в [7] доказана более слабая версия этой теоремы). Как отмечено в [4], теорема D не дает ответ на вопрос, является ли класс $L \log^{d-1} L(\mathbb{T})$ точным. Далее в теореме 1 доказано, что этот класс функций действительно оптимален и можно потребовать расходимости всюду.

В настоящей работе установлена прямая связь между максимальными функциями Римана и обычными максимальными функциями на евклидовых пространствах $\mathbb{R}^d$. Более того, показано, что максимальная функция Римана, соответствующая данному конечному множеству индексов D , эквивалентна некоторой максимальной функции в $\mathbb{R}^d$ по определенным d -мерным прямоугольникам (теорема 4, §3). Доказательство теоремы 4 основано на лемме 2, где определен подходящий изоморфизм между арифметическими прогрессиями целых чисел и d -мерными прямоугольниками. Теорема 4 позволяет использовать многие результаты и методы максимальных функций в теории римановых сумм. Многие конструкции, использованные для сумм Римана, получают довольно простые геометрические интерпретации в $\mathbb{R}^d$. Используя теорему 4, мы получаем решения некоторых задач, касающихся сумм Римана. Чтобы пояснить идею наших рассуждений, в §3 мы даем альтернативное доказательство теоремы Иессена, используя покрывающие свойства некоторых множеств, связанных с суммами Римана. Мы обнаружим сходство рассуждений, используемых в этом доказательстве и в доказательстве максимального неравенства Харди–Литтлвуда, где также используются покрывающие свойства интервалов. В последнем параграфе мы докажем теорему Рудина, используя простую геометрию многомерных прямоугольников, и докажем, что для общего класса операторов сильно подметающее и δ -подметающее свойства эквивалентны.

Пусть $\Phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ – выпуклая возрастающая функция. Обозначим через $L^\Phi(\mathbb{T})$ класс функций f на $\mathbb{T}$, для которых $\Phi(|f|) \in L^1(\mathbb{T})$. Если Φ удовлетворяет Δ_2 -условию $\Phi(2x) \leq k\Phi(x)$, то L^Φ является банаховым пространством с нормой $\|f\|_{L^\Phi} = \|f\|_\Phi$, равной нижней грани чисел $c > 0$, для которых выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{T}} \Phi\left(\frac{|f|}{c}\right) dx \leq 1.$$

Следующая теорема уточняет теорему D и показывает, что класс $L \log^{d-1} L$ в теореме C точен.

ТЕОРЕМА 1. Пусть n_k – возрастающая последовательность, составленная из чисел, обладающих свойством (1.4), где $p_1, p_2, \dots, p_d$ – фиксированные различные простые числа. Если возрастающая функция $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x \ln^{d-1} x} = 0, \quad (1.6)$$

то существует функция $f(x) \in L^\varphi$ такая, что последовательность $R_{n_k} f(x)$ расходится всюду.

Из теоремы С следует, что суммы Римана, соответствующие множеству конечной размерности, сходятся п.в. для функций из класса L^p , $p > 1$. Для множеств бесконечной размерности не известно такой последовательности $\{n_k\}$, для которой подпоследовательность $R_{n_k}f(x)$ сходилась бы п.в. для любой $f \in L^p(\mathbb{T})$, $p > 1$. В [4] рассмотрено следующее множество E :

$$E = \{p_1 \cdots p_{j-1} \check{p}_j p_{j+1} \cdots p_k : k = 2, 3, \dots, 1 \leq j \leq k\}, \quad (1.7)$$

где $p_1 < p_2 < \dots$ – последовательность всех простых чисел, а символ $\check{}$ означает, что p_j не присутствует в произведении. Как доказано в [3], E имеет бесконечную меру. В [4] (см. также [8; § 4]) доказана сходимость п.в. сумм Римана $R_{n_k}f(x)$, где $\{n_k\} = E$ для функций $f \in L^2(\mathbb{T})$ с коэффициентами Фурье, удовлетворяющими условию

$$\sum_{n \geq 3} a_n^2 \left(\frac{\ln n}{\ln \ln n} \right) < \infty.$$

Доказано также, что п.в.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N R_{n_k} f(x) = \int_0^1 f(x) dx \quad (1.8)$$

для любой $f \in L^2(\mathbb{T})$. В настоящей работе доказано, что суммы Римана, связанные с множеством E , сходятся п.в. в L^p , $p > 1$. Более того, сходимость п.в. имеет место для функций из класса Орлича L^Φ соответствующий функции

$$\Phi(x) = \frac{x \ln(1+x)}{\ln \ln(3+x)}, \quad x \geq 0, \quad (1.9)$$

и этот класс оптимален для множества E . А именно, доказана

ТЕОРЕМА 2. Пусть E – множество, определенное в (1.7), а $\Phi(x)$ – функция (1.9). Тогда для любой функции $f \in L^\Phi$ п.в. имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in E} R_n f(x) = \int_0^1 f(x) dx. \quad (1.10)$$

Более того,

$$|\{x \in \mathbb{T} : \sup_{n \in E} |R_n f(x)| > \lambda\}| \leq \int_0^1 \Phi\left(\frac{c|f|}{\lambda}\right) dx, \quad \lambda > 0, \quad (1.11)$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная.

Из этой теоремы сразу получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Существует множество бесконечной размерности $E \subset \mathbb{N}$ такое, что для любой $f \in L^p(\mathbb{T})$, $p > 1$, суммы Римана $R_n f(x)$, $n \in E$, сходятся п.в.

ТЕОРЕМА 3. Если последовательность $n_1 < n_2 < \dots$ состоит из чисел множества E , а возрастающая функция $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x) \ln \ln x}{x \ln x} = 0, \quad (1.12)$$

то существует функция $f(x) \in L^\varphi$ такая, что последовательность $R_{n_k} f(x)$ расходится всюду.

§ 2. Определения и обозначения

Напомним некоторые определения из теории меры (см., например, [9]). Обозначим через X произвольное множество. Семейство Ω подмножеств X называется *алгеброй*, если оно замкнуто относительно конечного числа операций объединения, пересечения и разности и при этом $X \in \Omega$. Если алгебра замкнута также и относительно счетного объединения таких операций, то она называется *σ -алгеброй*. Множество A называется *атомом алгебры* Ω , если нет такого множества $B \in \Omega$, что $B \subset A$. Отметим, что если алгебра Ω конечна, то любое множество из Ω будет объединением некоторых атомов из Ω . Если также определена мера μ на Ω , то обозначим это пространство с мерой через (X, Ω, μ) . Говорят, что измеримые пространства (X, Ω, μ) и (Y, Δ, ν) *изоморфны*, если существует взаимно однозначное отображение $\gamma: \Omega \rightarrow \Delta$, называемое *изоморфизмом*, такое, что

$$\gamma(A - B) = \gamma(A) - \gamma(B), \quad \gamma\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \gamma(A_k), \quad \nu(\gamma(A)) = \mu(A)$$

для любых множеств A, B и A_k из Ω , $k = 1, 2, \dots$. Если Ω не является σ -алгеброй, то дополнительно предполагается, что $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Omega$. Будем говорить, что $f: X \rightarrow Y$ — *функция изоморфизма*, если функция множества $\gamma(A) = \{y \in Y : y = f(x), x \in A\}$ определяет взаимно однозначное отображение между Ω и Δ , которое является изоморфизмом. Предположим, что алгебры Ω и Δ имеют атомы $A_1, A_2, \dots, A_n$ и $B_1, B_2, \dots, B_n$ соответственно. Ясно, что если $\nu(A_i) = \mu(B_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, то измеримые пространства (Ω, μ) и (Δ, ν) изоморфны.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\mathbb{T}^{\infty}, \lambda) = \prod_{i=1}^{\infty} (\mathbb{T}_i, \lambda_i)$, где каждое $(\mathbb{T}_i, \lambda_i)$ есть мера Лебега на $\mathbb{T}$. Напомним, что измеримые множества в $\mathbb{T}^{\infty}$ порождаются произведениями $A = \prod_{i=1}^{\infty} A_i$, где каждое множество A_i есть измеримое по Лебегу множество в $\mathbb{T}$ и только конечное число из них отлично от $\mathbb{T}$ (см. определение из [10; § 3.3]). Мера на $\mathbb{T}^{\infty}$ — это продолжение меры $\lambda(A) = \prod_{i=1}^{\infty} |\lambda_i(A_i)|$. Обозначим через $|A|$ меру множества $A \subset \mathbb{T}^{\infty}$.

Пусть $l \in \mathbb{N}$ и $D \subset \mathbb{N}$ — конечное множество. Будем писать $D \mid l$, если любое число из D является делителем l . Обозначим

$$l/D = \left\{ n \in \mathbb{N} : \frac{l}{n} \in D \right\}. \quad (2.1)$$

Важными результатами настоящей работы являются соотношения между тремя типами множеств: римановыми множествами, арифметическими прогрессиями целых чисел и специальными прямоугольникам в $\mathbb{T}^{\infty}$.

Римановы множества. Обозначим через $\mathcal{I}_l$ алгебру в $\mathbb{T}$, порожденную интервалами $[j/l, (j+1)/l)$, $j = 0, 1, \dots, l-1$. Определим римановы множества

$$I_l(n, t) = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left[\frac{t}{l} + \frac{i}{n}, \frac{t+1}{l} + \frac{i}{n} \right), \quad t = 0, 1, \dots, \frac{l}{n}, \quad (2.2)$$

где n — делитель l . Очевидно, имеем

$$I_l(n, t) \in \mathcal{I}_l, \quad \lambda(I_l(n, t)) = \frac{n}{l}.$$

Для фиксированных чисел l и n , удовлетворяющих условию $n \mid l$ (что означает, что n делит l) семейство множеств (2.2) является разбиением множества $[0, 1]$ (эти множества попарно не пересекаются). Легко проверить, что если $x \in [k/l, (k+1)/l)$, то

$$l \int_{k/l}^{(k+1)/l} R_n f(t) dt = \frac{1}{|I_l(n, t)|} \int_{I_l(n, t)} f(t) dt, \quad x \in I_l(n, t). \quad (2.3)$$

Отсюда по теореме Лебега на $\mathbb{R}$ получим, что п.в.

$$\lim_{l \rightarrow \infty, x \in I_l(n, t)} \frac{1}{|I_l(n, t)|} \int_{I_l(n, t)} f(t) dt = R_n f(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Для любого подмножества $D \subset \mathbb{N}$ определим

$$\mathcal{R}_D^l f(x) = \sup_{n \in D: n \mid l, x \in I_l(n, t)} \frac{1}{|I_l(n, t)|} \int_{I_l(n, t)} |f(t)| dt. \quad (2.5)$$

Если D_n – конечные подмножества D , $\bigcup_n D_n = D$, то из (2.4) следует, что п.в.

$$\mathcal{R}_D f(x) = \sup_{n \in D} R_n f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{l \rightarrow \infty: D_n \mid l} \mathcal{R}_D^l f(x). \quad (2.6)$$

Заметим, что если $f(x)$ является $\mathcal{I}_l$ -измеримым, то

$$\mathcal{R}_D f(x) = \mathcal{R}_D^l f(x). \quad (2.7)$$

В самом деле, так как из условия $l \mid l'$ следует, что $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}_{l'}$, то при условии $l \mid l'$

$$\mathcal{R}_D^{l'} f(x) = \mathcal{R}_D^l f(x).$$

Следовательно, согласно (2.6) имеем

$$\mathcal{R}_D f(x) = \lim_{l' \rightarrow \infty: l \mid l'} \mathcal{R}_D^{l'} f(x) = \mathcal{R}_D^l f(x).$$

Арифметические прогрессии. Будем говорить, что множество целых чисел A является l -периодическим, если $A = l + A$. Обозначим через $\mathcal{A}_l$ семейство всех l -периодических множеств и пусть $\mathcal{A} = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_l$. Очевидно, что если $l \mid l'$, то любое l -периодическое множество является l' -периодическим, т.е. $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{A}_{l'}$. Заметим, что $\mathcal{A}$ и любое множество $\mathcal{A}_l$ являются алгебрами. Определим меру множества $A \in \mathcal{A}$ так:

$$\delta(A) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\#(A \cap [0, l))}{l},$$

где $\#B$ означает количество элементов в B . Очевидно, что этот предел существует, и если $A \in \mathcal{A}_l$, то

$$\delta(A) = \frac{\#(A \cap [0, l))}{l}.$$

Очевидно, что $\delta(A)$ есть δ -аддитивная мера на $\mathcal{A}$. Теперь рассмотрим арифметические прогрессии

$$A_l(t) = \{lj + t, j \in \mathbb{Z}\}, \quad 0 \leq t < l. \quad (2.8)$$

Ясно, что

$$A_l(t) \in \mathcal{A}, \quad \delta(A_l(t)) = \frac{1}{l}, \quad (2.9)$$

и любое множество из $\mathcal{A}$ можно записать как объединение таких арифметических прогрессий. Это значит, что (2.8) являются атомами алгебры $\mathcal{A}$.

Прямоугольники в $\mathbb{T}^\infty$. Пусть $p_1 < p_2 < \dots < p_d < \dots$ – последовательность всех простых чисел. Рассмотрим натуральное число l с факторизацией

$$l = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \dots p_d^{l_d}. \quad (2.10)$$

Не исключается случай $l_k = 0$. Определим прямоугольники $\mathbb{T}^\infty$ так:

$$B_l(j_1, \dots, j_d) = \left\{ x \in \mathbb{T}^\infty : \frac{j_k}{p_k^{l_k}} \leq x_k < \frac{j_k + 1}{p_k^{l_k}}, \quad k = 1, 2, \dots, d \right\}, \quad (2.11)$$

$$0 \leq j_k < p_k^{l_k}, \quad k = 1, 2, \dots, d, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots).$$

Обозначим через $\mathcal{B}_l$ алгебру, порожденную всеми прямоугольниками (2.11). Итак, семейство

$$\mathcal{B} = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_l$$

является алгеброй в $\mathbb{T}^\infty$. Отметим, что $\mathcal{B}_l \subset \mathcal{B}_{l'}$, когда $l \mid l'$. Будем рассматривать пространство с мерой $(\mathcal{B}, \lambda)$, где λ – мера Лебега на $\mathbb{T}^\infty$. Очевидно, что

$$\lambda(B_l(j_1, \dots, j_d)) = \frac{1}{l}$$

и $(\mathcal{I}_l, \lambda)$, $(\mathcal{A}_l, \delta)$ и $(\mathcal{B}_l, \lambda)$ изоморфны, так как все имеют l атомов с равными мерами. В § 4 мы построим специальный изоморфизм между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, который сопоставляет каждой арифметической прогрессии (2.8) прямоугольник (2.11).

§ 3. Альтернативное доказательство теоремы Иессена

Операторы (2.6) играют важную роль в теории сходимости п.в. римановых сумм. Чтобы доказать теорему Иессена, достаточно доказать неравенство (1.3), так как (1.2) можно получить из (1.3), если применить принцип Банаха. Итак, предположим, что $D = \{m_1, m_2, \dots, m_d, \dots\}$, где m_{k+1} делится на m_k . Зафиксируем конечное множество $U = \{m_1, m_2, \dots, m_d\} \subset D$ и целое число l , которое делится на m_d и, следовательно, на все m_k , $1 \leq k \leq d$. Очевидно, что

$$\{\mathcal{R}_U^l f(x) > \lambda\} = \bigcup_j I_j,$$

где I_j – множества Римана из $\mathcal{I}_l$, для которых

$$\frac{1}{|I_j|} \int_{I_j} |f(t)| dt > \lambda.$$

Докажем, что можно выбрать такое подсемейство попарно непересекающихся множеств $\{\tilde{I}_j\}$, что

$$\bigcup_j I_j = \bigcup_j \tilde{I}_j. \quad (3.1)$$

Определим приоритет множества I : $\text{priority}(I) = n$, если I имеет форму (2.2). Легко видеть, что если $\text{priority}(J)$ делится на $\text{priority}(I)$ и $I \cap J \neq \emptyset$, то $I \subseteq J$. Выберем $\tilde{I}_1$ среди I_j с наибольшим приоритетом. Предположим, что уже выбраны $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \dots, \tilde{I}_m$. Рассмотрим множества I_j такие, что $I_j \not\subseteq \bigcup_{j=1}^m \tilde{I}_j$ и $I_j \cap (\bigcup_{j=1}^m \tilde{I}_j) = \emptyset$. Выберем $\tilde{I}_{m+1}$ из тех множеств, которые имеют наибольшие приоритеты. Этот процесс обязательно породит подсемейство $\{\tilde{I}_j\}$ попарно непересекающихся множеств (3.1). Далее имеем

$$|\{\mathcal{R}_B^l f(x) > \lambda\}| = \left| \bigcup_j I_j \right| = \sum_j |\tilde{I}_j| < \frac{1}{\lambda} \sum_j \int_{\tilde{I}_j} |f(t)| dt \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{\lambda}.$$

Так как эти соотношения имеют место для любого конечного подмножества $U \subset D$, то, применив (2.6), получим (1.3).

§ 4. Изоморфизм между арифметическими прогрессиями и прямоугольниками

Пусть l – натуральное число с факторизацией (2.10) и

$$m = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_d^{m_d}, \quad 0 \leq m_k \leq l_k, \quad k = 1, 2, \dots, d. \quad (4.1)$$

Из определения (2.11) следует, что

$$B_m(t_1, \dots, t_d) = \bigcup_{p_k^{l_k - m_k} t_k \leq s_k < p_k^{l_k - m_k} (t_k + 1)} B_l(s_1, \dots, s_d). \quad (4.2)$$

Для фиксированного t рассмотрим множество векторов с целыми координатами

$$S_t = \{(s_1, s_2, \dots, s_d) : 0 \leq s_k < p_k^{l_k}, s_k = t \pmod{p_k^{m_k}}, k = 1, 2, \dots, d\}. \quad (4.3)$$

Отметим, что S_t зависит от l и m .

ЛЕММА 1. *Существует взаимно однозначное отображение множества*

$$U = \left\{0, 1, \dots, \frac{l}{m} - 1\right\} \quad (4.4)$$

в множество векторов (4.3) такое, что вектор $(s_1, s_2, \dots, s_d) \in S_t$, соответствующий $u \in U$ при этом отображении, удовлетворяет условию

$$s_k = (mu + t) \pmod{p_k^{l_k}}, \quad k = 1, 2, \dots, d. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что существуют $p_k^{l_k - m_k}$ таких чисел s_k , что

$$0 \leq s_k < p_k^{l_k}, \quad s_k = t \pmod{p_k^{m_k}}.$$

Отсюда имеем

$$\#S_t = \prod_{k=1}^d p_k^{l_k - m_k} = \frac{l}{m} = \#U.$$

Итак, достаточно доказать, что для любого $u \in U$ существует вектор $(s_1, \dots, s_d) \in S$, удовлетворяющий (4.5), и образы различных элементов u – разные. Для нахождения вектора $(s_1, \dots, s_d)$, соответствующего u , определим s_k как остаток от деления $mu + t$ на $p_k^{l_k}$. Очевидно, что $(s_1, \dots, s_d)$ удовлетворяет (4.5) и $0 \leq s_k < p_k^{l_k}$. Так как $p_k^{m_k} \mid m$, то получаем $s_k = t \bmod p_k^{m_k}$. Следовательно, $(s_1, \dots, s_d) \in S_t$. Теперь предположим, что вектор $(s_1, s_2, \dots, s_d) \in S_t$ соответствует двум разным числам $u_1, u_2 \in U$. Числа u_1 и u_2 удовлетворяют условию (4.5). Отсюда получаем, что

$$m(u_1 - u_2) = 0 \bmod p_k^{l_k}, \quad k = 1, 2, \dots, d.$$

Так как $0 \leq u_1 - u_2 < l/m$, то, используя (2.10) и (4.1), заключаем, что $u_1 - u_2 = 0$.

Пусть $p \geq 2$ – некоторое натуральное число. Любое натуральное число a имеет p -адическое представление

$$a = a_0 p^k + a_1 p^{k-1} + \dots + a_k, \quad 0 \leq a_i < p.$$

Обозначим через

$$(a)_p = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \dots + a_0$$

целое число, получающееся из a при обратной перестановке цифр в его p -адической записи. Будем говорить, что $(a)_p$ является p -обратным к a . Отметим, что эта операция определяет взаимно однозначное отображение множества целых чисел $\{0, 1, \dots, p^k - 1\}$ на себя. Заметим, что если

$$s = p^i v + t, \quad 0 \leq v < p^{j-i}, \quad 0 \leq t < p^i, \quad i \leq j,$$

то

$$\bar{s} = p^{j-i} \bar{t} + \bar{v}. \quad (4.6)$$

Легко видеть, что для фиксированного t соответствие $s \rightarrow \bar{s}$ есть взаимно однозначное отображение множества $\{s : s = p^i v + t, 0 \leq v < p^{j-i}\}$ на множество $\{s : s = p^{j-i} \bar{t} + v, 0 \leq v < p^{j-i}\}$.

ЛЕММА 2. *Существует изоморфизм α из пространства $(\mathcal{A}, \delta)$ в пространство $(\mathcal{B}, \lambda)$, сопоставляющий каждой прогрессии (2.8) прямоугольник (2.11).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала определим α на прогрессиях (2.8). Возьмем произвольную прогрессию $A_l(t)$. Предположим, что

$$t_k = t \bmod p_k^{l_k}, \quad 0 \leq t_k < p_k^{l_k}, \quad k = 1, 2, \dots, d.$$

Обозначим через $\bar{t}_k$ p_k -обратные чисел t_k . Имеем $0 \leq \bar{t}_k < p_k^{l_k}$. Определим

$$\alpha(A_l(t)) = B_l(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_d). \quad (4.7)$$

Согласно (2.8) для заданной арифметической прогрессии $A_m(t)$ имеем

$$A_m(t) = \bigcup_{u=0}^{l/m-1} A_l(mu + t). \quad (4.8)$$

Докажем, что

$$\alpha(A_m(t)) = \bigcup_{u=0}^{l/m-1} \alpha(A_l(mu + t)). \quad (4.9)$$

По лемме 2 существует взаимно однозначное соответствие между множествами U и S_t , определенное в (4.3) и (4.4). Если при этом вектор $(s_1, s_2, \dots, s_d) \in S_t$ соответствует некоторому $u \in U$, то он удовлетворяет условию (4.5) и, следовательно, согласно (4.7) имеем

$$\alpha(A_l(mu + t)) = B_l(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_d). \quad (4.10)$$

Пусть теперь t_k есть остаток от деления t на $p_k^{m_k}$, т.е.

$$t_k = t \bmod p_k^{m_k}, \quad 0 \leq t_k < p_k^{m_k}. \quad (4.11)$$

Из (4.7) получим

$$\alpha(A_m(t)) = B_m(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_d).$$

Из (4.3) следует, что число p^{m_k} является делителем числа $s_k - t$. Поэтому в силу (4.11) оно также – делитель числа $s_k - t_k$. Итак, имеем

$$s_k = p_k^{m_k} v_k + t_k, \quad 0 \leq v_k < p_k^{l_k - m_k}, \quad 0 \leq t_k < p_k^{m_k}.$$

Таким образом, согласно (4.6) для p_k -обратных $\bar{s}_k$ чисел s_k имеем

$$\bar{s}_k = p_k^{l_k - m_k} \bar{t}_k + \bar{v}_k, \quad 0 \leq \bar{v}_k < p_k^{l_k - m_k}, \quad 0 \leq \bar{t}_k < p_k^{m_k},$$

где через $\bar{v}_k$ и $\bar{t}_k$ обозначены p_k -обратные чисел v_k и t_k соответственно. Отсюда для любого $u \in U$ можно определить вектор $(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_d)$ такой, что

$$p_k^{l_k - m_k} \bar{t}_k \leq \bar{s}_k < p_k^{l_k - m_k} (\bar{t}_k + 1). \quad (4.12)$$

Легко проверить, что это отображение определяет взаимно однозначное соответствие между U и множеством векторов $(\bar{s}_1, \bar{s}_2, \dots, \bar{s}_d)$, которые удовлетворяют (4.12). Следовательно, в силу (4.8), (4.10) и (4.2) получаем, что

$$\begin{aligned} \alpha(A_m(t)) &= B_m(\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_d) \\ &= \bigcup_{p_k^{l_k - m_k} \bar{t}_k \leq \bar{s}_k < p_k^{l_k - m_k} (\bar{t}_k + 1)} B_l(\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_d) = \bigcup_{u=0}^{l/m-1} \alpha(A_l(mu + t)). \end{aligned}$$

Итак, имеет место (4.9). Теперь возьмем произвольную прогрессию $A \in \mathcal{A}$. Тогда $A \in \mathcal{A}_l$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Так как (2.8) являются атомами для $\mathcal{A}_l$, то множество A представим в виде объединения попарно непересекающихся атомов, т.е.

$$A = \bigcup_{i \in I} A_l(i). \quad (4.13)$$

Определим

$$\alpha(A) = \bigcup_{i \in I} \alpha(A_l(i)). \quad (4.14)$$

Так как A принадлежит различным алгебрам $\mathcal{A}_l$, то существуют различные представления (4.13), соответствующие разным l . Тем не менее, используя (4.9), легко проверить, что правая часть (4.14) не зависит от представления (4.13). С другой стороны, α есть отображение, сохраняющее меру, так как согласно (4.7) $\delta(A_l(i)) = \lambda(\alpha(A_l(i))) = 1/l$. Итак, заключаем, что α является изоморфизмом $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, причем согласно (4.7) он сопоставляет прогрессии (2.8) прямоугольник (2.11). Доказательство леммы 2 завершено.

Для любого l -периодического множества целых чисел $A \in \mathcal{A}_l$ определим

$$\beta_l(A) = \bigcup_{k \in A} \left[\frac{k}{l}, \frac{k+1}{l} \right).$$

Легко проверить, что β_l определяет изоморфизм вероятностного пространства $(\mathcal{A}_l, \lambda)$ и $(\mathcal{I}_l, \delta)$. Более того,

$$\beta(A_{l/n}(t)) = I_l(n, t).$$

Отсюда получаем, что суперпозиция $\alpha \circ \beta_l^{-1}$ (α – изоморфизм из леммы 2) определяет изоморфизм $(\mathcal{I}_l, \lambda)$ и $(\mathcal{B}_l, \lambda)$. Точнее, имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 3. *Для любого $l \in \mathbb{N}$ существует взаимно однозначное отображение $\tau_l: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}^\infty$ такое, что*

- 1) *отображение τ_l сохраняет меру, т.е. $|\tau(A)| = |A|$ для любого измеримого по Лебегу множества $A \subset \mathbb{T}$;*
- 2) *отображение τ_l есть изоморфизм $(\mathbb{T}, \mathcal{I}_l, \lambda)$ и $(\mathbb{T}^\infty, \mathcal{B}_l, \lambda)$;*
- 3) *для любого множества $I_l(n, t)$ из (2.2) его образ $\tau_l(I_l(n, t))$ есть прямоугольник $B_m(i_1, \dots, i_d)$, где $m = l/n$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Существование отображения со свойствами 1) и 2) тривиально. Основным утверждением леммы является утверждение 3).

Для любого множества целых чисел $D \subset \mathbb{N}$ определим максимальную функцию

$$\mathcal{M}_D g(x) = \sup_{m \in D: x \in B_m(j_1, \dots, j_d)} \frac{1}{|B_m(j_1, \dots, j_d)|} \int_{B_m(j_1, \dots, j_d)} |g(t)| dt, \quad (4.15)$$

где $g \in L^1(\mathbb{T}^\infty)$. Отметим, что если l является кратным для всех чисел из D , то прямоугольники из (4.15) входят в $\mathcal{B}_l$. Из этого следует, что для условного ожидания $E^{\mathcal{B}_l} g(x)$ функции $g(x)$ относительно алгебры $\mathcal{B}_l$ имеем

$$\mathcal{M}_D g(x) = \mathcal{M}_D E^{\mathcal{B}_l} g(x). \quad (4.16)$$

Следующая теорема есть тривиальное следствие леммы 3. Она определяет эквивалентность максимальной функции Римана $\mathcal{R}_D^l f(x)$, определенной в (2.5), и максимальной функции $\mathcal{M}_{l/D} g(x)$, где l/D определено в (2.1).

ТЕОРЕМА 4. *Для любого $l \in \mathbb{N}$ существует отображение $\tau_l: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}^\infty$, сохраняющее меру, такое, что если $f(x) \in L^1(\mathbb{T})$, $g(x) = f(\tau_l^{-1}(x))$, то*

$$|\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_D^l f(x) > \lambda\}| = |\{x \in \mathbb{T}^\infty : \mathcal{M}_{l/D} g(x) > \lambda\}|, \quad \lambda > 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть D – множество индексов, а $\Phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ – возрастающая выпуклая функция. Тогда для любого $\lambda > 0$

$$\sup_{\|f\|_\Phi \leq 1} |\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_D f(x) > \lambda\}| = \sup_{B \subset D, l \in \mathbb{N}, \|g\|_\Phi \leq 1} |\{x \in \mathbb{T}^\infty : \mathcal{M}_{l/B} g(x) > \lambda\}|, \quad (4.17)$$

супремум в правой части этой формулы определяется по всем конечным множествам $B \subset D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $f \in L^\Phi(\mathbb{T})$. Если τ_l есть отображение из теоремы 4, то функции $g_l(x) = f(\tau_l^{-1}(x))$, $l = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условию

$$|\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_B^l f(x) > \lambda\}| = |\{x \in \mathbb{T}^\infty : \mathcal{M}_{l/B} g_l(x) > \lambda\}|$$

и $\|f\|_\Phi = \|g_l\|_\Phi$, так как τ_l – отображение, сохраняющее меру. Учитывая (2.6), получим

$$\begin{aligned} & |\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_D f(x) > \lambda\}| \\ & \leq \sup_{B \subset D, l \in \mathbb{N}} |\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_B^l f(x) > \lambda\}| = \sup_{B \subset D, l \in \mathbb{N}} |\{x \in \mathbb{T}^\infty : \mathcal{M}_{l/B} g_l(x) > \lambda\}|. \end{aligned}$$

Так как $f \in L^\Phi$, L^Φ – произвольное множество и $\|f\|_\Phi = \|g_l\|_\Phi$, то

$$\sup_{\|f\|_\Phi \leq 1} |\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_D f(x) > \lambda\}| \leq \sup_{B \subset D, l \in \mathbb{N}, \|g\|_\Phi \leq 1} |\{x \in \mathbb{T}^\infty : \mathcal{M}_{l/B} g(x) > \lambda\}|.$$

Теперь предположим, что $g \in L^\Phi(\mathbb{T}^\infty)$, $B \subset D$ – конечное множество и $l \geq 2$ – произвольное число. Согласно (4.16) существует $\mathcal{A}_l$ -измеримая функция g_l такая, что

$$\mathcal{M}_{l/B} g(x) = \mathcal{M}_{l/B} g_l(x). \quad (4.18)$$

По теореме 4 для $f_l(x) = g_l(\tau_l(x))$ имеем

$$|\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_B^l f_l(x) > \lambda\}| = |\{x \in \mathbb{T}^\infty : \mathcal{M}_{l/B} g_l(x) > \lambda\}|. \quad (4.19)$$

Из (2.7) получим, что

$$\mathcal{R}_B f_l(x) = \mathcal{R}_B^l f_l(x).$$

Отсюда в силу (4.18), (4.19) и соотношения $B \subset D$ следует, что

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{T}^\infty : \mathcal{M}_{l/B} g(x) > \lambda\}| &= |\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_B^l f_l(x) > \lambda\}| \\ &= |\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_B f_l(x) > \lambda\}| \leq |\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_D f_l(x) > \lambda\}|. \end{aligned}$$

Итак,

$$\sup_{B \subset D, l \in \mathbb{N}, \|g\|_\Phi \leq 1} |\{x \in \mathbb{T}^\infty : \mathcal{M}_{l/B} g(x) > \lambda\}| \leq \sup_{\|f\|_\Phi \leq 1} |\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_D f(x) > \lambda\}|.$$

§ 5. Лемма о покрытиях

Лемма о покрытиях, которую мы докажем в этом параграфе, понадобится нам в доказательстве теоремы 2. Рассмотрим функцию

$$\alpha(x) = \begin{cases} x^{x-1}, & \text{если } x > 1, \\ x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (5.1)$$

Это – непрерывная возрастающая функция на множестве $\mathbb{R}^+$ со значениями в $\mathbb{R}^+$. Легко видеть, что функция $\alpha^{-1}(x)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{-1}(x) \ln x}{\ln \ln x} = 1. \quad (5.2)$$

Определим функции

$$\Psi(x) = \int_0^{|x|} \alpha(t) dt, \quad \Phi(x) = \int_0^{|x|} \alpha^{-1}(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.3)$$

Это – дополняющие друг другу N -функции (см. определение в [11; гл. 1, § 2]). Проведя простые оценки, получаем

$$\frac{x \ln(x/2)}{2 \ln \ln(x/2)} < \Phi(x) < \frac{x \ln x}{\ln \ln x}, \quad x > \gamma, \quad (5.4)$$

где γ – абсолютная постоянная. Согласно неравенству Юнга (см. [11; формула (2.6)]) имеем

$$uv \leq \Phi(u) + \Psi(v), \quad u > 0, \quad v > 0. \quad (5.5)$$

В дальнейшем будем использовать обозначение $a \lesssim b$, если $a \leq cb$ при некоторой абсолютной постоянной $c > 0$. Следующая лемма является модификацией леммы 3 из работы [12].

ЛЕММА 4. Если $A_1, A_2, \dots, A_n$ и A – независимые множества в некотором вероятностном пространстве и $\sum_{k=1}^n |A_k| \leq 1/2$, то

$$\int_E \Psi \left(\frac{1}{3} \left(1 + \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{A_k}(x) \right) \right) dx \lesssim |E|, \quad (5.6)$$

где

$$E = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right). \quad (5.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Чтобы доказать (5.6), достаточно установить, что

$$m(\lambda) = \left| \left\{ x \in A : 1 + \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{A_k}(x) > \lambda \right\} \right| \lesssim |E| \left(\frac{2}{\lambda - 1} \right)^{(\lambda-1)/2}, \quad \lambda > 3.$$

Действительно, используя соотношение $\Psi'(x) = \alpha(x)$, $x > 0$, следующее из (5.3), с учетом (5.1) получим

$$\begin{aligned} \int_E \Psi \left(\frac{1}{3} \left(1 + \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{A_k}(x) \right) \right) dx &= \frac{1}{3} \int_0^\infty \Psi' \left(\frac{\lambda}{3} \right) m(\lambda) d\lambda \\ &= \frac{1}{3} \int_0^\infty \alpha \left(\frac{\lambda}{3} \right) m(\lambda) d\lambda \lesssim |A| \int_0^\infty \alpha \left(\frac{\lambda}{3} \right) \left(\frac{2}{\lambda} \right)^{\lambda/2} d\lambda \lesssim |A|. \end{aligned}$$

Обозначив $\delta_k = |A_k|$, имеем $\sum_{k=1}^n \delta_k < 1/2$. Далее, используя независимость указанных выше множеств, получим

$$\begin{aligned} |E| &= |A \cap A_1| + |A \cap (A_2 \setminus A_1)| + \dots + \left| A \cap \left(A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right) \right| \\ &= \delta_1 |A| + \delta_2 |A| (1 - |A_1|) + \dots + \delta_n |A| \left(1 - \left| \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right| \right) \\ &\geq \delta_1 |A| + \frac{\delta_2}{2} |A| + \dots + \frac{\delta_n}{2} |A| \geq \frac{1}{2} |A| (\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n). \end{aligned}$$

Предположим, что $\lambda > 3$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} m(\lambda) &= \sum_{k=[\lambda]}^n \sum_{i_1 < \dots < i_k} \left| A \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap \left(\bigcap_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} (A_j)^c \right) \right| \\ &= \sum_{k=[\lambda]}^n \sum_{i_1 < \dots < i_k} |A| |A_{i_1}| \dots |A_{i_k}| \prod_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} (1 - |A_j|) \\ &= |A| \sum_{k=[\lambda]}^n \sum_{i_1 < \dots < i_k} \delta_{i_1} \dots \delta_{i_k} \prod_{j \notin \{i_1, \dots, i_k\}} (1 - \delta_j) \\ &\leq |A| \sum_{k=[\lambda]}^n \sum_{i_1 < \dots < i_k} \delta_{i_1} \dots \delta_{i_k} \leq |A| \sum_{k=[\lambda]}^{\infty} \frac{(\delta_1 + \dots + \delta_n)^k}{k!} \\ &< |A| (\delta_1 + \dots + \delta_n) \sum_{k=[\lambda]}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq 2|E| \sum_{k=[\lambda]}^{\infty} \frac{1}{[k/2]! ([k/2] + 1) \dots k} \\ &\leq 2|E| \left(\frac{2}{\lambda - 1} \right)^{(\lambda-1)/2} \sum_{k=[\lambda]}^{\infty} \frac{1}{[k/2]!} \lesssim |E| \left(\frac{2}{\lambda - 1} \right)^{(\lambda-1)/2}. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Для любого множества индексов $S \subset \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{R}(S)$ алгебру, порожденную из прямоугольников (2.11) при $l_i = 0$, $i \notin S$. Для любого множества $R \subset \mathcal{R}$ определим его спектр $\text{sp}(R)$ как минимальное множество индексов S , для которого $R \subset \mathcal{R}(S)$. Это означает, что

$$\text{sp}(R) = \bigcap_{S: R \in \mathcal{R}(S)} S. \quad (5.8)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} &\text{если } \text{sp}(B_1), \dots, \text{sp}(B_k) \text{ попарно непересекаются,} \\ &\text{то } B_1, \dots, B_k \text{ — независимые множества,} \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\text{если } \text{sp}(R) \subseteq \text{sp}(Q) \text{ и } Q \not\subseteq R, \text{ то } R \cap Q = \emptyset. \quad (5.10)$$

Обозначим

$$l = l_d = p_1 p_2 \dots p_d, \quad (5.11)$$

$$E_d = \{m \in \mathbb{N} : m = p_\nu p_\mu p_{\mu+1} \dots p_d, \ 1 \leq \nu < \mu\}. \quad (5.12)$$

Пусть $\mathcal{F}_d$ – семейство всех прямоугольников из $\mathcal{B}_l$,

$$\mathcal{F}_d = \{B_m(j_1, \dots, j_d) : m \in E_d\}. \quad (5.13)$$

Согласно (5.13) каждый прямоугольник $B \in \mathcal{F}_d$ может быть задан так:

$$B = \left\{ x \in \mathbb{T}^\infty : \frac{j_k}{p_k} \leq x_k < \frac{j_k + 1}{p_k}, \quad k \in \{\nu\} \cup \{\mu, \mu + 1, \dots, d\} \right\}, \quad (5.14)$$

где $0 \leq j_k < p_k$, $k = 1, 2, \dots$. В случае $\mu = d + 1$ будем полагать, что $\{\mu, \mu + 1, \dots, d\} = \emptyset$. Так как μ и ν из (5.14) однозначно определены для данного $B \in \mathcal{F}_d$, то иногда будем использовать обозначения $\mu(B)$ и $\nu(B)$ для этих чисел. Определим *базис* $\text{bs}(B)$ и *хвост* $\text{tl}(B)$ прямоугольника B следующими формулами:

$$\text{bs}(B) = \left\{ x \in \mathbb{T}^\infty : \frac{j_k}{p_k} \leq x_k < \frac{j_k + 1}{p_k}, \quad k \in \{\mu, \mu + 1, \dots, d\} \right\}, \quad (5.15)$$

$$\text{tl}(B) = \left\{ x \in \mathbb{T}^\infty : \frac{j_\nu}{p_\nu} \leq x_\nu < \frac{j_\nu + 1}{p_\nu} \right\}. \quad (5.16)$$

Очевидно, что для любого $B \in \mathcal{F}_d$ имеем

$$B = \text{bs}(B) \cap \text{tl}(B). \quad (5.17)$$

Заметим, что если $A, B \in \mathcal{F}_d$, то

$$\text{bs}(A) \cap \text{bs}(B) \neq \emptyset \quad \implies \quad \text{bs}(A) \subseteq \text{bs}(B) \vee \text{bs}(B) \subseteq \text{bs}(A), \quad (5.18)$$

$$\text{bs}(A) \subset \text{bs}(B) \quad \implies \quad \mu(A) < \mu(B), \quad (5.19)$$

$$\text{bs}(A) \subset \text{bs}(B), \quad A \not\subset B \quad \implies \quad \text{tl}(A) \neq \text{tl}(B). \quad (5.20)$$

ЛЕММА 5. Любое множество прямоугольников $\Theta = \{A_\alpha\} \subset \mathcal{F}_d$ содержит конечное подмножество $\tilde{\Theta} = \{\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_m\}$ такое, что

$$\bigcup_{j=1}^m \tilde{A}_j = \bigcup_{\alpha} A_\alpha, \quad (5.21)$$

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} \Psi \left(\frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \mathbb{I}_{\tilde{A}_j}(x) \right) dx \lesssim 1. \quad (5.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{F}_d$ – конечно и $\Theta \subset \mathcal{F}_d$, то можно предположить, что $\Theta = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ и $\mu(A_i) \geq \mu(A_{i+1})$, $i \geq 1$. Семейство $\tilde{\Theta}$ выбирается из множества $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ следующим образом. Выберем сначала $\tilde{A}_1 = A_1$. Если множества $\tilde{A}_1 = A_{l_1}, \dots, \tilde{A}_k = A_{l_{k-1}}$, $l_1 < \dots < l_{k-1}$, уже определены, то выберем в качестве $\tilde{A}_k$ первое множество в последовательности $A_{l_{k-1}+1}, \dots, A_n$, удовлетворяющее условиям

$$\tilde{A}_k \not\subset \tilde{A}_1 \cup \dots \cup \tilde{A}_{k-1}, \quad (5.23)$$

$$\left| \bigcup_{j \leq k, \text{tl}(\tilde{A}_j) \cap \text{bs}(\tilde{A}_k) \neq \emptyset, \text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq \text{bs}(\tilde{A}_k)} \text{tl}(\tilde{A}_j) \right| < \frac{3}{4}. \quad (5.24)$$

Этот процесс порождает некоторую последовательность $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_m$. Согласно (5.24) для любого фиксированного k имеем

$$\left| \bigcup_{1 \leq j \leq m, \text{tl}(\tilde{A}_j) \cap \text{bs}(\tilde{A}_k) \neq \emptyset, \text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq \text{bs}(\tilde{A}_k)} \text{tl}(\tilde{A}_j) \right| < \frac{3}{4}. \quad (5.25)$$

Рассмотрим некоторый базис $U = \text{bs}(\tilde{A}_k)$, удовлетворяющий неравенству

$$\left| \bigcup_{\text{tl}(\tilde{A}_j) \cap U \neq \emptyset, \text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq U} \text{tl}(\tilde{A}_j) \right| \geq \frac{1}{4}. \quad (5.26)$$

Легко видеть, что из условий

$$\text{tl}(\tilde{A}_j) \cap U \neq \emptyset, \quad \text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq U$$

следует, что $\nu(\tilde{A}_j) < \mu(\tilde{A}_k)$. Таким образом, множества U и

$$\bigcup_{\text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq U} \text{tl}(\tilde{A}_j)$$

имеют непересекающиеся спектры и, следовательно, в силу (5.9) они независимы. Далее, используя (5.26), заключаем, что

$$\begin{aligned} \left| U \cap \left(\bigcup_{j=1}^m \tilde{A}_j \right) \right| &\geq \left| U \cap \left(\bigcup_{\text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq U} \tilde{A}_j \right) \right| \\ &= \left| U \cap \left(\bigcup_{\text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq U} \text{tl}(\tilde{A}_j) \right) \right| = |U| \left| \bigcup_{\text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq U} \text{tl}(\tilde{A}_j) \right| \geq \frac{1}{4} |U|. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Обозначим через $U_1, U_2, \dots, U_\gamma$ множество всех разных базисов $U = \text{bs}(\tilde{A}_k)$, удовлетворяющих (5.26). Очевидно, они попарно не пересекаются. Отсюда, используя (5.27), получаем

$$\left| \bigcup_{i=1}^{\gamma} U_i \right| \leq 4 \left| \bigcup_{j=1}^m \tilde{A}_j \right|. \quad (5.28)$$

Теперь предположим, что A_t есть произвольное множество, которое не входит в совокупность $\{\tilde{A}_k\}$. Имеем $l_{k-1} < t < l_k$ для некоторого k . При описанном выше процессе выбора множеств выполняется одно из следующих соотношений:

$$A_t \subset \bigcup_{i=1}^{k-1} \tilde{A}_i \quad (5.29)$$

или

$$\left| \text{tl}(\tilde{A}_t) \cup \left(\bigcup_{j < k, \text{tl}(\tilde{A}_j) \cap \text{bs}(\tilde{A}_t) \neq \emptyset, \text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq \text{bs}(\tilde{A}_t)} \text{tl}(\tilde{A}_j) \right) \right| \geq \frac{3}{4}.$$

Так как $\text{tl}(\tilde{A}_t) \leq \frac{1}{2}$, то мы получим, что

$$\left| \bigcup_{j < k, \text{tl}(\tilde{A}_j) \cap \text{bs}(\tilde{A}_t) \neq \emptyset, \text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq \text{bs}(\tilde{A}_t)} \text{tl}(\tilde{A}_j) \right| \geq \frac{1}{4}.$$

Это неравенство означает, что $\text{bs}(A_t) \subseteq U = \text{bs}(\tilde{A}_{k-1})$, где U удовлетворяет (5.26). Итак, имеем (5.29) или

$$A_t \subset \bigcup_{i=1}^{\gamma} U_i.$$

Следовательно, используя (5.28), получим соотношение

$$\left| \bigcup_t A_t \right| \leq \left| \bigcup_{j=1}^m \tilde{A}_j \right| + \left| \bigcup_{i=1}^{\gamma} U_i \right| \leq 5 \left| \bigcup_{j=1}^m \tilde{A}_j \right|,$$

которое дает (5.21). Чтобы доказать (5.22), введем следующие обозначения:

$$B_k = \text{bs}(\tilde{A}_k) \setminus \left(\bigcup_{\text{bs}(\tilde{A}_i) \subset \text{bs}(\tilde{A}_k)} \text{bs}(\tilde{A}_i) \right), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (5.30)$$

Очевидно, что $B_1, B_2, \dots, B_m$ попарно не пересекаются. Отметим, что некоторые из них могут быть пустыми. Воспользуясь (5.17), получим

$$\bigcup_{k=1}^m B_k = \bigcup_{k=1}^m \text{bs}(\tilde{A}_k) \supset \bigcup_{k=1}^m \tilde{A}_k.$$

Таким образом, чтобы вывести (5.22), достаточно доказать, что

$$I_k = \int_{B_k} \Psi \left(\frac{1}{3} \sum_{j=1}^m \mathbb{I}_{\tilde{A}_j}(x) \right) dx \lesssim |B_k|. \quad (5.31)$$

Покажем, что

$$I_k = \int_{B_k} \Psi \left(\frac{1}{3} \sum_{\text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq \text{bs}(\tilde{A}_k)} \mathbb{I}_{\tilde{A}_j}(x) \right) dx. \quad (5.32)$$

Действительно, согласно (5.18) каждый прямоугольник $\tilde{A}_j$ удовлетворяет одному из условий

$$\text{bs}(\tilde{A}_j) \cap \text{bs}(\tilde{A}_k) = \emptyset, \quad (5.33)$$

$$\text{bs}(\tilde{A}_j) \subset \text{bs}(\tilde{A}_k), \quad (5.34)$$

$$\text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq \text{bs}(\tilde{A}_k). \quad (5.35)$$

В случае (5.33) или (5.34), используя (5.30), имеем $\tilde{A}_j \cap B_k = \emptyset$. Поэтому интеграл (5.31) зависит только от множеств $\tilde{A}_j$, удовлетворяющих условию (5.35), которое дает (5.32). Если $\text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq \text{bs}(\tilde{A}_k)$, то согласно (5.30) имеем

$\text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq B_k$. Отсюда в силу условия $\tilde{A}_j = \text{bs}(\tilde{A}_j) \cap \text{tl}(\tilde{A}_j)$ (см. (5.17)) из (5.32) мы получим, что

$$I_k = \int_{B_k} \Psi \left(\frac{1}{3} \sum_{\text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq \text{bs}(\tilde{A}_k)} \mathbb{I}_{\text{tl}(\tilde{A}_j)}(x) \right) dx.$$

Теперь обозначим

$$C_\nu = \bigcup_{j: \nu(\tilde{A}_j) = \nu, \text{tl}(\tilde{A}_j) \cap \text{bs}(\tilde{A}_k) \neq \emptyset, \text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq \text{bs}(\tilde{A}_k)} \text{tl}(\tilde{A}_j) \quad (5.36)$$

и рассмотрим все непустые множества $C_{\nu_1}, C_{\nu_2}, \dots, C_{\nu_p}$ с номерами $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_p$. Из (5.25) следует, что

$$\left| \bigcup_{i=1}^p C_{\nu_i} \right| < \frac{3}{4}. \quad (5.37)$$

Заметим, что если множества $\tilde{A}_j$ и $\tilde{A}_i$ удовлетворяют соотношениям

$$\text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq \text{bs}(\tilde{A}_i), \quad \nu(\tilde{A}_j) \geq \mu(\tilde{A}_i), \quad (5.38)$$

то

$$\text{tl}(\tilde{A}_j) \cap \text{bs}(\tilde{A}_i) = \emptyset. \quad (5.39)$$

Действительно, из (5.38) и определения множества $\mathcal{F}_d$ в (5.13) следует, что

$$\text{sp}(\tilde{A}_j) \subseteq \{\nu(\tilde{A}_j), \nu(\tilde{A}_j) + 1, \dots, d\} \subseteq \{\mu(\tilde{A}_i), \mu(\tilde{A}_i) + 1, \dots, d\} = \text{sp}(\text{bs}(\tilde{A}_i)).$$

Отсюда, используя (5.10), имеем $\tilde{A}_j \supseteq \text{bs}(\tilde{A}_i) \supset \tilde{A}_i$ или $\tilde{A}_j \cap \text{bs}(\tilde{A}_i) = \emptyset$. Первое включение невозможно в силу (5.23). Итак, имеем $\tilde{A}_j \cap \text{bs}(\tilde{A}_i) = \emptyset$. Следовательно, ввиду условий $\tilde{A}_j = \text{bs}(\tilde{A}_j) \cap \text{tl}(\tilde{A}_j)$ и $\text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq \text{bs}(\tilde{A}_i)$ (см. (5.38)) получим (5.39). Комбинируя (5.39) с (5.36), имеем

$$C_{\nu_i} \cap \text{bs}(\tilde{A}_i) = \emptyset$$

при условии, что

$$\text{bs}(\tilde{A}_j) \supseteq \text{bs}(\tilde{A}_k) \supseteq \text{bs}(\tilde{A}_i), \quad \mu(\tilde{A}_i) \leq \nu_j, \quad 1 \leq i \leq j.$$

Следовательно, согласно (5.30)

$$B_k \cap \left(C_{\nu_j} \setminus \bigcup_{s=1}^{j-1} C_{\nu_s} \right) = \left(\text{bs}(\tilde{A}_k) \setminus \bigcup_{\text{bs}(\tilde{A}_i) \subset \text{bs}(\tilde{A}_k), \mu(\tilde{A}_i) > \nu_j} \text{bs}(\tilde{A}_i) \right) \cap \left(C_{\nu_j} \setminus \bigcup_{s=1}^{j-1} C_{\nu_s} \right).$$

Так как $\text{sp}(C_{\nu_s}) = \nu_s$, $\nu_p < \nu_{p-1} < \dots < \nu_1$ и $\text{sp}(\text{bs}(\tilde{A}_i)) = \{\mu(\tilde{A}_i), \mu(\tilde{A}_i) + 1, \dots, d\}$ (см. (5.15)), то спектр любого множества из правой части этого равенства входит в $\{\nu_j, \nu_j + 1, \dots, d\}$. Итак, имеем

$$\text{sp} \left(B_k \cap \left(C_{\nu_j} \setminus \bigcup_{s=1}^{j-1} C_{\nu_s} \right) \right) \subset \{\nu_j, \nu_j + 1, \dots, d\}.$$

Таким образом, множества

$$B_k \cap \left(C_{\nu_i} \setminus \bigcup_{s=1}^{i-1} C_{\nu_s} \right), C_{\nu_{i+1}}, \dots, C_{\nu_p}$$

имеют непересекающиеся спектры и они независимы с учетом (5.9). Согласно (5.37) эти множества удовлетворяют условиям леммы 4. Итак, применив (5.6), получим

$$\int_{B_k \cap (C_{\nu_i} \setminus \bigcup_{s=1}^{i-1} C_{\nu_s})} \Psi \left(\frac{1}{3} \left(1 + \sum_{t=i+1}^p \mathbb{I}_{C_{\nu_t}}(x) \right) \right) dx \lesssim \left| B_k \cap \left(C_{\nu_i} \setminus \bigcup_{s=1}^{i-1} C_{\nu_s} \right) \right|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{B_k} \Psi \left(\frac{1}{3} \sum_{i=1}^p \mathbb{I}_{C_{\nu_i}}(x) \right) dx \\ &= \sum_{i=1}^p \int_{B_k \cap (C_{\nu_i} \setminus \bigcup_{s=1}^{i-1} C_{\nu_s})} \Psi \left(\frac{1}{3} \left(1 + \sum_{t=i+1}^p \mathbb{I}_{C_{\nu_t}}(x) \right) \right) dx \\ &\lesssim \sum_{i=1}^p \left| B_k \cap \left(C_{\nu_i} \setminus \bigcup_{s=1}^{i-1} C_{\nu_s} \right) \right| \leq |B_k|, \end{aligned}$$

где $C_{\nu_0} = \emptyset$. Лемма доказана.

В лемме 6 множество $E \subset Z$ – это множество, определенное в (1.7), а $\mathcal{M}_{l/E}f(x)$ – максимальная функция из (4.15).

ЛЕММА 6. Если $\Phi(t)$ – функция из (5.3), то

$$|\{x \in \mathbb{T}^\infty : \mathcal{M}_{l/E}f(x) > \lambda\}| \lesssim \frac{1}{\lambda} \left(1 + \int_{\mathbb{T}^\infty} \Phi(f(t)) dt \right), \quad \lambda > 0, \quad (5.40)$$

для любой функции $f \in L^\Phi(\mathbb{T}^\infty)$ и $l \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что l имеет факторизацию (5.11). Из (5.12) и (1.7) получим, что $l/E = E_d$. Следовательно, учитывая (5.13), получим

$$\mathcal{M}_{l/E}f(x) = \sup_{F \in \mathcal{F}_d: F \ni x} \frac{1}{|F|} \int_F |f(t)| dt, \quad x \in \mathbb{T}^\infty, \quad f \in L^1(\mathbb{T}^\infty).$$

Таким образом, для любого $\lambda > 0$ существует совокупность $F = \{F_k\}$ из $\mathcal{F}_d$ такая, что

$$\{x \in \mathbb{T}^\infty : \mathcal{M}_{l/E}f(x) > \lambda\} = \bigcup_k F_k, \quad \frac{1}{|F_k|} \int_{F_k} f(t) dt > \lambda.$$

Согласно лемме 5 можно выбрать $\{\tilde{F}_k\}$ так, что

$$\bigcup_k \tilde{F}_k = \bigcup_k F_k, \quad (5.41)$$

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} \Psi \left(\sum_k \mathbb{I}_{\tilde{F}_k}(x) \right) dx \lesssim 1. \quad (5.42)$$

Отсюда, используя (5.41), (5.42) и (5.5), получим

$$\begin{aligned} & |\{x \in \mathbb{T}^\infty : \mathcal{M}_{l/E} f(x) > \lambda\}| \\ &= \left| \bigcup_k F_k \right| \leq \sum_k |\tilde{F}_k| \leq \sum_k \frac{1}{\lambda} \int_{\tilde{F}_k} f(t) dt = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{T}^\infty} f(t) \sum_k \mathbb{I}_{\tilde{F}_k}(t) dt \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \left(\int_{\mathbb{T}^\infty} \Phi(f(x)) dx + \int_{\mathbb{T}^\infty} \Psi \left(\sum_k \mathbb{I}_{\tilde{F}_k}(x) \right) dx \right) \lesssim \frac{1}{\lambda} \left(1 + \int_{\mathbb{T}^\infty} \Phi(f(t)) dt \right). \end{aligned}$$

§ 6. Доказательства теорем

Избегая повторений одних и тех же аргументов в доказательствах теорем, воспользуемся известным принципом максимальной функции Е. М. Стейна (см. [13] или [14; гл. X, § 3.6]). Рассмотрим последовательность операторов свертки

$$T_j = f * \mu_j : L^1(\mathbb{T}) \rightarrow \{\text{измеримые функции на } \mathbb{R}\},$$

где μ_j – конечные положительные меры на $\mathbb{T}$.

ЛЕММА 7 (Е. М. Стейн). Пусть $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ – выпуклая возрастающая функция такая, что функция $\Phi(\sqrt{x})$ вогнута. Предположим, что для любой $f \in L^\Phi$ выполнено условие

$$Mf(x) = \sup_j |T_j f(x)| < \infty$$

на некотором множестве положительной меры. Тогда

$$|\{x \in \mathbb{R} : Mf(x) > \lambda\}| \leq \int_{\mathbb{R}} \Phi\left(\frac{c|f|}{\lambda}\right) dx, \quad \lambda > 0,$$

где $c > 0$ – некоторая постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Предположим, что $B \subset E$ – произвольное конечное множество. Если l – общее кратное чисел из B , то $l/B \subset l/E$ и, следовательно, согласно (4.15) получаем, что

$$\mathcal{M}_{l/B} f(x) \leq \mathcal{M}_{l/E} f(x).$$

Итак, в силу (5.40) имеем

$$|\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{M}_{l/B} f(x) > \lambda\}| < \frac{c}{\lambda} \left(1 + \int_{\mathbb{T}} \Phi(f(t)) dt \right)$$

для любого конечного множества $B \subset E$ и любой функции $f \in L^\Phi$. Комбинируя это со следствием, сформулированным после теоремы 4, получаем, что

$$|\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_E f(x) > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda} \left(1 + \int_{\mathbb{T}^\infty} \Phi(f(t)) dt \right), \quad (6.1)$$

где $c > 0$ – некоторая абсолютная постоянная. Далее, каждое $B_m f(x)$ есть оператор свертки с ядром

$$\mu_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \delta_{i/m},$$

где δ_a – единичная мера (функция Дирака) в точке a . Легко проверить также, что Φ удовлетворяет условиям леммы Стейна. Следовательно, применив принцип Стейна, из (6.1) получим (1.11). Теорема доказана.

Предположим, что $f(x) \in L^1(\mathbb{T})$, D – конечное множество натуральных чисел, а l – общее кратное чисел из D . Рассмотрим условное ожидание $E^{\mathcal{I}_l} f(x)$ функции $f(x)$ относительно алгебры $\mathcal{I}_l$, определенной в (2.2). Для любой выпуклой функции $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ имеем

$$\|E^{\mathcal{I}_l} f(x)\|_{\varphi} \leq \|f\|_{\varphi}. \quad (6.2)$$

Чтобы доказать расходимость всюду в теоремах 1 и 3, воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 8. Пусть D – множество индексов и $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ выпуклая возрастающая функция. Если существует функция $f \in L^{\varphi}$ такая, что $\mathcal{R}_D f(x) = \infty$ на множестве положительной меры, то можно найти $\tilde{f} \in L^{\varphi}$, для которой $\mathcal{R}_D \tilde{f}(x) = \infty$ всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторой функции $f \geq 0$ выполнено условие

$$\mathcal{R}_D f(x) = \infty, \quad x \in E,$$

$|E| > 0$. Согласно лемме Бореля–Кантелли (см. [14; гл. 10, § 2.1] или [5; гл. XIII, 1.24]) существует последовательность $x_k \in \mathbb{T}$ такая, что $\sum_k \mathbb{I}_{E+x_k}(x) = \infty$ п.в. Обозначив $\tilde{f}(x) = \sum_k 2^{-k} f(x + x_k)$, получим, что $\tilde{f} \in L^{\varphi}$ и

$$\mathcal{R}_D \tilde{f}(x) = \infty \text{ п.в.}$$

Итак, согласно (2.6) существуют последовательность конечных множеств $D_1 \subset D_2 \subset \dots$, для которых $\bigcup_n D_n = D$, и натуральные числа l_n , делящиеся на числа из D_n , такие, что

$$|\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_{D_n}^{l_n} \tilde{f}(x) > n^3\}| > 1 - \frac{1}{\varphi(n^3)}.$$

Так как $\mathcal{R}_{D_n}^{l_n} \tilde{f}(x)$ является $\mathcal{I}_{l_n}$ -измеримым, то таким же будет и множество

$$A_n = \{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_{D_n}^{l_n} \tilde{f}(x) > n^3\}.$$

Итак, получаем, что

$$|A_n^c| \leq \frac{1}{\varphi(n^3)}, \quad \mathcal{R}_{D_n}^{l_n} \mathbb{I}_{A_n^c}(x) = 1, \quad x \in A_n^c.$$

Отсюда, обозначив

$$f_n(x) = \tilde{f}(x) + n^3 \cdot \mathbb{I}_{A_n^c}(x),$$

имеем

$$\|f_n\|_{\varphi} \leq \|f_n\|_{\varphi} + \|n^3 \cdot \mathbb{I}_{A_n^c}\|_{\varphi} = \|f_n\|_{\varphi} + 1 = \|\tilde{f}\|_{\varphi} + 1, \quad \mathcal{R}_{D_n}^{l_n} f_n(x) > n^3, \quad x \in \mathbb{T}^{\infty}.$$

Теперь обозначим

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot E^{\mathcal{I}_{l_n}} f_n(x).$$

Согласно (6.2) имеем

$$\|g\|_{\varphi} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \|E^{\mathcal{I}_{l_n}} f_n\|_{\varphi} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \|f_n\|_{\varphi} < \infty$$

и, используя (2.7), заключаем, что

$$\mathcal{R}_D g(x) \geq \mathcal{R}_{D_n} g(x) \geq \frac{1}{n^2} \mathcal{R}_{D_n} E^{\mathcal{I}_{l_n}} f_n(x) = \frac{1}{n^2} \mathcal{R}_{D_n}^{\mathcal{I}_{l_n}} f_n(x) > n, \quad x \in \mathbb{T}^{\infty},$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, т.е. $\mathcal{R}_D g(x) = \infty$ всюду на $\mathbb{T}$. Доказательство завершено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Рассмотрим прямоугольники

$$B_i^k = \left\{ x \in \mathbb{T}^{\infty} : \frac{i}{p_k} \leq x_k < \frac{i+1}{p_k} \right\}, \quad i = 0, 1, \dots, p_k - 1.$$

Так как $\text{sp}(B_i^k) = \{k\}$, то $B_i^k \in \mathcal{F}_{2d}$, $1 \leq k \leq 2d$. Обозначим

$$G_k = \bigcup_{0 \leq i < [p_k/d]} B_i^k, \quad k = 1, 2, \dots, 2d, \quad (6.3)$$

$$G = \bigcup_{k=d+1}^{2d} G_k, \quad C = \bigcap_{k=d+1}^{2d} G_k. \quad (6.4)$$

Очевидно, что $p_{d+1} > 2d$. Так как количество множеств B_i^k в объединении (6.3) равно $[p_k/d]$ и $|B_i^k| = 1/p_k$, то

$$\frac{1}{d} \geq |G_k| = \left[\frac{p_k}{d} \right] \frac{1}{p_k} > \frac{1}{d} \left(1 - \frac{d}{p_k} \right) > \frac{1}{2d}, \quad k > d. \quad (6.5)$$

В силу независимости множеств G_k имеем

$$|G| = \left| \bigcap_{k=d+1}^{2d} G_k \right| = 1 - \prod_{k=d+1}^{2d} (1 - |G_k|) > 1 - (1 - (2d)^{-1})^d > 1 - \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{3}, \quad (6.6)$$

$$|C| = \prod_{k=d+1}^{2d} |G_k| \leq d^{-d}. \quad (6.7)$$

Выберем произвольное $x \in G$. Тогда $x \in G_k$ для некоторого k и, следовательно, $x \in B_i^k$ при некоторых $0 \leq i < [p_k/d]$ и $d < k \leq 2d$. С другой стороны, используя (6.5) и независимость множеств G_j , $d < j \leq 2d$, $j \neq k$, и B_i^k , получаем, что

$$|C \cap B_i^k| = \left| \left(\bigcap_{d < j \leq 2d, j \neq k} G_j \right) \cap B_i^k \right| = |B_i^k| \prod_{d < j \leq 2d, j \neq k} |G_j| > \frac{|B_i^k|}{(2d)^{d-1}}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{|B_i^k|} \int_{B_i^k} \mathbb{I}_C(x) dx > (2d)^{1-d}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{M}_{l_{2d}/E} \mathbb{I}_C(x) > (2d)^{1-d}, \quad x \in G, \quad (6.8)$$

где число l_{2d} определено в (5.11). Учитывая (1.12) и (6.7), имеем

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} \varphi((2d)^{d-1} \mathbb{I}_C(x)) dx = \varphi((2d)^{d-1}) |C| < d^{-d} \varphi((2d)^{d-1}) \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 0.$$

Итак, можно найти последовательность $c_d \rightarrow \infty$ такую, что функция

$$g_d(x) = c_d (2d)^{d-1} \mathbb{I}_C(x) \quad (6.9)$$

удовлетворяет неравенству

$$\int_{\mathbb{T}^\infty} \varphi(g_d(x)) dx \leq 1.$$

Из (6.9) вытекает, что

$$\mathcal{M}_{l_{2d}/E} g_d(x) = c_d (2d)^{d-1} \mathcal{M}_{l_{2d}/E} \mathbb{I}_C(x),$$

и, следовательно, используя (6.6) и (6.8), получаем, что

$$|\{x \in \mathbb{T}^\infty : \mathcal{M}_{l_{2d}/E} g_d(x) > c_d\}| = |\{x \in \mathbb{T}^\infty : \mathcal{M}_{l_{2d}/E} \mathbb{I}_C(x) > (2d)^{1-d}\}| \geq |G| > \frac{1}{3}.$$

В силу (4.17) можно найти последовательность функций f_d на $\mathbb{T}$, удовлетворяющих условию

$$\|f_d\|_\Phi = \|g_d\|_\Phi \leq \int_{\mathbb{T}^\infty} \varphi(g_d(x)) dx \leq 1,$$

таких, что

$$|\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_E f_d(x) > c_d\}| > \frac{1}{3}.$$

Итак, согласно принципу Стейна существует функция $f \in L^\Phi(\mathbb{T})$, для которой $\mathcal{R}_E f(x) = \infty$ п.в. Чтобы получить расходимость всюду, остается использовать лемму 8. Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 1 основано на некоторых результатах теории дифференцирования интегралов в $\mathbb{R}^n$. По известной теореме Иессена–Марцинкевича–Зигмунда п.в.

$$\lim_{\text{diam } R \rightarrow 0, x \in R} \frac{1}{|R|} \int_R f(t) dt = f(x) \quad (6.10)$$

для любой $f \in L \log^{n-1} L(\mathbb{R}^n)$, где R – это прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат (см. [15] или [16; гл. 2]). С другой стороны, С. Сакс в [17] доказал, что в этой теореме класс Орлича $L \log^{d-1} L$ оптимален. Безусловно, соотношение (6.10) верно также для прямоугольников (2.11)

с фиксированным d , а не только для всех прямоугольников в $\mathbb{R}^n$. Что касается теоремы расходимости, то ее доказательство нетривиально. Однако имеется обобщение теоремы Сакса, полученное А. Стоколосом [18] (см. также [19]). Согласно этому результату если φ удовлетворяет условию (1.12), то существует функция $f \in L^\varphi(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\lim_{\text{diam } R \rightarrow 0, x \in R} \frac{1}{|R|} \int_R f(t) dt = \infty \quad (6.11)$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$, где R – прямоугольники вида (2.11) с фиксированным d . Более того, можно взять любые натуральные числа, которые больше двух, вместо простых чисел $p_1, p_2, \dots, p_d$. Наконец, заметим, что все эти теоремы можно также сформулировать в терминах $\mathbb{T}^\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Предположим, что D – множество всех целых чисел вида

$$p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_d^{m_d}, \quad m_k \in \mathbb{Z}^+, \quad k = 1, 2, \dots, d.$$

Рассмотрим последовательности подмножеств $D_n \subset D$, задаваемые так:

$$D_n = \{m = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_d^{m_d} : 0 \leq m_k \leq n, k = 1, 2, \dots, d\}.$$

Обозначим

$$l_n = p_1^n p_2^n \cdots p_d^n.$$

Имеем $\bigcup_n D_n = D$, $l_n/D_n = D_n$. Следовательно, если функция $f \in L^\varphi(\mathbb{T}^\infty)$ удовлетворяет условию (6.11), то п.в. на $\mathbb{T}^\infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{M}_{l_n/D_n} f(x) = \infty.$$

Используя (4.17), получаем, что $\mathcal{R}_D g_n(x) \rightarrow \infty$ п.в. для некоторой последовательности функций g_n , удовлетворяющей условию $\|g_n\|_\Phi \leq 1$. Применяя принцип Стейна, найдем функцию g , для которой $\mathcal{R}_D g(x) = \infty$ п.в., и тогда существование функции, для которой суммы Римана всюду расходятся, будет следовать из леммы 8.

§ 7. Теорема Рудина и свойства подметания

В этом параграфе мы установим эквивалентность сильно подметающего и δ -подметающего свойств последовательностей операторов, что, по мнению автора, является интересным с учетом результатов работ [20], [21]. Далее мы выведем из теоремы 4 теорему Рудина в общей постановке.

Пусть (X, m) – вероятностное пространство. Рассмотрим линейные операторы

$$T: L^1(X, m) \rightarrow \{\text{измеримые функции на } X\}. \quad (7.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность линейных операторов T_n называется *сильно подметающей*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует множество E , для которого $mE < \varepsilon$, такое, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} T_n \mathbb{I}_E(x) = 1$ п.в. и $\liminf_{n \rightarrow \infty} T_n \mathbb{I}_E(x) = 0$ п.в.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $0 < \delta \leq 1$. Последовательность линейных операторов T_n называется δ -подметающей, если для заданного $\varepsilon > 0$ существует множество $E \subset X$, для которого $mE < \varepsilon$, такое, что $\limsup_{n \rightarrow \infty} T_n \mathbb{I}_E(x) \geq \delta$ п.в.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $0 < \delta \leq 1$. Последовательность линейных операторов T_n называется слабо δ -подметающей, если для данного $r > 0$ существует множество E , для которого

$$m\{x \in X : \sup_{n \in \mathbb{N}} T_n \mathbb{I}_E(x) \geq \delta\} > rmE.$$

Оказывается, что эти определения эквивалентны для последовательностей линейных операторов, имеющих следующие свойства:

- 1) если $f \geq 0$, то $Tf \geq 0$;
- 2) $T(\mathbb{I}_X) = 1$;
- 3) для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что если $E \subset X$ и $m(E) < \delta$, то $m\{x \in X : T\mathbb{I}_E(x) > \varepsilon\} < \varepsilon$.

ТЕОРЕМА 5. Если последовательность линейных операторов $\{T_n\}$, удовлетворяющая условиям 1)–3), δ -подметающая для любого $0 < \delta < 1$, то она сильно подметающая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\{T_n\}$ удовлетворяет условиям теоремы. Используя стандартное рассуждение, можно легко выбрать последовательность целых чисел $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ и измеримые множества $E_k \subset X$ такие, что

$$mE_k < \varepsilon 2^{-k}, \quad (7.2)$$

$$m\left\{x \in X; \sup_{n_{k-1} \leq m \leq n_k} T_m \mathbb{I}_{E_k}(x) > 1 - 2^{-k}\right\} > 1 - 2^{-k}, \quad (7.3)$$

$$m\left\{x \in X; \sup_{n_{k-1} \leq m \leq n_k} T_m \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \mathbb{I}_{E_j}(x) \right) > 2^{-k}\right\} < 2^{-k}. \quad (7.4)$$

Выбор n_k и E_k происходит в следующем порядке: $E_1, n_1, E_2, n_2, \dots$. Ради простоты обозначим

$$U_k = \sup_{n_{k-1} \leq m \leq n_k} T_m, \quad \tilde{E}_k = E_k \setminus \bigcup_{j=k+1}^{\infty} E_j, \quad E = \bigcup_{j=0}^{\infty} \tilde{E}_{2j+1},$$

$$A_k = \left\{x \in X : U_k \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \mathbb{I}_{E_j}(x) \right) \leq 2^{-k}\right\},$$

$$B_k = \{x \in X : U_k \mathbb{I}_{E_k}(x) > 1 - 2^{-k}\},$$

$$G = \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} A_k \right) \cap \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} B_k \right).$$

Из (7.4) и (7.3) следует, что $mG = 1$. Для заданного числа $x \in G$ имеем $x \in A_k \cap B_k$, $k > k_0$. Следовательно,

$$U_k \left(\sum_{j=k+1}^{\infty} \mathbb{I}_{E_j}(x) \right) \leq 2^{-k}, \quad U_k \mathbb{I}_{E_k}(x) > 1 - 2^{-k}, \quad k > k_0. \quad (7.5)$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} U_{2k+1}\mathbb{I}_E(x) &\geq U_{2k+1}\mathbb{I}_{\tilde{E}_{2k+1}}(x) \\ &\geq U_{2k+1}\mathbb{I}_{E_{2k+1}}(x) - U_{2k+1}\left(\sum_{j=2k+2}^{\infty}\mathbb{I}_{E_j}(x)\right) \\ &> 1 - 2^{-(2k+1)} - 2^{-(2k+1)} = 1 - 2^{-2k}. \end{aligned}$$

Из этого вытекает, что

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} T_m \mathbb{I}_E(x) = 1, \quad x \in E.$$

Легко видеть, что $E \cap E_{2k} = \emptyset$. Следовательно, имеем $E \subset \tilde{E}_{2k}^c$, а из (7.5) заключаем, что

$$\begin{aligned} \inf_{n_{k-1} \leq m \leq n_k} T_m \mathbb{I}_E(x) &\leq \inf_{n_{k-1} \leq m \leq n_k} T_m \mathbb{I}_{\tilde{E}_{2k}^c}(x) = 1 - \sup_{n_{k-1} \leq m \leq n_k} T_m \mathbb{I}_{\tilde{E}_{2k}}(x) \\ &= 1 - U_{2k} \mathbb{I}_{\tilde{E}_{2k}}(x) \leq 1 - U_{2k} \mathbb{I}_{E_{2k}}(x) + U_{2k} \left(\sum_{j=2k+1}^{\infty} \mathbb{I}_{E_j}(x) \right) \\ &< 1 - (1 - 2^{-2k}) + 2^{-2k} = 2^{-2k+1}. \end{aligned}$$

Итак, $\liminf_{m \rightarrow \infty} T_m \mathbb{I}_E(x) = 0$, $x \in E$, и теорема доказана.

Теперь предположим, что (X, m) в (7.1) совпадает с $(\mathbb{T}, \lambda)$. В следующей теореме мы рассматриваем операторы T_n , инвариантные относительно сдвигов, определенные по формулам

$$T_n f_x(t) = T_n f(x+t),$$

где $f_x(t) = f(x+t)$.

ТЕОРЕМА 6. *Если последовательность операторов $\{T_n\}$, инвариантных относительно сдвигов и удовлетворяющих условиям 1)–3), является слабо δ -подметающей для любого $0 < \delta < 1$, то она является сильно подметающей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предыдущей теореме достаточно доказать, что $\{T_n\}$ является δ -подметающей для любого $0 < \delta < 1$. В силу слабо δ -подметающего свойства можно выбрать измеримые множества F_k такие, что

$$\frac{|\{x \in X : \sup_{n > k} T_n \mathbb{I}_{F_k}(x) \geq 1 - 1/k\}|}{|F_k|} \rightarrow \infty.$$

Образуя последовательности множеств E_k из множеств F_k с возможными повторениями, можно добиться того, что для некоторых последовательностей чисел $\delta_k \nearrow 1$ и $n_k \rightarrow \infty$ для множеств

$$A_k = \left\{ x \in X : \sup_{n > n_k} T_n \mathbb{I}_{E_k}(x) \geq \delta_k \right\}$$

будут выполняться следующие условия:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |E_k| < \varepsilon.$$

Применив лемму Бореля–Кантелли, можно выбрать последовательность x_k так, что $|\limsup_{k \rightarrow \infty} (A_k + x_k)| = 1$. Так как T_n инвариантны относительно сдвигов, то, обозначив

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k + x_k),$$

получим, что

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ x \in X : \limsup_{n \rightarrow \infty} T_n \mathbb{I}_E(x) = 1 \right\} \right| \\ & \geq \left| \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ x \in X : \sup_{n > n_k} T_n \mathbb{I}_{E_k + x_k}(x) \geq \delta_k \right\} \right| = \left| \limsup_{k \rightarrow \infty} (A_k + x_k) \right| = 1, \\ & |E| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |E_k + x_k| = \sum_{j=1}^{\infty} |E_k| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Очевидно, что операторы римановых сумм удовлетворяют условиям 1)–3). Свойства 1)–2) очевидны. Проверим 3). Если для $E \subset \mathbb{T}$ имеем $|E| < \delta = \varepsilon^2$, то

$$\int_{\mathbb{T}} R_n \mathbb{I}_E(x) dx = |E| < \varepsilon^2.$$

Следовательно, используя неравенство Чебышёва, получим, что

$$|\{x \in \mathbb{T} : R_n \mathbb{I}_E(x) > \varepsilon\}| < \varepsilon.$$

Это доказывает свойство 3). Анализируя доказательство теоремы Рудина, легко понять, что функция, которая строится, может обладать δ -подметающим свойством для любого $0 < \delta < 1$. Отсюда, используя теорему 5, заключаем, что если $\{n_k\}$ удовлетворяет условиям теоремы Рудина, то последовательность R_{n_k} будет сильно подметающей. Отметим, что это утверждение для сумм Римана было доказано в [20], где применяется подход Рудина. Теперь рассмотрим операторы

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(jx). \quad (7.6)$$

Дж. М. Марстранд [22], доказав гипотезу Хинчина, доказал также, что эта последовательность обладает свойством 1-подметания. Применив теорему 5, получим, что последовательность (7.6) – сильно подметающая. Отметим, что альтернативные доказательства теорем Рудина и Марстранда следуют из одной теоремы Бургейна [23], которая дает общий метод для исследования свойств расходимости определенных операторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ РУДИНА НА ОСНОВЕ ТЕОРЕМЫ 4. Зафиксируем число $0 < \delta < 1$. Согласно условиям теоремы Рудина для любого $k \in \mathbb{N}$ существует подмножество $D_k = \{n_1, n_2, \dots, n_k\} \subset D$ такое, что ни одно из чисел из D_k не является делителем наименьшего общего кратного остальных. Это значит, что можно выбрать простые числа $p_{\nu_1}, p_{\nu_2}, \dots, p_{\nu_k}$ такие, что $p_{\nu_j} \mid n_{\nu_j}$ и $p_{\nu_j} \nmid n_{\nu_i}$ если $i \neq j$. Пусть l – наименьшее общее кратное чисел $n_1, n_2, \dots, n_k$. Обозначив $q_j = l/n_j$, имеем

$$l/D_k = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}, \quad q_j = p_{\nu_1}^{m_1(j)} p_{\nu_2}^{m_2(j)} \dots p_{\nu_k}^{m_k(j)} \gamma_j,$$

где $m_j(j) = 0$, $m_i(j) > 0$, если $i \neq j$.

Обозначим через Q_j совокупность прямоугольников (2.11), соответствующих $l = q_j$, и пусть $Q = \bigcup_{j=1}^k Q_k$. Согласно (4.15) имеем

$$\mathcal{M}_{l/D_k} f(x) = \sup_{B \in Q: x \in B} \frac{1}{|B|} \int_B |f(t)| dt.$$

С другой стороны, любой прямоугольник вида

$$\left\{ x \in \mathbb{T}^\infty : \left[\frac{t_i}{p_{\nu_i}}, \frac{t_i + 1}{p_{\nu_i}} \right), 1 \leq j \leq k, j \neq i \right\}, \quad 0 \leq t_i < p_{\nu_i}, \quad 1 \leq j \leq k, \quad j \neq i,$$

можно представить в виде объединения прямоугольников из Q_i . То же самое утверждение верно и для множеств

$$C_i = \left\{ x \in \mathbb{T}^\infty : 0 \leq x_{\nu_j} < \frac{r_j}{p_{\nu(j)}}, 1 \leq j \leq k, j \neq i \right\}, \quad r_j = [\delta p_{\nu(j)}] + 1.$$

Обозначим

$$C = \bigcap_{j=1}^k C_j = \left\{ x \in \mathbb{T}^\infty : 0 \leq x_{\nu_j} < \frac{r_j}{p_{\nu(j)}}, j = 1, 2, \dots, k \right\}.$$

Легко видеть, что если $B \in Q_j$ и $B \subset C_j$, то

$$|B \cap C| = \frac{r_j}{p_{\nu(j)}} |B|.$$

Следовательно, в силу условия $r_j/p_{\nu(j)} > \delta$ получим, что

$$\mathcal{M}_{l/D_k} \mathbb{I}_C(x) > \delta, \quad x \in \bigcup_{j=1}^k C_j.$$

С другой стороны, имеем

$$\left| \bigcup_{j=1}^k C_j \right| = |C| \left(1 + \sum_{j=1}^k \frac{p_{\nu(j)}}{r_j} \right) > (k+1)|C|.$$

Отсюда получаем, что

$$|\{x \in \mathbb{T}^\infty : \mathcal{M}_{l/D_k} \mathbb{I}_C(x) > \delta\}| > (k+1)|C|.$$

В силу теоремы 4 для некоторого $G \subset \mathbb{T}$ справедливо неравенство

$$|\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_{D_k}^l \mathbb{I}_G(x) > \delta\}| > (k+1)|G|.$$

Далее, так как C является $\mathcal{B}_l$ -измеримым, то G есть $\mathcal{A}_l$ -измеримое множество. Следовательно, из (2.7) заключаем, что

$$\begin{aligned} |\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_D \mathbb{I}_G(x) > \delta\}| &\geq |\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_{D_k} \mathbb{I}_G(x) > \delta\}| \\ &= |\{x \in \mathbb{T} : \mathcal{R}_{D_k}^l \mathbb{I}_G(x) > \delta\}| \geq (k+1)|G|, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Из этого следует, что последовательность $R_n f(x)$, $n \in D$, имеет слабо δ -подметающее свойство для любого $0 < \delta < 1$. Применив теорему 6, получаем, что она имеет сильно подметающее свойство. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] B. Jessen, “On the approximation of Lebesgue integrals by Riemann sums”, *Ann. of Math.* (2), **35**:2 (1934), 248–251.
- [2] W. Rudin, “An arithmetic property of Riemann sums”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15**:2 (1964), 321–324.
- [3] L. E. Dubins, J. Pitman, “A pointwise ergodic theorem for the group of rational rotations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **251** (1979), 299–308.
- [4] Ya. Bugeaud, M. Weber, “Examples and counterexamples for Riemann sums”, *Indag. Math. (N.S.)*, **9**:1 (1998), 1–13.
- [5] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. 2, Мир, М., 1965; пер. с англ.: A. Zygmund, *Trigonometric series*, vols. II, Cambridge Univ. Press, New York, 1959.
- [6] R. Nair, “On Riemann sums and Lebesgue integrals”, *Monatsh. Math.*, **120**:1 (1995), 49–54.
- [7] R. C. Baker, “Riemann sums and Lebesgue integrals”, *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, **27** (1976), 191–198.
- [8] J.-J. Ruch, M. Weber, “On Riemann sums”, *Note Mat.*, **26**:2 (2006), 1–50.
- [9] П. Халмош, *Теория меры*, ИЛ, М., 1953; пер. с англ.: P. R. Halmos, *Measure theory*, Nostrand, New York; Macmillan, London, 1950.
- [10] Ж. Невё, *Математические основы теории вероятностей*, Мир, М., 1969; пер. с фр.: J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson et Cie, Paris, 1964.
- [11] М. А. Красносельский, Я. Б. Рutiцкий, *Выпуклые функции и пространства Орлица*, Соврем. пробл. матем., Физматлит, М., 1958; англ. пер.: М. А. Krasnosel’kii, Ja. B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces*, Noordhoff, Groningen, 1961.
- [12] Г. А. Карагулян, “О порядке роста $o(\log \log n)$ частичных сумм рядов Фурье–Стилтьеса случайных мер”, *Матем. сб.*, **184**:1 (1993), 15–40; англ. пер.: G. A. Karagulyan, “On the order of growth $o(\log \log n)$ of the partial sums of Fourier–Stieltjes series of random measures”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **78**:1 (1994), 11–33.
- [13] E. M. Stein, “On limits of sequences of operators”, *Ann. of Math.* (2), **74**:1 (1961), 140–170.
- [14] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Math. Ser., **43**, Princeton, NJ, Princeton Univ. Press, 1993.
- [15] B. Jessen, J. Marcinkiewicz, A. Zygmund, “Note on the differentiability of multiple integrals”, *Fund. Math.*, **25** (1935), 217–234.
- [16] М. Гусман, *Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$* , Мир, М., 1978; пер. с англ.: M. de Guzmán, *Differentiation of integrals in $\mathbb{R}^n$* , Lecture Notes in Math., **481**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1975.
- [17] S. Saks, “Remark on the differentiability of the Lebesgue indefinite integral”, *Fund. Math.*, **22** (1934), 257–261.
- [18] A. M. Stokolos, “On weak type inequalities for rare maximal functions in $\mathbb{R}^n$ ”, *Colloq. Math.*, **104**:2 (2006), 311–315.
- [19] K. Hare, A. Stokolos, “On weak type inequalities for rare maximal functions”, *Colloq. Math.*, **83**:2 (2000), 173–182.
- [20] M. Akcoglu, A. Bellow, R. L. Jones, V. Losert, K. Reinhold-Larssona, M. Wierdl, “The strong sweeping out property for lacunary sequences, Riemann sums, convolution powers, and related matters”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **16**:2 (1996), 207–253.
- [21] M. A. Akcoglu, M. D. Ha, R. L. Jones, “Sweeping out properties of operator sequences”, *Canad. J. Math.*, **49**:1 (1997), 3–23.

- [22] J. M. Marstrand, “On Khinchin’s conjecture about strong uniform distribution”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **21** (1970), 540–556.
- [23] J. Bourgain, “Almost sure convergence and bounded entropy”, *Israel J. Math.*, **63**:1 (1988), 79–97.

Г. А. Карагулян (G. A. Karagulyan)

Институт математики НАН Армении, г. Ереван

E-mail: g.karagulyan@yahoo.com

Поступила в редакцию

13.04.2008