Общероссийский математический портал

П. М. Ахметьев, Й. Малешич, Д. Реповш, Формула для обобщенного инварианта Сато–Левина, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 1, 3–12

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm533>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 15:59:29

УДК 515.1

П. М. Ахметьев, Й. Малешич, Д. Реповш

Формула для обобщенного инварианта Сато–Левина

Пусть W – обобщенный инвариант Сато–Левина, т.е. единственный инвариант Васильева 3-го порядка двукомпонентных зацеплений, который равен нулю на удвоенных торических зацеплениях типа $(1, k)$. В работе доказано, что

$$W = \beta - \frac{k^3 - k}{6},$$

где β – инвариант 3-го порядка, предложенный Виро и Поляком в виде представления диаграмм Гаусса, а k – это индекс зацепления.

Библиография: 9 названий.

§ 1. Введение

В работе Кирка и Ливингстона [1] была предложена конструкция целочисленного инварианта (который мы обозначаем через W), определенного на двукомпонентных ориентированных зацеплениях $f(L'_1) \cup f(L'_2) \subset \mathbb{R}^3$. Здесь L'_1 и L'_2 – дизъюнктные ориентированные окружности, а $f: L'_1 \cup L'_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – вложение. Независимо от результатов [1] в работе первого автора [2] инвариант W был определен исходя из гидродинамических соображений. Элементарный подход к определению инварианта W был предложен в совместной работе первого и третьего авторов [3] (в цитируемой работе приняты другие обозначения). Мы докажем, что инвариант W обобщает известный инвариант β Сато–Левина (см. [4]). Первоначально инвариант β определялся лишь в предположении $\text{lk}(f(L'_1); f(L'_2)) = 0$. В первой половине 90-х годов О. Виро и М. Поляк [5] предложили обобщение инварианта β в рамках теории Васильева, используя понятие диаграммы Гаусса. Обобщение состояло в том, что инвариант β определялся не как частичный, а как полный инвариант на классе изотопии ориентируемого двукомпонентного зацепления.

Инварианты W и β являются инвариантами Васильева 3-го порядка. Кроме того, инвариант W служит высшим аналогом индекса зацепления. Подобно тому, как коэффициент зацепления двух замкнутых кривых связан с коэффициентом самозацепления и выступает мерой потери отражательной симметрии в гидродинамической системе, обобщенный инвариант Сато–Левина служит мерой потери симметрии при дополнительном условии “заузленности” траекторий системы [2]

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS-CNES (грант № 1048), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 99-01-00009, 99-01-01227, 00-05-64015) и Министерства науки и технологии Республики Словении (грант № J1-7039-0101-95).

(см. также формулу (1) и вычисления к рис. 8). Это свойство инварианта W позволяет рассматривать инвариант в асимптотическом пределе для систем с открытыми силовыми линиями поля, а также позволяет предположить, что аналитическое выражение, связанное с инвариантом W (точнее, с обобщенным инвариантом Милнора порядка 3 в смысле Васильева, с которым инвариант W ассоциирован), имеет вид кратного интеграла по пространственным координатам. Исходная конструкция для асимптотического индекса зацепления (инварианта Хопфа) была предложена В. И. Арнольдом в [6; гл. 28]. Интегральное выражение классического инварианта Сато–Левина искомого вида построено в совместной работе первого автора с А. Рузмайкин [7].

Аналогия инварианта W с коэффициентом зацепления может быть выражена для оснащенного узла (K, ξ) формулой

$$W(K, K') = 2v_2(K) \operatorname{lk}(K; K'), \quad (1)$$

где K' получается из K сдвигом вдоль векторов оснащения ξ , v_2 – инвариант Васильева узлов порядка 2.

Напомним способ аксиоматического построения инварианта W , изложенный в [2]. Пусть $\varphi: L'_1 \cup L'_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – погружение, полученное в результате проекции на плоскость $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ зацепления $f: L'_1 \cup L'_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ общего положения, т.е. $\varphi = \pi \circ f$. Обозначим $L_i = \varphi(L'_i)$, $i = 1, 2$. Обозначим через Δ множество точек пересечения компонент $L_1 \cap L_2$, включая и точки самопересечения кривых L_1 и L_2 . Определим функцию $O: \Delta \rightarrow \{+1; -1\} \subset \mathbb{Z}$ согласно следующему правилу. В каждой точке $x \in \Delta$ рассмотрим упорядоченный репер (ξ_1, ξ_2) , составленный из векторов, касательных к ветвям ориентированной кривой $L_1 \cup L_2$. Порядок векторов репера выберем таким, что в окрестности x ветвь кривой $L_1 \cup L_2$, содержащая вектор ξ_1 , расположена выше ветви, содержащей вектор ξ_2 , по отношению к направлению оси проекции π . Определим значение $O(x) = +1$, если репер (ξ_1, ξ_2) положительно ориентирован в плоскости, и $O(x) = -1$ в противном случае. В дальнейшем будем называть пару (φ, O) *диаграммой зацепления f* , а число $O(x)$ *знаком точки*.

В теории узлов и зацеплений определены три типа преобразований диаграмм узлов и зацеплений, называемых преобразованиями Рейдемейстера. Для 1-го и 2-го типов преобразований в малой окрестности критической точки диаграммы в $\mathbb{R}^2$

$$\varphi_{t_0}: (\varphi(t_0 - \varepsilon), O(t_0 - \varepsilon)) \rightarrow (\varphi(t_0 + \varepsilon), O(t_0 + \varepsilon))$$

возникает одна или две точки пересечения согласно правилу, изображенному на рис. 1.

Рис. 1. Преобразования Рейдемейстера типа 1 и 2

Для преобразования типа 3, которое изображено на рис. 2, изменяется только тройка точек $\{x, y, z\} \subset \Delta$ такая, что и внутри, и на границе треугольника, определенного вершинами x , y и z , нет других точек из множества Δ . Условимся называть такой треугольник *исчезающим треугольником*. Дополнительно у исчезающего треугольника должна существовать сторона, лежащая выше остальных двух сторон (тогда одна из остальных двух сторон заведомо лежит ниже других). Для преобразования типа 3 в малой окрестности критической точки вместо исчезающего треугольника появляется новый с вершинами $x' = x_{t_0+\varepsilon}$, $y' = y_{t_0+\varepsilon}$ и $z' = z_{t_0+\varepsilon}$, так что

- знаки вершин сохраняются: $O(x_{t_0-\varepsilon}) = O(x_{t_0+\varepsilon})$, $O(y_{t_0-\varepsilon}) = O(y_{t_0+\varepsilon})$ и $O(z_{t_0-\varepsilon}) = O(z_{t_0+\varepsilon})$,
- каждая пара вершин появившегося треугольника лежит на той же дуге диаграммы, как и в исчезающем треугольнике,
- порядок каждой пары вершин обращается: если, например, направление вектора $\vec{xy}_{t_0-\varepsilon}$ соответствовало ориентации на диаграмме, то для $\vec{xy}_{t_0+\varepsilon}$ оно будет противоположным.

Рис. 2. Преобразование Рейдемейстера типа 3

Кроме описанных выше преобразований Рейдемейстера для наших целей необходимо так называемое фальшивое преобразование типа 3, см. рис. 3. Вместо условия, что у исчезающего треугольника существует сторона, лежащая выше остальных двух сторон, рассмотрим отрицание этого условия: нет стороны, лежащей выше остальных двух. Правило преобразования исчезающего треугольника пусть остается таким же, как у преобразования Рейдемейстера типа 3.

 Рис. 3. Фальшивое преобразование Рейдемейстера, δ -движение

Данный выше вариант фальшивого преобразования Рейдемейстера впервые был определен в работе [8], в которой это преобразование называлось δ -движением.

(Авторы благодарят Л. Плахту за это важное замечание.) Независимо δ -движениями специального вида занимался С. Матвеев в [9], где эти движения называются преобразованиями Борромео.

Рассмотрим страты пространств проекций зацеплений:

$$R \subset R_A \subset R_B.$$

Здесь

- R – пространство регулярных проекций двукомпонентных зацеплений;
- R_A – пополнение пространства R вырожденными проекциями, получившимися в ходе преобразований Рейдемейстера типов 1, 2 и 3;
- R_B – пополнение пространства R_A вырожденными проекциями, получившимися в ходе δ -движения.

Основной проблемой в теории узлов и зацеплений является вычисление группы $\pi_0(R_A)$.

Пусть x , y и z – вершины исчезающего треугольника. Пусть одна из вершин является точкой самопересечения одной компоненты, а другие две являются пересечениями разных компонент. Точку самопересечения будем обозначать через x . Ту компоненту зацепления, для которой x является точкой самопересечения, обозначим через L_x , другую обозначим через L'_x . Ввиду того что у исчезающего треугольника, соответствующего δ -движению, нет стороны, лежащей выше остальных сторон, существует ровно одна вершина треугольника, в которой компонента L_x проходит ниже компоненты L'_x . Обозначим эту вершину через y , оставшуюся – через z . Точка x разбивает кривую L_x на две петли; обозначим через L_x^+ ту петлю, которая содержит точку y , а через L_x^- другую петлю. Тогда $L_x^+ \cup L'_x$ и $L_x^- \cup L'_x$ – диаграммы зацеплений и, следовательно, существуют индексы $\text{lk}(L_x^+; L'_x)$ и $\text{lk}(L_x^-; L'_x)$.

ТЕОРЕМА 1 [2]. *На пополненном пространстве диаграмм T_A существует единственная функция $W: T_A \rightarrow \mathbb{Z}$, удовлетворяющая двум условиям:*

1. *в малой окрестности критической точки δ -движения скачок $W(f)$ задается формулой*

$$W(f)_{t_0+\varepsilon} - W(f)_{t_0-\varepsilon} = O(x)O(y)(\text{lk}(L_x^+; L'_x) - \text{lk}(L_x^-; L'_x) - O(x))|_{t_0-\varepsilon}; \quad (2)$$

2. *если $f(L'_1) \cup f(L'_2)$ является удвоенным торическим узлом типа $(1, k)$, то $W(f) = 0$.*

СЛЕДСТВИЕ 1. *Инвариант W является инвариантом порядка 1 в пространстве R с выделенным дискриминантом R_B .*

ЗАМЕЧАНИЕ. Особо подчеркнем, что инварианты W и β имеют порядок 3 в смысле Васильева, если рассматривать обычный дискриминант в пространстве особых зацеплений, связанный с двукратными невырожденными точками пересечения.

ЗАМЕЧАНИЕ. В формуле (2) скачок инварианта W выражается через знаки точек и индексы зацепления в момент времени $t_0 - \varepsilon$, т.е. до δ -движения. Скачок W можно выразить значениями упомянутых чисел, которые рассмотрены в момент времени $t_0 + \varepsilon$, т.е. после δ -движения. Для этой цели сначала заметим, что знаки вершин при переходе $t_0 - \varepsilon \rightarrow t_0 + \varepsilon$ не меняются. Рассмотрев диаграмму зацепления в окрестности исчезающего треугольника, легко увидеть, что

$$\begin{aligned} \text{lk}(L_x^+; L'_x)|_{t_0+\varepsilon} &= \text{lk}(L_x^-; L'_x)|_{t_0-\varepsilon} + O(y), \\ \text{lk}(L_x^-; L'_x)|_{t_0+\varepsilon} &= \text{lk}(L_x^+; L'_x)|_{t_0-\varepsilon} + O(y), \end{aligned}$$

следовательно,

$$W(f)_{t_0+\varepsilon} - W(f)_{t_0-\varepsilon} = O(x)O(y)(\text{lk}(L_x^-; L'_x) - \text{lk}(L_x^+; L'_x) - O(x))|_{t_0+\varepsilon}.$$

Это значит, что формула (2) является инвариантной при изменении значения параметра деформации в окрестности критического значения δ -движения на обратное.

Виро и Поляк [5] анонсировали пример явной формулы для инварианта 3-го порядка двухкомпонентных зацеплений, исходя из пространства представлений диаграмм Гаусса. Формула Виро–Поляка напоминается далее, а инвариант, который она определяет, обозначим через β . Наша основная теорема состоит в следующем.

ТЕОРЕМА 2. *Инвариант β является инвариантом первого порядка в пространстве R относительно дискриминанта R_B . Этот инвариант связан с инвариантом W по формуле*

$$\beta - W = \frac{k^3 - k}{6}, \quad (3)$$

где $k = \text{lk}(f(L'_1); f(L'_2))$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Инварианты β и W не меняются при перемене нумерации компонент. При изменении ориентации на одной из компонент инварианты не меняются тогда и только тогда, когда $k = \pm 1, 0$.*

§ 2. Определение инварианта β Сато–Левина

В этом разделе мы напомним основные конструкции, связанные с представлениями диаграмм Гаусса, полученные М. Поляком и О. Виро в [5].

Пусть $\varphi: L'_1 \cup L'_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – погружение, полученное в результате проекции $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ зацепления $f: L'_1 \cup L'_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ общего положения на плоскость, т.е. $\varphi = \pi \circ f$. Вместо проекции $\varphi(L'_1 \cup L'_2)$ зацепления для комбинаторных исследований более удобна диаграмма Гаусса, построенная следующим способом: составляют ее дизъюнктивные окружности $L'_1 \cup L'_2$ вместе с конечным множеством их хорд и конечным множеством отрезков, имеющих концы на обеих окружностях, таким образом, что хорды и отрезки соединяют в точности те точки $L'_1 \cup L'_2$, которые погружением φ отображаются в двойные точки проекции зацепления. Хорды и отрезки ориентированы согласно следующему правилу: начальная точка хорды

Рис. 4. Зацепление Уайтхеда

или отрезка лежит выше конечной. Окружности $L'_1 \cup L'_2$ ориентированы стандартным способом. В качестве примера приведем проекцию зацепления Уайтхеда и его диаграмму Гаусса (см. рис. 4).

Любая диаграмма, состоящая из двух стандартно ориентированных дизъюнктивных окружностей вместе с конечным множеством их ориентированных хорд и конечным множеством ориентированных отрезков, имеющих концы на обеих окружностях, называется *стрелочной диаграммой* (значит, и диаграммы Гаусса являются частными случаями стрелочных диаграмм). Вложение $f: A \hookrightarrow G$ стрелочных диаграмм A в G называется *представлением диаграммы A в диаграмме G* , если оно сохраняет все ориентации (окружностей, стрелок и хорд).

Через C_A обозначим множество всех отрезков и хорд данной стрелочной диаграммы A . Если $f: A \hookrightarrow G$ – представление стрелочной диаграммы A в гауссовой диаграмме G , то $f(x) \in C_G$ для каждой хорды или отрезка $x \in C_A$ и, следовательно, определен знак $O(f(x)) \in \{-1, +1\}$. *Знак $O(f)$ представления f* задается формулой

$$O(f) = \prod_{x \in C_A} O(f(x)).$$

Определим *вес* $\langle A, G \rangle$ стрелочной диаграммы A в гауссовой диаграмме G как сумму знаков всех представлений A в G . Положим $\langle A, G \rangle = 0$ в случае, когда представления не существуют. В качестве примера вычислим веса стрелочных диаграмм $\textcircled{1}\textcircled{2}$, $\textcircled{1}\textcircled{5}$, $\textcircled{1}\textcircled{6}$ и $\textcircled{2}\textcircled{5}$ в диаграмме зацепления Уайтхеда.

Согласно рис. 4 существуют два представления стрелочной диаграммы $\textcircled{1}\textcircled{2}$ в гауссовой диаграмме зацепления Уайтхеда (см. рис. 5).

Рис. 5. Представления диаграммы $\textcircled{1}\textcircled{2}$

В силу того что $O(1)O(2)O(5) = +1$ и $O(1)O(2)O(6) = +1$, получим $\langle \textcircled{1}\textcircled{2}, G \rangle = +2$. Очевидно, что представления диаграмм $\textcircled{1}\textcircled{5}$ и $\textcircled{2}\textcircled{5}$

 Рис. 6. Представления диаграммы $\bigcirc \bigcirc$

в диаграмме зацепления Уайтхеда представлены пустым множеством, следовательно, $\langle \bigcirc \bigcirc, G \rangle = 0$ и $\langle \bigcirc \bigcirc, G \rangle = 0$. Легко проверить (см. рис. 6), что существуют ровно два представления стрелочной диаграммы $\bigcirc \bigcirc$. В силу того что $O(1)O(3)O(4) = +1$ и $O(2)O(3)O(4) = -1$, имеем $\langle \bigcirc \bigcirc, G \rangle = 0$.

Виро и Поляк показали, что в терминах представлений стрелочных диаграмм в диаграмме Гаусса узла или зацепления можно выразить ряд инвариантов узлов и зацеплений. Они анонсировали, что следующее выражение является инвариантом (изотопического класса) двукомпонентного зацепления:

$$\beta(G) = \frac{\langle \bigcirc \bigcirc + \bigcirc \bigcirc + \bigcirc \bigcirc - \bigcirc \bigcirc, G \rangle}{2}. \quad (4)$$

Например, из предыдущих вычислений вытекает, что для зацепления Уайтхеда $\beta = 2/2 = 1$.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Воспользуемся тем, что выражение для $\beta(G)$, определенное выше, действительно является инвариантом изотопического класса зацепления, иначе говоря, не меняется при преобразованиях Рейдемейстера типов 1–3. Формула (2), определяющая скачок значения W , инвариантна относительно переобозначения компонент и изменения ориентации на одной из них. Чтобы доказать теорему 2 и следствие 2, с учетом теоремы 1 достаточно проверить, что

- скачок инварианта $\beta(G)$ при произвольном δ -движении равен скачку инварианта W :

$$\beta_{t_0+\varepsilon} - \beta_{t_0-\varepsilon} = O(x)O(y) (\text{lk}(L_x^+; L_x') - \text{lk}(L_x^-; L_x') - O(x)) \Big|_{t_0-\varepsilon}; \quad (5)$$

- если $f(L_1') \cup f(L_2')$ является удвоенным торическим узлом типа $(1, k)$ и G — его диаграмма Гаусса, то

$$\beta(G) = \frac{k^3 - k}{6}; \quad (6)$$

- для диаграммы Гаусса G_{12} удвоенного торического узла $f(L_1') \cup f(L_2')$, диаграммы G_{21} , полученной из G_{12} в результате переобозначения компонент, и диаграммы G_{12}^* , полученной из G_{12} в результате изменения ориентации на первой компоненте, справедливы равенства

$$\beta(G_{12}) = \beta(G_{21}), \quad (7)$$

$$\beta(G_{12}^*) = 0. \quad (8)$$

Проверим формулу (5), отложив проверку тождества (6) до следующего раздела. Представим δ -движение, происходящее на диаграмме зацепления в критический момент времени t_0 , как композицию $\delta_t = A_2 \circ \alpha(t) \circ A_1$, где A_i , $i = 1, 2$, – преобразование, меняющее порядок ветвей в точке x (в выделенной вершине исчезающего треугольника), $\alpha(t)$ – изотопия, в результате которой проекция зацепления преобразуется так же, как и при δ -движении. Заметим, что преобразования A_1 и A_2 являются взаимно обратными, но их последовательная композиция с изотопией $\alpha(t)$ уже не упрощается. Введем обозначения:

$$\begin{aligned}\beta(A_1(L(t_0 - \varepsilon))) - \beta(L(t_0 - \varepsilon)) &= \Delta A_1, \\ \beta(A_2(L(t_0 + \varepsilon))) - \beta(L(t_0 + \varepsilon)) &= \Delta A_2.\end{aligned}$$

Покажем, что выполнено равенство

$$\Delta A_1 - \Delta A_2 = O(x)O(y)(\text{lk}(L_x^+; L'_x) - \text{lk}(L_x^-; L'_x) - O(x))\big|_{t_0 - \varepsilon}. \quad (9)$$

Легко видеть, что значения третьего и четвертого слагаемых в формуле (4) для $\beta(G)$ не изменяются при преобразованиях A_1 и A_2 , меняются лишь значения первых двух. Более того, если точка x является точкой самопересечения компоненты L_1 (L_2), то изменяется лишь первое (второе) слагаемое. Очевидно также, что изменяются лишь значения слагаемых, составленных из представлений, которые содержат вершины x и y одновременно.

Алгебраическое число слагаемых, входящих в выражение ΔA_1 (ΔA_2) и содержащих точки x и y , равно $O(x)O(y)\text{lk}(L_x^+; L'_x)$ ($O(x)O(y)\text{lk}(L_x^-; L'_x)$). Проведенные вычисления доказывают формулы (9) и (5). Завершим доказательство теоремы 2, проверив формулы (6)–(8).

§ 4. Примеры вычислений инварианта β Виро–Поляка

Удвоенный торический узел. Взяв торический узел типа $(1, k)$ с оснащением по радиусу, направленному к средней линии тора, удвоим его. В результате получим зацепление, изображенное на рис. 7.

Поскольку в гауссовой диаграмме нет хорд, первые два слагаемых в формуле (4), т.е. $\langle \bigcirc \bigcirc, G \rangle$ и $\langle \bigcirc \bigcirc, G \rangle$, равны нулю. Для слагаемого $\langle \bigcirc \bigcirc, G \rangle$ годятся все тройки отрезков, имеющих следующее направление: по одному отрезку с направлением влево и по два вправо. Число тех отрезков, которые направлены влево, равно k , а вправо – $\binom{k}{2}$. Ввиду того что знаки всех отрезков равны $+1$, $\langle \bigcirc \bigcirc, G \rangle = (k^3 - k^2)/2$. Для слагаемого $\langle \bigcirc \bigcirc, G \rangle$ годится любая тройка отрезков, имеющих направление вправо. Значит, $\langle \bigcirc \bigcirc, G \rangle = \binom{k}{3}$. В итоге получим, что $\beta = (k^3 - k)/6$. Это доказывает формулу (6). Формулы (7) и (8) доказываются аналогичными более простыми вычислениями.

Проведем вычисления, поясняющие формулу (1).

Удвоенный трилистник. Удвоим правый трилистник (торический узел $(2, 3)$) по оснащению, параллельному плоскости проекции, и получим зацепление, изображенное на рис. 8.

Легко проверить, что $\langle \bigcirc \bigcirc, G \rangle = 6$, $\langle \bigcirc \bigcirc, G \rangle = 6$, $\langle \bigcirc \bigcirc, G \rangle = 9$ и $\langle \bigcirc \bigcirc, G \rangle = 1$. В итоге получится, что $\beta = 10$. Такой же результат вытекает из

Рис. 7. Удвоенный торический узел

Рис. 8. Удвоенный трилистник

формул (1) и (3), если учесть, что для трилистника $v_2 = 1$ и индекс зацепления для удвоенного трилистника равен трем.

Авторы благодарят рецензента за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания.

Список литературы

1. *Kirk P., Livingston C.* Vassiliev invariants of two component links and the Casson–Walker invariant // *Topology*. 1997. V. 36. P. 1333–1353.
2. *Akhmetiev P. M.* On a higher analog of the linking number of two curves // *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*. 1998. V. 185. P. 113–127.
3. *Ахметьев П. М., Реповш Д.* Обобщение инварианта Сато–Левина // *Труды МИАН*. 1998. Т. 221. С. 69–80.

4. *Sato N.* Cobordism of semi-boundary links // Topology Appl. 1984. V. 18. P. 225–231.
5. *Polyak M., Viro O.* Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants // Internat. Math. Res. Notices. 1994. V. 11. P. 445–453.
6. *Арнольд В. И.* Избранное-60. М.: Фазис, 1997.
7. *Akhmet'ev P. M., Ruzmaikin A.* A fourth-order topological invariant of magnetic or vortex lines // J. Geom. Phys. 1994. V. 15. P. 1–7.
8. *Murakami H., Nakanishi Y.* On a certain move generating link-homology // Math. Ann. 1989. V. 284. P. 75–89.
9. *Матвеев С. В.* Обобщенные перестройки трехмерных многообразий и представления гомологических сфер // Матем. заметки. 1987. Т. 42. №2. С. 268–278.

Институт земного магнетизма, ионосферы
и распространения радиоволн РАН,
г. Троицк, Московская обл.

Поступила в редакцию
03.06.1999 и 23.05.2000