Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Климов, Бесконечномерный вариант теоремы Пуанкаре–Хопфа и гомологические характеристики функционалов, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 1, 51–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm535>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 14:42:51

УДК 517.946

В. С. Климов

Бесконечномерный вариант теоремы Пуанкаре–Хопфа и гомологические характеристики функционалов

Установлен вариант теоремы Пуанкаре–Хопфа для многозначных векторных полей, определенных на подмногообразиях рефлексивного пространства. Изучена связь между критическими значениями и гомологическими характеристиками лебеговых множеств липшицевых функционалов. Намечены приложения к теории операторных включений с параметром.

Библиография: 22 названия.

В работе установлен вариант теоремы Пуанкаре–Хопфа для многозначных векторных полей, определенных на конечно-дефектных подмногообразиях рефлексивного пространства. Изучена связь между критическими значениями и гомологическими характеристиками нижних лебеговых множеств липшицевых функционалов. Намечены приложения к теории операторных включений с векторным параметром.

Основу статьи составляют идеи и методы нелинейного анализа [1]–[8]. Близкие вопросы обсуждаются в [9]–[16]; достаточно полная библиография приведена в [9].

Используются обозначения: $\overline{\mathfrak{M}}$ ($\mathfrak{M}^0$, $\partial\mathfrak{M}$) – замыкание (внутренность, граница) подмножества $\mathfrak{M}$ метрического пространства $(\mathfrak{X}, \rho)$; $d_{\mathfrak{X}}(x, \mathfrak{M}) = \inf\{\rho(x, y), y \in \mathfrak{M}\}$ – расстояние в метрике ρ пространства $\mathfrak{X}$ от элемента x до множества $\mathfrak{M}$; $\theta_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}) = \sup\{d_{\mathfrak{X}}(x, \mathfrak{M}), x \in \mathfrak{N}\}$ – уклонение множества $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{X}$ от множества $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{X}$; метрика ρ в банаховом пространстве X с нормой $\|\cdot\|$ вводится равенством $\rho(x, y) = \|x - y\|$; через $\Gamma(X)$ обозначается совокупность конечномерных подпространств пространства X ; X^* – сопряженное к X пространство; $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – каноническая билинейная форма на $X \times X^*$, определяющая слабые топологии $\sigma(X, X^*)$ и $\sigma(X^*, X)$ на пространствах X и X^* соответственно; $s(x^*, D) = \sup\{\langle x, x^* \rangle, x \in D\}$ – опорная функция множества $D \subset X$; $\text{Cv}(X)$ – совокупность всех непустых выпуклых замкнутых подмножеств пространства X ; $B = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}$ – единичный шар пространства X . Ниже $\mathcal{L}(X, Y)$ – пространство непрерывных линейных отображений банахова пространства X в банахово пространство Y ; $\text{Ker } A$, $\text{Im } A$ – ядро и область значений отображения A из $\mathcal{L}(X, Y)$. Если $\text{Im } A = Y$, то A называют *эпиморфизмом* X на Y ; в этом случае верна оценка $d_X(0, A^{-1}y) \leq k\|y\|$, наименьшая из подобных постоянных k обозначается через $\kappa(A)$ и называется далее *константой Банаха* эпиморфизма $A: X \rightarrow Y$.

Через $\Lambda(D, Y)$ обозначается совокупность отображений (не обязательно линейных) множества $D \subset X$ в банахово пространство Y , удовлетворяющих локальному условию Липшица, т.е. $h \in \Lambda(D, Y)$, если для каждой точки x из D найдутся ее относительная окрестность O и константа L такие, что $\|h(x_1) - h(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|$ ($x_1, x_2 \in O$); полагаем $\Lambda(D, \mathbb{R}) = \Lambda(D)$.

Стандартным образом определяются классы непрерывных, вполне непрерывных, слабо непрерывных и усиленно непрерывных отображений из $D \subset X$ в Y (см., например, [9; §1.5] или [17; §1]); далее $C^1(D, Y)$ – класс непрерывно дифференцируемых отображений области $D \subset X$ в пространство Y , $C^{1,1}(D, Y)$ – часть $C^1(D, Y)$, состоящая из отображений $h: D \rightarrow Y$, для которых градиентное отображение $x \rightarrow h'(x)$ принадлежит классу $\Lambda(D, \mathcal{L}(X, Y))$.

Многозначное отображение множества D_1 в множество D_2 – это оператор, сопоставляющий элементу x из D_1 некоторое множество $\mathcal{F}(x) \subset D_2$; если $D \subset D_1$, то $\mathcal{F}(D) = \bigcup_{x \in D} \mathcal{F}(x)$ – область значений отображения $\mathcal{F}$ на множестве D . Отображение $\mathcal{F}: D_1 \rightarrow D_2$ (D_1, D_2 – подмножества метрических пространств $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ соответственно) называют *ограниченным*, если для каждого ограниченного множества $D \subset D_1$ область значений $\mathcal{F}(D)$ есть ограниченное подмножество $\mathfrak{R}_2$. Оператор тождественного преобразования обозначается символом I . Все рассматриваемые в статье банаховы пространства предполагаются действительными.

1. Всюду далее V – сепарабельное бесконечномерное рефлексивное банахово пространство, $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_*$ – нормы в пространстве V и в сопряженном к нему V^* , символы $\rightharpoonup$ и $\rightarrow$ означают слабую и сильную сходимость соответственно; $\mathbb{R}^m$ – m -мерное евклидово пространство точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$; $C^1(V, \mathbb{R}^m)$ – класс непрерывно дифференцируемых отображений из V в $\mathbb{R}^m$. Если $h \in C^1(V, \mathbb{R}^m)$, $x \in V$ и производная $h'(x): V \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть эпиморфизм, то x называют *регулярной точкой* отображения h . Элемент $\xi \in \mathbb{R}^m$ именуют *регулярным значением* отображения h , если множество $h^{-1}(\xi) = \{x \in V, h(x) = \xi\}$ либо пусто, либо состоит из регулярных точек. Регулярное значение ξ из $\mathbb{R}^m$ назовем *равномерно регулярным*, если константа Банаха $\varkappa(h'(x))$ оператора $h'(x): V \rightarrow \mathbb{R}^m$ равномерно ограничена на каждом из множеств $h^{-1}(\xi) \cap RB_V$ ($R < \infty$). Если оператор $h': V \rightarrow \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^m)$ усиленно непрерывен, то каждое регулярное значение является равномерно регулярным.

Ниже рассматривается множество M , определяемое равенством

$$M = g^{-1}(\xi) = \{x \in V, g(x) = \xi\}, \quad (1)$$

где $g = (g_1, \dots, g_m)$ – оператор класса $C^{1,1}(V, \mathbb{R}^m)$, удовлетворяющий условиям:

Ig) оператор $g': V \rightarrow \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^m)$ вполне непрерывен;

IIg) ξ – равномерно регулярное значение оператора g , $g^{-1}(\xi) \neq \emptyset$.

Условие Ig) влечет усиленную непрерывность оператора $g: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ (см. [17; §7]); в частности, множество M слабо замкнуто в пространстве V . Так как ξ – регулярное значение отображения g , то M есть $C^{1,1}$ -подмногообразие пространства V (см. [18]). Для каждой точки x из M касательное к многообразию M пространство $T_x M$ можно идентифицировать с ядром $\text{Ker } g'(x) \subset V$ оператора $g'(x): V \rightarrow \mathbb{R}^m$, обозначаемым ниже символом T_x . Очевидно, T_x имеет коразмерность m : $\text{codim } T_x = m$; в этом смысле M – конечно-дефектное подмногообразие пространства V . Далее, $\mathcal{N}(x) = T_x^\perp = \{x^* \in V^* : \langle v, x^* \rangle = 0 \forall v \in T_x\}$ – аннулятор пространства T_x . Очевидно, что $\mathcal{N}(x) = \{x^* \in V^* : x^* = y^* g'(x) = y_1 g'_1(x) + \dots + y_m g'_m(x), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m\}$.

Последовательность $E_n \in \Gamma(V)$ ($n = 1, 2, \dots$) назовем *исчерпывающей* пространство V , если $E_n \subset E_{n+1}$ и $\bigcup_n E_n = V$. Если $j_n: E_n \rightarrow V$ – оператор вложения ($n = 1, 2, \dots$), $A: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ – эпиморфизм, то при достаточно больших n

оператор $A \circ j_n: E_n \rightarrow \mathbb{R}^m$ – также эпиморфизм, при этом последовательность констант Банаха $\varkappa(A \circ j_n)$ монотонно убывает и стремится к $\varkappa(A)$. Аналогично, если имеется компактное в $\mathcal{L}(V, \mathbb{R}^m)$ семейство эпиморфизмов $\{A\}$, то равномерно относительно A из данного семейства $\varkappa(A \circ j_n) \rightarrow \varkappa(A)$ при $n \rightarrow \infty$. Это рассуждение применимо к множеству операторов $g'(x)$ ($x \in M \cap RB_V$). Из проведенных рассуждений вытекает

ЛЕММА 1. *Для любого числа $R < \infty$ найдется такое число $n(R)$, что если $n > n(R)$, $x \in M \cap RB_V$, то*

$$\varkappa(g'(x) \circ j_n) \leq 2 \sup\{\varkappa(g'(z)), z \in M \cap RB_V\}. \quad (2)$$

Не ограничивая общности, считаем далее, что $M \cap E_1 \neq \emptyset$, $\dim E_1 > m$. Из леммы 1 следует, что если $n > n(R)$, то пересечение $M \cap E_n \cap RB_V$ ($R \gg 1$) есть подмногообразие (с краем) пространства E_n .

Векторным полем на множестве $M_0 \subset M$ назовем отображение $\Phi: M_0 \rightarrow V$ такое, что $\Phi(x) \in T_x$ для всех x из M_0 . Существенную роль в дальнейшем играют конечномерные векторные поля [4; § 18]. Напомним, что поле $\Phi: M_0 \rightarrow V$ называют *конечномерным*, если область значений отображения $I - \Phi: M_0 \rightarrow V$ содержится в конечномерном подпространстве пространства V .

ЛЕММА 2. *Пусть $R < \infty$, $n > n(R)$, $x_0 \in M \cap RB_V$, $y_0 \in E_n$, $x_0 - y_0 \in T_{x_0}$. Тогда существует ограниченное отображение w_1 класса $\Lambda(M \cap RB_V, E_n)$, удовлетворяющее условиям*

$$w_1(x_0) = y_0, \quad x - w_1(x) \in T_x \quad (x \in M \cap RB_V).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наделим E_n структурой евклидова пространства. Определим $w_1(x)$ как проекцию y_0 на аффинное многообразие $\{y \in E_n, g'(x)y = g'(x)x\}$. Равенство $w_1(x_0) = y_0$ очевидно; ограниченность отображения w_1 вытекает из (2); наконец, включение $w_1 \in \Lambda(M \cap RB_V, E_n)$ следует из условия $g \in C^{1,1}(V, \mathbb{R}^m)$. Лемма доказана.

Пусть $Q = \overline{Q} \subset V$. Обозначим через $S(Q)$ совокупность многозначных операторов $\mathcal{F}: Q \rightarrow V^*$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $\mathcal{F}(x) \in \text{Cv}(V^*)$ для каждого x из Q ;
- 2) для произвольных последовательностей $x_n \in Q$, $x_n^* \in \mathcal{F}(x_n)$, обладающих свойствами

$$x_n \rightarrow x, \quad x_n^* \rightarrow x^*, \quad \overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \langle x_n, x_n^* \rangle \leq \langle x, x^* \rangle, \quad (3)$$

имеют место соотношения: $x_n \rightarrow x$, $x^* \in \mathcal{F}(x)$.

Ближкие классы однозначных операторов рассматривались в [1]–[3], [9]–[12]. Примеры многозначных операторов класса $S(Q)$ можно найти в [14]–[16]. Оператор класса $S(Q)$ хеминепрерывен сверху [8; гл. 3, п. 2]: для любого v из V функция $s(v, \mathcal{F}(x))$ полунепрерывна сверху в каждой точке $x \in V$. Сужение оператора $\mathcal{F}$ класса $S(Q)$ на замкнутое множество $Q_0 \subset Q$ есть оператор класса $S(Q_0)$. В частности, сужение оператора $\mathcal{F}$ класса $S(V)$ на определяемое равенством (1) многообразие M есть оператор класса $S(M)$.

С произвольным оператором $\mathcal{F}$ класса $S(M)$ свяжем оператор $\mathcal{F}_M$, сопоставляющий элементу x из M множество сужений функционалов x^* из $\mathcal{F}(x)$ на пространство T_x . Таким образом, $\mathcal{F}_M(x)$ есть множество класса $\text{Cv}(T_x^*)$. Элемент $x \in M$ назовем *особой точкой* оператора $\mathcal{F}_M$, если $0 \in \mathcal{F}_M(x)$, что эквивалентно включению $0 \in \mathcal{F}(x) + \mathcal{N}(x)$. С учетом данного ранее описания пространства $\mathcal{N}(x)$ получаем, что особые точки оператора $\mathcal{F}_M$ совпадают с решениями операторного включения

$$0 \in \mathcal{F}(x) + y^* g'(x), \quad g(x) = \xi, \quad (4)$$

где векторный параметр $y = (y_1, \dots, y_m)$ играет роль естественного обобщения собственного значения, $y^* g'(x) = y_1 g'_1(x) + \dots + y_m g'_m(x)$, равенство $g(x) = \xi$ задает некоторое условие нормировки.

Множество $\mathfrak{M} \subset M$ назовем *особым* для поля $\mathcal{F}$, если любой элемент x из $\mathfrak{M}$ есть особая точка оператора $\mathcal{F}_M$. Особое множество *изолировано*, если в некоторой его окрестности нет других особых точек оператора $\mathcal{F}_M$.

ЛЕММА 3. *Пересечение множества особых точек оператора $\mathcal{F}_M$ класса $S(M)$ с любым шаром RB_V компактно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x_n — бесконечная ограниченная последовательность особых точек оператора $\mathcal{F}_M$. Тогда $0 \in \mathcal{F}_M(x_n)$, т.е. существует последовательность x_n^* из $\mathcal{F}(x_n) \cap \mathcal{N}(x_n)$. Без ограничения общности можно считать, что $x_n \rightharpoonup x$, $x_n^* \rightharpoonup x^*$. Так как $x_n^* \in \mathcal{N}(x_n)$, то $x_n^* + y_n^* g'(x_n) = 0$ для некоторого y_n из $\mathbb{R}^m$. В силу свойства Πg последовательность y_n ограничена в $\mathbb{R}^m$. Без ограничения общности можно считать, что $y_n \rightarrow y$ в $\mathbb{R}^m$, а последовательность $g'(x_n)$ сходится в пространстве $\mathcal{L}(V, \mathbb{R}^m)$. Поэтому $x_n^* \rightarrow x^*$, следовательно, $\langle x_n, x_n^* \rangle \rightarrow \langle x, x^* \rangle$, $x_n \rightarrow x$, $x^* \in \mathcal{F}(x) \cap \mathcal{N}(x)$, т.е. x — особая точка оператора $\mathcal{F}_M$. Проведенное рассуждение очевидным образом влечет требуемый результат.

Оператор $\mathcal{F}$ класса $S(M)$ назовем *невыврожденным* на множестве $\mathfrak{M} \subset M$, если $\mathfrak{M}$ не содержит особых точек оператора $\mathcal{F}_M$. Основополагающую роль в дальнейшем играет

ЛЕММА 4. *Пусть оператор $\mathcal{F}$ класса $S(M)$ невыврожден на замкнутом множестве $\mathfrak{M} \subset M$, причем $\theta_V(\mathfrak{M}, 0) < R$. Тогда существуют пространство E из $\Gamma(V)$, равномерно ограниченное отображение w класса $\Lambda(M \cap RB_V, E)$ и постоянная $\delta > 0$, обладающие свойствами:*

$$\begin{aligned} w(x) - x &\in T_x \quad (x \in M \cap RB_V), \\ \|w(x)\| &\leq R, \quad s(w(x) - x, \mathcal{F}(x)) < -\delta \quad (x \in \mathfrak{M}). \end{aligned} \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\theta_V(\mathfrak{M}, 0) < R_1 < R$. Фиксируем исчерпывающую пространство V последовательность $E_n \in \Gamma(V)$ ($n = 1, 2, \dots$), $M \cap E_1 \neq \emptyset$, $\dim E_1 > m$. Положим

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ x \in M : d_V(x, \mathfrak{M}) \leq \frac{1}{n}, s(v - x, \mathcal{F}(x)) \geq -\frac{1}{n} \quad \forall v \in R_1 B_V \cap E_n \cap (x + T_x) \right\}.$$

Докажем, что $\mathfrak{M}_n = \emptyset$ при больших n . В предположении противного $\mathfrak{M}_n \neq \emptyset$ для бесконечного числа индексов n . Не ограничивая общности, можно считать, что $\mathfrak{M}_n \neq \emptyset \quad \forall n$.

Пусть $x_n \in \mathfrak{M}_n$ ($n = 1, 2, \dots$), $\mathfrak{B}_n = R_1 B_V \cap E_n \cap (x_n + T_{x_n})$. Согласно теоремам о минимаксе (см., например, [8; гл. 6, п. 2]) найдется такой элемент x_n^* из $\mathcal{F}(x_n)$, что

$$\min_{v \in \mathfrak{B}_n} \langle v - x_n, x_n^* \rangle = \min_{v \in \mathfrak{B}_n} s(v - x_n, \mathcal{F}(x_n)) \geq -\frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\langle x_n, x_n^* \rangle \leq \langle v, x_n^* \rangle + \frac{1}{n} \quad (v \in \mathfrak{B}_n). \quad (6)$$

Последовательности x_n , x_n^* ограничены в пространствах V , V^* . Так как V – рефлексивное пространство, то эти последовательности можно считать слабо сходящимися к элементам x , x^* . Очевидно, что $x \in M$, $\|x\| \leq \theta_V(\mathfrak{M}, 0) < R_1$. Оценка (6) влечет неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, x_n^* \rangle \leq \langle v, x^* \rangle \quad \forall v \in \mathfrak{B} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{B}_n. \quad (7)$$

Здесь $\mathfrak{B}$ – верхний топологический предел последовательности множеств $\mathfrak{B}_n$ ($n = 1, 2, \dots$), состоящий из тех элементов $v \in V$, каждая окрестность которых пересекается с бесконечным числом множеств $\mathfrak{B}_n$.

Докажем включение $x \in \mathfrak{B}$. Пусть $z_n \in E_n$ и $\|x - z_n\| = d_V(x, E_n)$. Из определения константы Банаха следует неравенство

$$d_V(z_n, x_n + T_{x_n}) \leq \kappa(g'(x_n) \circ j_n) \|g'(x_n)(x_n - z_n)\|.$$

Так как $g': V \rightarrow \mathcal{L}(V, \mathbb{R}^m)$ – вполне непрерывный оператор, а $x_n - z_n \rightarrow 0$, то

$$\|g'(x_n)(x_n - z_n)\| \rightarrow 0.$$

Объединяя это с оценкой (2), получаем, что $d_V(z_n, x_n + T_{x_n}) \rightarrow 0$. Поскольку $d_V(x, x_n + T_{x_n}) \leq d_V(x, E_n) + d_V(z_n, x_n + T_{x_n})$, то $d_V(x, x_n + T_{x_n}) \rightarrow 0$. Отсюда (с учетом неравенства $\|x\| < R_1$) следует включение $x \in \mathfrak{B}$.

Полагая в (7) $v = x$, получаем, что последовательности x_n , x_n^* обладают свойствами (3), поэтому $x_n \rightarrow x$, $x \in \mathfrak{M}$, $x^* \in \mathcal{F}(x)$. Используя сильную сходимость x_n к x , нетрудно установить равенство $\mathfrak{B} = R_1 B_V \cap (x + T_x)$.

Неравенство (7) влечет оценку $\langle x, x^* \rangle \leq \langle v, x^* \rangle \quad \forall v \in \mathfrak{B}$, означающую, что x – внутренняя (относительно аффинного многообразия $x + T_x$) точка минимума функционала $\langle \cdot, x^* \rangle$ на множестве $\mathfrak{B}$. Отсюда получаем последовательно $\langle v, x^* \rangle = 0 \quad \forall v \in T_x$, $-x^* \in T_x^\perp = \mathcal{N}(x)$, $0 \in \mathcal{F}(x) + \mathcal{N}(x)$. Таким образом, $x \in \mathfrak{M}$, $0 \in \mathcal{F}_M(x)$, но это противоречит невырожденности оператора $\mathcal{F}$ на множестве $\mathfrak{M}$.

Фиксируем натуральное число $k > n(R)$ (см. лемму 1) так, что $\mathfrak{M}_k = \emptyset$. Положим $\mathfrak{R} = \{x \in M : d_V(x, \mathfrak{M}) \leq 1/k\}$, $\delta = 1/(2k)$. Каждому y из $\mathfrak{R}$ сопоставим множество $\mathfrak{B}_y = R_1 B_V \cap E_k \cap (y + T_y)$. Тогда $\min\{s(v - y, \mathcal{F}(y)), v \in \mathfrak{B}_y\} < -\delta \quad \forall y \in \mathfrak{R}$. Подберем вектор v_y из $\mathfrak{B}_y$ так, что $s(v_y - y, \mathcal{F}(y)) < -\delta$. Согласно лемме 2 существует ограниченное отображение ψ_y класса $\Lambda(M \cap R B_V, E_k)$, удовлетворяющее условиям $\psi_y(y) = v_y$, $x - \psi_y(x) \in T_x \quad \forall x \in M \cap R B_V$. Из хеминепрерывности оператора $\mathcal{F}$ и непрерывности отображения ψ_y вытекает существование такой окрестности O_y точки y , что

$$s(\psi_y(x) - x, \mathcal{F}(x)) < -\delta, \quad \|\psi_y(x)\| < R \quad \forall x \in O_y.$$

Впишем в покрытие O_y ($y \in \mathfrak{R}$) метрического пространства $\mathfrak{R}$ локально конечное покрытие D_j ($j \in J$). Пусть φ_j ($j \in J$) – разбиение единицы класса $\Lambda(\mathfrak{R})$, подчиненное покрытию D_j . Векторное поле

$$w_0(x) = \sum_{j \in J} \varphi_j(x) \psi_{y_j}(x)$$

(элемент y_j подобран так, что $D_j \subset O_{y_j}$) обладает свойствами: $w_0(x) - x \in T_x$, $w_0(x) \in E_k \cap RB_V$, $s(w_0(x) - x, \mathcal{F}(x)) < -\delta$ ($x \in \mathfrak{R}$).

Пусть $\eta(t) = 1$ при $t \leq 1$, $\eta(t) = 2 - t$ при $1 < t < 2$ и $\eta(t) = 0$ при $t \geq 2$. Следуя лемме 2, построим ограниченное отображение w_1 класса $\Lambda(M \cap RB_V, E_k)$, для которого $x - w_1(x) \in T_x$ ($x \in M \cap RB_V$). Определим векторное поле $w: M \cap RB_V \rightarrow E_k$ равенством

$$w(x) = \eta(3kd_V(x, \mathfrak{M}))w_0(x) + (1 - \eta(3kd_V(x, \mathfrak{M})))w_1(x).$$

Поскольку $\eta(3kd_V(x, \mathfrak{M})) = 0$ для x из $M \setminus \mathfrak{R}$, то способ продолжения поля w_0 на $(M \cap RB_V) \setminus \mathfrak{R}$ несуществен. Из отмеченных выше свойств векторных полей w_0, w_1 вытекает, что отображение w принадлежит классу $\Lambda(M \cap RB_V, E_k)$, равномерно ограничено и обладает свойствами (5) при $E = E_k, \delta = 1/(2k)$. Лемма доказана.

Пространство E , отображение w и постоянная δ , обладающие отмеченными в лемме 4 свойствами, определяются неоднозначно. Например, в достаточной мере произволен выбор исчерпывающей пространство V последовательности E_n класса $\Gamma(V)$. В предположениях леммы 4 конечномерное векторное поле $I - w: M \cap RB_V \rightarrow V$ образует с полем $\mathcal{F}$ острый угол на множестве $M \cap RB_V$; в этом смысле поле $I - w$ есть конечномерная остроугольная аппроксимация поля $\mathcal{F}$.

Пусть Ω – ограниченное открытое (в относительной топологии) подмножество многообразия M , $\partial\Omega$ – граница области Ω . Если оператор $\mathcal{F}$ класса $S(M)$ невырожден на $\partial\Omega$, то согласно лемме 4 существуют E из $\Gamma(V)$ и поле w класса $\Lambda(\partial\Omega, E)$ такие, что

$$x - w(x) \in T_x, \quad \langle x - w(x), x^* \rangle > 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad x^* \in \mathcal{F}(x), \quad (8)$$

и $\Omega \cap E \neq \emptyset$. Поскольку $\partial(\Omega \cap E) \subset \partial\Omega \cap E$, то поле $I - w$ невырождено на $\partial(\Omega \cap E)$. Поэтому определено вращение $\gamma(I - w, \Omega \cap E)$ поля $I - w$ на $\partial(\Omega \cap E)$ (см., например, [7; часть 2, §6]). Это вращение не зависит от произвола в способе выбора пространства E и поля w , подчиненных требованиям (8). Число $\gamma(I - w, \Omega \cap E)$ назовем *вращением* поля $\mathcal{F}_M$ на $\partial\Omega$ и обозначим символом $\gamma(\mathcal{F}_M, \Omega)$.

Отметим некоторые свойства вращения. Если оператор $\mathcal{F}$ невырожден на замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω , то существует конечномерное векторное поле $I - w$, образующее острый угол с полем $\mathcal{F}$ на $\overline{\Omega}$. Следовательно, $\gamma(\mathcal{F}_M, \Omega) = \gamma(I - w, \Omega \cap E) = 0$. Таким образом, доказан принцип нулевого вращения: если оператор $\mathcal{F}$ невырожден на $\overline{\Omega}$, то $\gamma(\mathcal{F}_M, \Omega) = 0$.

Сходным образом могут быть установлены аддитивность и гомотопическая инвариантность вращения. Приведем формулировку свойства аддитивности (его доказательство проводится по стандартным схемам [2]–[5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Ω , Ω_i ($i = 1, \dots, k$) – ограниченные открытые подмножества многообразия M , $\Omega_i \subset \Omega$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ при $i \neq j$, и векторное поле $\mathcal{F}$ класса $S(M)$ невырождено на $\overline{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^k \Omega_i$. Тогда

$$\gamma(\mathcal{F}_M, \Omega) = \gamma(\mathcal{F}_M, \Omega_1) + \dots + \gamma(\mathcal{F}_M, \Omega_k).$$

Если $\mathfrak{N}$ – ограниченное изолированное особое множество поля $\mathcal{F}$, то для ограниченных окрестностей O множества $\mathfrak{N}$ таких, что поле $\mathcal{F}$ невырождено на $O \setminus \mathfrak{N}$, вращение $\gamma(\mathcal{F}_M, O)$ одинаково; оно называется *индексом особого множества $\mathfrak{N}$ поля $\mathcal{F}$* и обозначается символом $\text{ind}(\mathfrak{N}, \mathcal{F}_M)$. Из леммы 3 и предложения 1 вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (теорема об алгебраическом числе особых множеств). Пусть оператор $\mathcal{F}$ невырожден на границе $\partial\Omega$ ограниченного открытого множества $\Omega \subset M$. Тогда в области Ω существует лишь конечное число изолированных особых множеств $\mathfrak{N}_1, \dots, \mathfrak{N}_k$ поля $\mathcal{F}$ и

$$\gamma(\mathcal{F}_M, \Omega) = \text{ind}(\mathfrak{N}_1, \mathcal{F}_M) + \dots + \text{ind}(\mathfrak{N}_k, \mathcal{F}_M).$$

Предложения 1, 2 могут быть использованы для оценок сверху и снизу числа особых множеств поля $\mathcal{F}$. Основная возникающая здесь трудность связана с вычислением $\gamma(\mathcal{F}_M, \Omega)$ и $\text{ind}(\mathfrak{N}, \mathcal{F}_M)$.

2. В этом пункте доказывается бесконечномерный вариант теоремы Пуанкаре–Хопфа. Напомним некоторые понятия алгебраической топологии [19], [20] и негладкого анализа [6], [8]. Пусть $(\mathfrak{X}, \rho)$ – метрическое пространство, $H_l(\mathfrak{X})$ ($l = 0, 1, \dots$) – группы целочисленных гомологий с компактными носителями (см. [19; гл. 9], [20; гл. 10]), $b_l(\mathfrak{X})$ – ранг группы $H_l(\mathfrak{X})$, называемый *l -м числом Бетти* пространства $\mathfrak{X}$. Если $b_l(\mathfrak{X}) < \infty \ \forall l$ и $b_l(\mathfrak{X}) = 0$ при $l \geq l_0$, то число

$$\chi(\mathfrak{X}) = b_0(\mathfrak{X}) - b_1(\mathfrak{X}) + \dots + (-1)^l b_l(\mathfrak{X}) + \dots$$

называют *эйлеровой характеристикой* пространства $\mathfrak{X}$.

Семейство преобразований $U_t: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ ($t \geq 0$) образует *непрерывную полугруппу*, если $U_0 = I$, $U_t U_s = U_{t+s}$ при $t \geq 0$, $s \geq 0$ (полугрупповое свойство) и отображение $(x, t) \rightarrow U_t x$ непрерывно из $\mathfrak{X} \times [0, \infty)$ в $\mathfrak{X}$ (свойство непрерывности). Множество $\mathcal{B}_0 \subset \mathfrak{X}$ *притягивает* [21] множество $\mathcal{B} \subset \mathfrak{X}$, если $\theta_{\mathfrak{X}}(U_t \mathcal{B}, \mathcal{B}_0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 5. Пусть $U_t: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ ($t \geq 0$) – непрерывная полугруппа, удовлетворяющая условиям:

- 1) при каждом $t \geq 0$ преобразование $U_t: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ есть инъекция;
- 2) множество $\mathfrak{U} = \bigcap_{t \geq 0} U_t \mathfrak{X}$ есть непустой компакт, притягивающий каждый непустой компакт $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{X}$.

Тогда группы гомологий пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{U}$ изоморфны:

$$H_l(\mathfrak{X}) \simeq H_l(\mathfrak{U}), \quad l = 0, 1, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{K}(\mathfrak{R})$ – класс компактных подмножеств пространства $\mathfrak{R}$, рассматриваемый как направленное подмножество (см. [19; приложение, § А.2]) относительно порядка, порождаемого включением. Обозначим через $\mathcal{K}_1(\mathfrak{R})$ часть $\mathcal{K}(\mathfrak{R})$, состоящую из компактов $\mathfrak{K}$, удовлетворяющих условиям: $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{K}$, $U_t \mathfrak{K} \subset \mathfrak{K}$, $t \geq 0$. Если $\mathfrak{K}_0 \in \mathcal{K}(\mathfrak{R})$, то, используя условие 2) леммы 5, несложно показать, что содержащее $\mathfrak{K}_0$ множество $\mathfrak{K} = \bigcup_{t \geq 0} U_t(\mathfrak{K}_0 \cup \mathfrak{U})$ принадлежит $\mathcal{K}_1(\mathfrak{R})$. Таким образом, $\mathcal{K}_1(\mathfrak{R})$ есть конфинальная часть $\mathcal{K}(\mathfrak{R})$.

Пусть $P \in \mathcal{K}_1(\mathfrak{R})$, $P_n = U_n(P)$, $n = 0, 1, \dots$; $\Pi_n^m: P_m \rightarrow P_n$ ($m \geq n$) – отображение вложения. Пространство $\mathfrak{U}$ является пересечением спектра пространств $\{P_n, \Pi_n^m\}$ (см. [20; гл. 10, п. 2]). При любых $m \geq n$ отображение вложения $\Pi_n^m: P_m \rightarrow P_n$ гомотопно гомеоморфизму $U_n U_m^{-1}: P_m \rightarrow P_n$. Соединяющее Π_n^m и $U_n U_m^{-1}$ семейство отображений $\Phi_\lambda: P_m \rightarrow P_n$ ($0 \leq \lambda \leq 1$) можно определить равенством $\Phi_\lambda = U_{(1-\lambda)m+\lambda n} U_m^{-1}$.

Фиксируем целое число $l \geq 0$. Индуцированный Π_n^m гомоморфизм Π_{n*}^m групп гомологий $H_l(P_m)$ и $H_l(P_n)$ является изоморфизмом. В силу свойства непрерывности спектральных гомологий [20; гл. 10, п. 3] индуцируемый вложением $i: \mathfrak{U} \rightarrow P$ гомоморфизм $i_*: H_l(\mathfrak{U}) \rightarrow H_l(P)$ также есть изоморфизм.

Пусть $P' \in \mathcal{K}_1(\mathfrak{R})$, $P \subset P'$ и $k = k(P, P'): P \rightarrow P'$ – оператор вложения. Для индуцируемого вложением $j = ki: \mathfrak{U} \rightarrow P'$ гомоморфизма $j_*: H_l(\mathfrak{U}) \rightarrow H_l(P')$ верно равенство $j_* = k_* i_*$. Так как j_* , i_* есть изоморфизмы, то и $k_* = k_*(P, P'): H_l(P) \rightarrow H_l(P')$ также есть изоморфизм. По определению гомологий с компактными носителями [19; § 9.2] $H_l(\mathfrak{R})$ есть предел прямого спектра групп $\{H_l(P), k_*(P, P')\}$, $P \in \mathcal{K}_1(\mathfrak{R})$, $P' \in \mathcal{K}_1(\mathfrak{R})$. Отсюда вытекает изоморфизм групп $H_l(\mathfrak{R})$ и $H_l(\mathfrak{U})$. Лемма доказана.

Далее лемма 5 применяется в ситуации, когда $\mathfrak{R}$ – замкнутое подмножество банахова пространства X , а непрерывная полугруппа $U_t: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ есть семейство операторов сдвига по траекториям дифференциального уравнения типа $x' = v(x)$, где векторное поле v направлено “внутри” множества $\mathfrak{R}$. Существенную роль здесь начинают играть понятия обобщенного градиента и конуса гиперкасательных [6; гл. 2], [8; гл. 7].

Пусть D – подмножество банахова пространства X , $x \in D^0$, $h \in \Lambda(D)$. Равенство

$$h^0(x; v) = \overline{\lim}_{y \rightarrow x, t \rightarrow +0} \frac{h(y + tv) - h(y)}{t} \quad (v \in X)$$

определяет сублинейный функционал $h^0(x; \cdot): X \rightarrow \mathbb{R}$ и множество $\partial h(x) = \{x^* \in X^* : \langle v, x^* \rangle \leq h^0(x; v) \ \forall v \in X\}$, называемое *обобщенным градиентом* функционала h в точке x [6; гл. 2]. Известно, что $\partial h(x)$ – выпуклое и компактное в $\sigma(X^*, X)$ -топологии множество и $h^0(x; v) = \max\{\langle v, x^* \rangle, x^* \in \partial h(x)\}$.

Если $z \in D$, $v \in X$ и при некотором $\varepsilon > 0$ $y + tw \in D$ для всех $y \in (z + \varepsilon B_X) \cap D$, $w \in v + \varepsilon B_X$, $t \in (0, \varepsilon)$, то вектор v называют *гиперкасательной* к множеству D в точке z . Множество $\mathcal{K}_D(z)$ всех таких гиперкасательных есть выпуклый открытый конус в пространстве X [6; гл. 2].

Остановимся на одном обобщении [14]. Пусть $\mathcal{M}$ – многообразие класса C^k ($k \geq 1$), моделируемое банаховым пространством X [18], [22]. Введем аналог конуса гиперкасательных для множества $D \subset \mathcal{M}$. Обозначим через $T_x \mathcal{M}$ касательное в точке $x \in \mathcal{M}$ пространство к многообразию $\mathcal{M}$. Каждая карта (W, φ) в точке x индуцирует каноническое отображение $\varphi_{*x}: T_x \mathcal{M} \rightarrow X$. Если $x \in D \cap W$, то

$\varphi(x) \subset \varphi(D \cap W) \subset X$, поэтому можно ввести конус $\mathcal{K}_{\varphi(D \cap W)}(\varphi(x))$ гиперкасательных к множеству $\varphi(D \cap W) \subset X$ в точке $\varphi(x)$. Положим

$$\mathcal{K}_D(x) = (\varphi_{*x})^{-1} \mathcal{K}_{\varphi(D \cap W)}(\varphi(x)).$$

Стандартным образом проверяется независимость от выбора содержащей x карты (W, φ) множества $\mathcal{K}_D(x)$, называемого [14] *конусом гиперкасательных* к множеству D в точке x .

Рассмотрим частный случай, когда $\mathcal{M}$ совпадает с конечно-дефектным подмногообразием M рефлексивного пространства V , определяемым равенством (1), а множество $D \subset M$ задается соотношением $D = \{z \in M : h(z) \leq 0\}$, в котором $h \in \Lambda(V)$. В этом случае конус гиперкасательных $\mathcal{K}_D(x)$ естественно идентифицировать с некоторым подмножеством пространства $T_x = \text{Ker } g'(x) \subset V$. Например, если $x \in M$ и $h(x) < 0$, то можно считать, что $\mathcal{K}_D(x) = T_x$; если $x \in M$ и $h(x) = 0$, то справедливо включение $\{v \in T_x : h^0(x; v) < 0\} \subset \mathcal{K}_D(x)$, становящееся равенством, если функция h регулярна в точке x [6; § 2.3].

В качестве еще одного примера рассмотрим случай, когда $\mathcal{M}$ – подмногообразие класса C^1 конечномерного евклидова пространства $\mathcal{H}$. Ограниченное множество $D \subset \mathcal{M}$ назовем *сильно липшицевым*, если $\mathcal{K}_D(x) \neq \emptyset \ \forall x \in D$. Требование $\mathcal{K}_D(x) \neq \emptyset$ обеспечивает равенство $D = \overline{(D^0)}$. Для сильно липшицева множества D конечны все числа Бетти $b_l(D)$ и $b_l(D) = 0$ при $l > \dim \mathcal{M}$. Поэтому имеет смысл эйлерова характеристика $\chi(D)$ множества D .

ЛЕММА 6. Пусть множество $D \subset \mathcal{M}$ сильно липшицево, $v \in \Lambda(D, \mathcal{H})$ и $v(x) \in \mathcal{K}_D(x) \ \forall x \in D$. Тогда

- 1) при любом z из D задача Коши $x' = v(x)$, $x(0) = z$ имеет единственное решение $x(t; z)$, $t \geq 0$, $z \in D$;
- 2) определяемое равенством $U_t z = x(t; z)$ семейство операторов сдвига $U_t : D \rightarrow D$ ($t \geq 0$) образует непрерывную полугруппу;
- 3) вращение $\gamma(-v, D^0)$ поля $-v$ на границе ∂D множества D совпадает с эйлеровой характеристикой $\chi(D)$ множества D : $\gamma(-v, D^0) = \chi(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы в случае $\mathcal{M} = \mathcal{H}$ проведено в [15]; оно безо всяких изменений переносится на рассматриваемый случай.

Введем специальный класс векторных полей на определенном равенством (1) многообразии $M \subset V$. Оператор $\mathcal{F}$ класса $S(M)$ назовем *конормальным* ограниченному открытому подмножеству Ω многообразия M , если $\mathcal{F}$ невырожден на границе $\partial\Omega$ области Ω , причем если $x \in \partial\Omega$, $v \in T_x$ и $s(v, \mathcal{F}(x)) < 0$, то $v \in \mathcal{K}_{\overline{\Omega}}(x)$. Согласно лемме 4 конормальность оператора $\mathcal{F}$ области Ω влечет существование пространства E класса $\Gamma(V)$ и векторного поля $v(x) = w(x) - x$ ($x \in \partial\Omega$), для которого $w(x) \in E$, $s(v(x), \mathcal{F}(x)) < 0$. В частности, $v(x) \in \mathcal{K}_{\overline{\Omega}}(x)$. Таким образом, существование конормальной области Ω оператора $\mathcal{F}$ возможно лишь в случае $\mathcal{K}_{\overline{\Omega}}(x) \neq \emptyset \ \forall x \in \partial\Omega$; как и в конечномерном случае, это означает определенную регулярность области Ω .

ТЕОРЕМА 1. Пусть оператор $\mathcal{F}$ класса $S(M)$ конормален ограниченной области $\Omega \subset M$. Пусть пространство E из $\Gamma(V)$ обладает указанными в лемме 4 свойствами. Тогда

$$H_l(\overline{\Omega}) \simeq H_l(\overline{\Omega} \cap E), \quad l = 0, 1, \dots, \quad \text{и} \quad \gamma(\mathcal{F}_M, \Omega) = \chi(\overline{\Omega}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R > \theta_V(\bar{\Omega}, 0)$; пространство E из $\Gamma(V)$, равномерно ограниченное отображение w класса $\Lambda(M \cap RB_V, E)$ и постоянная $\delta > 0$ таковы, что выполнены соотношения (5) с $\mathfrak{M} = \partial\Omega$. Рассмотрим задачу Коши

$$x' = w(x) - x, \quad x(0) = z. \quad (9)$$

Фиксируем z из $\bar{\Omega}$ и положим $\mathcal{H} = \text{Lin}(E, z)$, $D = \bar{\Omega} \cap \mathcal{H}$, $\mathcal{M} = M \cap \mathcal{H}$, $v(x) = w(x) - x$ ($x \in D$). Считаем, что $\mathcal{H}$ наделено евклидовой структурой. Так как $v(x) \in \mathcal{K}_{\bar{\Omega}}(x) \cap \mathcal{H} \subset \mathcal{K}_D(x)$ ($x \in D$), то множество D и векторное поле v удовлетворяют предположениям леммы 6. Отсюда следует существование единственного решения $x(t; z)$, $t \geq 0$, задачи Коши, не выходящего за пределы множества D .

Равномерная ограниченность отображения w и включение $w \in \Lambda(M \cap RB_V, E)$ влекут непрерывность $x(t; z)$ по совокупности переменных $t \geq 0$, $z \in \bar{\Omega}$. Равенство $U_t z = x(t; z)$ ($t \geq 0$, $z \in \bar{\Omega}$) определяет непрерывную полугруппу преобразований $U_t: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$, оставляющую инвариантным не только множество $\bar{\Omega}$, но и его конечные сечения вида $\bar{\Omega} \cap Y$ ($Y \in \Gamma(V)$, $E \subset Y$).

Как и в [15], доказывается, что множество $\mathfrak{U} = \bigcap_{t \geq 0} U_t(\bar{\Omega} \cap E)$ есть непустой компакт в пространстве E , $\mathfrak{U}$ — минимальный глобальный аттрактор [21] полугруппы $U_t: \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}$ и ее сужения на $\bar{\Omega} \cap E$. В частности, компакт $\mathfrak{U}$ удовлетворяет условиям леммы 5 с $\mathfrak{R} = \bar{\Omega}$ и $\mathfrak{R} = \bar{\Omega} \cap E$, поэтому $H_l(\bar{\Omega}) \simeq H_l(\mathfrak{U}) \simeq H_l(\bar{\Omega} \cap E)$, $l = 0, 1, \dots$.

Так как $H_l(\bar{\Omega}) \simeq H_l(\bar{\Omega} \cap E)$, $l = 0, 1, \dots$, то определены и совпадают эйлеровы характеристики множеств $D = \bar{\Omega} \cap E$ и $\bar{\Omega}$: $\chi(\bar{\Omega}) = \chi(D)$. Согласно лемме 6 $\chi(D) = \gamma(-v, D^0) = \gamma(I - w, D^0)$. Но $\gamma(I - w, D^0) = \gamma(\mathcal{F}_M, \Omega)$ (см. п. 1). Итак, имеют место равенства $\chi(\bar{\Omega}) = \chi(D) = \gamma(I - w, D^0) = \gamma(\mathcal{F}_M, \Omega)$. Теорема доказана.

Теорема 1 представляет собой бесконечномерный многозначный вариант теоремы Пуанкаре–Хопфа (см., например, [7]). Проверка ее условий существенно упрощается для потенциальных операторов.

Оператор $\mathcal{F}$ класса $S(M)$ назовем *потенциальным*, если существуют такое содержащее M открытое множество $O \subset V$ и такой функционал f класса $\Lambda(O)$, что $\mathcal{F}(x) = \partial f(x)$. В этом случае функционал f назовем *потенциалом* оператора $\mathcal{F}$, особые точки оператора $\mathcal{F}_M$ — *критическими точками* функционала f , неособые точки $\mathcal{F}_M$ — *регулярными точками* f . Таким образом, x — критическая точка функционала f , если найдется такой элемент y из $\mathbb{R}^m$, что

$$0 \in \partial f(x) + y^* g'(x), \quad g(x) = \xi. \quad (10)$$

Каждая точка локального минимума функционала f на многообразии M является критической [6; § 6.1], поэтому любая окрестность регулярной точки z содержит точку y из M , для которой $f(y) < f(z)$. Если $\mathfrak{C}_f$ — множество критических точек функционала f , то числа из $f(\mathfrak{C}_f)$ называются *критическими значениями функционала f* , числа из $\mathbb{R} \setminus f(\mathfrak{C}_f)$ — *регулярными значениями f* .

Пусть b — регулярное значение функционала f . Если $x \in M$ и $f(x) = b$, то x — регулярная точка. Поэтому найдется такой элемент v из T_x , что $s(v, \partial f(x)) = f^0(x; v) < 0$. Отсюда следует [6; гл. 2], что $v \in \mathcal{K}_{\bar{\Omega}}(x)$, где $\Omega = \{x \in M, f(x) < b\}$. Оператор $\mathcal{F} = \partial f$ конормален области Ω . Отметим равенства $\bar{\Omega} = M_b = \{x \in M, f(x) \leq b\}$, $\Omega = M_b^0$. Объединяя проведенные рассуждения с теоремой 1, получаем

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть b – регулярное значение потенциала f оператора $\mathcal{F}$ и лебегово множество M_b непусто и ограничено. Тогда

- 1) найдется такое E из $\Gamma(V)$, что если $Y \in \Gamma(V)$ и $E \subset Y$, то $H_l(M_b) \simeq H_l(M_b \cap Y)$, $l = 0, 1, 2, \dots$;
- 2) $\gamma(\mathcal{F}_M, M_b^0) = \chi(M_b)$.

Следствие 1 означает совпадение гомологических характеристик у функционала f и его сужений на конечномерные подпространства. Оно дает принципиальную возможность применения метода Ритца для вычисления гомологических характеристик области меньших значений липшицевых функционалов.

3. Ниже O – открытое подмножество пространства V , содержащее определяемое равенством (1) многообразие M , $\mathcal{F}$ – потенциальный оператор класса $S(M)$ с потенциалом f из $\Lambda(O)$. Используются обозначения:

$$M_\alpha = \{x \in M, f(x) \leq \alpha\}, \quad M_{\alpha,\beta} = f^{-1}([\alpha, \beta]) = \{x \in M, \alpha \leq f(x) \leq \beta\};$$

аналогичным образом определяются множества $f^{-1}((\alpha, \beta))$, $f^{-1}(\alpha)$ и т.д.

ЛЕММА 7. Пусть $E \in \Gamma(V)$, поле w принадлежит классу $\Lambda(M_{\alpha,\beta}, E)$ и удовлетворяет соотношениям

$$w(x) - x \in T_x, \quad x \in f^{-1}((\alpha, \beta)), \quad (11)$$

$$f^0(x, w(x) - x) < -\delta, \quad x \in M_{\alpha,\beta}, \quad (12)$$

с некоторым $\delta > 0$. Тогда

- 1) при любом z из $f^{-1}((\alpha, \beta))$ задача Коши (9) имеет единственное решение $x(t; z)$, $0 \leq t \leq \tau(z)$, функция $t \rightarrow f(x(t; z))$ строго убывает на отрезке $[0, \tau(z)]$ и $f(x(\tau(z); z)) = \alpha$;
- 2) функции $\tau(z)$ и $x(t; z)$ могут быть продолжены по непрерывности на множества $M_{\alpha,\beta}$ и $\{(t, z) : z \in M_{\alpha,\beta}, 0 \leq t \leq \tau(z)\}$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование единственного решения задачи Коши (9) для z из $f^{-1}((\alpha, \beta))$ следует из включения (11) и стандартных результатов теории дифференциальных уравнений на многообразиях (см., например, [22]). Поскольку $f^{-1}(\beta) \subset \overline{f^{-1}((\alpha, \beta))}$, $w \in \Lambda(M_{\alpha,\beta}, E)$, то аналогичный факт верен для всех z из $f^{-1}((\alpha, \beta])$. В силу (12), (9) верхняя правая производная функции $t \rightarrow f(x(t; z))$ меньше $-\delta$ на том промежутке $[0, \tau]$, где $f(x(t; z)) \geq \alpha$. В частности, время перехода $\tau(z)$ точки из начального положения z на поверхность $f^{-1}(\alpha)$ по траекториям уравнения (9) удовлетворяет оценке $0 < \tau(z) < (f(z) - \alpha)/\delta$. Положим $\tau(z) = 0$, $x(0; z) = z$, если $f(z) = \alpha$. Определенные таким образом функции $\tau(z)$, $x(t; z)$ являются искомыми. Действительно, непрерывность функции $\tau(\cdot)$ на множестве $f^{-1}((\alpha, \beta])$ вытекает из равенства $f(x(\tau(z); z)) = \alpha$ и простейших теорем о неявных функциях. Оценка $0 < \tau(z) < (f(z) - \alpha)/\delta$ ($\alpha < f(z) \leq \beta$) влечет непрерывность функции $\tau(\cdot)$ в точках поверхности $f^{-1}(\alpha)$. Непрерывность функции $x(t; z)$ на соответствующем множестве следует из включения $w \in \Lambda(M_{\alpha,\beta}, E)$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть отрезок $[a, b]$ не содержит критических значений функционала f и множество $M_{a,b}$ ограничено. Тогда множество M_a есть деформационный ретракт множества M_b .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как оператор $\mathcal{F} = \partial f$ невырожден на ограниченном замкнутом множестве $\mathfrak{M} = M_{a,b}$, то в силу леммы 4 существуют пространство E из $\Gamma(V)$, равномерно ограниченное отображение w класса $\Lambda(M_{a,b}, E)$ и постоянная $\delta > 0$ такие, что выполнены условия (11), (12) при $\alpha = a$, $\beta = b$. Согласно лемме 7 существуют функции $\tau(z)$, $x(t; z)$, обладающие указанными в ней свойствами 1), 2). Определим на $M_b \times [0, 1]$ отображение $\Psi: M_b \times [0, 1] \rightarrow M$ равенством

$$\Psi(z, \lambda) = \begin{cases} x(\lambda\tau(z); z), & \text{если } z \in M_{a,b}, \\ z, & \text{если } z \in M_a. \end{cases}$$

Отображение Ψ непрерывно; $\Psi(z, 0) = z \ \forall z \in M_b$; $\Psi(z, \lambda) = z, z \in M_a, 0 \leq \lambda \leq 1$; $\Psi(z, 1) \in M_a \ \forall z \in M_a$. Эти соотношения без труда выводятся из отмеченных выше свойств функций $\tau(z)$, $x(t; z)$. Они означают, что M_a есть деформационный ретракт M_b . Теорема доказана.

Из доказательства видно, что отображение $\Psi(\cdot, \lambda): M_b \rightarrow M_b$ оставляет инвариантным множество $M_b \cap E$, а пара $(M_a, M_a \cap E)$ является деформационным ретрактом пары $(M_b, M_b \cap E)$. В условиях теоремы 2 группы гомологий пространств M_a, M_b совпадают:

$$H_l(M_a) \simeq H_l(M_b), \quad l = 0, 1, \dots \quad (13)$$

Для некоторых функционалов изоморфизм (13) имеет место и при $b = \infty$, в этом случае $M_b = M$. Функционал f назовем *коэрцитивным*, если множество $\mathfrak{C}_f$ его критических точек и каждое лебегово множество M_t ($t < \infty$) ограничены.

ТЕОРЕМА 3. Пусть луч $[a, \infty)$ не содержит критических значений коэрцитивного функционала f . Тогда $H_l(M_a) \simeq H_l(M)$, $l = 0, 1, \dots$, и $\gamma(\mathcal{F}_M, M_a^0) = \chi(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \leq s \leq t < \infty$. В силу теоремы 2 множество M_s есть деформационный ретракт множества M_t . Фиксируем целое число $l \geq 0$. Порождаемый вложением $i_s^t: M_s \rightarrow M_t$ гомоморфизм $(i_s^t)_*: H_l(M_s) \rightarrow H_l(M_t)$ является изоморфизмом. Система $\{H_l(M_s), (i_s^t)_*\}$ образует прямой спектр на луче $[a, \infty)$. Из определения групп гомологий с компактными носителями [19], [20] вытекает изоморфизм $H_l(M_a) \simeq H_l(M)$, $l = 0, 1, \dots$. Равенство $\gamma(\mathcal{F}_M, M_a^0) = \chi(M)$ следует из теоремы 1. Теорема доказана.

Остановимся еще на одном варианте теоремы 2, относящемся к функционалам f , для которых задача минимизации

$$f(x) \rightarrow \inf, \quad x \in M, \quad (14)$$

корректна в следующем смысле:

- 1) $a = \inf \{f(x), x \in M\} > -\infty$ и $M_a \neq \emptyset$;
- 2) любая минимизирующая функционал f последовательность x_n сходится к множеству M_a , т.е. если $x_n \in M$, $f(x_n) \rightarrow a$, то $d_V(x_n, M_a) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Условие корректности обсуждается ниже; сейчас же отметим, что оно влечет равенство

$$\lim_{t \rightarrow a+0} \theta_V(M_t, M_a) = 0. \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть задача (14) корректна. Пусть при некотором $b > a = \min\{f(x), x \in M\}$ множество M_b ограничено и промежуток $(a, b]$ не содержит критических значений функционала f . Тогда имеет место (13) и $\text{ind}(M_a, \mathcal{F}_M) = \chi(M_a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что $a = 0$, $R > \theta_V(M_b, 0)$. Пусть $c = 2^{-1}b$, $c_n = 2^{-n-1}b$, $d_n = 3c_n$, $n = 1, 2, \dots$. Построим систему функций φ_n класса $\Lambda(\mathbb{R})$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $\varphi_n(t) \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) = 1$, $a < t \leq c$;
- 2) $\{t : \varphi_n(t) > 0\} = \{p_n, q_n\}$, $c_n < p_n < q_n < d_n$, $n = 1, 2, \dots$.

Система интервалов (p_n, q_n) , $n = 1, 2, \dots$, образует открытое покрытие промежутка $(a, c]$ кратности 2.

Положим $\mathfrak{M}_n = \{x \in M : c_n \leq f(x) \leq d_n\}$. Множество $\mathfrak{M}_n$ ограничено, замкнуто; оператор $\mathcal{F} = \partial f$ невырожден на $\mathfrak{M}_n$. Согласно лемме 4 существуют E_n из $\Gamma(V)$, равномерно ограниченное отображение w_n класса $\Lambda(M \cap RB_V, E_n)$ и постоянная $\delta_n > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} w_n(x) - x &\in T_x \quad (x \in M \cap RB_V), \\ \|w_n(x)\| &\leq R, \quad f^0(x, w_n(x) - x) < -\delta_n \quad (x \in \mathfrak{M}_n). \end{aligned} \quad (16)$$

Рассмотрим векторное поле

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(f(x)) w_n(x) \quad (x \in M \cap RB_V).$$

Очевидно, что $w \in \Lambda((M \cap RB_V) \setminus M_a, V)$ и $w(x) = 0$, если $f(x) \geq 3b/4$. Из (16) вытекает оценка

$$f^0(x, w(x) - x) \leq -h(f(x)), \quad x \in M_c \setminus M_a, \quad (17)$$

где h — возрастающая положительная функция на $(a, c]$.

Векторное поле $v_0(x)$, совпадающее с $w(x) - x$ на $M_c \setminus M_a$ и равное нулю на M_a , может не входить в класс $\Lambda(M_c, V)$. Однако, повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3 работы [15], можно убедиться, что при любом z из M_c задача Коши

$$x' = v_0(x), \quad x(0) = z \quad (18)$$

имеет единственное решение $x(t; z)$, существующее при всех $t \geq 0$; определяемое равенством $U_t z = x(t; z)$ семейство операторов $U_t : M_c \rightarrow M_c$ образует непрерывную полугруппу, оставляющую инвариантными множества M_d ($a \leq d \leq c$).

При любом z из $M_c \setminus M_a$ верхняя правая производная функции $t \rightarrow f(U_t z)$ удовлетворяет вытекающему из (17), (18) неравенству $\frac{d}{dt} f(U_t(z)) \leq -h(f(U_t(z)))$, непосредственным следствием которого является равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(U_t z) = a, \quad (19)$$

равномерное относительно z из $M_c \setminus M_a$. Объединяя (15), (19), получаем соотношение $\theta_V(U_t(M_c), M_a) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, означающее, что M_a есть минимальный глобальный аттрактор непрерывной полугруппы $U_t : M_c \rightarrow M_c$ ($t \geq 0$).

Компакт $\mathfrak{U} = M_a$ и пространство $\mathfrak{R} = M_c$ удовлетворяют условиям леммы 5. Теперь изоморфизм (13) следует из соотношений $H_l(M_b) \simeq H_l(M_c) \simeq H_l(M_a)$.

В частности, определены и равны между собой эйлеровы характеристики $\chi(M_a)$, $\chi(M_b)$ пространств M_a , M_b . Так как поле $\mathcal{F} = \partial f$ невырождено на $M_b \setminus M_a$, то

$$\text{ind}(M_a, \mathcal{F}_M) = \gamma(\mathcal{F}_M, M_b^0) = \chi(M_b) = \chi(M_a).$$

Теорема доказана.

Вернемся к условию корректности задачи (14). Обозначим через $\Lambda_1(V)$ часть $\Lambda(V)$, состоящую из функционалов f , для которых отображение $x \rightarrow \partial f(x)$ принадлежит классу $S(V)$. Функционалы класса $\Lambda_1(V)$ слабо полунепрерывны снизу на пространстве V (см., например, [9; гл. 3], [16]).

ЛЕММА 8. Пусть $f \in \Lambda_1(V)$ и при некотором $b > \inf\{f(x), x \in M\}$ множество M_b ограничено. Тогда задача (14) корректна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество M_b есть непустой компакт в $\sigma(V, V^*)$ -топологии. Конечность числа $a = \inf\{f(x), x \in M\}$ и непустота множества M_a вытекают из теоремы Вейерштрасса (см. [9; § 23]; [17; § 9]).

Пусть $x_n \in M$ и $f(x_n) \rightarrow a$. Без ограничения общности можно считать, что $a < f(x_n) < b$ и $x_n \rightharpoonup x$. Так как функционал f слабо полунепрерывен снизу, то $f(x) \leq a$, следовательно, $f(x) = a$, $x \in M_a$. Последовательность $(x_n + x)/2$ также слабо сходится к x , поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x_n + x}{2}\right) \geq a = f(x).$$

В силу формулы конечных приращений [6; п. 2.3.7] справедливо равенство

$$f(x_n) - f\left(\frac{x_n + x}{2}\right) = 2^{-1} \langle x_n - x, z_n^* \rangle,$$

где $z_n^* \in \partial f(z_n)$, $z_n = x + \theta_n(x_n - x)$, $\frac{1}{2} < \theta_n < 1$. Объединяя полученные соотношения, приходим к неравенству

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle z_n - x, z_n^* \rangle \leq 0.$$

Поскольку $\partial f \in S(V)$, то последнее неравенство влечет сильную сходимость x_n, z_n к x . Очевидно, что $d_V(x_n, M_a) \leq \|x_n - x\|$, следовательно, $d_V(x_n, M_a) \rightarrow 0$. Лемма доказана.

Предположение $f \in \Lambda_1(V)$ естественно для рассматриваемых задач (см. [1]–[3], [9]–[12]). Для функционалов класса $\Lambda_1(V)$ условие корректности, фигурирующее в теореме 4, является следствием других условий.

4. Наметим пути приложения установленных выше результатов. Наиболее интересными представляются применения включений (4), (10) к оценкам числа решений. Основные исследования здесь относятся к случаю, когда $\mathcal{F}$ – однозначный оператор, y – скалярный параметр. В работе [12] рассмотрен многопараметрический вариант задачи (10) при условии, что f – функционал класса $C^{1,1}$. Результаты статей [13], [14] позволяют снизить порядок гладкости функционала f на единицу; наиболее сильные утверждения получаются в случае, когда функционал f и определяемое равенством (1) многообразие M инвариантны относительно некоторой группы преобразований. Такого рода ограничения обусловлены тем, что основу [12]–[14] составляют методы Люстерника–Шнирельмана; результаты этих работ неприменимы к включению (4) с непотенциальным оператором $\mathcal{F}$.

Вначале остановимся на следствиях теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть оператор $\mathcal{F}$ класса $S(M)$ конормален ограниченной области $\Omega \subset M$. Если $\chi(\overline{\Omega}) \neq 0$, то включение (4) имеет принадлежащее Ω решение.

Для доказательства достаточно применить принцип нулевого вращения и теорему 1. Столь же просто из теоремы 1 и предложения 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть оператор $\mathcal{F}$ класса $S(M)$ конормален ограниченной области $\Omega \subset M$, $\mathfrak{N}$ – изолированное особое множество поля $\mathcal{F}$, $\mathfrak{N} \subset \Omega$ и $\text{ind}(\mathfrak{N}, \mathcal{F}) \neq \chi(\overline{\Omega})$. Тогда включение (4) имеет принадлежащее $\Omega \setminus \mathfrak{N}$ решение.

Перейдем теперь к следствиям теорем 2–4. Пусть $\mathcal{F}$ – потенциальный оператор с потенциалом f класса $\Lambda_1(V)$. Если при некотором $l \geq 0$ группы гомологий $H_l(M_a)$, $H_l(M_b)$ не изоморфны, то, применяя теоремы 2, 4, можно доказать существование критических значений функционала f , принадлежащих отрезку $[a, b]$ (или его правильной части). Из леммы 4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $f \in \Lambda_1(V)$ и при некотором $b > a = \inf\{f(x), x \in M\}$ множество M_b ограничено. Если группы $H_l(M_a)$ и $H_l(M_b)$ не изоморфны при некотором l , то промежуток $(a, b]$ содержит критическое значение функционала f . Если эйлерова характеристика множества M_a не определена, то найдется последовательность c_n критических значений функционала f , $a < c_n \leq b$, $c_n \rightarrow a$.

Функционал f назовем *растущим*, если при любом $t < \infty$ множество $M_t = \{x \in M, f(x) \leq t\}$ ограничено. Теорема 3 влечет

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть f – растущий функционал класса $\Lambda_1(V)$. Если группы $H_l(M_a)$ и $H_l(M)$ не изоморфны при некотором l , то луч $[a, \infty)$ содержит критическое значение функционала f . Если эйлерова характеристика множества M не определена, то найдется последовательность c_n критических значений функционала f , $a \leq c_n$, $c_n \rightarrow \infty$.

В частности, если эйлерова характеристика многообразия M не имеет смысла, то можно гарантировать существование неограниченной в пространстве V последовательности решений включения (10). Отметим еще один частный случай: если число компонент связности множества M_a не совпадает с числом компонент

связности многообразия M , то включение (10) имеет решение x_* , для которого $f(x_*) > a$.

Теорема 1 нова не только для многозначных, но и для однозначных операторов; в сферу ее применимости входят, например, нелинейные эллиптические операторы в дивергентной форме, рассматриваемые на пространствах Соболева [1]–[3], [9]–[12]. Аналогичное замечание относится к теоремам 2–4, применимым к функционалам вариационного исчисления и оптимального управления.

Список литературы

1. *Потожаев С. И.* О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами // Функци. анализ и его прилож. 1967. Т. 1. № 3. С. 66–73.
2. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. М.: Наука, 1990.
3. *Browder F. E.* Nonlinear elliptic boundary value problems and the generalized topological degree // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.). 1970. V. 76. № 5. P. 999–1005.
4. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
5. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обутовский В. В.* Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // УМН. 1980. Т. 35. № 1. С. 59–126.
6. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988.
7. *Милнор Дж., Уоллес А.* Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972.
8. *Обен Ж. П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.
9. *Бобылев Н. А., Емельянов С. В., Коровин С. К.* Геометрические методы в вариационных задачах. М.: Магистр, 1998.
10. *Потожаев С. И.* О собственных функциях квазилинейных эллиптических задач // Матем. сб. 1970. Т. 82. № 2. С. 192–212.
11. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев: Наукова думка, 1973.
12. *Суворов С. Г.* Критические множества в задачах оптимизации с несколькими ограничениями // Сиб. матем. журн. 1980. Т. 21. № 4. С. 151–160.
13. *Заславский Л. Я.* О критических точках липшицевых функций на гладких многообразиях // Сиб. матем. журн. 1981. Т. 22. № 1. С. 87–93.
14. *Климов В. С.* Минимаксные критические значения негладких функционалов // Сиб. матем. журн. 1992. Т. 33. № 3. С. 91–100.
15. *Климов В. С.* О топологических характеристиках негладких функционалов // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 5. С. 117–134.
16. *Климов В. С., Сенчакова Н. В.* Об относительном вращении многозначных потенциальных векторных полей // Матем. сб. 1991. Т. 182. № 10. С. 1393–1407.
17. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972.
18. *Борисович Ю. Г., Звягин В. Г., Сапронов Ю. И.* Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере–Шаудера // УМН. 1977. Т. 32. № 4. С. 3–54.
19. *Масси У.* Теория гомологий и когомологий. М.: Мир, 1981.
20. *Стинрод Н., Эйленберг С.* Основания алгебраической топологии. М.: ИЛ, 1958.
21. *Ладьяженская О. А.* О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье–Стокса и других уравнений с частными производными // УМН. 1987. Т. 42. № 6. С. 26–60.
22. *Ленг С.* Введение в теорию дифференцируемых многообразий. М.: Мир, 1967.