Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Е. Марков, Типовое число и жесткость расслоенных поверхностей, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 1, 67–88

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm536>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 07:57:07

УДК 513.7

П. Е. Марков

Типовое число и жесткость расслоенных поверхностей

Рассматриваются бесконечно малые изгибания l -го порядка, $1 \leq l \leq \infty$, многомерных поверхностей в многомерных плоских пространствах (при $l = \infty$ бесконечно малое изгибание считается аналитическим изгибанием). В терминах типового числа Аллендорфера устанавливаются признаки (r, l) -жесткости (в терминологии И. Х. Сабитова) таких поверхностей. В частности, доказывается (r, l) -инфинитезимальный аналог классической теоремы Аллендорфера о неизгибаемости поверхности с типовым числом ≥ 3 и выделяется класс (r, l) -жестких расслоенных поверхностей.

Библиография: 18 названий.

Введение

Одним из удивительных результатов теории изгибаний многомерных поверхностей евклидова пространства является теорема Бица [1], [2], согласно которой всякая n -мерная поверхность с рангом второй основной формы ≥ 3 неизгибаема в $(n + 1)$ -мерном евклидовом пространстве. Центральным результатом в распространении теоремы Бица на случай поверхностей с коразмерностью $p > 1$ является одна из теорем Аллендорфера [3]. Им введена алгебраическая характеристика поверхности, названная впоследствии типовым числом Аллендорфера, в случае гиперповерхности совпадающая с рангом второй основной формы, и доказана неизгибаемость поверхности с типовым числом ≥ 3 .

В работе [4] получен аналог теоремы Бица для случая бесконечно малых изгибаний. Основными результатами настоящей работы являются признаки бесконечно малой жесткости, в основе которых лежит типовое число Аллендорфера. Первый из них (теорема 1) представляет собой аналог указанной теоремы Аллендорфера для бесконечно малых изгибаний. Другие признаки (теоремы 2, 3) касаются жесткости l -го порядка и аналитической неизгибаемости введенного в [5], [6] класса поверхностей с коразмерностью $p > 1$, названных там расслоенными поверхностями. В работах [5], [6] получены достаточные условия жесткости таких поверхностей в случае, когда база и каждый слой являются гиперповерхностями. В настоящей работе результаты из [6] распространяются на случай (r, l) -жесткости (в терминологии И. Х. Сабитова [7]) расслоенной поверхности, база и слои которой могут не обладать единичной коразмерностью.

Точная формулировка результатов и необходимые определения приводятся в §1, доказательство основных теорем – в §3. В §2 собраны вспомогательные предложения.

§1. Основные результаты

1.1. Пусть X – связное n -мерное, $n \geq 1$, хаусдорфово ориентируемое C^∞ -многообразие, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, Π – m -мерное, $m > n$,

плоское (т.е. евклидово или псевдоевклидово) пространство с сигнатурой $\Delta = (\Delta^1, \dots, \Delta^m)$, где $\Delta^\gamma = \pm 1$, $\gamma = 1, \dots, m$. Для C^2 -погружения $z: X \rightarrow \Pi$ через $I(z)$ будем обозначать индуцированную метрику на X . Через $\tau = (\tau^i)_{i=1}^n$ будем обозначать локальный корепер на X , в котором метрика $I(z)$ имеет нормальный вид. Не ограничивая общности, можем считать, что $I(z) = \sum_{i=1}^n \Delta^i \tau^i \otimes \tau^i$. Говорят, что корепер τ порожден метрикой $I(z)$. По кореперу τ однозначно определяются формы связности ϕ_j^i равенствами

$$d\tau^i = \sum_{j=1}^n \tau^j \wedge \phi_j^i, \quad \Delta^i \phi_j^i = -\Delta^j \phi_i^j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Обозначая через $(\xi_i)_{i=1}^n$ локальный репер на X , дуальный кореперу τ , и полагая $e_i = \xi_i(z)$, получаем локальный C^1 -репер $(e_i)_{i=1}^n$ в касательном расслоении поверхности $F = z(X)$ в Π , удовлетворяющий условиям $e_i \cdot e_j = \Delta_{ij}$, где точкой обозначено скалярное произведение в Π ,

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} \Delta^i, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

При этом справедливо разложение

$$dz = \sum_{i=1}^n \tau^i e_i. \quad (1)$$

Пусть $(\nu_\sigma)_{\sigma=1}^p$ — ортонормированный локальный репер нормального расслоения поверхности F в Π . Ортонормированность означает, что $\nu_\sigma \cdot \nu_\rho = \Delta^{n+\sigma, n+\rho}$, $\sigma, \rho = 1, \dots, p$, где $p = m - n$. В дальнейшем для краткости мы будем писать $\Delta^{\sigma\rho}$ вместо $\Delta^{n+\sigma, n+\rho}$. В каждой точке $x \in X$ векторы $e_1(x), \dots, e_n(x)$, $\nu_1(x), \dots, \nu_p(x)$ образуют ортонормированный базис пространства Π . Разложение дифференциалов $de_i(x)$ и $d\nu_\sigma(x)$ по этому базису приводит к формулам Гаусса и Вейнгартена:

$$\begin{aligned} de_i &= \sum_{k=1}^n \phi_i^k e_k + \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma \omega_i^\sigma \nu_\sigma, \\ d\nu_\sigma &= - \sum_{i=1}^n \Delta^i \omega_i^\sigma e_i + \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \varkappa_\sigma^\rho \nu_\rho, \end{aligned} \quad (2)$$

где $i = 1, \dots, n$, $\sigma = 1, \dots, p$, ω_i^σ и $\varkappa_\sigma^\rho$ — непрерывные 1-формы, называемые *формами погружения и кручения* соответственно. Формы погружения удовлетворяют соотношениям $\sum_{i=1}^n \omega_i^\sigma \wedge \tau^i = 0$, из которых следует симметричность билинейных дифференциальных форм $II^\sigma = \sum_{i=1}^n \omega_i^\sigma \otimes \tau^i$, $\sigma = 1, \dots, p$. Форма II^σ называется *второй основной формой* поверхности F относительно нормали ν_σ . Формы кручения удовлетворяют соотношениям $\varkappa_\sigma^\rho = -\varkappa_\rho^\sigma$, $\sigma, \rho = 1, \dots, p$.

Если в точке $x \in X$ среди форм $II^1, \dots, II^p$ имеется ровно q линейно независимых, то ортонормированный базис $(\nu_\sigma(x))_{\sigma=1}^p$ нормального пространства поверхности F можно выбрать так, чтобы в этой точке $II^{q+1} = \dots = II^p = 0$. В этом случае подпространство $N(x)$ пространства Π , порожденное векторами

$\nu_1(x), \dots, \nu_q(x)$, называется *главным нормальным пространством* [8] поверхности F в точке x . Точку x будем называть *точкой уплощения*, если $q < p$.

Обозначая через $T_x(X)$ касательное пространство к многообразию X в точке x , определим линейные отображения $\omega^\sigma: T_x(X) \rightarrow T_x(X)$, полагая $\omega^\sigma(v) = \sum_{i=1}^n \langle \omega_i^\sigma, v \rangle \xi_i$ для всякого вектора $v \in T_x(X)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает спаривание. *Типовым числом Аллендорфера* погружения z (а также поверхности F) в точке x называется максимальное из чисел t таких, что найдется t векторов $v_1, \dots, v_t \in T_x(X)$, для которых qt векторов $\omega^\sigma(v_\mu)$, $\mu = 1, \dots, t$, $\sigma = 1, \dots, q$, где $q = \dim N(x)$, линейно независимы [9; примечание 17]. Если $t(x)$ – типовое число погружения z в точке x , то матрица

$$\begin{pmatrix} \omega_1^1 & \dots & \omega_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^p & \dots & \omega_n^p \end{pmatrix}$$

содержит $t(x)$ строк таких, что совокупность входящих в них форм линейно независима [10]. Число $t(F) = \inf_{x \in X} t(x)$ будем называть *типовым числом* поверхности F .

1.2. Рассмотрим бесконечно малую (б.м.) деформацию l -го порядка погружения $z: X \rightarrow \Pi$ с операторами варьирования $\delta^1, \dots, \delta^l$ (по поводу б.м. деформаций погружений см. [11], [12]). Мы не исключаем случай $l = \infty$, понимая под б.м. деформацией бесконечного порядка аналитическую деформацию. Бесконечно малая деформация l -го порядка называется *б.м. изгибанием l -го порядка* поверхности F , если $\delta^1 I(z) = \dots = \delta^l I(z) = 0$. В этом случае поле $\delta^s z$ называется *изгибающим полем s -го порядка* погружения z (или поверхности F). Систему изгибающих полей можно определить как решение системы уравнений

$$\sum_{\alpha=1}^s d\delta^\alpha z \cdot d\delta^{s-\alpha} z = 0, \quad (3)$$

где $s = 1, \dots, l$, $\delta^0 z \equiv z$.

Бесконечно малое изгибание порядка l называется *б.м. движением порядка r* или *(r, l) -тривиальным б.м. изгибанием* [7], [13], если в соответствующей системе изгибающих полей первые r элементов имеют следующий рекуррентный вид:

$$\delta^s z = \sum_{\alpha=1}^s \Omega^\alpha \delta^{s-\alpha} z + \omega^s, \quad s = 1, \dots, r \leq l \leq \infty, \quad (4)$$

где Ω^α – постоянные бивекторы из внешнего квадрата $\wedge^2 \Pi$ пространства Π , ω^s – постоянные векторы из Π , под знаком суммы – внутреннее произведение бивектора на вектор [14; гл. 1, §2, п. 10], $\delta^0 z \equiv z$. Говорят, что поверхность F обладает *(r, l) -жесткостью*, если всякое ее б.м. изгибание l -го порядка (r, l) -тривиально; (∞, ∞) -жесткая поверхность называется *аналитически неизгибаемой*. Из $(1, 1)$ -жесткости вытекает (r, l) -жесткость для всяких $1 \leq r \leq l \leq \infty$; если поверхность является $(1, 1)$ -жесткой или $(1, 2)$ -жесткой, то она аналитически неизгибаема [13]. Будем говорить, что поверхность обладает *локальной (r, l) -жесткостью*, $1 \leq r \leq l \leq \infty$, если всякая окрестность каждой ее точки является (r, l) -жесткой поверхностью.

Следующая теорема является инфинитезимальным аналогом теоремы Аллендорфера из [3].

ТЕОРЕМА 1. *Всякая поверхность F класса C^2 без точек уплощения с типовым числом $t(F) \geq 3$ обладает локальной $(1, 1)$ -жесткостью в пространстве Π .*

1.3. Рассмотрим хаусдорфовы ориентируемые C^∞ -многообразия $X_1, \dots, X_q$ размерностей $n_1, \dots, n_q$ соответственно, удовлетворяющие второй аксиоме счетности, и плоские пространства $\Pi_1, \dots, \Pi_q$ размерностей $m_1, \dots, m_q$ соответственно, $2 \leq n_\lambda < m_\lambda$, $\lambda = 1, \dots, q$. Через Y_q обозначим произведение многообразий: $Y_q = X_1 \times \dots \times X_q$; через S_q – произведение плоских пространств: $S_q = \Pi_1 \times \dots \times \Pi_q$; $Y_1 \equiv X_1$, $S_1 \equiv \Pi_1$. Для каждого $\lambda = 1, \dots, q$ мы полагаем $Y_\lambda = X_1 \times \dots \times X_\lambda$, $S_\lambda = \Pi_1 \times \dots \times \Pi_\lambda$, $N_\lambda = \sum_{\varepsilon=1}^\lambda n_\varepsilon$, $M_\lambda = \sum_{\varepsilon=1}^\lambda m_\varepsilon$. Отметим, что $N_\lambda = \dim Y_\lambda$, $M_\lambda = \dim \Pi_\lambda$. Для точек $x_1 \in X_1, \dots, x_q \in X_q$ обозначим $y_\lambda = (x_1, \dots, x_\lambda)$, так что $y_{\lambda+1} = (y_\lambda, x_{\lambda+1})$. Пусть $\Delta_\mu = (\Delta_1^{M_{\mu-1}+1}, \dots, \Delta_\mu^{M_\mu})$ – сигнатура пространства Π_μ , $\mu = 1, \dots, q$. Тогда $\Gamma_\lambda = (\Delta_1, \dots, \Delta_\lambda)$ – сигнатура пространства S_λ , так что $\Gamma_{\lambda+1} = (\Gamma_\lambda, \Delta_{\lambda+1})$, $\lambda = 1, \dots, q-1$. Зафиксировав в S_λ соответствующую систему координат, при каждом $\lambda \leq \mu$ пространство Π_λ будем рассматривать как координатное подпространство пространства S_μ , $\mu = 1, \dots, q$.

C^2 -отображение $z_q: Y_q \rightarrow S_q$ будем называть q -кратно расслоенным погружением, если в каждой точке $y_q = (x_1, \dots, x_q) \in Y_q$ имеет место разложение

$$z_q = \zeta_1(x_1) + \zeta_2(y_2) + \dots + \zeta_q(y_q), \quad (5)$$

где $\zeta_1: X_1 \rightarrow \Pi_1$ – C^2 -погружение и для всякого $\lambda = 1, \dots, q-1$ $\zeta_{\lambda+1}: Y_{\lambda+1} \rightarrow \Pi_{\lambda+1}$ – C^2 -отображение такое, что отображение $\zeta_{y_\lambda}: X_{\lambda+1} \rightarrow \Pi_{\lambda+1}$, определенное равенством $\zeta_{y_\lambda}(x_{\lambda+1}) = \zeta_{\lambda+1}(y_\lambda, x_{\lambda+1})$, является погружением для каждой точки $y_\lambda \in Y_\lambda$. Легко видеть, что определенное таким образом отображение z_q является C^2 -погружением. Поверхность $F_q = z_q(Y_q) \subset S_q$ будем называть q -кратно расслоенной поверхностью. Для каждого $\lambda = 1, \dots, q$ будем обозначать $z_\lambda(y_\lambda) = \zeta_1(y_1) + \zeta_2(y_2) + \dots + \zeta_\lambda(y_\lambda)$. При этом $z_\lambda: Y_\lambda \rightarrow S_\lambda$ является λ -кратно расслоенным погружением. Каждую поверхность $F_\lambda = z_\lambda(Y_\lambda) \in S_\lambda$ будем называть *базой* поверхности $F_{\lambda+1}$, а каждую из поверхностей $\Phi_{y_\lambda} = \zeta_{y_\lambda}(X_{\lambda+1}) \in \Pi_{\lambda+1}$ – *слоем* поверхности $F_{\lambda+1}$ над точкой $y_\lambda \in Y_\lambda$.

Простейшим примером q -кратно расслоенного погружения является риманово произведение q экземпляров погружений. В этом случае фигурирующее в (5) отображение ζ_λ зависит только от $x_\lambda \in X_\lambda$. С точки зрения механики многомерную поверхность можно интерпретировать как конфигурационное многообразие механической системы из конечного числа материальных точек с конечным числом стационарных связей, а каждую точку на поверхности – как состояние этой системы. В такой интерпретации риманово произведение q поверхностей образует конфигурационное многообразие механической системы, представимой в виде q подсистем, конфигурационное многообразие каждой из которых не зависит от состояний остальных; q -кратно расслоенная поверхность образует конфигурационное многообразие системы, представимой в виде упорядоченного набора из q подсистем так, что конфигурационное многообразие каждой из этих подсистем может зависеть от состояний предыдущей. Например, конфигурационное многообразие системы, состоящей из q независимых пространственных маятников, есть риманово произведение q двумерных сфер и является $2q$ -мерной поверхностью в $3q$ -мерном плоском пространстве; конфигурационное многообразие системы из q

последовательно соединенных пространственных маятников есть q -кратно расслоенная $2q$ -мерная поверхность в $3q$ -мерном пространстве. База F_1 этой поверхности и каждый слой Φ_{y_λ} представляют собой двумерные сферы в трехмерных пространствах; центр сферы Φ_{y_λ} зависит от точки y_λ , определяющей состояние системы из первых λ маятников.

Изгибание многомерной поверхности в плоском пространстве можно интерпретировать как деформацию связей механической системы с сохранением ее формы кинетической энергии [15]. Бесконечно малое изгибание l -го порядка можно интерпретировать как бесконечно малую деформацию l -го порядка связей механической системы при условии, что вариации ее формы кинетической энергии до порядка l включительно равны нулю.

Следующая теорема дает необходимый признак (r, l) -жесткости расслоенной поверхности.

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы q -кратно расслоенная поверхность F_q обладала (r, l) -жесткостью, $1 \leq r \leq l \leq \infty$, в пространстве S_q , необходимо, чтобы ее база F_1 обладала (r, l) -жесткостью в пространстве Π_1 .*

Достаточным признаком (r, l) -жесткости q -кратно расслоенной поверхности является

ТЕОРЕМА 3. *Пусть база F_1 и каждый слой Φ_{y_λ} , $\lambda = 1, \dots, q-1$, q -кратно расслоенной поверхности F_q не содержат точек уплощения и имеют типовые числа $t(F_1) \geq 2$, $t(\Phi_{y_\lambda}) \geq 2$. Тогда если база F_1 обладает (r, l) -жесткостью, $1 \leq r \leq l \leq \infty$, в пространстве Π_1 , а каждый слой Φ_{y_λ} обладает (r, l) -жесткостью в пространстве $\Pi_{\lambda+1}$, то поверхность F_q обладает (r, l) -жесткостью в пространстве S_q .*

В частности, при $r = l = \infty$ из этой теоремы вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть база F_1 и каждый слой Φ_{y_λ} , $\lambda = 1, \dots, q-1$, q -кратно расслоенной поверхности F_q не содержат точек уплощения и имеют типовые числа $t(F_1) \geq 2$, $t(\Phi_{y_\lambda}) \geq 2$. Тогда если база F_1 аналитически неизгибаема в пространстве Π_1 , а каждый слой Φ_{y_λ} аналитически неизгибаем в пространстве $\Pi_{\lambda+1}$, то поверхность F_q аналитически неизгибаема в пространстве S_q .*

Из теорем 1 и 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть база F_1 и каждый слой Φ_{y_λ} , $\lambda = 1, \dots, q-1$, q -кратно расслоенной поверхности F_q не содержат точек уплощения и имеют типовые числа $t(F_1) \geq 3$, $t(\Phi_{y_\lambda}) \geq 3$. Тогда поверхность F_q обладает $(1, 1)$ -жесткостью в пространстве S_q .*

§ 2. Вспомогательные предложения

2.1. В этом пункте приводятся некоторые общие факты из теории б.м. изгибаемых многомерных поверхностей, на которые опираются доказательства сформулированных в § 1 утверждений. Следующее предложение, принадлежащее С. Черну и Р. Оссерману [10], носит чисто алгебраический характер и представляет собой один из аналогов классической леммы Картана [16; гл. 2, § 7].

ЛЕММА 1. Если $\{\theta_1^\sigma, \dots, \theta_h^\sigma\}_{\sigma=1}^p$ – система из hp линейно независимых 1-форм, $\{\vartheta^\sigma\}_{\sigma=1}^p$ – система из p l -форм, $l < h$, то из равенств $\sum_{\sigma=1}^p \vartheta^\sigma \wedge \theta_i^\sigma = 0$, $i = 1, \dots, n$, следует, что все $\vartheta^\sigma = 0$.

Доказательство этой леммы содержится в [10] и здесь опускается.

Рассмотрим произвольное б.м. изгибание l -го порядка, $1 \leq l \leq \infty$, n -мерной поверхности $F = z(X)$ класса C^2 из п. 1.1 с изгибающими полями $\delta^1 z, \dots, \delta^l z$. В силу теоремы 6 из [12] можем считать, что для вариаций форм локального корепера и связности справедливы равенства

$$\delta^s \tau^i = 0, \quad \delta^s \phi_j^i = 0, \quad s = 1, \dots, l, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (6)$$

ЛЕММА 2. Для заданного б.м. изгибания l -го порядка и согласованной с ним б.м. деформации локального репера $(\nu_\sigma)_{\sigma=1}^p$ в нормальном расслоении поверхности F существует и притом единственная система полей бивекторов $(V^s)_{s=1}^l$ класса C^1 , удовлетворяющая условиям

$$d\delta^s z = \sum_{\alpha=1}^s V^\alpha d\delta^{s-\alpha} z, \quad \delta^s \nu_\sigma = \sum_{\alpha=1}^s V^\alpha \delta^{s-\alpha} \nu_\sigma, \quad (7)$$

где под знаками суммы – внутреннее произведение бивектора на вектор, $\delta^0 \nu_\sigma \equiv \nu_\sigma$.

Доказательство непосредственно следует из теорем 2 и 3 работы [11]. Поля $V^1, \dots, V^l$ называются полями вращений данного б.м. изгибания.

Основная система уравнений теории б.м. деформаций из [12] с учетом (6) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma (\delta^\alpha \omega_i^\sigma \wedge \delta^{s-\alpha} \omega_j^\sigma + \delta^{s-\alpha} \omega_i^\sigma \wedge \delta^\alpha \omega_j^\sigma) &= 0, \\ \sum_{i=1}^n \tau^i \wedge \delta^s \omega_i^\sigma &= 0, \\ d\delta^s \omega_i^\sigma &= \sum_{j=1}^n \phi_i^j \wedge \delta^s \omega_j^\sigma \\ &+ \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho (\delta^\alpha \omega_i^\rho \wedge \delta^{s-\alpha} \kappa_\rho^\sigma + \delta^{s-\alpha} \omega_i^\rho \wedge \delta^\alpha \kappa_\rho^\sigma), \\ \delta^s \kappa_\sigma^\rho + \delta^s \kappa_\rho^\sigma &= 0, \\ d\delta^s \kappa_\sigma^\rho &= \sum_{\alpha=1}^s \left(\sum_{i=1}^n \Delta^i (\delta^\alpha \omega_i^\rho \wedge \delta^{s-\alpha} \omega_i^\sigma + \delta^{s-\alpha} \omega_i^\rho \wedge \delta^\alpha \omega_i^\sigma) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau (\delta^\alpha \kappa_\sigma^\tau \wedge \delta^{s-\alpha} \kappa_\tau^\rho + \delta^{s-\alpha} \kappa_\sigma^\tau \wedge \delta^\alpha \kappa_\tau^\rho) \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\delta^0 \omega_i^\sigma \equiv \omega_i^\sigma$, $\delta^0 \kappa_\rho^\sigma \equiv \kappa_\rho^\sigma$ – формы погружения и кручения соответственно, $\delta^s \omega_i^\sigma$, $\delta^s \kappa_\rho^\sigma$ – искомые 1-формы, d – знак обобщенного внешнего дифференциала,

$s = 1, \dots, l \leq \infty$, $i, j = 1, \dots, n$, $\sigma, \rho = 1, \dots, p$. Для каждого б.м. изгибания l -го порядка поверхности F вариации ее форм погружения и кручения удовлетворяют этой системе.

Доказанная в [12] основная теорема теории б.м. деформаций применительно к б.м. изгибаниям может быть сформулирована в виде следующей леммы.

ЛЕММА 3. *Если многообразие X односвязно, $l < \infty$, то всякому непрерывному решению $\{\delta^s \omega_i^\sigma, \delta^s \kappa_\sigma^\rho\}_{s=1}^l$ системы (8) соответствует б.м. изгибание l -го порядка поверхности F , при котором формы $\delta^s \omega_i^\sigma$, $\delta^s \kappa_\sigma^\rho$, $i = 1, \dots, n$, $\rho, \sigma = 1, \dots, p$, являются s -ми вариациями форм погружения и кручения соответственно. При этом каждое изгибающее поле $\delta^s z$ определяется по решению однозначно с точностью до слагаемого вида $\Omega^s z + \omega^s$, где Ω^s – произвольный постоянный бивектор, ω^s – произвольный постоянный вектор, $s = 1, \dots, l$.*

Из приведенного в [12] доказательства следует, что в части единственности эта лемма справедлива и в случае $l = \infty$. В части существования она будет справедливой в случае, когда для построенной по решению системы изгибающих полей $(\delta^s z)_{s=1}^\infty$ ряд $\sum_{s=1}^\infty \delta^s z t^s$ сходится на некотором интервале $-\varepsilon < t < \varepsilon$.

ЛЕММА 4. *Для дифференциалов полей вращений б.м. изгибания l -го порядка поверхности F в пространстве Π справедливы равенства*

$$dV^s \cdot e_i = \sum_{\alpha=1}^{s-1} \left(\sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma V^\alpha \cdot \delta^{s-\alpha} \omega_i^\sigma \nu_\sigma - dV^\alpha \cdot \delta^{s-\alpha} e_i \right) + \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma \delta^s \omega_i^\sigma \nu_\sigma, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} dV^s \nu_\sigma &= \sum_{\alpha=1}^{s-1} \left(V^\alpha \left(- \sum_{i=1}^n \Delta^i \delta^{s-\alpha} \omega_i^\sigma e_i + \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \delta^{s-\alpha} \kappa_\sigma^\rho \nu_\rho \right) - dV^\alpha \delta^{s-\alpha} \nu_\sigma \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \Delta^i \delta^s \omega_i^\sigma e_i + \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \delta^s \kappa_\sigma^\rho \nu_\rho, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\delta^s \omega_i^\sigma$ и $\delta^s \kappa_\sigma^\rho$ – s -е вариации форм погружения и кручения соответственно, $(e_i)_{i=1}^n$ и $(\nu_\sigma)_{\sigma=1}^p$ – ортонормированные реперы соответственно в касательном и нормальном расслоениях поверхности F , $s = 1, \dots, l$, $i = 1, \dots, n$, $\rho, \sigma = 1, \dots, p$, при $s = 1$ суммы по α отсутствуют.

Доказательство вытекает из соответствующих формул работы [11] с учетом (6).

2.2. В этом пункте выводятся формулы для вариаций некоторых объектов при (r, l) -тривиальном б.м. изгибании поверхности F в пространстве Π . Следующая лемма является аналогом теоремы Ефимова [17] о наложении б.м. движений на б.м. изгибания двумерной поверхности в трехмерном евклидовом пространстве.

ЛЕММА 5. *Пусть б.м. изгибание l -го порядка (r, l) -тривиально, $r \leq l \leq \infty$, и пусть $\delta^s \omega_i^\sigma$, $\delta^s \kappa_\sigma^\rho$ – соответствующие вариации форм погружения и кручения, $s = 1, \dots, l \leq \infty$, $i = 1, \dots, n$, $\rho, \sigma = 1, \dots, p$. Тогда существует б.м. изгибание l -го порядка поверхности F , при котором вариации форм погружения и кручения совпадут с $\delta^s \omega_i^\sigma$, $\delta^s \kappa_\sigma^\rho$, $s = 1, \dots, l$, а первые r изгибающих полей будут нулевыми.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (r, l) -тривиальности б.м. изгибания поверхности F следует, что в соответствующей системе изгибающих полей $(\delta^s z)_{s=1}^l$ первые r полей имеют вид (4), в частности $\delta^1 z = \Omega^1 z + \omega^1$. В силу леммы 3 в односвязной окрестности каждой точки на многообразии X систему полей $(\delta^s z)_{s=1}^l$ можно рассматривать как определяемую решением системы уравнений (8), составленным из вариаций форм погружения $\delta^s \omega_i^\sigma$ и кручения $\delta \varkappa_\sigma^\rho$. Так как изгибающее поле $\delta^1 z$ первого порядка по решению основной системы определяется с точностью до произвольного слагаемого вида $\Omega^1 z + \omega^1$, то, отнимая от него это слагаемое, получаем б.м. изгибание l -го порядка с такими же вариациями форм погружения и кручения, в системе изгибающих полей которого $\delta^1 z = 0$.

Из (4) следует, что в построенной системе изгибающих полей поле $\delta^2 z$ имеет вид $\delta^2 z = \Omega^2 z + \omega^2$. Применяя к нему предыдущие рассуждения, получаем новое б.м. изгибание с такими же вариациями форм погружения и кручения, но с $\delta^1 z = \delta^2 z = 0$. Продолжая, на r -м шаге будем иметь $\delta^1 z = \dots = \delta^r z = 0$. Лемма доказана.

Следующая лемма устанавливает вид полей вращений при (r, l) -тривиальном б.м. изгибании поверхности.

ЛЕММА 6. *При б.м. изгибании l -го порядка поверхности F с $\delta^1 z = \dots = \delta^r z = 0$ первые r полей вращений имеют вид*

$$V^s = \frac{1}{2} \sum_{\rho, \sigma=1}^p \Delta^\rho \Delta^\sigma \varphi_s^{\rho\sigma} [\nu_\rho, \nu_\sigma], \quad (11)$$

а их дифференциалы имеют вид

$$\begin{aligned} dV^s = & \sum_{\rho, \sigma=1}^p \Delta^\rho \Delta^\sigma \left(\left(\frac{1}{2} d\varphi_s^{\rho\sigma} + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varphi_s^{\tau\sigma} \varkappa_\tau^\rho \right) [\nu_\rho, \nu_\sigma] \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^n \varphi_s^{\rho\sigma} \omega_i^\rho [e_i, \nu_\sigma] \right), \end{aligned} \quad (12)$$

где $\varphi_s^{\rho\sigma} = -\varphi_s^{\sigma\rho}$ — функции класса C^1 на X , $[\cdot, \cdot]$ — внешнее умножение векторов в пространстве Π , $s = 1, \dots, r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 2 имеем $V^1 dz = \dots = V^r dz = 0$. Отсюда и из (1) следует, что $V^s \cdot e_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, r$. Разлагая бивектор V^s по базису $([e_i, e_j], [e_i, \nu_\sigma], [\nu_\rho, \nu_\sigma])$ пространства $\wedge^2 \Pi$, приходим к формуле (11). Равенство (12) получается дифференцированием формулы (11) и применением формул Вейнгартена (2).

Доказанная лемма используется в двух следующих леммах, в которых устанавливается вид вариаций полей нормалей при (r, l) -тривиальном б.м. изгибании поверхности F .

ЛЕММА 7. *При б.м. изгибании l -го порядка поверхности F с $\delta^1 z = \dots = \delta^r z = 0$ для первых r вариаций полей нормалей справедливы формулы*

$$\delta^s \nu_\sigma = \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \varphi_\alpha^{\sigma\rho} \delta^{s-\alpha} \nu_\rho, \quad s = 1, \dots, r, \quad \sigma = 1, \dots, p. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $s = 1$ справедливость леммы вытекает из лемм 2 и 6. По индукции допустим, что равенство (13) справедливо для всех порядков, меньших s , и докажем его для порядка s . По лемме 2 в силу сделанного допущения имеем

$$\begin{aligned}\delta^s \nu_\sigma &= \sum_{\alpha=1}^s V^\alpha \delta^{s-\alpha} \nu_\sigma = V^s \nu_\sigma + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\beta=1}^{s-\alpha} \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho V^\alpha \varphi_\beta^{\sigma\rho} \delta^{s-\alpha-\beta} \nu_\rho \\ &= V^s \nu_\sigma + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho V^\alpha \varphi_{s-\alpha}^{\sigma\rho} \nu_\rho + \sum_{\alpha=1}^{s-2} \sum_{\beta=1}^{s-\alpha-1} \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho V^\alpha \varphi_\beta^{\sigma\rho} \delta^{s-\alpha-\beta} \nu_\rho.\end{aligned}$$

Применяя лемму 6 и перегруппируя слагаемые в последней сумме, получаем

$$\delta^s \nu_\sigma = \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \left(\varphi_s^{\sigma\rho} \nu_\rho + \sum_{\alpha=1}^{s-1} V^\alpha \varphi_{s-\alpha}^{\sigma\rho} \nu_\rho + \sum_{\alpha=1}^{s-2} \sum_{\beta=1}^{s-\alpha-1} V^\beta \varphi_\alpha^{\sigma\rho} \delta^{s-\alpha-\beta} \nu_\rho \right).$$

В силу леммы 2 можем записать

$$\delta^s \nu_\sigma = \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \left(\varphi_s^{\sigma\rho} \nu_\rho + \sum_{\alpha=1}^{s-1} V^\alpha \varphi_{s-\alpha}^{\sigma\rho} \nu_\rho + \sum_{\alpha=1}^{s-2} \varphi_\alpha^{\sigma\rho} \delta^{s-\alpha} \nu_\rho - \sum_{\alpha=1}^{s-2} V^{s-\alpha} \varphi_\alpha^{\sigma\rho} \nu_\rho \right).$$

Раскрывая первую и третью суммы, после приведения подобных находим

$$\delta^s \nu_\sigma = \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \left(\varphi_s^{\sigma\rho} \nu_\rho + \varphi_{s-1}^{\sigma\rho} V^1 \nu_\rho + \sum_{\alpha=1}^{s-2} \varphi_\alpha^{\sigma\rho} \delta^{s-\alpha} \nu_\rho \right).$$

Применяя к второму слагаемому под знаком суммы справа лемму 2, приходим к равенству (13). Лемма доказана.

ЛЕММА 8. При б.м. изгибании l -го порядка поверхности F с $\delta^1 z = \dots = \delta^r z = 0$ для первых r вариаций полей нормалей справедливы формулы

$$\delta^s \nu_\sigma = \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \psi_s^{\sigma\rho} \nu_\rho, \quad s = 1, \dots, r, \quad \sigma = 1, \dots, p, \quad (14)$$

где $\psi_s^{\sigma\rho}$ — функции на X класса C^1 , определяемые рекуррентным равенством

$$\psi_s^{\sigma\rho} = \varphi_s^{\sigma\rho} + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varphi_\alpha^{\sigma\tau} \psi_{s-\alpha}^{\tau\rho}, \quad \psi_1^{\sigma\rho} = \varphi_1^{\sigma\rho}. \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 7 по индукции выводится, что $\delta^s \nu_\sigma \cdot e_i = 0$, $s = 1, \dots, r$, $\sigma = 1, \dots, p$, $i = 1, \dots, n$. Следовательно, поля $\delta^s \nu_\sigma$ имеют вид (14). Представив $\delta^{s-1} \nu_\sigma$ по лемме 7, получим

$$\delta^s \nu_\sigma = \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \left(\varphi_s^{\sigma\rho} + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varphi_\alpha^{\sigma\tau} \psi_{s-\alpha}^{\tau\rho} \right) \nu_\rho.$$

Сравнивая с (14), приходим к формулам (15). Лемма доказана.

ЛЕММА 9. *Справедливо равенство*

$$\sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\tau, \rho=1}^p \Delta^\tau \Delta^\rho \varphi_\alpha^{\rho\tau} \psi_{s-\alpha}^{\sigma\rho} = \sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\rho, \tau=1}^p \Delta^\tau \Delta^\rho \varphi_\alpha^{\sigma\rho} \psi_{s-\alpha}^{\rho\tau},$$

$s \geq 2$, $\sigma = 1, \dots, p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $s = 2$ проверка этого равенства не представляет труда. Допустим, что оно справедливо для каждого $s \leq r - 2$, и докажем его для $s = r - 1$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{r-1} \sum_{\tau, \rho=1}^p \Delta^\tau \Delta^\rho \varphi_\alpha^{\rho\tau} \psi_{r-\alpha}^{\sigma\rho} &= \sum_{\alpha=1}^{r-1} \sum_{\tau, \rho=1}^p \Delta^\tau \Delta^\rho \varphi_{r-\alpha}^{\rho\tau} \psi_\alpha^{\sigma\rho} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{r-1} \sum_{\tau, \rho=1}^p \Delta^\tau \Delta^\rho \varphi_{r-\alpha}^{\rho\tau} \left(\varphi_\alpha^{\sigma\rho} + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \sum_{\chi=1}^p \Delta^\chi \varphi_\beta^{\sigma\chi} \psi_{\alpha-\beta}^{\chi\rho} \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{r-1} \sum_{\tau, \rho=1}^p \Delta^\tau \Delta^\rho \varphi_{r-\alpha}^{\rho\tau} \left(\varphi_\alpha^{\sigma\rho} + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \sum_{\chi=1}^p \Delta^\chi \varphi_{\alpha-\beta}^{\sigma\chi} \psi_\beta^{\chi\rho} \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{r-1} \sum_{\tau, \rho=1}^p \Delta^\tau \Delta^\rho \varphi_\alpha^{\rho\tau} \varphi_{r-\alpha}^{\sigma\rho} + \sum_{\alpha=1}^{r-1} \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \sum_{\tau, \rho, \chi=1}^p \Delta^\tau \Delta^\rho \varphi_\beta^{\rho\tau} \varphi_{r-\alpha}^{\sigma\chi} \psi_{\alpha-\beta}^{\chi\rho} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{r-1} \sum_{\tau, \rho=1}^p \Delta^\tau \Delta^\rho \varphi_{r-\alpha}^{\sigma\rho} \left(\varphi_\alpha^{\rho\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \sum_{\chi=1}^p \Delta^\chi \varphi_\beta^{\rho\chi} \psi_{\alpha-\beta}^{\chi\tau} \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{r-1} \sum_{\tau, \rho=1}^p \Delta^\tau \Delta^\rho \varphi_{r-\alpha}^{\sigma\rho} \left(\varphi_\alpha^{\rho\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \sum_{\chi=1}^p \Delta^\chi \varphi_\beta^{\rho\chi} \psi_{\alpha-\beta}^{\chi\tau} \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{r-1} \sum_{\tau, \rho=1}^p \Delta^\tau \Delta^\rho \varphi_{r-\alpha}^{\sigma\rho} \psi_\alpha^{\rho\tau} = \sum_{\alpha=1}^{r-1} \sum_{\tau, \rho=1}^p \Delta^\tau \Delta^\rho \varphi_\alpha^{\sigma\rho} \psi_{s-\alpha}^{\rho\tau}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следующую лемму можно рассматривать как критерий (r, l) -тривиальности б.м. изгиба в терминах вариаций форм погружения и кручения поверхности.

ЛЕММА 10. *Для (r, l) -тривиальности б.м. изгиба l -го порядка, $1 \leq r \leq l \leq \infty$, поверхности F в пространстве Π необходимо и достаточно, чтобы первые r вариаций форм погружения и кручения имели вид*

$$\delta^s \omega_i^\sigma = \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \varphi_\alpha^{\sigma\rho} \delta^{s-\alpha} \omega_i^\rho = \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \psi_s^{\sigma\rho} \omega_i^\rho, \quad (16)$$

$$\delta^s \varkappa_\sigma^\rho = K_s^{\sigma\rho} + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau (K_\alpha^{\tau\rho} \psi_{s-\alpha}^{\sigma\tau} - \varphi_\alpha^{\rho\tau} \delta^{s-\alpha} \varkappa_\tau^\sigma), \quad (17)$$

где $\varphi_s^{\rho\sigma} = -\varphi_s^{\sigma\rho}$ — функции класса C^1 , $\psi_s^{\sigma\rho}$ — функции, определяемые равенством (15), $K_s^{\sigma\rho} = -K_s^{\rho\sigma}$ — непрерывные 1-формы, определяемые равенством

$$K_s^{\sigma\rho} = d\varphi_s^{\sigma\rho} + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau (\varphi_s^{\tau\rho} \varkappa_\tau^\sigma - \varphi_s^{\tau\sigma} \varkappa_\tau^\rho), \quad (18)$$

$s = 1, \dots, r, \sigma, \rho = 1, \dots, p, i = 1, \dots, n.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть б.м. изгибание поверхности F в пространстве Π (r, l) -тривиально. Тогда в силу леммы 5 можем считать, что $\delta^1 z = \dots = \delta^r z = 0$. Из (1) следует, что $\delta^s e_i = 0, s = 1, \dots, r, i = 1, \dots, n$. Из формул Гаусса (2) находим $\omega_i^\sigma = de_i \cdot \nu_\sigma$. Варьируя s раз это равенство, получаем $\delta^s \omega_i^\sigma = de_i \cdot \delta^s \nu_\sigma$. Применяя леммы 7 и 8, приходим к формулам (16).

Докажем равенство (17). Рассмотрим сумму $\sum_{\alpha=1}^s dV^\alpha \delta^{s-\alpha} \nu_\sigma$. Выделяя последнее слагаемое и применяя лемму 8, будем иметь

$$\sum_{\alpha=1}^s dV^\alpha \delta^{s-\alpha} \nu_\sigma = dV^s \nu_\sigma + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho dV^\alpha \psi_{s-\alpha}^{\sigma\rho} \nu_\rho.$$

С использованием (12) это равенство приводится к виду

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^s dV^\alpha \delta^{s-\alpha} \nu_\sigma &= \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \left(d\varphi_s^{\sigma\rho} + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau (\varphi_s^{\tau\rho} \varkappa_\tau^\sigma - \varphi_s^{\tau\sigma} \varkappa_\tau^\rho) \right. \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\chi=1}^p \Delta^\chi \left(d\varphi_\alpha^{\chi\rho} + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau (\varphi_\alpha^{\tau\rho} \varkappa_\tau^\chi - \varphi_\alpha^{\tau\chi} \varkappa_\tau^\rho) \right) \psi_{s-\alpha}^{\sigma\chi} \Big) \nu_\rho \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{\rho=1}^p \Delta^i \Delta^\rho \left(\varphi_s^{\rho\sigma} \omega_i^\rho + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varphi_\alpha^{\rho\tau} \psi_{s-\alpha}^{\sigma\tau} \omega_i^\rho \right) e_i. \end{aligned}$$

С другой стороны, из лемм 4 и 6 следует, что

$$\sum_{\alpha=1}^s dV^\alpha \delta^{s-\alpha} \nu_\sigma = \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \left(\sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \delta^\alpha \varkappa_\sigma^\tau \varphi_{s-\alpha}^{\tau\rho} + \delta^s \varkappa_\sigma^\rho \right) \nu_\rho - \sum_{i=1}^n \Delta^i \delta^s \omega_i^\sigma e_i.$$

Сравнивая коэффициенты при ν_ρ , из последних двух равенств находим

$$\begin{aligned} \delta^s \varkappa_\sigma^\rho &= d\varphi_s^{\sigma\rho} + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau (\varphi_s^{\tau\rho} \varkappa_\tau^\sigma - \varphi_s^{\tau\sigma} \varkappa_\tau^\rho) \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \left(\sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \left(d\varphi_\alpha^{\tau\rho} + \sum_{\chi=1}^p \Delta^\chi (\varphi_\alpha^{\chi\rho} \varkappa_\chi^\tau - \varphi_\alpha^{\chi\tau} \varkappa_\chi^\rho) \right) \psi_{s-\alpha}^{\sigma\tau} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\chi=1}^p \Delta^\chi \varphi_\alpha^{\chi\rho} \delta^{s-\alpha} \varkappa_\sigma^\chi \right), \end{aligned}$$

$s = 1, \dots, r, \sigma, \rho = 1, \dots, p$. С учетом (18) отсюда получаем (17).

Достаточность. Допустим, что при б.м. изгибании поверхности F с изгибающими полями $\delta^1 z, \dots, \delta^l z$ вариации форм погружения и кручения имеют вид (16) и (17) соответственно. Пусть $V^1, \dots, V^l$ — соответствующая система полей вращений. Положим

$$\tilde{V}^1 = V^1 - \frac{1}{2} \sum_{\rho, \sigma=1}^p \Delta^\rho \Delta^\sigma \varphi_1^{\rho\sigma} [\nu_\rho, \nu_\sigma]. \quad (19)$$

Тогда

$$\tilde{V}^1 dz = V^1 dz = d\delta^1 z. \quad (20)$$

Значит, $\tilde{V}^1$ — поле вращений, соответствующее изгибающему полю $\delta^1 z$. Применяя к полю $\tilde{V}^1$ лемму 4, заключаем, что $d\tilde{V}^1 = 0$, т.е. $\tilde{V}^1 = \text{const}$. Отсюда вытекает, что поле $\delta^1 z$ имеет вид (4). Следовательно, данное б.м. изгибание является $(1, l)$ -тривиальным. По лемме 5 можем считать, что $\delta^1 z = 0$, $\tilde{V}^1 = 0$. Значит, поле V^1 имеет вид $V^1 = \frac{1}{2} \sum_{\rho, \sigma=1}^p \Delta^\rho \Delta^\sigma \varphi_1^{\rho\sigma} [\nu_\rho, \nu_\sigma]$.

По индукции допустим, что поля $\delta^1 z, \dots, \delta^{s-1} z$ нулевые и что

$$V^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\rho, \sigma=1}^p \Delta^\rho \Delta^\sigma \varphi_\alpha^{\rho\sigma} [\nu_\rho, \nu_\sigma], \quad \alpha = 1, \dots, s-1, \quad s \leq r. \quad (21)$$

Покажем, что рассматриваемое б.м. изгибание (s, l) -тривиально. Для этого положим

$$\tilde{V}^s = V^s - \frac{1}{2} \sum_{\rho, \sigma=1}^p \Delta^\rho \Delta^\sigma \varphi_s^{\rho\sigma} [\nu_\rho, \nu_\sigma]. \quad (22)$$

Тогда

$$\tilde{V}^s dz = V^s dz = \sum_{\alpha=1}^s V^\alpha d\delta^{s-\alpha} z = d\delta^s z. \quad (23)$$

Значит, $V^1, \dots, V^{s-1}, \tilde{V}^s$ — система первых s полей вращений рассматриваемого б.м. изгибания. Используя формулы Вейнгартена, для дифференциала поля $\tilde{V}^s$ находим

$$\begin{aligned} d\tilde{V}^s &= dV^s - \sum_{\rho, \sigma=1}^p \sum_{i=1}^n \Delta^\rho \Delta^\sigma \Delta^i \varphi_s^{\sigma\rho} \omega_i^\rho [e_i, \nu_\sigma] \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\rho, \sigma=1}^p \Delta^\rho \Delta^\sigma \left(d\varphi_s^{\rho\sigma} + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau (\varphi_s^{\tau\sigma} \mathcal{K}_\tau^\rho - \varphi_s^{\tau\rho} \mathcal{K}_\tau^\sigma) \right) [\nu_\rho, \nu_\sigma]. \end{aligned} \quad (24)$$

Следовательно,

$$d\tilde{V}^s \cdot e_i = dV^s \cdot e_i - \sum_{\rho, \sigma=1}^p \Delta^\rho \Delta^\sigma \varphi_s^{\sigma\rho} \omega_i^\rho \nu_\sigma.$$

Из (9), (16) и (21) следует, что

$$dV^s e_i = \sum_{\rho, \sigma=1}^p \Delta^\rho \Delta^\sigma \left(\sum_{\alpha=1}^s \varphi_\alpha^{\sigma\rho} \delta^{s-\alpha} \omega_i^\rho + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \varphi_\alpha^{\rho\sigma} \delta^{s-\alpha} \omega_i^\rho \right) \nu_\sigma.$$

Из двух последних равенств вытекает, что

$$d\tilde{V}^s \cdot e_i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (25)$$

Из (24) получаем

$$\begin{aligned} d\tilde{V}^s \cdot \nu_\sigma &= dV^s \cdot \nu_\sigma + \sum_{\rho=1}^p \sum_{i=1}^n \Delta^\rho \Delta^i \varphi_s^{\sigma\rho} \omega_i^\rho e_i \\ &\quad - \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\rho \left(d\varphi_s^{\sigma\rho} + \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau (\varphi_s^{\tau\rho} \varkappa_\tau^\sigma - \varphi_s^{\tau\sigma} \varkappa_\tau^\rho) \right) \nu_\rho. \end{aligned}$$

По лемме 4 с учетом (21) и (18) имеем

$$\begin{aligned} dV^s \cdot \nu_\sigma &= \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \left(\delta^s \varkappa_\sigma^\rho + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau (\varphi_\alpha^{\tau\rho} \delta^{s-\alpha} \varkappa_\sigma^\tau - K_\alpha^{\rho\tau} \psi_{s-\alpha}^{\sigma\tau}) \right) \nu_\rho \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(\delta^s \omega_i^\sigma + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\rho,\tau=1}^p \Delta^\rho \Delta^\tau \varphi_\alpha^{\rho\tau} \psi_{s-\alpha}^{\sigma\tau} \right) e_i. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d\tilde{V}^s \nu_\sigma &= - \sum_{i=1}^n \Delta^i \left(\delta^s \omega_i^\sigma + \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \left(\sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau \varphi_\alpha^{\rho\tau} \psi_{s-\alpha}^{\sigma\tau} \omega_i^\rho + \varphi_s^{\rho\sigma} \omega_i^\rho \right) \right) e_i \\ &\quad + \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \left(\delta^s \varkappa_\sigma^\rho + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\tau=1}^p \Delta^\tau (\varphi_\alpha^{\tau\rho} \delta^{s-\alpha} \varkappa_\sigma^\tau - K_\alpha^{\rho\tau} \psi_{s-\alpha}^{\sigma\tau}) + K_s^{\rho\sigma} \right) \nu_\rho. \end{aligned}$$

В силу формул (16), (17), а также леммы 9 отсюда следует, что $d\tilde{V}^s \nu_\sigma = 0$, $\sigma = 1, \dots, p$.

Вместе с (25) последнее равенство влечет $d\tilde{V}^s = 0$, т.е. $\tilde{V}^s = \Omega^s = \text{const}$. Из (23) следует, что поле $\delta^s z$ имеет вид (4). Лемма доказана.

ЛЕММА 11. *Если при б.м. изгибании l -го порядка поверхности F в пространстве Π с операторами варьирования $\delta^1, \dots, \delta^l$ первые r вариаций форм погружения имеют вид (16), то поверхность F допускает б.м. изгибание l -го порядка и согласованную с ним б.м. деформацию репера $\nu = (\nu_\sigma)_{\sigma=1}^p$ в нормальном расслоении с операторами варьирования $\tilde{\delta}^1, \dots, \tilde{\delta}^l$, при которых $\tilde{\delta}^s z = \delta^s z + \omega^s$, $\omega^s = \text{const}$, $s = 1, \dots, l$, и $\delta^1 \omega_i^\sigma = \dots = \delta^r \omega_i^\sigma = 0$, $i = 1, \dots, n$, $\sigma = 1, \dots, p$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную односвязную окрестность на многообразии X . Допустим сначала, что $r = 1$. По данной системе изгибающих полей $\delta^1 z, \dots, \delta^s z$ и соответствующей системе полей вращений $V^1, \dots, V^l$ определим поле бивекторов $\tilde{V}^1$ равенством (19). Оставляя неизменными поля $\delta^2 z, \dots, \delta^l z$, полагаем

$$\tilde{\delta}^1 z(x) = \int_{x_0}^x \tilde{V}^1 \cdot dz,$$

где $x_0 \in X$ — произвольно фиксированная точка, x — текущая точка из рассматриваемой окрестности, интеграл берется по произвольному пути, соединяющему точку x_0 с точкой x . Из (20) следует, что интеграл не зависит от этого пути и $\tilde{\delta}^1 z = \delta^1 z + \omega^1$, $\omega^1 = \text{const}$. По определению поля $\tilde{V}^1$ имеем $\tilde{\delta}^1 e_i = \delta^1 e_i$. Полагая

$\tilde{\nu}_\sigma = \tilde{V}^1 \cdot \nu_\sigma$, $\sigma = 1, \dots, p$, получаем б.м. деформацию l -го порядка репера ν , согласованную с построенным б.м. изгибанием l -го порядка. При построенных б.м. изгибании и б.м. деформации репера ν имеем $\tilde{\delta}^1 \nu_\sigma = \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \varphi_1^{\sigma\rho} \nu_\rho$, $i = 1, \dots, n$, $\sigma = 1, \dots, p$. Отсюда и из формул Гаусса (2) для первых вариаций форм погружения находим

$$\tilde{\delta}^1 \omega_i^\sigma = \tilde{\delta}^1 (de_i \nu_\sigma) = d\tilde{\delta}^1 e_i \cdot \nu_\sigma + de_i \tilde{\delta}^1 \nu_\sigma = \delta \omega_i^\sigma - \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \varphi_i^{\sigma\rho} \omega_i^\rho = 0.$$

Следовательно, при $r = 1$ лемма справедлива.

По индукции предположим, что построено б.м. изгибание l -го порядка с изгибающими полями $\delta^1 z, \dots, \delta^l z$ и согласованная с ним б.м. деформация l -го порядка репера ν в нормальном расслоении, для которых $\delta^\alpha \omega_i^\sigma = 0$, $\alpha = 1, \dots, s-1$, $i = 1, \dots, n$, $\sigma = 1, \dots, p$, и построим б.м. изгибание с изгибающими полями $\delta^1 z, \dots, \delta^{s-1} z, \tilde{\delta}^s z, \delta^{s+1} z, \dots, \delta^l z$ и согласованную с ним б.м. деформацию репера ν , для которых $\delta^\alpha \omega_i^\sigma = 0$, $\alpha = 1, \dots, s-1$, $\tilde{\delta}^s \omega_i^\sigma = 0$, $\tilde{\delta}^s z = \delta^s z + \omega^s$, $\omega^s = \text{const}$. По полям $\delta^1 z, \dots, \delta^l z$ и соответствующей системе полей вращений $V^1, \dots, V^l$ определим поле бивекторов $\tilde{V}^s$ равенством (22) и положим

$$\tilde{\delta}^s z = \int_{x_0}^x \left(\tilde{V}^s + \sum_{\alpha=1}^{s-1} V^\alpha \delta^{s-\alpha} z \right).$$

Из (23) следует, что интеграл справа не зависит от пути интегрирования и что $\tilde{\delta}^s z = \delta^s z + \omega^s$, $\omega^s = \text{const}$. При этом $\tilde{\delta}^s e_i = \delta^s e_i$, $i = 1, \dots, n$. Полагая $\tilde{\delta} \nu_\sigma = \tilde{V}^s \nu_\sigma$, получаем согласованную с построенным б.м. изгибанием б.м. деформацию l -го порядка репера ν , для которой

$$\tilde{\delta}^s \nu_\sigma = \delta^s \nu_\sigma - \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \varphi_s^{\sigma\rho} \nu_\rho, \quad \sigma = 1, \dots, p.$$

Для s -х вариаций форм погружения из формул Гаусса находим

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}^s \omega_i^\sigma &= \tilde{\delta}^s (de_i \cdot \nu_\sigma) = d\tilde{\delta}^s e_i \cdot \nu_\sigma + de_i \cdot \tilde{\delta}^s \nu_\sigma \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{s-1} (d\delta^\alpha e_i \cdot \delta^{s-\alpha} \nu_\sigma + d\delta^{s-\alpha} e_i \cdot \delta^\alpha \nu_\sigma) = d\delta^s e_i \cdot \nu_\sigma + de_i \cdot \delta^s \nu_\sigma \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{s-1} (d\delta^\alpha e_i \cdot \delta^{s-\alpha} \nu_\sigma + d\delta^{s-\alpha} e_i \cdot \delta^\alpha \nu_\sigma) - \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \varphi_s^{\sigma\rho} \omega_i^\rho \\ &= \delta^s \omega_i^\sigma - \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \varphi_s^{\sigma\rho} \omega_i^\rho. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\delta^\alpha \omega_i^\sigma = 0$ при $\alpha < s$, из (16) получаем, что $\tilde{\delta}^s \omega_i^\sigma = 0$. Лемма доказана.

§3. Доказательство теорем 1–3

3.1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Рассмотрим произвольное б.м. изгибающее первого порядка погружения $z: X \rightarrow \Pi$, удовлетворяющего условиям теоремы 1. Достаточно доказать, что в произвольной односвязной окрестности, совпадающей с областью определения локального корепера τ на X , соответствующее изгибающее поле тривиально. Так как поверхность $F = z(X)$ не содержит точек уплощения и имеет типовое число $t(F) \geq 3$, то в каждой точке $x \in X$ среди форм погружения ω_i^σ имеется по крайней мере $3p$ линейно независимых. Не ограничивая общности, можем считать, что это формы $\omega_1^\sigma, \omega_2^\sigma, \omega_3^\sigma, \sigma = 1, \dots, p$. Первое равенство системы (8) при $s = 1$ дает три уравнения:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma (\delta^1 \omega_1^\sigma \wedge \omega_2^\sigma - \delta^1 \omega_2^\sigma \wedge \omega_1^\sigma) &= 0, \\ \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma (\delta^1 \omega_1^\sigma \wedge \omega_3^\sigma - \delta^1 \omega_3^\sigma \wedge \omega_1^\sigma) &= 0, \\ \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma (\delta^1 \omega_2^\sigma \wedge \omega_3^\sigma - \delta^1 \omega_3^\sigma \wedge \omega_2^\sigma) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Умножая первое из этих равенств на $(2p-1)$ -форму

$$\omega_1^1 \wedge \dots \wedge \omega_1^p \wedge \omega_2^1 \wedge \dots \wedge \omega_2^{p-1} \wedge \omega_2^{p+1} \wedge \dots \wedge \omega_2^p,$$

получаем $\delta^1 \omega_1^\rho \wedge \omega_1^1 \wedge \dots \wedge \omega_1^p \wedge \omega_2^1 \wedge \dots \wedge \omega_2^p = 0$. Следовательно, форма $\delta^1 \omega_1^\rho$ может быть представлена в виде линейной комбинации форм $\omega_1^1, \dots, \omega_1^p, \omega_2^1, \dots, \omega_2^p$:

$$\delta^1 \omega_1^\rho = \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma (\varphi_{11}^{\rho\sigma} \omega_1^\sigma + \varphi_{12}^{\rho\sigma} \omega_2^\sigma), \quad \rho = 1, \dots, p. \quad (27)$$

Аналогично умножением второго из равенств (26) на $(2p-1)$ -форму

$$\omega_1^1 \wedge \dots \wedge \omega_1^p \wedge \omega_3^1 \wedge \dots \wedge \omega_3^{p-1} \wedge \omega_3^{p+1} \wedge \dots \wedge \omega_3^p$$

получаем разложение

$$\delta^1 \omega_1^\rho = \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma (\tilde{\varphi}_{11}^{\rho\sigma} \omega_1^\sigma + \tilde{\varphi}_{13}^{\rho\sigma} \omega_3^\sigma), \quad \rho = 1, \dots, p.$$

Вычитая из (27), получаем $\tilde{\varphi}_{11}^{\rho\sigma} = \varphi_{11}^{\rho\sigma}$, $\tilde{\varphi}_{13}^{\rho\sigma} = \varphi_{12}^{\rho\sigma} = 0$. Значит, разложение формы (27) имеет вид $\delta^1 \omega_1^\rho = \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma \varphi_1^{\rho\sigma} \omega_1^\sigma$, где обозначено $\varphi_1^{\rho\sigma} \equiv \varphi_{11}^{\rho\sigma}$. Точно так же устанавливаются разложения

$$\delta^1 \omega_2^\rho = \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma \varphi_2^{\rho\sigma} \omega_1^\sigma, \quad \delta^1 \omega_3^\rho = \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma \varphi_3^{\rho\sigma} \omega_3^\sigma.$$

Подставляя эти выражения в (26), получаем

$$\sum_{\rho, \sigma=1}^p \Delta^\sigma \Delta^\rho (\varphi_2^{\sigma\rho} + \varphi_1^{\rho\sigma}) \omega_1^\sigma \wedge \omega_2^\rho = 0,$$

откуда следует, что $\varphi_2^{\sigma\rho} + \varphi_1^{\sigma\rho} = 0$. Аналогично устанавливается, что $\varphi_3^{\sigma\rho} + \varphi_2^{\sigma\rho} = 0$ и $\varphi_1^{\sigma\rho} + \varphi_3^{\sigma\rho} = 0$. Из этих равенств следует, что $\varphi_1^{\sigma\rho} = \varphi_2^{\sigma\rho} = \varphi_3^{\sigma\rho}$, и, полагая $\varphi^{\sigma\rho} = \varphi_1^{\sigma\rho}$, для $i = 1, 2, 3$ можем записать

$$\delta^1 \omega_i^\rho = \sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma \varphi^{\rho\sigma} \omega_i^\sigma, \quad \varphi^{\sigma\rho} = -\varphi^{\rho\sigma}, \quad \rho, \sigma = 1, \dots, p. \quad (28)$$

Полагая в первом равенстве системы (8) $s = 1, i = 1, j > 3$, в силу (28) будем иметь $\sum_{\sigma=1}^p \Delta^\sigma \omega_1^\sigma \wedge (\delta^1 \omega_j^\sigma - \sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \varphi^{\sigma\rho} \omega_j^\rho) = 0$. По лемме Картана отсюда заключаем, что

$$\delta^1 \omega_j^\sigma = \sum_{\rho=1}^p (\Delta^\rho \varphi^{\sigma\rho} \omega_j^\rho + h_1^{\sigma\rho} \omega_1^\rho), \quad h_1^{\sigma\rho} = h_1^{\rho\sigma}, \quad \rho, \sigma = 1, \dots, p, \quad j > 3.$$

Полагая в первом равенстве системы (8) $s = 1, i = 2, j > 3$, получаем

$$\delta^1 \omega_j^\sigma = \sum_{\rho=1}^p (\Delta^\rho \varphi^{\sigma\rho} \omega_j^\rho + h_2^{\sigma\rho} \omega_2^\rho), \quad h_1^{\sigma\rho} = h_1^{\rho\sigma}, \quad \rho, \sigma = 1, \dots, p, \quad j > 3.$$

Вычитая это равенство из предыдущего, находим $h_2^{\sigma\rho} = h_1^{\sigma\rho} = 0$. Следовательно, равенство (28) справедливо для всех $i = 1, \dots, n$.

На основании леммы 11, не ограничивая общности, можем считать, что $\delta^1 \omega_i^\sigma = 0$, $i = 1, \dots, n, \sigma = 1, \dots, p$. Из третьего равенства системы (8) получаем

$$\sum_{\rho=1}^p \Delta^\rho \omega_i^\rho \wedge \delta^1 \varkappa_\rho^\sigma = 0.$$

Применяя лемму 1, заключаем, что $\delta^1 \varkappa_\rho^\sigma = 0$. По лемме 10 отсюда следует, что рассматриваемое б.м. изгибание поверхности F является б.м. движением первого порядка. В силу его произвольности это означает, что поверхность F обладает жесткостью первого порядка. Поскольку все рассуждения сохраняются, если вместо погружения $z: X \rightarrow \Pi$ рассмотреть его ограничение на произвольную окрестность многообразия X , то это погружение обладает локальной жесткостью первого порядка. Теорема 1 доказана.

3.2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Допустим, что база $F_1 = \zeta_1(X_1)$ q -кратно расслоенной поверхности F_q не обладает (r, l) -жесткостью в пространстве Π_1 , и пусть $\delta^1 z_1, \dots, \delta^l z_1$ — система ее изгибающих полей, определяющая не (r, l) -тривиальное б.м. изгибание. Определим поля $\delta^1 z_q, \dots, \delta^l z_q$ на Y_q , полагая $\delta^s z_q(y_q) = \delta^s z_1(x_1)$, $s = 1, \dots, l$, для всякой точки $y_q = (x_1, \dots, x_q) \in Y_q$. Из равенства (5) следует, что

$$\sum_{\alpha=1}^s d\delta^\alpha z_q \cdot d\delta^{s-\alpha} z_q = \sum_{\alpha=1}^s d\delta^\alpha z_1 \cdot d\delta^{s-\alpha} z_1 = 0, \quad s = 1, \dots, l.$$

Следовательно, поля $\delta^s z_q$ удовлетворяют системе (3), а значит, задают б.м. изгибание l -го порядка расслоенной поверхности F_q , не являющееся б.м. движением r -го порядка. Теорема 2 доказана.

3.3. Оставшаяся часть работы посвящена доказательству теоремы 3. В этом пункте мы построим специальные локальные ортонормированные реперы в касательном и нормальном расслоениях q -кратно расслоенной поверхности F_q из п. 1.3. Положим $p_\lambda = m_\lambda - n_\lambda$, $P_\lambda = M_\lambda - N_\lambda$ и условимся о следующих границах изменения встречающихся в дальнейшем индексов:

$$\begin{aligned} \lambda, \mu &= 1, \dots, q; & i_\lambda, j_\lambda, k_\lambda &= N_{\lambda-1} + 1, \dots, N_\lambda, & N_0 &= 0; \\ \sigma_\lambda, \rho_\lambda &= P_{\lambda-1} + 1, \dots, P_\lambda, & P_0 &= 0; \\ \gamma_\lambda &= 1, \dots, N_\lambda; & \varepsilon_\lambda, \chi_\lambda, \theta_\lambda &= 1, \dots, P_\lambda. \end{aligned}$$

Введем локальный C^1 -репер $(e_{\gamma_q})_{\gamma_q=1}^{N_q}$ в касательном расслоении поверхности F_q следующим образом. В качестве полей $e_1, \dots, e_{n_1}$ возьмем поля локального C^1 -репера из касательного расслоения базы $F_1 \subset \Pi_1$, удовлетворяющие условиям $e_{i_1} \cdot e_{j_1} = \Delta_{i_1 j_1}$. В качестве полей $e_{N_1+1}, \dots, e_{N_2}$ возьмем поля из касательного расслоения поверхности $F_2 \subset S_2$, удовлетворяющие условиям:

1) для каждой точки $y_2 = (x_1, x_2) \in Y_2$ при фиксированной точке x_1 поля $e_{i_2}(x_1, x_2)$ образуют локальный C^1 -репер в касательном расслоении слоя Φ_{x_1} в Π_2 ;

2) $e_{i_2} \cdot e_{j_2} = 0$ при $i_2 \neq j_2$, $e_{i_2}^2 = \Delta^{P_1+i_2}$.

Такие поля e_{i_2} могут быть получены процессом ортогонализации производных от вектор-функции $\zeta_2(y_2)$ по локальным координатам точки x_2 . При этом набор $(e_{\gamma_2})_{\gamma_2=1}^{N_2}$ образует локальный ортонормированный C^1 -репер в касательном расслоении поверхности F_2 в S_2 . Продолжая этот процесс, на λ -м шаге получаем локальный ортонормированный C^1 -репер $(e_{\gamma_\lambda})_{\gamma_\lambda=1}^{N_\lambda}$ поверхности F_λ в S_λ . В каждой точке $y_\lambda \in Y_\lambda$ векторы e_{i_λ} лежат в Π_λ , касаются слоя Φ_{y_λ} и удовлетворяют условиям $e_{i_\lambda} \cdot e_{j_\lambda} = 0$ при $i_\lambda \neq j_\lambda$, $e_{i_\lambda}^2 = \Delta^{P_{\lambda-1}+i_\lambda}$. При $\lambda = q$ получаем локальный ортонормированный C^1 -репер $(e_{\gamma_q})_{\gamma_q=1}^{N_q}$ в касательном расслоении поверхности F_q . Из разложения $dz_q = \sum_{\gamma_q=1}^{N_q} \tau^{\gamma_q} e_{\gamma_q}$ определяется локальный C^1 -коррепер $\tau_q = (\tau^{\gamma_q})_{\gamma_q=1}^{N_q}$, порожденный метрикой $I(z_q)$. Для каждого $\lambda = 1, \dots, q$ система 1-форм $\tau_\lambda = (\tau^{\gamma_\lambda})_{\gamma_\lambda=1}^{N_\lambda}$ образует локальный C^1 -коррепер на Y_λ , порожденный метрикой $I(z_\lambda)$.

Для диагональной матрицы

$$\Delta'_\lambda = \begin{pmatrix} \Delta^{M_{\lambda-1}+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Delta^{M_{\lambda-1}+2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Delta^{M_\lambda} \end{pmatrix}$$

через $\text{SO}(n_\lambda, \Delta'_\lambda)$ обозначим специальную группу Δ'_λ -ортогональных $(n_\lambda \times n_\lambda)$ -матриц [18; лекция 1], а через G_λ – группу блочных $(N_\lambda \times N_\lambda)$ -матриц вида

$$\begin{pmatrix} \mathcal{P}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathcal{P}_\lambda \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{P}_\lambda \in \text{SO}(n_\lambda, \Delta'_\lambda)$. Ограничиваясь преобразованиями построенного локального коррепера τ_λ на Y_λ матрицами из группы G_λ , получаем G_λ -орбиту коррепера τ_λ на

всем многообразии Y_λ . Каждый локальный корепер из этой орбиты порождается метрикой $I(z_\lambda)$. При $\lambda = q$ будем иметь G_q -орбиту локальных кореперов на Y_q . Говоря о тензорах на многообразии Y_q , будем иметь в виду тензоры относительно группы G_q .

Построим теперь локальный C^1 -репер $\nu^q = (\nu_{\varepsilon_q})_{\varepsilon_q=1}^{P_q}$ в нормальном расслоении поверхности F_q в пространстве S_q . В качестве полей $\nu_1, \dots, \nu_{p_1}$ возьмем поля локального C^1 -репера из нормального расслоения базы F_1 в Π_1 , удовлетворяющие условиям $\nu_{\sigma_1} \cdot \nu_{\rho_1} = 0$ при $\sigma_1 \neq \rho_1$, $\nu_{\sigma_1}^2 = \Delta^{n_1+\sigma_1}$. В качестве векторов $\nu_{\sigma_2}(y_2)$ в точке $y_2 = (x_1, x_2) \in Y_2$ возьмем нормали к слою Φ_{x_1} в Π_2 , удовлетворяющие условиям $\nu_{\sigma_2} \cdot \nu_{\rho_2} = 0$ при $\sigma_2 \neq \rho_2$, $\nu_{\sigma_2}^2 = \Delta^{N_2+\sigma_2}$. Соответствующие поля ν_{σ_2} удовлетворяют условиям $\nu_{\sigma_2} \cdot \nu_{\sigma_1} = 0$, $\nu_{\sigma_2} \cdot e_{\gamma_2} = 0$. Их можно выбрать в классе C^1 в окрестности точки y_2 . Продолжая этот процесс, построим локальный C^1 -репер $\nu^q = (\nu_{\varepsilon_q})_{\varepsilon_q=1}^{P_q}$ в нормальном расслоении поверхности F_q в S_q , поля которого удовлетворяют условиям $\nu_{\varepsilon_q} \cdot \nu_{\chi_q} = 0$ при $\varepsilon_q \neq \chi_q$, $\nu_{\sigma_\lambda}^2 = \Delta^{N_\lambda+\sigma_\lambda}$. При этом $\nu^\lambda = (\nu_{\varepsilon_\lambda})_{\varepsilon_\lambda=1}^{P_\lambda}$ является C^1 -репером в нормальном расслоении поверхности F_λ в пространстве S_λ .

3.4. Найдем основные формы погружения $z_q: Y_q \rightarrow S_q$ относительно построенных в предыдущем пункте локальных реперов. Будем, как и ранее, не совсем строго, но кратко писать Δ^{i_λ} вместо $\Delta^{P_{\lambda-1}+i_\lambda}$ и Δ^{σ_λ} вместо $\Delta^{N_{\lambda-1}+\sigma_\lambda}$.

Из формул Гаусса (2) получаем

$$de_{i_\lambda} = \sum_{\gamma_q=1}^{N_q} \phi_{i_\lambda}^{\gamma_q} e_{\gamma_q} + \sum_{\varepsilon_q=1}^{P_q} \Delta^{\varepsilon_q} \omega_{i_\lambda}^{\varepsilon_q} \nu_{\varepsilon_q}.$$

Так как $e_{i_\lambda}, de_{i_\lambda} \in \Pi_\lambda$, то

$$\begin{aligned} \phi_{i_\lambda}^{\gamma_q} &= 0 \quad \text{при} \quad \gamma_q \leq N_{\lambda-1} \quad \text{или} \quad \gamma_q > N_\lambda, \\ \omega_{i_\lambda}^{\varepsilon_q} &= 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_q \leq P_{\lambda-1} \quad \text{или} \quad \varepsilon_q > P_\lambda. \end{aligned} \quad (29)$$

При этом для каждой точки $y_\lambda \in Y_\lambda$ формы $\Phi_{j_\lambda}^{i_\lambda}, \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\lambda}$ совпадают с формами связности и погружения соответственно слоя $\Phi_{y_{\lambda-1}}$ в Π_λ .

Из формул Вейнгартена следует, что

$$d\nu_{\sigma_\lambda} = - \sum_{\gamma_q=1}^{N_q} \Delta^{\gamma_q} \omega_{\gamma_q}^{\sigma_\lambda} e_{\gamma_q} + \sum_{\varepsilon_q=1}^{P_q} \Delta^{\varepsilon_q} \varkappa_{\sigma_\lambda}^{\varepsilon_q} \nu_{\varepsilon_q}.$$

Поскольку $\nu_{\sigma_\lambda}, d\nu_{\sigma_\lambda} \in \Pi_\lambda$, получаем

$$\varkappa_{\sigma_\lambda}^{\varepsilon_q} = 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_q \leq P_{\lambda-1} \quad \text{или} \quad \varepsilon_q > P_\lambda. \quad (30)$$

При этом для каждой точки $y_\lambda \in Y_\lambda$ формы $\varkappa_{\sigma_\lambda}^{\rho_\lambda}$ совпадают с формами кручения слоя $\Phi_{y_{\lambda-1}}$ в Π_λ .

3.5. Зафиксируем произвольное б.м. изгибание l -го порядка поверхности F_q в Π_q с изгибающими полями $\delta^1 z_q, \dots, \delta^l z_q$. В односвязной области определения локальных реперов $(e_{\gamma_q})_{\gamma_q=1}^{N_q}$ и $\nu^q = (\nu_{\varepsilon_q})_{\varepsilon_q=1}^{P_q}$ на многообразии Y_q рассмотрим систему (8). Так как по условию теоремы $3 \ t(F_1) \geq 2$, $t(\Phi_{y_\lambda}) \geq 2$ для всякой точки $y_\lambda \in Y_\lambda$, то для всяких $\lambda, \mu = 1, \dots, q$, $\lambda \neq \mu$, найдется по крайней мере $2p_\lambda$ линейно независимых форм $\omega_{i'_\lambda}^{\sigma_\lambda}, \omega_{j'_\lambda}^{\sigma_\lambda}$ и $2p_\mu$ линейно независимых форм $\omega_{i'_\mu}^{\sigma_\mu}, \omega_{j'_\mu}^{\sigma_\mu}$, где индексы $i'_\lambda, i'_\mu, j'_\lambda, j'_\mu$ фиксированы. Полагая в первом равенстве системы (8) $s = 1, i = i'_\lambda, j = j'_\mu$, учитывая результаты предыдущего пункта, будем иметь

$$\sum_{\sigma_\mu=P_{\mu-1}+1}^{P_\mu} \Delta^{\sigma_\mu} \delta^1 \omega_{i'_\lambda}^{\sigma_\mu} \wedge \omega_{j'_\mu}^{\sigma_\mu} + \sum_{\sigma_\lambda=P_{\lambda-1}+1}^{P_\lambda} \Delta^{\sigma_\lambda} \omega_{i'_\lambda}^{\sigma_\lambda} \wedge \delta^1 \omega_{j'_\mu}^{\sigma_\lambda} = 0. \quad (31)$$

Умножая это равенство на $(p_\lambda + p_\mu - 1)$ -форму

$$\omega_{i'_\lambda}^{P_{\lambda-1}+1} \wedge \dots \wedge \omega_{i'_\lambda}^{\sigma_\lambda-1} \wedge \omega_{i'_\lambda}^{\sigma_\lambda+1} \wedge \dots \wedge \omega_{i'_\lambda}^{P_\lambda} \wedge \omega_{j'_\mu}^{P_{\mu-1}+1} \wedge \dots \wedge \omega_{j'_\mu}^{P_\mu},$$

получаем

$$\delta^1 \omega_{j'_\mu}^{\sigma_\lambda} \wedge \omega_{i'_\lambda}^{P_{\lambda-1}+1} \wedge \dots \wedge \omega_{i'_\lambda}^{P_\lambda} \wedge \omega_{j'_\mu}^{P_{\mu-1}+1} \wedge \dots \wedge \omega_{j'_\mu}^{P_\mu} = 0.$$

Следовательно, форма $\delta^1 \omega_{j'_\mu}^{\sigma_\lambda}$ имеет вид

$$\delta^1 \omega_{j'_\mu}^{\sigma_\lambda} = \sum_{\sigma_\mu=P_{\mu-1}+1}^{P_\mu} \Delta^{\sigma_\mu} \varphi_1^{\sigma_\lambda \sigma_\mu} \omega_{j'_\mu}^{\sigma_\mu} + \sum_{\rho_\lambda=P_{\lambda-1}+1}^{P_\lambda} \varphi_0^{\sigma_\lambda \rho_\lambda} \omega_{i'_\lambda}^{\rho_\lambda}, \quad (32)$$

где $\varphi_1^{\sigma_\lambda \sigma_\mu}, \varphi_0^{\sigma_\lambda \rho_\lambda}$ — непрерывные функции на Y_q . Заменяя в этих рассуждениях индекс i'_λ на индекс j'_λ , будем иметь

$$\delta^1 \omega_{j'_\mu}^{\sigma_\lambda} = \sum_{\sigma_\mu=P_{\mu-1}+1}^{P_\mu} \Delta^{\sigma_\mu} \tilde{\varphi}_1^{\sigma_\lambda \sigma_\mu} \omega_{j'_\mu}^{\sigma_\mu} + \sum_{\rho_\lambda=P_{\lambda-1}+1}^{P_\lambda} \tilde{\varphi}_0^{\sigma_\lambda \rho_\lambda} \omega_{j'_\lambda}^{\rho_\lambda},$$

где $\tilde{\varphi}_1^{\sigma_\lambda \sigma_\mu}, \tilde{\varphi}_0^{\sigma_\lambda \rho_\lambda}$ — также непрерывные функции на Y_q . В силу линейной независимости форм $\omega_{i'_\lambda}^{\rho_\lambda}, \omega_{j'_\lambda}^{\rho_\lambda}, \omega_{j'_\mu}^{\sigma_\mu}$ из двух последних равенств находим $\tilde{\varphi}_0^{\sigma_\lambda \rho_\lambda} = \varphi_0^{\sigma_\lambda \rho_\lambda} = 0$, $\tilde{\varphi}_1^{\sigma_\lambda \sigma_\mu} = \varphi_1^{\sigma_\lambda \sigma_\mu}$. Ввиду (32) получаем $\varphi_1^{\sigma_\lambda \sigma_\mu} = -\varphi_1^{\sigma_\mu \sigma_\lambda}$. Следовательно, можем записать

$$\delta^1 \omega_{j'_\mu}^{\sigma_\lambda} = \sum_{\sigma_\mu=P_{\mu-1}+1}^{P_\mu} \Delta^{\sigma_\mu} \varphi_1^{\sigma_\lambda \sigma_\mu} \omega_{j'_\mu}^{\sigma_\mu}, \quad \varphi_1^{\sigma_\lambda \sigma_\mu} = -\varphi_1^{\sigma_\mu \sigma_\lambda}. \quad (33)$$

Полагая в первом равенстве системы (8) $s = 1, i = i_\lambda, j = j'_\mu$ (i_λ — свободный индекс), в силу (33) находим

$$\sum_{\sigma_\mu=P_{\mu-1}+1}^{P_\mu} \Delta^{\sigma_\mu} \left(\delta^1 \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\mu} + \sum_{\sigma_\lambda=P_{\lambda-1}+1}^{P_\lambda} \Delta^{\sigma_\lambda} \varphi_1^{\sigma_\lambda \sigma_\mu} \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\lambda} \right) \wedge \omega_{j'_\mu}^{\sigma_\mu} = 0.$$

Применяя лемму 1, отсюда получаем

$$\delta^1 \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\mu} = \sum_{\sigma_\lambda = P_{\lambda-1}+1}^{P_\lambda} \Delta^{\sigma_\lambda} \varphi_1^{\sigma_\mu \sigma_\lambda} \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\lambda}, \quad \varphi_1^{\sigma_\lambda \sigma_\mu} = -\varphi_1^{\sigma_\mu \sigma_\lambda}, \quad \lambda \neq \mu. \quad (34)$$

Пусть V^1 – поле вращений первого порядка рассматриваемого б.м. изгибания. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{V}^1 &= V^1 - \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mu=1}^q \sum_{\sigma_\mu = P_{\mu-1}+1}^{P_\mu} \sum_{\sigma_\lambda = P_{\lambda-1}+1}^{P_\lambda} \varphi_1^{\sigma_\lambda \sigma_\mu} [\nu_{\sigma_\lambda}, \nu_{\sigma_\mu}], \\ \tilde{\delta}^1 z_q(y_q) &= \int_{y_q^0}^{y_q} \tilde{V}^1 dz_q, \quad \tilde{\delta}^1 \nu_{\gamma_q} = \tilde{V}^1 \cdot \nu_{\gamma_q}, \end{aligned}$$

где y_q^0 – произвольно фиксированная точка из рассматриваемой окрестности на Y_q . Будем иметь б.м. изгибание l -го порядка с изгибающими полями $\tilde{\delta}^1 z_q = \delta^1 z_q + \omega^1$, $\delta^2 z_q, \dots, \delta^l z_q$ и полями вращений $\tilde{V}^1, V^2, \dots, V^l$, где $\omega^1 = \text{const}$. Так же как в доказательстве леммы 11, из равенства (34) выводится, что при этом б.м. изгибании $\tilde{\delta}^1 \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\mu} = 0$. В силу леммы 5 можем считать, что равенство $\delta^1 \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\mu} = 0$ при $\lambda \neq \mu$ имеет место и для исходного б.м. изгибания.

Полагая теперь в первом равенстве системы (8) $s = 2$ и повторяя предыдущие рассуждения, получаем $\delta^2 \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\mu} = 0$ при $\lambda \neq \mu$. Продолжая этот процесс, на l -м шаге будем иметь

$$\delta^1 \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\mu} = \dots = \delta^l \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\mu} = 0, \quad \lambda \neq \mu. \quad (35)$$

Учитывая это, а также (29), полагая в третьем равенстве системы (8) $s = 1$, $\sigma = \sigma_\lambda$, сначала $i = i'_\mu$, а затем $i = j'_\mu$, $\mu \neq \lambda$, получаем

$$\sum_{\rho_\mu = P_{\mu-1}+1}^{P_\mu} \Delta^{\rho_\mu} \omega_{i'_\mu}^{\rho_\mu} \wedge \delta^1 \varkappa_{\rho_\mu}^{\sigma_\lambda} = 0, \quad \sum_{\rho_\mu = P_{\mu-1}+1}^{P_\mu} \Delta^{\rho_\mu} \omega_{j'_\mu}^{\rho_\mu} \wedge \delta^1 \varkappa_{\rho_\mu}^{\sigma_\lambda} = 0.$$

В силу леммы 1 отсюда следует, что $\delta^1 \varkappa_{\sigma_\lambda}^{\rho_\mu} = 0$. Полагая теперь в третьем равенстве системы (8) $s = 2$, получаем $\delta^2 \varkappa_{\sigma_\lambda}^{\rho_\mu} = 0$. Продолжая, будем иметь

$$\delta^s \varkappa_{\sigma_\lambda}^{\rho_\mu} = 0, \quad s = 1, \dots, l, \quad \mu \neq \lambda. \quad (36)$$

Поскольку равенства (29), (30), (35) и (36) имеют тензорный характер при переходе к новым локальным реперам с матрицами из рассмотренной в п. 3.3 группы G_q , они справедливы на всем многообразии Y_q .

3.6. В силу (29), (30), (35) и (36) систему (8) можем записать в виде

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha=1}^s \sum_{\sigma_\lambda=P_{\lambda-1}+1}^{P_\lambda} \Delta^{\sigma_\lambda} (\delta^\alpha \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\lambda} \wedge \delta^{s-\alpha} \omega_{j_\lambda}^{\sigma_\lambda} + \delta^{s-\alpha} \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\lambda} \wedge \delta^\alpha \omega_{j_\lambda}^{\sigma_\lambda}) &= 0, \\
\sum_{i_\lambda=N_{\lambda-1}+1}^{N_\lambda} \tau^{i_\lambda} \wedge \delta^s \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\lambda} &= 0, \\
d\delta^s \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\lambda} &= \sum_{j_\lambda=N_{\lambda-1}+1}^{N_\lambda} \phi_{i_\lambda}^{j_\lambda} \wedge \delta^s \omega_{j_\lambda}^{\sigma_\lambda} \\
&+ \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\rho_\lambda=P_{\lambda-1}+1}^{P_\lambda} \Delta^{\rho_\lambda} (\delta^\alpha \omega_{i_\lambda}^{\rho_\lambda} \wedge \delta^{s-\alpha} \varkappa_{\rho_\lambda}^{\sigma_\lambda} + \delta^{s-\alpha} \omega_{i_\lambda}^{\rho_\lambda} \wedge \delta^\alpha \varkappa_{\rho_\lambda}^{\sigma_\lambda}), \\
\delta^s \varkappa_{\sigma_\lambda}^{\rho_\lambda} + \delta^s \varkappa_{\rho_\lambda}^{\sigma_\lambda} &= 0, \\
d\delta^s \varkappa_{\sigma_\lambda}^{\rho_\lambda} &= \sum_{\alpha=1}^s \left(\sum_{i_\lambda=N_{\lambda-1}+1}^{N_\lambda} \Delta^{i_\lambda} (\delta^\alpha \omega_{i_\lambda}^{\rho_\lambda} \wedge \delta^{s-\alpha} \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\lambda} + \delta^{s-\alpha} \omega_{i_\lambda}^{\rho_\lambda} \wedge \delta^\alpha \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\lambda}) \right. \\
&+ \left. \sum_{\tau_\lambda=P_{\lambda-1}+1}^{P_\lambda} \Delta^{\tau_\lambda} (\delta^\alpha \varkappa_{\sigma_\lambda}^{\tau_\lambda} \wedge \delta^{s-\alpha} \varkappa_{\tau_\lambda}^{\rho_\lambda} + \delta^{s-\alpha} \varkappa_{\sigma_\lambda}^{\tau_\lambda} \wedge \delta^\alpha \varkappa_{\tau_\lambda}^{\rho_\lambda}) \right),
\end{aligned}$$

$s = 1, \dots, l$, $\lambda = 1, \dots, q$. В каждой точке $y_q \in Y_q$ при каждом $\lambda = 1, \dots, q$ эта система совпадает с основной системой теории б.м. изгибаний l -го порядка слоя $\Phi_{y_{\lambda-1}}$ в Π_λ ($\Phi_{y_0} \equiv F_1$). Так как по условию теоремы 3 каждый такой слой обладает (r, l) -жесткостью в Π_λ , то по лемме 10 каждое решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}
\delta^s \omega_{i_\lambda}^{\sigma_\lambda} &= \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\rho_\lambda=P_{\lambda-1}+1}^{P_\lambda} \Delta^{\rho_\lambda} \varphi_\alpha^{\sigma_\lambda \rho_\lambda} \delta^{s-\alpha} \omega_{i_\lambda}^{\rho_\lambda}, \quad \varphi_\alpha^{\sigma_\lambda \rho_\lambda} = -\varphi_\alpha^{\rho_\lambda \sigma_\lambda}, \\
\delta^s \varkappa_{\sigma_\lambda}^{\rho_\lambda} &= K_s^{\sigma_\lambda \rho_\lambda} + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\tau_\lambda=P_{\lambda-1}+1}^{P_\lambda} \Delta^{\tau_\lambda} (K_\alpha^{\tau_\lambda \rho_\lambda} \psi_{s-\alpha}^{\sigma_\lambda \tau_\lambda} - \varphi_\alpha^{\rho_\lambda \tau_\lambda} \delta^{s-\alpha} \varkappa_{\tau_\lambda}^{\sigma_\lambda}), \\
s &= 1, \dots, r.
\end{aligned}$$

Вместе с (35) и (36) это дает

$$\begin{aligned}
\delta^s \omega_{\gamma_q}^{\varepsilon_q} &= \sum_{\alpha=1}^s \sum_{\chi_q=1}^{P_q} \Delta^{\chi_q} \varphi_\alpha^{\varepsilon_q \chi_q} \delta^{s-\alpha} \omega_{\gamma_q}^{\chi_q}, \quad \varphi_\alpha^{\varepsilon_q \chi_q} = -\varphi_\alpha^{\chi_q \varepsilon_q}, \\
\delta^s \varkappa_{\varepsilon_q}^{\chi_q} &= K_s^{\varepsilon_q \chi_q} + \sum_{\alpha=1}^{s-1} \sum_{\theta_q=1}^{P_q} \Delta^{\theta_q} (K_\alpha^{\theta_q \chi_q} \psi_{s-\alpha}^{\varepsilon_q \theta_q} - \varphi_\alpha^{\chi_q \theta_q} \delta^{s-\alpha} \varkappa_{\theta_q}^{\varepsilon_q}), \\
s &= 1, \dots, r.
\end{aligned}$$

В силу леммы 10 это означает, что рассматриваемое б.м. изгибание поверхности F_q (r, l) -тривиально. Теорема 3 доказана.

Список литературы

1. *Beez R.* Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung // Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1875. V. 20. P. 423–444.
2. *Beez R.* Zur Theorie des Krümmungsmasses von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung // Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1876. V. 21. P. 373–401.
3. *Allendoerfer C. B.* Rigidity for spaces class greater than one // Amer. J. Math. 1939. № 61. P. 633–644.
4. *Марков П. Е.* Бесконечно малые изгибания некоторых многомерных поверхностей // Матем. заметки. 1980. Т. 27. № 3. С. 469–479.
5. *Марков П. Е.* Бесконечно малые изгибания одного класса многомерных поверхностей с краем // Матем. сб. 1983. Т. 121. № 1. С. 48–59.
6. *Марков П. Е.* Бесконечно малые изгибания высших порядков многомерных поверхностей в пространствах постоянной кривизны // Матем. сб. 1987. Т. 133. № 1. С. 64–85.
7. *Сабитов И. Х.* Локальная теория изгибаний поверхностей // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 48. М.: ВИНТИ, 1989. С. 196–270.
8. *Перепелкин Д. И.* Кривизна и нормальные пространства многообразия V_m в R_n // Матем. сб. 1935. Т. 42. № 1–3. С. 100–120.
9. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 2. М.: Наука, 1981.
10. *Chern S.-S., Osserman R.* Remarks on the Riemannian of a minimal submanifolds // Geometry. Proc. Symp., Utrecht 1980. Lect. Notes in Math. V. 894, 1981. P. 49–90.
11. *Марков П. Е.* Общие аналитические и бесконечно малые деформации погружений. I // Изв. вузов. Сер. матем. 1997. № 9. С. 21–34.
12. *Марков П. Е.* Общие аналитические и бесконечно малые деформации погружений. II // Изв. вузов. Сер. матем. 1997. № 11. С. 41–51.
13. *Марков П. Е.* Бесконечно малые изгибания высших порядков многомерных поверхностей // Укр. геом. сб. 1982. № 25. С. 87–94.
14. *Картан Э.* Геометрия римановых пространств. М.–Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1936.
15. *Синдж Дж. Л.* Тензорные методы в динамике. М.: ИЛ, 1947.
16. *Фиников С. П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.
17. *Ефимов Н. В.* Некоторые предложения о жесткости и неизгибаемости // УМН. 1952. Т. 7. № 5. С. 215–224.
18. *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр 5. Группы Ли. М.: Наука, 1982.

Ростовский государственный университет,
 Ростов-на-Дону
E-mail: mpe@mail.ru, mpe@donpac.ru

Поступила в редакцию
 11.11.1999