Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Г. Парфенов, Орбиты и их замыкания в пространствах $\mathbb{C}^{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{k_r}$, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 1, 89–112

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm537>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:06:56

УДК 512.815.4

П. Г. Парфенов

Орбиты и их замыкания в пространствах $\mathbb{C}^{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{k_r}$

Рассматриваются естественные действия прямых произведений полных линейных групп на тензорных произведениях соответствующих комплексных линейных пространств. Среди таких действий выделяются все действия с конечным числом орбит. Основными результатами работы являются классификация орбит и построение графов примыканий орбит для всех таких действий.

Библиография: 8 названий.

В настоящей работе рассматривается естественное действие комплексных групп $\mathrm{GL}_{k_1} \times \dots \times \mathrm{GL}_{k_r}$ и $\mathrm{SL}_{k_1} \times \dots \times \mathrm{SL}_{k_r}$ в пространстве $\mathbb{C}^{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{k_r}$. Везде, где не оговорено противное, будем считать, что индексы удовлетворяют условиям: $k_1, \dots, k_r \geq 2$ и $r \geq 1$. Также для удобства изложения будем обозначать группы $\mathrm{GL}_{k_1} \times \dots \times \mathrm{GL}_{k_r}$ и $\mathrm{SL}_{k_1} \times \dots \times \mathrm{SL}_{k_r}$ через $\mathrm{GL}_{k_1, \dots, k_r}$ и $\mathrm{SL}_{k_1, \dots, k_r}$ соответственно, а пространство $\mathbb{C}^{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^{k_r}$ через $\mathbb{C}^{k_1, \dots, k_r}$. Кроме того, в дальнейшем везде, где речь пойдет о действии этих групп или о действии в этом пространстве, если не оговорено противное, будет подразумеваться данное действие.

Чтобы ясно сформулировать результаты работы, понадобится следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Полупростая группа G , действующая в векторном пространстве V , называется *обозримой* относительно этого действия, если в каждом слое морфизма факторизации $\pi: V \rightarrow V/G$ содержится лишь конечное число орбит.

Известно (см., например, [1; §4, п. 2]), что свойство обозримости эквивалентно конечности числа орбит в нуль-конусе $\pi^{-1}(\pi(0))$.

В настоящей работе

- 1) классифицируются все наборы $(k_1, \dots, k_r)$, для которых $\mathrm{GL}_{k_1, \dots, k_r}$ имеет конечное число орбит в $\mathbb{C}^{k_1, \dots, k_r}$ (заметим, что этот результат вытекает из [2], где В. Г. Кац привел список всех неприводимых обозримых действий полупростых групп в векторных пространствах);
- 2) для всех полученных наборов $(k_1, \dots, k_r)$ классифицируются орбиты $\mathrm{GL}_{k_1, \dots, k_r}$, т.е. приводится таблица представителей орбит;
- 3) для всех полученных наборов $(k_1, \dots, k_r)$ строятся графы примыканий орбит $\mathrm{GL}_{k_1, \dots, k_r}$;
- 4) кроме того, в работе показывается, что $\mathrm{GL}_{k_1, \dots, k_r}$ имеет конечное число орбит тогда и только тогда, когда $\mathrm{SL}_{k_1, \dots, k_r}$ обозрима и имеет не более одного инварианта. Для всех этих случаев классифицируются орбиты $\mathrm{SL}_{k_1, \dots, k_r}$ и, если алгебра инвариантов нетривиальна, приводится порождающий ее многочлен.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00598).

Первый параграф посвящен классификации групп и орбит.

В самом начале п. 1.1 доказывается теорема 1, которая играет важную роль как при классификации орбит, так и при построении графов примыканий. Далее в этом же пункте с помощью теоремы 1 доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. *Упорядоченные по возрастанию наборы чисел $(k_1, \dots, k_r)$, где либо $r \geq 4$, либо $r = 3$ и $k_1, k_2, k_3 \geq 3$, либо $r = 3$ и $k_1 = 2, k_2, k_3 \geq 4$, соответствуют действиям $GL_{k_1, \dots, k_r}$ с бесконечным числом орбит.*

Таким образом, остаются случаи (n) , (n, m) , $(2, 2, n)$ и $(2, 3, n)$, $n \geq 3$.

Случаи (n) и (n, m) не представляют интереса – конечность числа орбит, их классификация и примыкания широко известны в этих случаях – и не являются объектом исследования настоящей работы, но для полноты картины опишем их здесь.

Группы GL_n и SL_n имеют всего две орбиты, $GL_{n,m}$ имеет $s = \min(n, m) + 1$ орбит $O_0, \dots, O_s$, где O_k состоит из матриц ранга k . Граф примыканий для $GL_{n,m}$ тривиален: $O_s \rightarrow \dots \rightarrow O_0$. Относительно группы $SL_{n,m}$: при $n \neq m$ орбиты будут те же, что и у $GL_{n,m}$, а при $n = m$ существует инвариант (определитель соответствующей матрицы) и открытая орбита группы $GL_{n,n}$ распадается на континуум гомотетичных замкнутых орбит группы $SL_{n,n}$, остальные орбиты $SL_{n,n}$ те же, что и у $GL_{n,n}$.

В последующих пунктах первого параграфа производится классификация орбит для оставшихся случаев, и оказывается, что в каждом случае их конечное число. Таким образом, доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. *Группа $GL_{k_1, \dots, k_r}$ имеет конечное число орбит в $\mathbb{C}^{k_1, \dots, k_r}$ лишь для следующих наборов $(k_1, \dots, k_r)$: (n) , (m, n) , $(2, 2, n)$ и $(2, 3, n)$, $n \geq 3$.*

Теперь более подробно о содержании этих пунктов.

В п. 1.2 рассматриваются группы $SL_{2,2,2}$ и $GL_{2,2,2}$. В лемме 2 классифицированы орбиты этих групп и приводится образующий алгебры инвариантов группы $SL_{2,2,2}$.

В п. 1.3 рассматриваются группы $GL_{2,3,3}$ и $SL_{2,3,3}$. В теореме 6 классифицированы орбиты этих групп, а также приведен инвариант $SL_{2,3,3}$. Теорема 6 доказывается с помощью теории $\mathbb{Z}$ -градуированных алгебр Ли, изложение которой можно найти в [3] и [4; §8.5].

Пункт 1.4 посвящен группам $GL_{2,m,n}$ и $SL_{2,m,n}$, где либо $m = 2$ и $n \geq 3$, либо $m = 3$ и $n \geq 4$. В теореме 8 дана классификация орбит и инвариантов этих групп. Теорема доказывается с помощью теории Кронекера пучков матриц, см. [5].

Второй параграф посвящен построению графов примыканий для групп $GL_{2,2,n}$ и $GL_{2,3,n}$ ($n \geq 3$).

В нем вкратце описывается теория, с помощью которой анализируются примыкания орбит. В общем виде эта теория излагается в [4; шп. 5.5 и 5.6]. Далее в §2 строится граф примыканий орбит группы $GL_{2,3,3}$. Этот граф изображен на рис. 1, номера вершин графа соответствуют номерам орбит из теоремы 6. Цифрами слева обозначены размерности орбит.

И в конце §2 доказывается теорема 11, которая утверждает, что графы примыканий всех изучаемых в этой работе случаев являются подграфами в графе примыканий для случая $(2, 3, 6)$. Этот граф изображен на рис. 2, номера вершин соответствуют номерам орбит из теоремы 8. Цифрами слева обозначены размерности орбит в зависимости от n .

Для наглядности результаты работы представлены в таблице 0. В ней для каждого случая $(2, m, n)$ указаны количество орбит группы $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n$, степень образующего алгебры инвариантов соответствующей группы $\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_m \times \mathrm{SL}_n$, а также названы утверждения об орбитах и графе примыканий.

ТАБЛИЦА 0

№	Случай $(2, m, n)$	Кол-во орбит группы $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n$	$\deg f$	Утверждение об орбитах	Утверждение о графе примыканий
1	$(2, 2, 2)$	7	4	Лемма 2	Теорема 11, рис. 2
2	$(2, 2, 3)$	9	6	Теорема 8	Теорема 11, рис. 2
3	$(2, 2, 4)$	10	4	Теорема 8	Теорема 11, рис. 2
4	$(2, 2, n), n \geq 5$	10	0	Теорема 8	Теорема 11, рис. 2
5	$(2, 3, 3)$	18	12	Теорема 6	Теорема 11, рис. 1 и 2
6	$(2, 3, 4)$	24	12	Теорема 8	Теорема 11, рис. 2
7	$(2, 3, 5)$	26	0	Теорема 8	Теорема 11, рис. 2
8	$(2, 3, 6)$	27	6	Теорема 8	Теорема 11, рис. 2
9	$(2, 3, n), n \geq 7$	27	0	Теорема 8	Теорема 11, рис. 2

Основные результаты настоящей работы опубликованы (без доказательств) в [6]. Пользуясь случаем, хочется отметить, что в работе [6] допущены две досадные ошибки, причем одна следует из другой. А именно:

1) в теореме 2 вместо строчки

$$(2, 2, n), n \geq 4 - 10 \text{ орбит с представителями } 1-9, 19$$

должна быть следующая строчка:

$$(2, 2, n), n \geq 4 - 10 \text{ орбит с представителями } 1-7, 11, 13, 19;$$

2) соответственно на рисунке, изображающем граф примыканий, не должно быть стрелки, ведущей от вершины 19 к вершине 9, а вместо нее должна быть стрелка, ведущая от вершины 19 к вершине 13.

Я хочу выразить глубокую благодарность своему научному руководителю Э.Б. Винбергу за постановку задачи, ключевые указания и постоянное внимание к работе.

§1. Классификация орбит

1.1. ТЕОРЕМА 1. Пусть редуктивная группа F действует в векторном пространстве U . Рассмотрим группу $G = F \times \mathrm{GL}_k$, пространство $V = U \otimes \mathbb{C}^k$ и действие $G : V$, являющееся тензорным произведением действия

$F : U$ и стандартного действия $\mathrm{GL}_k : \mathbb{C}^k$. Пусть $\tilde{V} = U \otimes \mathbb{C}^i$, $i \leq k$, — подпространство V , на котором действует соответствующая подгруппа $\tilde{G} = G \times \mathrm{GL}_i$. Пусть элементы u и v принадлежат $\tilde{V}$. Тогда:

- (а) если элементы u и v эквивалентны относительно группы G , то они эквивалентны и относительно группы $\tilde{G}$,
- (б) если орбита элемента u в V относительно группы G содержит в замыкании элемент v , то и орбита элемента u в $\tilde{V}$ относительно группы $\tilde{G}$ содержит в замыкании элемент v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $i = k$, то доказывать нечего. Пусть $i < k$.

(а) Каждый из элементов u и v можно представить в виде матриц порядка $\dim U \times k$ с $k - i$ нулевыми столбцами справа. Ранги этих матриц должны быть одинаковы, так как мы предположили, что элементы эквивалентны относительно группы G . Заметим, что доказывать теорему можно только в случае, если ранги этих матриц равны i . Действительно, если их ранги равны j , где $j < i$, то элементы u и v $\tilde{G}$ -эквивалентны элементам u_1 и v_1 , которые можно представить матрицами порядка $\dim U \times k$ с $k - j$ нулевыми столбцами справа, и если элементы u_1 и v_1 $F \times \mathrm{GL}_j$ -эквивалентны, то, очевидно, элементы u и v $\tilde{G}$ -эквивалентны, так как группа $F \times \mathrm{GL}_j$ содержится в $\tilde{G}$. Это означает, что если п. (а) теоремы верен для u_1 и v_1 , то он, очевидно, верен и для u и v .

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что ранги матриц, представляющих элементы u и v , равны i .

Пусть элемент $g_0 = f_0 \times L_0$, где $f_0 \in F$, а $L \in \mathrm{GL}_k$, переводит u в v , тогда и элемент $\tilde{g}_0 = f_0 \times \tilde{L}_0$, где $\tilde{L}_0 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ (матрица Q — подматрица матрицы L_0 порядка $i \times i$, E — единичная матрица порядка $(k - i) \times (k - i)$), переводит u в v . Понятно, что $\mathrm{rk} Q = i$, т.е. Q невырождена. Таким образом, мы нашли преобразование из $F \times \mathrm{GL}_i$, переводящее u в v . Пункт (а) доказан.

(б) Напомним следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Максимальная связная разрешимая подгруппа алгебраической группы называется *борелевской*.

Всякая подгруппа алгебраической группы, содержащая борелевскую подгруппу, называется *параболической*.

Заметим, что пространство $\tilde{V}$ инвариантно относительно естественного действия параболической подгруппы $P = F \times \mathrm{PL}$, где $\mathrm{PL} \subset \mathrm{GL}_k$ (строго) и состоит из матриц, имеющих в левом нижнем углу прямоугольник нулей размером $(k - i) \times i$.

Допустим, что элемент v не содержится в замыкании $\overline{O}$ орбиты $\tilde{O} = \tilde{G}u$. Тогда ввиду п. (а) элемент v не содержится и в G -разнесении $G\overline{O}$ замыкания орбиты $\tilde{O}$. Но элемент v по предположению теоремы содержится в замыкании $\overline{O}$ орбиты $O = Gu$, которое, очевидно, является минимальным замкнутым множеством, содержащим $G\overline{O}$. Таким образом, если мы докажем, что $G\overline{O}$ является замкнутым подмножеством, то придем к противоречию, доказывающему теорему.

Но $\overline{O}$ является замкнутым P -инвариантным множеством, и поэтому утверждение (б) вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть неприводимая алгебраическая группа G действует на неприводимом алгебраическом многообразии X , пусть подмножество Y множества X замкнуто и инвариантно относительно параболической подгруппы $P \subset G$, тогда G -разнесение GY множества Y будет замкнуто. Это верно и для топологии Зариского, и для обычной $\mathbb{C}$ -топологии многообразия X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что утверждение теоремы для топологии Зариского следует из утверждения теоремы для обычной топологии. Действительно, если теорема верна для обычной топологии и Y — замкнутое по Зарискому (а значит, замкнутое и в обычной топологии) множество из условия теоремы, то по теореме о доминантном морфизме (см. [7; §4]) GY будет содержать открытое по Зарискому множество в своем замыкании (по Зарискому). Но замыкание в обычной топологии открытых по Зарискому (в некотором замкнутом по Зарискому подмножестве) множеств совпадает с их замыканием в топологии Зариского. Отсюда следует, что GY будет замкнуто не только в обычной топологии, но и в топологии Зариского.

Таким образом, мы можем доказывать теорему только для обычной топологии, и далее до конца доказательства все топологические термины употребляются в смысле этой топологии.

Хорошо известно (см., например, [7; §21]), что факторпространство любой алгебраической группы по параболической подгруппе является компактным многообразием.

Возьмем в GY произвольную сходящуюся в X последовательность $\{g_i y_i\}$, где $g_i \in G$, $y_i \in Y$. Нужно доказать, что предел y этой последовательности содержится в GY . Пусть π — канонический морфизм из G в G/P . В силу компактности G/P из последовательности $\{\pi(g_i)\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. То есть из последовательности $\{g_i\}$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{\hat{g}_i\}$, что последовательность $\{\pi(\hat{g}_i)\}$ сходится. Обозначим через $\{\hat{y}_i\}$ подпоследовательность в $\{y_i\}$ такую, что последовательность $\{\hat{g}_i \hat{y}_i\}$ является подпоследовательностью в $\{g_i y_i\}$. Так как π — открытое отображение, то среди последовательностей в G , образ которых при отображении π есть последовательность $\{\pi(\hat{g}_i)\}$, можно выбрать сходящуюся. Это означает, что существует последовательность $\{p_i\}$ элементов подгруппы P такая, что последовательность $\{\hat{g}_i p_i\}$ сходится к некоторому элементу $g \in G$. Следовательно, последовательность $\{p_i^{-1} \hat{g}_i^{-1}\}$ сходится к g^{-1} . Рассмотрим отображение $\alpha: G \times X \rightarrow X$, определяющее действие G на X . Последовательность $\{(p_i^{-1} \hat{g}_i^{-1}, \hat{g}_i \hat{y}_i)\}$ сходится в $G \times X$ к элементу (g^{-1}, y) , поэтому образ этой последовательности при отображении α , т.е. последовательность $p_i^{-1} \hat{y}_i$, сходится к элементу $g^{-1} y$. Но в силу замкнутости и P -инвариантности множества Y элемент $g^{-1} y$ содержится в Y , т.е. элемент y содержится в GY .

Таким образом, теоремы 1 и 2 доказаны.

Теорема 1 имеет два простых следствия.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть пространство $\mathbb{C}^{i_1, \dots, i_r}$ стандартно вложено в

пространство $\mathbb{C}^{k_1, \dots, k_r}$, пусть $u, v \in \mathbb{C}^{i_1, \dots, i_r}$. Тогда:

- (а) если u и v эквивалентны относительно группы $\mathrm{GL}_{k_1, \dots, k_r}$, действующей в $\mathbb{C}^{k_1, \dots, k_r}$, то они эквивалентны и относительно $\mathrm{GL}_{i_1, \dots, i_r}$, действующей в $\mathbb{C}^{i_1, \dots, i_r}$;
- (б) если замыкание $\mathrm{GL}_{k_1, \dots, k_r}$ -орбиты элемента u содержит элемент v , то замыкание $\mathrm{GL}_{i_1, \dots, i_r}$ -орбиты элемента u также содержит v .

Следствие полностью доказывается проведением индукции по r и применением теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Если группа $\mathrm{GL}_{k_1, \dots, k_r}$ имеет бесконечное число орбит, то и группа $\mathrm{GL}_{k_1+1, k_2, \dots, k_r}$ имеет бесконечное число орбит.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\mathrm{GL}_{k_1, \dots, k_r}$ имеет в $\mathbb{C}^{k_1, \dots, k_r}$ бесконечное число неэквивалентных элементов, то в силу следствия 2.1 любые два таких элемента, если их стандартно вложить в $\mathbb{C}^{k_1+1, k_2, \dots, k_r}$, не станут эквивалентными относительно $\mathrm{GL}_{k_1+1, k_2, \dots, k_r}$.

Теперь можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Упорядоченные по возрастанию наборы чисел $(k_1, \dots, k_r)$, где либо $r \geq 4$, либо $r = 3$ и $k_1, k_2, k_3 \geq 3$, либо $r = 3$ и $k_1 = 2, k_2, k_3 \geq 4$, соответствуют действиям $\mathrm{GL}_{k_1} \times \dots \times \mathrm{GL}_{k_r}$ с бесконечным числом орбит.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам понадобятся следующие известные факты (см., например, [4; §2]).

ТЕОРЕМА 4 (Розенлихт). Для любого действия алгебраической группы G на неприводимом алгебраическом многообразии X существует конечное множество рациональных инвариантов, разделяющих орбиты общего положения.

В условиях теоремы Розенлихта если G — связная полупростая, X — факториально и минимальное число рациональных инвариантов, разделяющих орбиты общего положения, равно m , то $m = \dim X/G = \dim X - \max_{x \in X} \dim Gx$.

Так как $\dim G = \dim G_x + \dim Gx$ для любого x из X , то имеется равенство для связных полупростых групп G , действующих на неприводимом факториальном алгебраическом многообразии X :

$$\dim X/G = \dim X - \dim G + \min_{x \in X} \dim G_x.$$

Рассмотрим $G = \mathrm{SL}_{2,4,4}$, $X = \mathbb{C}^{2,4,4}$. Из работы [8], например, легко получить, что размерность стабилизатора общего положения действия $G : X$, а значит, минимальная размерность стабилизатора равна 3. Получаем для этого действия: $\dim X/G = 2$.

Для $G = \mathrm{SL}_{3,3,3}$, $X = \mathbb{C}^{3,3,3}$ вне зависимости от размерностей стабилизаторов имеем: $\dim X/G \geq 3$.

Для $G = \mathrm{SL}_{2,2,2,2}$, $X = \mathbb{C}^{2,2,2,2}$ также вне зависимости от размерностей стабилизаторов имеем: $\dim X/G \geq 4$.

Так как при замене группы $SL_{k_1, \dots, k_r}$ на группу $GL_{k_1, \dots, k_r}$ мы изменяем действие только добавлением к нему гомотетии пространства, то во всех трех рассмотренных случаях существует нетривиальный рациональный инвариант группы $GL_{k_1, \dots, k_r}$, которая, следовательно, обладает бесконечным числом орбит. Рассмотрев действие группы $GL_{k_1, \dots, k_r}$, умноженной на сколько угодно компонент GL_1 , на соответствующем тензорном произведении степеней пространства $\mathbb{C}$, легко увидеть, что это действие нисколько не отличается от действия $GL_{k_1, \dots, k_r} : \mathbb{C}^{k_1, \dots, k_r}$, т.е. не изменяется и свойство иметь конечное или бесконечное число орбит. Отсюда и из следствия 1.2 получаем доказательство теоремы 3.

1.2. Далее будет проведена классификация орбит в случаях $(2, 2, n)$ и $(2, 3, n)$, $n \geq 3$, в каждом случае окажется конечное число орбит, и, таким образом, будет доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5. *Группа $GL_{k_1, \dots, k_r}$ имеет конечное число орбит в $\mathbb{C}^{k_1, \dots, k_r}$ лишь для следующих наборов $(k_1, \dots, k_r)$: (n) , (m, n) , $(2, 2, n)$ и $(2, 3, n)$, $n \geq 3$.*

Так как во всех тензорных произведениях, соответствующих случаям $(2, 2, n)$ и $(2, 3, n)$, $n \geq 3$, есть компонента $\mathbb{C}^2$, то элементы пространства $\mathbb{C}^{2, m, n}$ ($m \leq n$) далее будут обычно представлены парой матриц A_1 и A_2 порядка $m \times n$ (в каждой матрице m строк и n столбцов) – $(A_1 | A_2)$. Элементы матрицы A_i ($i = 1, 2$) будут обозначаться буквами с тремя индексами, где первые два – обычные матричные индексы, третий – номер матрицы. Группа действует умножениями слева и справа на матрицы A_1 и A_2 одновременно соответствующими компонентами прямого произведения и линейным комбинированием матриц A_1 и A_2 соответствующей компонентой GL_2 или SL_2 , будем считать, что это первая слева компонента прямого произведения.

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Пусть $SL_{k_1, \dots, k_r}$ действует на X , где X – коническое многообразие в пространстве $\mathbb{C}^{k_1, \dots, k_r}$, а действие является ограничением естественного действия на всем пространстве. Если в X имеется лишь конечное число орбит, то все эти орбиты конические.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо доказать, что при добавлении гомотетии (обозначим группу гомотетий через T) орбитальное разложение не изменяется.

Так как действие T коммутирует с действием $SL_{k_1, \dots, k_r}$, то группа T может лишь переставлять орбиты этой группы, но T связна и, следовательно, каждую орбиту может переводить только в саму себя. То есть все орбиты являются коническими.

Теперь можно доказать следующую классификационную лемму для случая $(2, 2, 2)$.

ЛЕММА 2. (а) *Пусть $SL_{2,2,2}$ действует на $\mathbb{C}^{2,2,2}$, пусть*

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11i} & a_{12j} \\ a_{21i} & a_{22j} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11j} & a_{12i} \\ a_{21j} & a_{22i} \end{vmatrix}, \quad i, j = 1, 2.$$

Тогда многочлен $\Delta = \det(\frac{1}{2}(\Delta_{ij}))$ является образующим алгебры инвариантов этого действия. Причем слой $\pi^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}^$, где π – соответствующий*

морфизм факторизации $\pi: \mathbb{C}^{2,2,2} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[\Delta]$, содержит одну орбиту с представителем $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, здесь $\alpha^2 = -\lambda$, т.е. α может быть выбрано с точностью до умножения на -1 . В нуль-конусе содержится 6 орбит с представителями:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}^1, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}^2, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 & 0 \end{pmatrix}^3, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}^4, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}^5, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}^6.$$

(б) Для действия $\text{GL}_{2,2,2}: \mathbb{C}^{2,2,2}$ имеется семь орбит: шесть орбит, совпадающих с орбитами нуль-конуса группы $\text{SL}_{2,2,2}$ (см. п. (а)), и орбита с представителем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}^7.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Обозначим через V_d пространство бинарных форм степени d . Тогда имеется отображение $f: \mathbb{C}^{2,2,2} \rightarrow V_2$, $f: (A_1|A_2) \mapsto \det(xA_1 + yA_2) = \frac{1}{2}(\Delta_{11}x^2 + 2\Delta_{12}xy + \Delta_{22}y^2)$. Это отображение является G -эquivариантным, если положить, что наша группа $G = \text{SL}_{2,2,2}$ действует на V_2 заменой переменных с помощью первой слева компоненты SL_2 . Для этого действия отображение $\pi_0: V_2 \rightarrow \mathbb{C}$, $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \mapsto \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, является, как известно, морфизмом факторизации. Положим по определению $\pi' = \pi_0 \circ f$. Тогда $\pi': \mathbb{C}^{2,2,2} \rightarrow \mathbb{C}$ является полиномиальным отображением, постоянным на орбитах $\text{SL}_{2,2,2}$. Многочлен, задающий это отображение, есть Δ .

Очевидно также, что функция $\text{rk}(\Delta_{ij}): \mathbb{C}^{2,2,2} \rightarrow \mathbb{Z}$ является инвариантной.

На инвариант Δ и функцию $\text{rk}(\Delta_{ij})$ можно посмотреть с другой точки зрения. В самом деле, действие $\text{SL}_{2,2}$ на $\mathbb{C}^{2,2}$ изоморфно действию SO_4 на $\mathbb{C}^4$, если положить, что скалярное умножение матриц $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ определяется следующим образом:

$$(A, B) = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Поэтому естественное действие $\text{SL}_2 \times \text{SL}_2$ в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ на любые две (будем считать две правые) компоненты имеет системой инвариантов матрицу Грама $\Gamma = (\Delta_{ij})$. При добавлении еще одной компоненты SL_2 матрица Γ преобразуется как обычная матрица билинейной формы, поэтому $\det \Gamma = 16\Delta$ является инвариантом $\text{SL}_{2,2,2}$. Ранг Γ тоже, очевидно, является инвариантом. Такая точка зрения более удобна для классификации орбит, введение же Δ через отображение $\mathbb{C}^{2,2,2}$ в V_2 было сделано для того, чтобы в дальнейшем без подробного рассмотрения провести подобные рассуждения для группы $\text{SL}_{2,3,3}$.

Перейдем к классификации орбит.

Известна классификация элементов пространства $\mathbb{C}^{2,4}$ или просто пар $\{a, b\}$ векторов из $\mathbb{C}^4$ относительно естественного действия $SL_2 \times SO_4$ (см., например, [9]). Воспользуемся здесь этой классификацией и одновременно переведем ее на язык наших матриц и нашего скалярного произведения. Как уже говорилось выше, ранг и определитель матрицы Грама Γ являются инвариантами. Нетрудно также понять, что ранг пары векторов $\{a, b\}$ из $\mathbb{C}^4$ тоже будет инвариантным. Теперь опишем неэквивалентные пары векторов $\{a, b\}$ для всех возможных значений $\text{rk } \Gamma$ и $\text{rk}\{a, b\}$.

Пусть $\text{rk } \Gamma = 0$.

1) Если $\text{rk}\{a, b\} = 0$, то возможна только пара нулевых векторов. В нашем случае, соответственно, имеем элемент $\begin{pmatrix} 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Если $\text{rk}\{a, b\} = 1$, тоже возможна только одна пара изотропного (т.е. имеющего нулевую длину) ненулевого и нулевого векторов. В нашем случае это $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) Если $\text{rk}\{a, b\} = 2$, то возможны только две пары изотропных непропорциональных векторов, причем скалярное произведение в каждой паре равно нулю. В нашем случае два неэквивалентных элемента, удовлетворяющих этим требованиям, таковы: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Они неэквивалентны, поскольку мы можем рассмотреть каждый элемент не как совокупность двух матриц, а как совокупность двух других векторов: нижней и верхней строчек. Ранги этих систем векторов не совпадают, поэтому элементы неэквивалентны.

Пусть ранг Γ равен 1, $\text{rk}\{a, b\}$ теперь не может быть равен нулю.

1) Если $\text{rk}\{a, b\} = 1$, то возможна одна пара неизотропного и изотропного векторов, скалярное произведение которых равно нулю. В нашем случае это следующий элемент: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Если $\text{rk}\{a, b\} = 2$, то возможна также одна пара неизотропного и изотропного векторов, скалярное произведение которых равно нулю. В нашем случае это элемент $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & 1 & | & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Если $\det \Gamma = -16\lambda \neq 0$, то возможна одна пара изотропных векторов, скалярное произведение которых равно $\det \Gamma$. В нашем случае этой паре соответствует элемент $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

Таким образом, закончена классификация орбит из п. (а); докажем, что Δ — образующий алгебры инвариантов.

Из классификации орбит следует, что факторногообразия пространства $\mathbb{C}^{2,2,2}$ по действию $SL_{2,2,2}$ одномерно, поэтому, очевидно, шесть орбит, на которых многочлен Δ обращается в нуль, составляют нуль-конус этого действия. Таким образом, мы имеем морфизм $\pi': \mathbb{C}^{2,2,2} \rightarrow \mathbb{C}$, который сюръективен, постоянен на орбитах и имеет в каждом слое ровно одну замкнутую орбиту. Пусть π — морфизм

факторизации для $\mathrm{SL}_{2,2,2}$. Тогда π и π' удовлетворяют теореме о рациональном отображении, т.е., обозначив $\mathrm{SL}_{2,2,2}$ через G , а $\mathbb{C}^{2,2,2}$ через V , имеем коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Spec} \mathbb{C}[\Delta] \\ & \nearrow \pi' & \uparrow \phi \\ V & & \\ & \searrow \pi & \downarrow \psi \\ & & V/G \end{array},$$

где ϕ – морфизм, существующий по определению морфизма π , а ψ – рациональное отображение, существующее по теореме о рациональном отображении. Так как π' сюръективно и $\mathrm{Spec} \mathbb{C}[\Delta]$ нормально, то ψ – морфизм. Поэтому π' – морфизм факторизации и Δ – образующий алгебры инвариантов. Пункт (а) доказан.

В дальнейшем доказательстве утверждений о том, что некий многочлен порождает алгебру инвариантов, будут совершенно подобны данному, поэтому подробно такое доказательство приведено только здесь.

(б) При добавлении гомотетии склеиваются все не нильпотентные орбиты $\mathrm{SL}_{2,2,2}$, так как у нас один инвариант и в каждом слое π , отличном от нуль-конуса, содержится ровно одна орбита.

Это рассуждение вместе с леммой 1 полностью доказывает п. (б). Лемма 2 доказана.

1.3. Рассмотрим теперь группу $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_3 \times \mathrm{GL}_3$.

Для классификации орбит привлечем теорию градуированных алгебр Ли. Краткое изложение этой теории можно найти в работе [4; §8.5].

Рассмотрим $\mathbb{Z}$ -градуированную алгебру $g = E_6$, заданную схемой:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \circ - \circ - \circ - \circ \\ | \\ \circ \end{array}.$$

Получим $g_0 \simeq \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2 \oplus \mathbb{C}$. Очевидно, что младший вектор, соответствующий представлению g'_0 (g'_0 – коммутант g_0) в g_1 , есть вектор e_3 , соответствующий корню $a_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4$. Схема g'_0 с его числовыми отметками имеет вид

$$\begin{array}{cc} -1 & -1 \\ \circ - \circ & \circ - \circ \\ & \circ - 1 \end{array}.$$

Соответственно старший вектор имеет вес: $\varepsilon_1 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$. Схема g'_0 с его числовыми отметками следующая:

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ \circ - \circ & \circ - \circ \\ & \circ 1 \end{array}.$$

Так как в схеме нашей алгебры E_6 выделена единицей лишь одна вершина, то представление g'_0 в g_1 неприводимо. Поэтому мы можем считать, что представление g'_0 в g_1 является тензорным произведением тавтологических представлений $\mathfrak{sl}_2$ в $\mathbb{C}^2$ и $\mathfrak{sl}_3$ в $\mathbb{C}^3$ и одного представления $\mathfrak{sl}_3$ в $\mathbb{C}^{*3}$, где $\mathbb{C}^*$ есть сопряженное к $\mathbb{C}$

пространство. Алгебра $g_0 = g'_0 \oplus l$, где l есть просто прямая $\mathbb{C}h_{\alpha_3}$ касательной алгебры тора t в g , поэтому соответствующая компонента почти прямого произведения групп в G_0 действует на e_3 гомотетией. Таким образом, действие G_0 в g_1 эквивалентно действию $\mathrm{GL}_{2,3,3}$ в $\mathbb{C}^{2,3,3}$, т.е. группа $\mathrm{GL}_{2,3,3}$ является в данном случае присоединенной группой $\mathbb{Z}$ -градуированной алгебры E_6 .

Выпишем таблицу корней a_i таких, что $\deg a_i = 1$:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_1 - \varepsilon_4, & \varepsilon_1 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_5, & \varepsilon_1 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_6, & \varepsilon_1 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon, \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_4, & \varepsilon_2 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_5, & \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_6, & \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon, \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_4, & \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_5, & \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \\ \varepsilon_3 - \varepsilon_6, & \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon. \end{array}$$

Отобразим g_1 в $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ по следующему правилу: некоторому ненулевому вектору прямой, натянутой на корневой вектор, соответствующий корню $\varepsilon_i - \varepsilon_j$, сопоставим элемент $(E_{i,j-3} \mid 0)$, некоторому ненулевому вектору прямой, натянутой на корневой вектор, соответствующий корню $\varepsilon_i + \varepsilon_j + \varepsilon_k + \varepsilon$, сопоставим элемент $(0 \mid E_{i,\hat{j}-3})$, где $\hat{j}$ — число из множества $\{4, 5, 6\}$, не равное ни j , ни k . Дальнейшее отождествление продолжается по линейности. Нетрудно понять, что это и есть $\mathrm{GL}_{2,3,3}$ -эквивариантный изоморфизм линейных пространств g_1 и $\mathbb{C}^{2,3,3}$.

В работе [3] изложен метод, с помощью которого можно достаточно эффективно классифицировать нильпотентные орбиты действия G_0 в градуирующих подпространствах градуированных алгебр. Опишем вкратце суть этого метода для $\mathbb{Z}$ -градуированных алгебр, используя некоторые понятия, точные определения которых, не важные в настоящей работе, можно найти в [4].

Для начала надо классифицировать все так называемые полные регулярные полупростые подалгебры нашей алгебры g . Далее для всех найденных подалгебр h надо рассмотреть всевозможные $\mathbb{Z}$ -градуировки, для которых выполняется условие $\dim h_0 = \dim h_1$. Такие $\mathbb{Z}$ -градуированные подалгебры называются *локально плоскими*. Заметим, что для каждой полупростой алгебры такая $\mathbb{Z}$ -градуировка существует. Далее для каждой $\mathbb{Z}$ -градуированной локально плоской подалгебры h из нашего списка необходимо классифицировать всевозможные отображения $f: \Pi(h) \rightarrow R(g)$, где $\Pi(h)$ — система простых корней в h , а $R(g)$ — система корней g , обладающие свойствами (обозначим $\langle a \mid b \rangle = \frac{(a,b)}{(a,a)}$):

- 1) $\langle a \mid b \rangle = \langle f(a) \mid f(b) \rangle$,
- 2) $f(a) - f(b) \notin R(g)$,
- 3) $\deg f(a) = \deg a \ \forall a, b \in \Pi(h)$.

Классификацию отображений надо проводить с точностью до действия группы Вейля g_0 .

В заключение для каждой алгебры h надо выбрать произвольный элемент e из плотной орбиты H_0 в h_1 (она существует в силу того, что h является локально плоской алгеброй) и отобразить его в g_1 , отождествляя отображения корней и корневых векторов, всеми найденными отображениями f . Прделав все эти операции, для каждой подалгебры h получим полный список неэквивалентных ненулевых нильпотентных элементов G_0 в g_1 .

Градуировки, при которых алгебра становится локально плоской, обозначаются обычно схемой Дынкина алгебры, в которой черными кружками обозначены вершины из Π_0 , т.е. с отметкой 0, а белыми – с отметкой 1. $\mathbb{Z}$ -градуировка называется *главной*, если все вершины белые. Элемент e главной локально плоской алгебры можно выбрать равным $e_1 + \dots + e_s$, где $a_1, \dots, a_s$ – простые корни. Все локально плоские алгебры типа $A_{i_1} + \dots + A_{i_s}$ являются главными.

Вернемся к нашей $\mathbb{Z}$ -градуированной алгебре E_6 . В [3] можно найти список всех ее полных регулярных полупростых подалгебр. Вот он: $E_6, D_5, A_5, A_4 + A_1, 2A_2 + A_1, D_4, A_4, A_3 + A_1, A_2 + 2A_1, 2A_2, A_3, A_2 + A_1, 3A_1, A_2, 2A_1, A_1$. Все локально плоские $\mathbb{Z}$ -градуированные алгебры этих типов есть либо главные $\mathbb{Z}$ -градуированные алгебры, либо алгебра $D_4(A_1)$, соответствующая схеме

либо $D_5(A_1)$, соответствующая схеме

ТЕОРЕМА 6. (а) Пусть $GL_{2,3,3}$ действует на $\mathbb{C}^{2,3,3}$, у этого действия имеется 18 орбит со следующими представителями (возле каждого элемента стоит номер, который потом будет использоваться при обозначении этого элемента):

$$\begin{array}{ll}
 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)^{11}, \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)^{12}, \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)^{13}, \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)^{14}, \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^{15}, \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)^{16}, \\
& \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^{17}, \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^{18}.
\end{aligned}$$

(б) Пусть $\mathrm{SL}_{2,3,3}$ действует на $\mathbb{C}^{2,3,3}$, пусть Δ_i ($i = 0, \dots, 3$) – коэффициенты квадратичной формы $\det(xA_1 + yA_2) = \sum_{i=0}^3 \Delta_i x^{3-i} y^i$, являющиеся многочленами от коэффициентов матрицы $(A_1 | A_2)$, соответствующей элементам пространства $\mathbb{C}^{2,3,3}$. Это действие имеет нетривиальную алгебру инвариантов, порожденную многочленом 12-й степени: $p = \Delta_1^2 \Delta_2^2 - 4\Delta_0 \Delta_2^3 - 4\Delta_1^3 \Delta_3 - 27\Delta_0^2 \Delta_3^2 + 18\Delta_0 \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$. В нуль-конусе содержится 17 орбит с представителями такими, как первые 17 матриц в п. (а). Слой $\pi^{-1}(\lambda)$ ($\lambda \neq 0$)

содержит единственную орбиту с представителем $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$,

где $\alpha^2 = \lambda$ и умножение α на -1 не существенно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В таблице 1 в первом столбце указаны $\mathbb{Z}$ -градуированные алгебры h , которые имеют вложения f в g ; если указан только тип схемы Дынкина алгебры h , то имеется в виду главная $\mathbb{Z}$ -градуировка. Во втором столбце для каждой h представлены все неэквивалентные вложения f (образы корней из $\Pi(h)$ указаны в естественном порядке). В третьем столбце указан номер нильпотентного элемента $e \in \mathbb{C}^{2,3,3}$ (нумерация элементов произведена в п. (а)), соответствующего алгебре h и вложению f .

Содержащиеся в таблице 1 сведения являются результатом непосредственного проведения действий, описанных перед формулировкой теоремы 6 при описании метода нахождения всех неэквивалентных нильпотентных элементов $\mathbb{Z}$ -градуированных алгебр Ли. Таким образом доказывается п. (а) теоремы 6.

Докажем п. (б).

Доказательство того, что p порождает алгебру инвариантов, абсолютно аналогично подобному доказательству для $\mathrm{SL}_{2,2,2}$, только форма в данном случае становится бинарной формой третьей степени. Группа $\mathrm{SL}_{2,3,3}$ является приведенной присоединенной группой $\mathbb{Z}$ -градуированной алгебры E_6 , и все остальные утверждения теоремы сформулированы в общем виде в работе [4; п. 8.5].

1.4. Чтобы рассмотреть действия групп $\mathrm{GL}_{2,2,n}$ ($n \geq 3$) и $\mathrm{GL}_{2,3,n}$ ($n \geq 4$), понадобятся некоторые сведения из теории Кронекера пучков матриц, см. [5].

ТАБЛИЦА 1

h	$f(\Pi(h))$	e
A_1	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4$	2
$2A_1$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 - \varepsilon_5$	5
	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_1 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon$	4
	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon$	3
A_2	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon$	7
$3A_1$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 - \varepsilon_5, \varepsilon_3 - \varepsilon_6$	10
	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 - \varepsilon_5, \varepsilon_1 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon$	6
$A_2 + A_1$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \varepsilon_2 - \varepsilon_6$	11
	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \varepsilon_3 - \varepsilon_5$	8
A_3	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \varepsilon_3 - \varepsilon_6$	15
$2A_2$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \varepsilon_2 - \varepsilon_6, \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon$	12
$A_2 + 2A_1$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \varepsilon_2 - \varepsilon_6, \varepsilon_3 - \varepsilon_5$	14
	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \varepsilon_2 - \varepsilon_6, \varepsilon_1 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon$	13
	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \varepsilon_3 - \varepsilon_5, \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon$	9
$A_3 + A_1$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \varepsilon_3 - \varepsilon_6, \varepsilon_1 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon$	17
$2A_2 + A_1$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \varepsilon_2 - \varepsilon_6, \varepsilon_3 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \varepsilon_3 - \varepsilon_5$	16
$D_4(A_1)$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_4, \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon, \varepsilon_2 - \varepsilon_5, \varepsilon_3 - \varepsilon_6$	18

Дадим несколько определений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть (f_1, f_2) – пара отображений из пространства V_1 в пространство U_1 , а (g_1, g_2) – пара отображений из V_2 в U_2 . *Прямой суммой* пар (f_1, f_2) и (g_1, g_2) назовем пару $(f_1 \oplus g_1, f_2 \oplus g_2)$ отображений из $V_1 \oplus V_2$ в $U_1 \oplus U_2$, где каждый элемент пары, например $f_1 \oplus g_1$, определяется по формуле: $(f_1 \oplus g_1)(v_1 + v_2) = f_1(v_1) + g_1(v_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть (f_1, f_2) – пара отображений из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Зафиксировав базисы в этих пространствах, можно представить (f_1, f_2) парой матриц $(A | B)$, каждая из которых имеет m строк и n столбцов. Обозначим:

$$R_k = \left(\begin{array}{cccc} \overbrace{A & 0 & 0 & 0}^{k+1} \\ B & A & 0 & 0 \\ 0 & B & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & A \\ 0 & 0 & 0 & B \end{array} \right) \Bigg\}^{k+2}.$$

Элементами матрицы R_k в данном случае являются матрицы порядка $m \times n$, и нулем обозначена нулевая матрица того же порядка.

Назовем *степенью пары* (f_1, f_2) , а также *степенью матрицы* $(A | B)$ наименьший из номеров k , для которых $\text{rk } R_k < (k+1)n$. Если такого номера не существует, то будем считать степень бесконечной. (Это определение корректно, так как, очевидно, ранг матрицы R_k не изменяется при заменах базисов.)

Заметим, что степень пары отображений из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$, где $n > m$, всегда конечна.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Элементарной парой* отображений степени k назовем пару (g_1, g_2) отображений из $V_1 = \mathbb{C}^{k+1}$ в $V_2 = \mathbb{C}^k$, если в V_1 и V_2 можно выбрать базисы $e_1, \dots, e_{k+1}$ и $f_1, \dots, f_k$ так, что $g_1(e_1) = f_1, \dots, g_1(e_k) = f_k, g_1(e_{k+1}) = 0$ и $g_2(e_1) = 0, g_2(e_2) = f_1, \dots, g_2(e_{k+1}) = f_k$. Соответственно пару матриц, представляющую пару (g_1, g_2) в этом базисе, назовем *элементарной парой* матриц степени k .

Заметим, что элементарная пара степени k является парой степени k .

Теперь приведем необходимую нам теорему из теории Кронекера.

Для удобства сформулируем теорему в геометрических терминах и в терминах матриц.

ТЕОРЕМА 7. Геометрическая формулировка.

Пара отображений конечной степени k либо является элементарной парой степени k , либо разлагается в прямую сумму элементарной пары степени k и пары степени большей или равной k (возможно, и бесконечной).

Формулировка на языке матриц.

Пара матриц $(A | B)$ порядка $t \times n$ конечной степени k приводится естественным действием группы $G = \text{GL}_{m,n}$ к виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & & & 0 & & \\ E & \vdots & 0 & \vdots & E & 0 \\ & 0 & & 0 & & \\ 0 & & \tilde{A} & 0 & & \tilde{B} \end{array} \right),$$

где E – единичная матрица размера $k \times k$; а если $k = 0$, то к виду:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \tilde{B} \\ 0 & 0 & \end{array} \right).$$

Пара $(\tilde{A} | \tilde{B})$ будет иметь степень большую либо равную k .

Геометрическая форма этой теоремы делает очевидным

СЛЕДСТВИЕ 7.1. *Если пары $(A_1 | B_1)$ и $(A_2 | B_2)$ матриц порядка $t \times n$ эквивалентны относительно естественного действия группы $\text{GL}_{m,n}$ и имеют конечную степень k (в силу эквивалентности они обязаны иметь одинаковую степень), то пары $(\tilde{A}_1 | \tilde{B}_1)$, $(\tilde{A}_2 | \tilde{B}_2)$, определяемые в теореме 7, будут эквивалентны относительно естественного действия $\text{GL}_{m-k, n-k-1}$.*

Теперь мы можем сформулировать и доказать классификационную теорему.

ТЕОРЕМА 8. *Для групп $\text{GL}_{2,m,n}$, $\text{SL}_{2,m,n}$ ($m = 2, n \geq 3$ или $m = 3, n \geq 4$), действующих в $\mathbb{C}^{2,m,n}$, существуют две принципиально различные ситуации: либо орбиты этих групп совпадают и их конечное число, либо у группы $\text{SL}_{2,m,n}$ существует один нетривиальный инвариант f и тогда подмногообразия, определяемые условием $f = \lambda$ при $\lambda \neq 0$, являются замкнутыми орбитами группы $\text{SL}_{2,m,n}$, заполняющими открытую орбиту группы*

$GL_{2,m,n}$, а все остальные орбиты группы $SL_{2,m,n}$ совпадают с орбитами группы $GL_{2,m,n}$. Ниже для каждого случая приведены представители орбит группы $GL_{2,m,n}$ (матрицы снабжены номерами, которые потом будут использоваться в графах примыканий) и указаны инвариант f для $SL_{2,m,n}$, если он существует, и элемент t из ее орбиты: $f = \lambda$, $\lambda \neq 0$.

1) $m = 2$, $n = 3$: $\left(A_1^i \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \middle| A_2^i \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$, $i = 1, \dots, 7$, где $(A_1^i | A_2^i)$ – семь матриц из леммы 2(б), $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$, $f = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{pmatrix}$,

$t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{smallmatrix} \right)$, где $\alpha^2 = -\lambda$ (не важно, какое именно α взять).

2) $m = 2$, $n = 4$: $\left(A_1^i \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \middle| A_2^i \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$, $i = 1, \dots, 9$, где $(A_1^i | A_2^i)$ – девять матриц из предыдущего случая, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right)$, $f = \det \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, $t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{smallmatrix} \right)$.

3) $m = 2$, $n \geq 5$: $\left(A_1^i \overbrace{\begin{smallmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{smallmatrix}}^{n-4} \middle| A_2^i \overbrace{\begin{smallmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{smallmatrix}}^{n-4} \right)$, $i = 1, \dots, 10$, где $(A_1^i | A_2^i)$ – десять матриц из предыдущего случая.

4) $m = 3$, $n = 4$: $\left(A_1^i \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \middle| A_2^i \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$, $i = 1, \dots, 18$, где $(A_1^i | A_2^i)$ – восемнадцать матриц из теоремы 6(а),

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right),$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right),$$

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right),$$

$$f = \det \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ B & A & 0 \\ 0 & B & A \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}, \quad t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{smallmatrix} \right), \quad \text{где } \alpha^3 = \lambda.$$

5) $m = 3$, $n = 5$: $\left(A_1^i \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \middle| A_2^i \begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$, $i = 1, \dots, 24$, где $(A_1^i | A_2^i)$ – двадцать

четыре матрицы из предыдущего случая,

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)^{25}, \quad \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^{26}.$$

6) $m = 3, n = 6$: $\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ A_1^i & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \middle| \begin{array}{c} A_2^i \\ 0 \end{array} \right), i = 1, \dots, 26$, где $(A_1^i | A_2^i)$ – двадцать шесть матриц из предыдущего случая,

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)^{27},$$

$$f = \det \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, t = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right).$$

$$7) m = 3, n \geq 7: \left(\begin{array}{ccc|ccc} \overbrace{0 \dots 0}^{n-6} & & & \overbrace{0 \dots 0}^{n-6} & & \\ A_1^i & 0 & \dots & 0 & A_2^i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right), i = 1, \dots, 27, \text{ где } (A_1^i | A_2^i)$$

– двадцать семь матриц из предыдущего случая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно показать, как и для группы $\mathrm{GL}_{2,3,3}$, что группы $\mathrm{GL}_{2,3,4}$, $\mathrm{GL}_{2,3,5}$ являются присоединенными группами $\mathbb{Z}$ -градуированных алгебр Ли и, следовательно, соответствующие группы с унимодулярными компонентами являются приведенными присоединенными группами $\mathbb{Z}$ -градуированных алгебр Ли. Поэтому для этих групп первое утверждение теоремы о том, что существуют только две принципиально различные ситуации в орбитальном разложении, почти дословно повторяет уже упоминавшееся более общее утверждение, приведенное в [4; п. 8.5]. Для всех остальных случаев это утверждение станет очевидным при классификации орбит.

Покажем, что ранг матрицы R_k является инвариантом всей нашей группы $\mathrm{GL}_{2,m,n}$, действующей обычным образом на пространстве матриц $(A | B)$. Достаточно показать, что он является инвариантом относительно замены типа

$\begin{cases} A \rightarrow A, \\ B \rightarrow B + \lambda A \end{cases}$ для пары $(A | B)$. Имеем следующую цепочку преобразований

$$\text{матрицы } R_k = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{pmatrix}:$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \\ \lambda B & B + \lambda A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ B - \lambda A & A \\ -\lambda^2 A & B + \lambda A \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ B - \lambda A & A \\ 0 & B + \lambda A \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ B + \lambda A & A \\ 0 & B + \lambda A \end{pmatrix}.$$

На этом примере понятно, что для любой матрицы R_k преобразование $\begin{cases} A \rightarrow A, \\ B \rightarrow B + \lambda A \end{cases}$ задается просто элементарными преобразованиями первого рода матрицы R_k . То есть $\text{rk } R_k$ инвариантен.

Пусть степень элемента $\mathbb{C}^{2,m,n}(A|B)$ равна нулю, тогда мы можем обнулить нашей группой как минимум один столбец у матрицы $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$; таким образом, получим вложенное в $\mathbb{C}^{2,m,n}$ подпространство, на котором действует $\text{GL}_{2,m,n-1}$. По теореме 1 орбиты этой группы не склеиваются группой $\text{GL}_{2,m,n}$. Таким образом, представителями орбит подмногообразия, определяемого равенством степени нулю, можно выбрать соответствующие представители орбит группы $\text{GL}_{2,m,n-1}$.

Рассмотрим преобразование матрицы

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & & & 0 & & \\ E & \vdots & 0 & \vdots & E & 0 \\ & 0 & & 0 & & \\ 0 & & \tilde{A} & 0 & & \tilde{B} \end{array} \right),$$

где E – единичная матрица порядка $k \times k$, при котором $\text{GL}_{2,m-k,n-k-1}$ -преобразуется только пара подматриц $(\tilde{A}|\tilde{B})$.

Это преобразование задается естественным действием группы $\text{GL}_{2,m,n}$, так как в силу теоремы 7 действие некоторого элемента группы GL_2 на элементарной паре степени k эквивалентно действию некоторого элемента группы $\text{GL}_{k,k+1}$ на этой паре.

Следовательно, если степень $0 \neq k < \infty$, то мы можем, во всяком случае, написать полный список (представляющий все орбиты этого множества, но, может быть, неоднократно) представителей орбит матрицами:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & & & 0 & & \\ E & \vdots & 0 & \vdots & E & 0 \\ & 0 & & 0 & & \\ 0 & & \tilde{A} & 0 & & \tilde{B} \end{array} \right),$$

где E – единичная матрица порядка $k \times k$, а $(\tilde{A}|\tilde{B})$ – список представителей орбит группы $\text{GL}_{2,m-k_0,n-k_0-1}$ степени не меньшей k . Допустим, элементы $(A|B)$ и $(A_1|B_1)$ из этого списка эквивалентны относительно $\text{GL}_{2,m,n}$. Пусть элемент $P \times Q \times R$, где $P \in \text{GL}_2$, $Q \in \text{GL}_m$, $R \in \text{GL}_n$, переводит $(A|B)$ в $(A_1|B_1)$. Подействовав на матрицу $(A|B)$ компонентой P и приведя ее после этого группой $\text{GL}_{2,m,n}$ к одной из матриц списка, в силу предыдущего рассуждения и следствия 7.1 получим, что пара $(\tilde{A}|\tilde{B})$ преобразовалась обычным образом группой $\text{GL}_{2,m-k_0,n-k_0-1}$. Но она должна была стать эквивалентной паре $(\tilde{A}_1|\tilde{B}_1)$ относительно группы $\text{GL}_{2,m-k_0,n-k_0-1}$, т.е. мы получили действительно полный список неэквивалентных элементов множества, определяемого условием $0 \neq k < \infty$. Так постепенно классифицируются все орбиты.

Все остальные утверждения теоремы очевидны, и их доказательство после классификации орбит не представляет труда.

§ 2. Графы примыканий

Этот параграф посвящен построению графов примыканий орбит для групп $\mathrm{GL}_{2,2,n}$ и $\mathrm{GL}_{2,3,n}$ ($n \geq 3$).

Основной метод анализа орбит, используемый в настоящей работе, описан в [4; ш. 5.5, 5.6].

Кратко суть метода состоит в следующем.

Пусть редуктивная группа G действует в векторном пространстве V , T – некоторый фиксированный максимальный тор, t – его касательная алгебра, $\Xi(T)$ – группа характеров T , $\Xi(T) \otimes \mathbb{C} \simeq t^*$. Пусть $E(T) = \Xi(T) \otimes \mathbb{Q}$, $t(\mathbb{Q})$ – рациональная форма t . Пространства $E(T)$ и $t(\mathbb{Q})$ изоморфны: $\nu: E(T) \rightarrow t(\mathbb{Q})$, $\nu^{-1}(h_1)(h_2) = (h_1, h_2)$. С помощью изоморфизма ν перенесем скалярное произведение с $t(\mathbb{Q})$ на $E(T)$.

Пусть $u \in V$ – нильпотентный элемент группы G . Пусть $\mathrm{supp} u \in E(T)$ – носитель u . По критерию Гильберта–Мамфорда мы можем выбрать в орбите элемента u такой элемент, что его носитель не содержит нуля. Пусть χ_u – вектор в $E(T)$, конец которого есть ближайшая точка $\mathrm{supp} u$ к нулю, тогда $\chi(h_u) \geq 2$, где $h_u = \frac{2}{(\chi_u, \chi_u)} \nu(\chi_u)$, будет задавать полупространство H_u^+ относительно плоскости, ортогональной χ_u ($\chi(h_u)$ – ее уравнение), в которой лежит $\mathrm{supp} u$.

Элемент u называется *приведенным*, если $\mathrm{supp} u \neq 0$ и $|h_u| \leq |h_g u|$ (или $|\chi_u| \geq |\chi_{gu}|$) $\forall g \in G$ таких, что $\mathrm{supp} u \neq 0$.

Каждый элемент эквивалентен некоторому приведенному, т.е. приведен относительно некоторого максимального тора. Если u – приведенный нильпотентный элемент, то h_u называется его *характеристикой*.

Сформулируем теорему из [4; п. 5.5].

ТЕОРЕМА 9. Пусть u – ненулевой нильпотентный элемент V . Рациональный полупростой элемент $h \in \mathfrak{g}$, удовлетворяющий условию: $u \in \bigoplus_{c \geq 2} V_c(h)$, является характеристикой элемента u тогда и только тогда, когда проекция u_0 элемента u на $V_2(h)$ не является нильпотентным элементом для действия редуктивной группы $\tilde{Z}(h)$, где $\tilde{Z}(h)$ – подгруппа G , соответствующая подалгебре $\tilde{\zeta}(h)$, которая является ортогональным дополнением к элементу h в подалгебре $\zeta(h) = \mathfrak{g}_0(h)$.

Следующая теорема является основным инструментом, позволяющим строить графы примыканий (она вытекает из [4; п. 5.6, теорема 5.6]):

ТЕОРЕМА 10. Пусть h_u – характеристика нильпотентного элемента u , $N(h)$ – множество элементов, характеристика которых сопряжена h . Нильпотентный элемент v содержится в $\overline{N(h)}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{supp}(gv)$ содержится в H_u^+ для некоторого $g \in G$, т.е. в орбите v можно выбрать элемент, принадлежащий $V_+(h) = \bigoplus_{c \geq 2} V_c(h)$. Если же $\mathrm{supp}(gv)$ не содержится в H_u^+ для некоторого $g \in G$, то элемент v не содержится в замыкании орбиты элемента u .

Как уже было частично сказано, группы $\mathrm{GL}_{2,3,4}$, $\mathrm{GL}_{2,3,5}$, $\mathrm{SL}_{2,3,6}$ являются присоединенными группами градуированных алгебр Ли (не обязательно $\mathbb{Z}$ -градуированных). Поэтому для этих групп, а также, естественно, для группы $\mathrm{GL}_{2,3,6}$ каж-

дый страт $N(h)$ есть в точности одна орбита (характеристика в определенном выше смысле совпадает с характеристикой в смысле Дынкина для алгебр Ли). Таким образом, для этих групп мы имеем удобное средство анализа замыканий орбит.

Сначала построим граф примыканий орбит для группы $GL_{2,3,3}$.

Изобразим вершины графа, соответствующие орбитам, сверху вниз в порядке возрастания размерности (см. рис. 1), в левом столбце даны размерности орбит, номера вершин соответствуют номерам орбит из теоремы 6. Размерности орбит определяются путем вычисления размерности касательной алгебры стабилизатора точки орбиты. Заметим (это понадобится для дальнейшего), что стабилизатором точки орбиты номер 15 оказалась редуктивная группа, изоморфная $GL_2 \times \mathbb{C}^{*3}$, т.е. орбита номер 15 аффинна.

Всем представителям орбит можно сопоставить бинарную форму третьей степени $-\det(xA_1 + yA_2)$. Поэтому все множество орбит подразделяется на 4 группы:

- 1) орбиты с номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13;
- 2) орбиты с номерами 10, 14, 16;
- 3) орбиты с номерами 15, 17;
- 4) орбита номер 18,

таким образом, что первой группе соответствует нулевая форма, второй — форма x^3 , третьей — форма x^2y , четвертой — форма $xy(x+y)$. Поэтому имеем условие: орбита i -й группы ($i = 2, 3, 4$) не может вырождаться в орбиту j -й группы ($j = 2, 3, 4$), если $j > i$.

Имеем еще одно простое соображение, позволяющее строить граф.

Представим элементы u_1 и u_2 пространства $\mathbb{C}^{k,l,m}$ естественным образом в виде матриц A и B порядка $k \times lm$. Элемент u_1 может вырождаться в u_2 , только если $\text{rk } A \geq \text{rk } B$.

Пользуясь всеми этими соображениями и находя в некоторых случаях непосредственные вырождения, мы можем построить граф примыканий, двигаясь сверху вниз, до вершины номер 14 включительно таким образом, как он изображен на рис. 1.

Для дальнейшего вычислим характеристику h_{15} элемента номер 15. Носитель $\text{supp } u$ натянут на векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Первые три компоненты соответствуют характерам тора компоненты GL_3 , которая умножает каждую матрицу элемента $(A_1 | A_2)$ слева (берется та координата, где стоит единица), следующие три компоненты соответствуют группе GL_3 , умножающей каждую матрицу элемента $(A_1 | A_2)$ справа, последние две компоненты

соответствуют группе GL_2 , линейно комбинирующей A_1 и A_2 . Методами линейной алгебры находим:

$$\chi_u = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad h_u = \frac{2}{15} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad |\chi_u|^2 = \frac{6}{5}.$$

Чтобы наглядно продемонстрировать $V_2(h_u)$ и $V_+(h_u)$, составим матрицу (будем обозначать ее A_{15}^*):

$$A_{15}^* = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cdot & \cdot & * & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & \cdot \end{array} \right).$$

Нулями обозначены те клетки, для которых соответствующие линейные одномерные подпространства не входят в $V_+(h_{15})$, точками – те, для которых соответствующие подпространства содержатся в $V_2(h_{15})$, звездочками – те, для которых соответствующие подпространства содержатся в $V_+(h_{15})$, но не содержатся в $V_2(h_{15})$.

В $V_2(h_{15})$ действует группа $\tilde{Z}(h_{15})$. Для того чтобы доказать, что h_{15} – характеристика элемента номер 15, достаточно убедиться, что $\tilde{Z}(h_{15})$ не переводит его ни в какой элемент, нильпотентный для ее тора. Во-первых, сам элемент номер 15 не нильпотентен относительно тора группы $\tilde{Z}(h_{15})$, так как система линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

имеет решение: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$, причем, как видно, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, т.е. существует

инвариант f тора группы $\tilde{Z}(h_{15})$, ненулевой на u (тор группы $\tilde{Z}(h_{15})$ действует

в пространстве $\left(\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \end{array} \right)$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, тогда $f = \alpha^9 \beta^9 \gamma^{12}$). Подобным

образом рассматривается элемент $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, так как вполне возможно,

что этот элемент $\tilde{Z}(h_{15})$ -эквивалентен элементу номер 15. Меньшего, чем в этих

элементах, количества ненулевых компонент в клетках, соответствующих $V_2(h_{15})$, группой $\tilde{Z}(h_{15})$ получить невозможно. Значит, h_{15} — характеристика элемента номер 15.

Далее характеристики элементов находятся аналогично и вычисления не приводятся.

Из вида полученной матрицы A_{15}^* вытекает, что элемент $(A | B)$ может лежать в замыкании орбиты Gu , только если можно сделать матрицу B имеющей ранг ≤ 1 . Для матриц с номерами 9, 12, 15 это невозможно.

Вспомним, что орбита номер 15 аффинна, значит, дополнение до ее замыкания должно иметь в нем коразмерность 1. Значит, орбита номер 14 лежит в замыкании пятнадцатой орбиты.

Легко построить непосредственные вырождения элемента номер 16 в элементы с номерами 9, 12, 13, 14, но более красиво получить существование вырождений с помощью характеристики h_{16} , кроме того, она понадобится для дальнейшего. В предыдущих обозначениях имеем:

$$h_{16} = \frac{2}{11} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad |\chi_{16}|^2 = \frac{11}{9}, \quad A_{16}^* = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cdot & * & * & 0 & \cdot & * \\ 0 & \cdot & * & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Орбита номер 16 не вырождается в орбиту номер 15, это видно из соображений о формах, а также из того, что $|\chi_{15}|^2 = \frac{6}{5} < \frac{11}{9} = |\chi_{16}|^2$, т.е. носитель элемента из пятнадцатой орбиты не может быть переведен в $V_+(h_{16})$.

Орбита номер 17 имеет в замыкании все орбиты меньшей размерности, так как она является единственной орбитой максимальной размерности в нуль-конусе группы $SL_{2,3,3}$.

Орбита номер 18, очевидно, имеет в замыкании все орбиты.

Мы построили граф примыканий орбит для $GL_{2,3,3}$, см. рис. 1.

ТЕОРЕМА 11. *На рис. 2 изображен граф примыканий орбит для случая $(2, 3, 6)$. Номера вершин соответствуют номерам орбит из теоремы 8, слева обозначены размерности орбит.*

Этот граф содержит в себе графы примыканий всех интересующих нас случаев. То есть если ограничить этот граф на соответствующие вершины, то получатся графы примыканий для случаев $(2, 2, 2)$, $(2, 3, 3)$, $(2, t, n)$, где либо $t = 2$ и $n \geq 3$, либо $t = 3$ и $n \geq 4$. Номера вершин, на которые нужно ограничивать граф, совпадают с номерами орбит в лемме 2, теореме 6 и теореме 8 соответственно, за одним исключением для случая $(2, 2, 4)$, где орбиты номер 8, 9, 10 надо сопоставить вершинам номер 11, 13, 19 соответственно.

Рис. 1. Граф примыканий орбит пространства $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ Рис. 2. Граф примыканий орбит пространства $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^6$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Краеугольным камнем в доказательстве этой теоремы является п. (б) следствия 1.1, позволяющий рассматривать граф примыканий группы как подграф графа примыканий большей группы. Таким образом, теорема доказывается перебором случаев и анализом примыканий орбит, аналогичным тому, который проводился при построении графа примыканий для случая $(2, 3, 3)$.

Список литературы

1. *Крафт Х.* Геометрические методы в теории инвариантов. М.: Мир, 1987.
2. *Кас V. G.* Some remarks on nilpotent orbits // J. Algebra. 1980. V. 64. P. 190–213.
3. *Винберг Э. Б.* Классификация однородных нильпотентных элементов полупростой градуированной алгебры Ли // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1979. № 19. С. 155–177.
4. *Винберг Э. Б., Попов В. Л.* Теория инвариантов // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 55. М.: ВИНТИ, 1989. С. 137–315.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
6. *Парфенов П. Г.* Тензорные произведения с конечным числом орбит // УМН. 1998. Т. 53. № 3. С. 193–194.
7. *Хамфри Дж.* Линейные алгебраические группы. М.: Наука, 1980.
8. *Элашвили А. Г.* Стационарные подалгебры точек общего положения для неприводимых линейных групп Ли // Функци. анализ и его прилож. 1972. Т. 6. № 2. С. 65–78.
8. *Дьёдонне Ж.* Геометрия классических групп. М.: Мир, 1974.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
18.10.1999