Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Степанец, Решение задачи Колмогорова–Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 1, 113–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm538>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 08:26:34

УДК 517.5

А. И. Степанец

Решение задачи Колмогорова–Никольского для интегралов Пуассона непрерывных функций

Получены асимптотические равенства для верхних граней отклонений сумм Фурье на классах сверток ядер Пуассона с непрерывными функциями, модули непрерывности которых не превышают заданных мажорант.

Библиография: 37 названий.

§ 1. Предварительные сведения и формулировка основного результата

В 1935 году А. Н. Колмогоров [1] рассмотрел величину

$$\mathcal{E}_n(W^r) = \sup_{f \in W^r} |f(x) - S_{n-1}(f; x)|, \quad (1)$$

где W^r обозначает класс 2π -периодических функций $f(\cdot)$, r -е производные $f^{(r)}(\cdot)$ которых (r – целое, $r \geq 1$) почти всюду удовлетворяют условию $|f^{(r)}(x)| \leq 1$, $S_n(f; x)$ – частная сумма порядка n ряда Фурье функции $f(\cdot)$, и показал, что при $n \rightarrow \infty$

$$\mathcal{E}_n(W^r) = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^r} + O(1)n^{-r}, \quad (2)$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n и по $f \in W^r$, т.е. нашел асимптотически точное равенство для величин $\mathcal{E}_n(W^r)$.

Затем В. Т. Пинкевичем [2] было показано, что равенство (2) остается в силе и при любом $r > 0$, если производные понимать в смысле Вейля.

Следующий существенный шаг в этом вопросе был сделан С. М. Никольским [3]–[9], который обобщил упомянутые результаты на классы $W^r H^\alpha$ 2π -периодических функций $f(\cdot)$, r -е производные ($r \geq 0$) которых удовлетворяют условию

$$|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x')| \leq |x - x'|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

а также на более общие классы $W^r H_\omega$, определяющиеся выпуклыми модулями непрерывности $\omega = \omega(t)$. Кроме того, С. М. Никольский решил аналогичную задачу и для случая, когда вместо сумм $S_n(f; x)$ в (1) берутся суммы Фейера $\sigma_n(f; x)$.

Эти исследования А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского положили начало новому направлению в теории приближения функций и в теории рядов Фурье. Результаты этих исследований распространялись на все более общие классы функций, а в качестве приближающих агрегатов рассматривались тригонометрические полиномы $U_n(f; x)$, порождаемые различными методами U_n суммирования рядов Фурье.

Задача об отыскании асимптотических равенств для величин

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n)_X = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \|f(x) - U_n(f; x)\|_X, \quad (3)$$

где $\mathfrak{N}$ – некоторый класс в пространстве X 2π -периодических функций с нормой $\|\cdot\|_X$, была и остается одной из наиболее важных в теории приближения и в теории рядов Фурье. Она получила название *задачи Колмогорова–Никольского* (задача К–Н), и если для величины (3) получено равенство, которое является асимптотически точным, т.е. если в явном виде найдена такая функция $\varphi(n) = \varphi(\mathfrak{N}; U_n; X)$, для которой

$$\mathcal{E}(\mathfrak{N}; U_n)_X = \varphi(n) + o(\varphi(n)), \quad n \rightarrow \infty,$$

то говорят, что решена задача К–Н для класса функций $\mathfrak{N}$ и метода U_n в пространстве X .

Эта задача имеет богатую историю, связанную с именами крупнейших специалистов в теории функций. Подробнее с ее историей можно познакомиться, например, по книгам автора [10], [11], главное место в которых отводится именно этой задаче.

Естественно, наибольшее внимание задача К–Н получила для сумм Фурье в равномерной метрике. Понятно, что здесь обобщения результатов А. Н. Колмогорова и С. М. Никольского возможны только за счет рассмотрения более общих, чем W^r и $W^r H_\omega$, классов функций. К началу 70-х годов эта задача была полностью решена на классах W_β^r и $W_\beta^r H_\omega$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}^1$, 2π -периодических функций $f(\cdot)$, представимых свертками

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) B_{r,\beta}(t) dt,$$

в которых A_0 – некоторая константа,

$$B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r} \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right)$$

– ядра Бернулли и почти всюду $|\varphi| \leq 1$ ($\varphi \in U_\infty$) и, соответственно, $\varphi \in H_\omega$,

$$H_\omega = \{\varphi \in C : \omega(\varphi; t) \leq \omega(t)\},$$

где C – пространство непрерывных 2π -периодических функций, $\omega(\varphi; t)$ – модуль непрерывности функции $\varphi(\cdot)$, а $\omega(t)$ – фиксированный модуль непрерывности, т.е. непрерывная неубывающая и полуаддитивная при всех $t \geq 0$ функция, равная нулю в начале координат. При этом наиболее полные и законченные результаты для классов W_β^r были получены в работах Б. Нады [12]–[16], С. А. Теляковского [17]–[21] и С. Б. Стечкина [22]–[24], а для классов $W_\beta^r H_\omega$ – в работах А. В. Ефимова [25]–[29].

В 80-х годах в работах автора [30]–[34] начал разрабатываться метод решения задачи К–Н для классов $C_{\beta,\infty}^\psi$ и $C_\beta^\psi H_\omega$ непрерывных 2π -периодических функций $f(\cdot)$, задающихся свертками

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) \Psi_\beta(t) dt,$$

в которых

$$\Psi_{\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \beta \in \mathbb{R}^1,$$

$\psi = \psi(k)$, $k \in \mathbb{N}$, — некоторая, вообще говоря, произвольная функция натурального аргумента, $\varphi \in U_{\infty}$ и, соответственно, $\varphi \in H_{\omega}$.

К настоящему времени получены решения задачи К–Н для классов $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ и $C_{\beta}^{\psi}H_{\omega}$ для всех выпуклых вниз последовательностей $\psi(k)$, за исключением того случая (для классов $C_{\beta}^{\psi}H_{\omega}$), когда последовательность $\psi(k)$ убывает со скоростью геометрической прогрессии с некоторым показателем $q \in (0, 1)$. Эти результаты подробно изложены в [11]. При $\psi(k) = q^k$, $k \in \mathbb{N}$, функция $\Psi_{\beta}(t)$ есть известное ядро Пуассона

$$P_{\beta}^q(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad q \in (0, 1), \quad \beta \in \mathbb{R}^1,$$

а

$$f(x) = A_0 + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x+t) P_{\beta}^q(t) dt \quad (4)$$

— интегралы Пуассона — 2π -периодические функции, допускающие продолжение до функций $f(z) = f(x+iy)$, регулярных в полосе $|y| < \ln(1/q)$ (см., например, [11; §1.8]). В дальнейшем классы $C_{\beta,\infty}^q$ и $C_{\beta}^qH_{\omega}$ в этом случае будем обозначать через $C_{\beta,\infty}^q$ и $C_{\beta}^qH_{\omega}$.

Для классов $C_{\beta,\infty}^q$ решение задачи К–Н было получено С. М. Никольским [9], еще в 1946 году доказавшим, что

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta,\infty}^q) = \frac{8q^n}{\pi^2} \mathbf{K}(q) + O(1)q^n n^{-1}, \quad (5)$$

где

$$\mathbf{K}(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 t}}, \quad q \in [0, 1),$$

— полный эллиптический интеграл первого рода.

В 1980 году С. Б. Стечкиным [24] был передоказан этот результат другим способом, позволившим уточнить остаточный член в формуле (5). Тогда же С. Б. Стечкин обратил внимание автора на аналогичную задачу для класса $C_{\beta}^qH_{\omega}$. Классы $C_{\beta}^{\psi}H_{\omega}$ по сравнению с классами $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ учитывают более тонкие свойства функций, поэтому решение экстремальных задач для них всегда существенно усложняется и, как правило, методы, разработанные для решения задач на классах $C_{\beta,\infty}^{\psi}$, далеко недостаточны для решения таких задач на классах $C_{\beta}^{\psi}H_{\omega}$. Исключительность классов $C_{\beta}^qH_{\omega}$ среди классов $C_{\beta}^{\psi}H_{\omega}$, определяющихся выпуклыми последовательностями $\psi(k)$, с точки зрения решения задачи К–Н объясняется в первую очередь тем, что на этих классах порядки верхних граней приближений суммами Фурье и наилучших приближений тригонометрическими полиномами совпадают и в то же время последовательность $\psi(k) = q^k$, $k \in \mathbb{N}$, еще недостаточно быстро стремится к нулю, чтобы первый член отклонения сумм Фурье был доминирующим, как, например, в случае, когда $\psi(k) = q^{k^r}$, $k \in \mathbb{N}$, при $r > 1$. Следует

отметить, что в подобных ситуациях решение задачи К–Н известно в крайне редких случаях, и первая такая задача была решена Н. П. Корнейчуком [35] в случае приближения суммами Фавара на классах H_ω при $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$. Здесь Н. П. Корнейчук впервые в полной мере воспользовался одним утверждением (см. ниже лемму 4), получившим впоследствии название леммы Корнейчука–Стечкина. Эта лемма открывает принципиальную возможность находить величины вида

$$\sup_{f \in H_\omega} \left| \int_a^b f(t) \varphi(t) dt \right|.$$

Как раз к этому и сводится решение задач К–Н на классах, определяющихся модулями непрерывности. Однако применение этой леммы весьма нетривиально: для эффективного ее использования требуется информация о наличии нулей и специальном характере их расположения у некоторых первообразных функции $\varphi(\cdot)$. Получение такой информации сопряжено, как правило, с большими трудностями, чем и объясняется столь незначительное количество случаев решения подобных задач (подробнее об этом можно прочитать в [10]).

В настоящей работе дается решение задачи Колмогорова–Никольского в случае приближения суммами Фурье функций из классов $C_\beta^q H_\omega$ и тем самым устраняется упоминавшийся пробел в решении этой задачи для классов $C_\beta^\psi H_\omega$.

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $q \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}^1$ и $\omega(t)$ – произвольный модуль непрерывности. Тогда величина

$$\mathcal{E}_n(C_\beta^q H_\omega) = \sup\{|\rho_n(f; x)| = |f(x) - S_{n-1}(f; x)| : f \in C_\beta^q H_\omega\}$$

не зависит от точки x и при $n \rightarrow \infty$ выполняется равенство

$$\mathcal{E}_n(C_\beta^q H_\omega) = \frac{4q^n}{\pi^2} \mathbf{K}(q) e_n(\omega) + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^{2n}} \omega\left(\frac{1}{n}\right), \quad (6)$$

где

$$e_n(\omega) = \theta_\omega \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t dt,$$

$\theta_\omega \in [1/2, 1]$, причем $\theta_\omega = 1$, если $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности; $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n , q и β .

Основные результаты настоящей статьи анонсированы автором в [36].

§ 2. Доказательство теоремы 1

Обозначим через $f_\beta^q(\cdot)$ функцию $\varphi(\cdot)$ в представлении (4). Тогда если $f \in C_\beta^q H_\omega$, то

$$|f_\beta^q(t) - f_\beta^q(t')| \leq \omega(|t - t'|) \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}^1$$

и

$$\rho_n(f; x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_\beta^q(x+t) P_{\beta,n}^q(t) dt, \quad (7)$$

где

$$P_{\beta,n}^q(t) = \sum_{k=n}^{\infty} q^k \cos\left(kt + \frac{\beta\pi}{2}\right). \quad (8)$$

Классы $C_{\beta}^q H_{\omega}$ инвариантны относительно сдвига аргумента: если $f \in C_{\beta}^q H_{\omega}$, то и функция $f_1(t) = f(t+h)$ при любом действительном h также принадлежит $C_{\beta}^q H_{\omega}$. Отсюда вследствие (7) заключаем, что величина $\mathcal{E}_n(C_{\beta}^q H_{\omega})$ действительно не зависит от значения x и, следовательно,

$$\mathcal{E}_n(C_{\beta}^q H_{\omega}) = \sup_{f \in C_{\beta}^q H_{\omega}} |\rho_n(f; 0)|. \quad (9)$$

Функция $P_{\beta,n}^q(t)$ ортогональна любой константе, поэтому

$$\rho_n(f; 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \delta_n(t) P_{\beta,n}^q(t) dt, \quad \delta_n(t) = f_{\beta}^q(t) - f_{\beta}^q(0). \quad (10)$$

Далее, в силу (8) имеем

$$P_{\beta,n}^q(t) = q^n \left[g(t) \cos\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) - h(t) \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right], \quad (11)$$

где

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k \cos kt = \frac{1 - q \cos t}{1 - 2q \cos t + q^2} \quad (12)$$

и

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k \sin kt = \frac{q \sin t}{1 - 2q \cos t + q^2}. \quad (13)$$

Так что согласно (11)–(13)

$$P_{\beta,n}^q(t) = q^n Z_q^2(t) \left[(1 - q \cos t) \cos\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) - q \sin t \sin\left(nt + \frac{\beta\pi}{2}\right) \right], \quad (14)$$

где

$$Z_q(t) = (1 - 2q \cos t + q^2)^{-1/2}. \quad (15)$$

Заметив, что $(1 - q \cos t)^2 + q^2 \sin^2 t = (Z_q(t))^{-2}$, определим функцию $\theta(t)$ равенствами

$$Z_q(t)(1 - q \cos t) = \cos \theta(t), \quad Z_q(t)q \sin t = \sin \theta(t),$$

так что

$$\theta(t) = \arctg \frac{q \sin t}{1 - q \cos t}. \quad (16)$$

Тогда согласно (14)

$$P_{\beta,n}^q(t) = q^n Z_q(t) \cos\left(nt + \theta(t) + \frac{\beta\pi}{2}\right). \quad (17)$$

Объединяя (9), (10) и (17), находим

$$\mathcal{E}_n(C_\beta^q H_\omega) = \frac{q^n}{\pi} \sup_{f \in H_{\omega_0}} \int_0^{2\pi} f(t) Z_q(t) \cos\left(nt + \theta(t) + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt, \quad (18)$$

где

$$H_{\omega_0} = \{f : f \in H_\omega, f(0) = 0\}.$$

Правая часть в (18) является 4-периодической функцией по параметру β . Поэтому в дальнейшем достаточно считать, что $\beta \in [0, 4)$.

Отметив это, положим

$$\tau = y_1(t) = t + \frac{1}{n-1} \left(\theta(t) + t + \frac{\beta\pi}{2} \right), \quad n \geq 2. \quad (19)$$

Учитывая равенство (16), находим

$$y_1'(t) = 1 + \frac{1}{n-1} Z_q^2(t) (1 - q \cos t) = \frac{Z_q^2(t)}{Z_{q,n}^2(t)},$$

где

$$Z_{q,n}(t) = \left(\frac{n}{n-1} - \frac{2n-1}{n-1} q \cos t + q^2 \right)^{-1/2}. \quad (20)$$

Видим, что всегда $y_1'(t) > 1$, так что $y_1(t)$ строго возрастает, и, значит, у нее существует обратная функция $t = y(\tau) = y_1^{-1}(\tau)$, определенная на всей оси, при этом

$$y'(\tau) = \frac{Z_{q,n}^2(y(\tau))}{Z_q^2(y(\tau))}. \quad (21)$$

Следовательно, при всех $\tau \in \mathbb{R}^1$ и $q \in (0, 1)$

$$0 < y'(\tau) < 1. \quad (22)$$

Обозначая интеграл в (18) через $\mathcal{J}_n(f)$ и полагая в нем $t = y(\tau)$, с учетом равенства (21) получаем

$$\mathcal{J}_n(f) = \int_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} f(y(\tau)) \frac{Z_{q,n}^2(y(\tau))}{Z_q^2(y(\tau))} \cos(n-1)\tau d\tau. \quad (23)$$

Пусть

$$r_n^{(1)}(\tau) = \frac{Z_{q,n}^2(y(\tau))}{Z_q^2(y(\tau))} - Z_q(y(\tau)). \quad (24)$$

Тогда согласно (23)

$$\mathcal{J}_n(f) = \int_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} f(y(\tau)) Z_q(y(\tau)) \cos(n-1)\tau d\tau + R_n^{(1)}(f), \quad (25)$$

где

$$R_n^{(1)}(f) = \int_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} f(y(\tau)) r_n^{(1)}(\tau) \cos(n-1)\tau d\tau. \quad (26)$$

Покажем, что при $n \rightarrow \infty$

$$|R_n^{(1)}(f)| = O(1) \frac{\omega(1/n)}{(1-q)^2 n} \quad \forall f \in H_{\omega_0}, \quad (27)$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по всем параметрам. Для этого используем следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $\varphi(t)$ – суммируемая на промежутке $[a, b]$ функция и $\{x_k\}$, $k = \overline{1, N}$, $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq b$, – некоторый набор точек, для которых

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t) dt = 0, \quad k = \overline{1, N-1}.$$

Тогда для любой функции $f \in H_\omega[a, b] = \{f : |f(x) - f(x')| \leq \omega(|x - x'|), x, x' \in [a, b]\}$, где $\omega = \omega(t)$ – произвольный модуль непрерывности, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) \varphi(t) dt \right| &\leq \max_{a \leq t \leq x_1} |f(t)| \int_a^{x_1} |\varphi(t)| dt \\ &\quad + \omega(\Delta) \int_{x_1}^{x_N} |\varphi(t)| dt + \max_{x_N \leq t \leq b} |f(t)| \int_{x_N}^b |\varphi(t)| dt, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \sup_k (x_{k+1} - x_k). \quad (28)$$

Эта лемма является следствием упоминавшейся леммы Корнейчука–Стечкина, и ее доказательство изложено в [11; § 3.1]. Заметим, что в силу (22) функция $F(\tau) = f(y(\tau))$ принадлежит множеству $H_\omega[y_1(0), y_1(2\pi)]$ и $F(y_1(0)) = 0$. Поэтому для оценки интеграла в (26) можно воспользоваться леммой 1 при $\varphi(t) = r_n^{(1)}(t) \cos(n-1)t$, если удастся обнаружить соответствующие нули x_k . Убедимся, что такие нули и в нужном количестве существуют. Вычисления показывают, что

$$(r_n^{(1)}(\tau))' = \frac{1}{n-1} Z_q^3(y(\tau)) Z_{q,n}^4(y(\tau)) q \sin y(\tau) y'(\tau) Q_n(\cos(y(\tau))),$$

где

$$Q_n(x) = q^2 \frac{2n-1}{n-1} x^2 - \left(\frac{5n-3}{n-1} q - q^3 \right) x + \frac{2n-1}{n-1} + q^2 - q^4.$$

Анализируя квадратный трехчлен $Q_n(x)$, убеждаемся, что $Q_n(x) > 0$ при всех $q \in [0, 1)$ и при всех $x \in [-1, 1]$. Следовательно,

$$\text{sign}(r_n^{(1)}(\tau))' = \text{sign} \sin y(\tau), \quad \tau \in [y_1(0), y_1(2\pi)].$$

Поэтому на участке $(y_1(0), y_1(\pi))$ функция $r_n^{(1)}(\tau)$ строго возрастает, а на участке $(y_1(\pi), y_1(2\pi))$ – строго убывает.

Пусть $x_k = k\pi/(n-1)$ и $\tau_k = x_k + \pi/(2(n-1))$. Тогда с учетом (19) имеем

$$\begin{aligned} y_1(0) &< x_2 < \tau_2 < x_3 < \dots < \tau_{n-1} < x_n \\ &\leq y_1(\pi) < x_{n+2} < \tau_{n+2} < \dots < \tau_{2n-1} < x_{2n} \leq y_1(2\pi). \end{aligned} \quad (29)$$

Вследствие монотонности функции $r_n^{(1)}(\tau)$ числа

$$\alpha_k = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} r_n^{(1)}(\tau) \cos(n-1)\tau d\tau$$

при $k = 2, 3, \dots, n-2$ по абсолютной величине не убывают, а при $k = n+2, \dots, 2n-2$ не возрастают, причем

$$\operatorname{sign} \alpha_k = \operatorname{sign} \cos(n-1)x_{k+1} = (-1)^k.$$

Поэтому функция (см. [11; предложение 3.1.1])

$$r_n^+(\tau) = \int_{\tau_2}^{\tau} r_n^{(1)}(v) \cos(n-1)v dv$$

на каждом промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = 2, \dots, n-2$, имеет единственный простой нуль $\bar{\tau}_k$, а функция

$$r_n^-(\tau) = \int_{\tau_{2n-1}}^{\tau} r_n^{(1)}(v) \cos(n-1)v dv$$

имеет единственный простой нуль $\bar{\tau}_k$ на каждом промежутке $[\tau_k, \tau_{k+1}]$, $k = n+2, \dots, 2n-2$.

Видим, что на каждом из участков $[y_1(0), y_1(\pi)]$ и $[y_1(\pi), y_2(2\pi)]$ действительно выполняются условия леммы 1, и ее применение дает

$$\begin{aligned} |R_n^{(1)}(f)| &\leq \max_{y_1(\nu) \leq \tau \leq \tau_2} |f(y(\tau))| \int_{y_1(0)}^{\tau_2} |r_n^{(1)}(\tau)| d\tau \\ &+ \max_{\tau_{n-1} \leq \tau \leq \tau_{n+3}} |f(y(\tau))| \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_{n+3}} |r_n^{(1)}(\tau)| d\tau \\ &+ \max_{\tau_{2n-2} \leq t \leq y_1(2\pi)} |f(y(\tau))| \int_{\tau_{2n-2}}^{y_1(2\pi)} |r_n^{(1)}(\tau)| dt \\ &+ \omega\left(\frac{4\pi}{n-1}\right) \int_{\tau_2}^{\tau_{2n-1}} |r_n^{(1)}(\tau)| d\tau. \end{aligned} \quad (30)$$

С учетом (24), (15), (20) и (12) получаем

$$\begin{aligned} |r_n^{(1)}(t)| &= \frac{\left|1 - 2q \cos y(\tau) - \frac{n}{n-1} + \frac{2n-1}{n-1} q \cos y(\tau)\right|}{\left(\frac{n}{n-1} - \frac{2n-1}{n-1} q \cos y(\tau) + q^2\right) \sqrt{1 - 2q \cos y(\tau) + q^2}} \\ &\leq \frac{1 - q \cos y(\tau)}{(n-1)(1 - 2q \cos y(\tau) + q^2) \sqrt{1 - 2q \cos y(\tau) + q^2}} \leq \frac{1}{(1-q)^2(n-1)}, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (31)$$

В то же время согласно (29) имеем

$$\tau_2 - y_1(0) \leq \frac{3\pi}{n-1}, \quad \tau_{n+3} - \tau_{n-1} \leq \frac{4\pi}{n-1}, \quad y_1(2\pi) - \tau_{2n-2} \leq \frac{5\pi}{n-1}. \quad (32)$$

Объединяя оценки (30)–(32), получаем соотношение (27).

Следующий шаг состоит в дальнейшем упрощении интеграла в (25). С этой целью определим функцию $l_n(\tau) = l_{n,q}(\tau)$, положив

$$l_n(\tau) = \begin{cases} Z_q(y(\tau_k)), & \tau \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 2, 3, \dots, 2n-1, \\ 0, & \tau \in [y_1(0), x_2) \cup (x_{2n}, y_1(2\pi)). \end{cases} \quad (33)$$

Тогда в силу (25)

$$\mathcal{J}_n(f) = \int_{x_2}^{x_{2n}} f(y(\tau)) l_n(\tau) \cos(n-1)\tau d\tau + R_n^{(1)}(f) + R_n^{(2)}(f), \quad (34)$$

где

$$R_n^{(2)}(f) = \int_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} f(y(\tau)) r_n^{(2)}(\tau) \cos(n-1)\tau d\tau \quad (35)$$

и

$$r_n^{(2)}(\tau) = Z_q(y(\tau)) - l_n(\tau). \quad (36)$$

Чтобы оценить величину $R_n^{(2)}(f)$, будем опять пользоваться леммой 1, для чего сначала предстоит получить нужную информацию о функции $r_n^{(2)}(\tau) \cos(n-1)\tau$. Прежде всего докажем следующее утверждение.

ЛЕММА 2. *Функция $Z_q(y(\tau))$, $0 < q < 1$, $n \geq 2$, на промежутке $(y_1(0), y_1(\pi))$ строго убывает, на промежутке $(y_1(\pi), y_2(2\pi))$ строго возрастает и на указанных промежутках имеет по единственной точке перегиба.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$Z'_q(t) = -q \sin t (1 + q^2 - 2q \cos t)^{-3/2}, \quad (37)$$

то с учетом (21)

$$(Z_q(y(\tau)))' = Z'_q(y(\tau)) y'(\tau) = -q \sin y(\tau) Z_q(y(\tau)) Z_{q,n}^2(y(\tau)). \quad (38)$$

Таким образом,

$$\text{sign}(Z_q(y(\tau)))' = -\text{sign} \sin y(\tau), \quad (39)$$

откуда и следует первая часть утверждения леммы. Далее имеем

$$Z''_q(t) = -q^2 (1 + q^2 - 2q \cos t)^{-5/2} \left(\cos^2 t + \frac{1+q^2}{q} \cos t - 3 \right) \quad (40)$$

и

$$y''(\tau) = \frac{q(1-q^2)}{n-1} \sin y(\tau) \frac{Z_{q,n}^6(y(\tau))}{Z_q^2(y(\tau))}. \quad (41)$$

Поэтому, объединяя соотношения (37), (38), (40) и (41), получаем

$$\begin{aligned} (Z_q(y(\tau)))'' &= Z''_q(y(\tau)) y'^2(\tau) + Z'_q(y(\tau)) y''(\tau) = -q^2 Z_q(y(\tau)) Z_{q,n}^4(y(\tau)) \\ &\times \left[\cos^2 y(\tau) + \frac{1+q^2}{q} \cos y(\tau) - 3 + \frac{1-q^2}{n-1} Z_{q,n}^2(y(\tau)) \sin^2 y(\tau) \right]. \end{aligned}$$

Видим, что

$$\begin{aligned} &\text{sign}(Z_q(y(\tau)))'' \\ &= -\text{sign} \left[\cos^2 y(\tau) + \frac{1+q^2}{q} \cos y(\tau) - 3 + \frac{1-q^2}{n-1} Z_{q,n}^2(y(\tau)) \sin^2 y(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (42)$$

Анализируя это равенство, приходим к выводу, что функция $(Z_q(y(\tau)))''$ действительно имеет по единственному простому нулю на промежутках $(y_1(0), y_1(\pi))$ и $(y_1(\pi), y_1(2\pi))$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. Пусть на отрезке $[a, a + 2h]$, $h > 0$, задана дважды непрерывно дифференцируемая функция $g(t)$ и

$$F(t) = \left| g(t) - g\left(a + \frac{h}{2}\right) \right| - \left| g(t+h) - g\left(a + \frac{3h}{2}\right) \right|, \quad t \in [a, a+h]. \quad (43)$$

Тогда если $g(t)$ не возрастает на $[a, a + 2h]$, $g''(t) \geq 0$ при всех $t \in [a, a + 2h]$, то

$$F(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a, a+h]. \quad (44)$$

Если при этом $g''(t) \leq 0$ при всех $t \in [a, a + 2h]$, то

$$F(t) \leq 0 \quad \forall t \in [a, a+h]. \quad (44')$$

В случае, когда $g(t)$ не убывает, условие $g''(t) \geq 0$ влечет соотношение (44'), а условие $g''(t) \leq 0$ — соотношение (44).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g(t)$ на $[a, a + 2h]$ не возрастает. Тогда в силу (43)

$$F(t) = \begin{cases} (g(t) - g(t+h)) - (g(a+h/2) - g(a+3h/2)), & t \in [a, a+h/2], \\ (g(t+h) - g(t)) - (g(a+3h/2) - g(a+h/2)), & t \in [a+h/2, a+h]. \end{cases}$$

Поэтому если $t \in [a, a+h/2]$, то

$$F(t) = \int_t^{t+h} |g'(\tau)| d\tau - \int_{a+h/2}^{a+3h/2} |g'(\tau)| d\tau.$$

Пусть

$$\Phi(t) = \int_t^{t+h} |g'(\tau)| d\tau, \quad t \in [a, a+h].$$

Тогда

$$F(t) = \Phi(t) - \Phi\left(a + \frac{h}{2}\right), \quad t \in [a, a+h/2]. \quad (45)$$

Если $g''(t) \geq 0$, то функция $|g'(t)|$ не возрастает и поэтому

$$\Phi'(t) = |g'(t+h)| - |g'(t)| \leq 0,$$

т.е. функция $\Phi(t)$ не возрастает. Значит, $F(t) \geq 0$ в силу (45). Если же $g''(t) \leq 0$, то $|g'(t)|$ не убывает и тогда $F(t) \leq 0$. Этим соотношения (44) и (44') установлены для всех $t \in [a, a+h/2]$ при условии, что $g(t)$ не возрастает. Ясно, что такими же рассуждениями эти соотношения устанавливаются и во всех оставшихся случаях.

Перейдем непосредственно к нахождению оценки для $|R_n^{(2)}(f)|$ и покажем, что $\forall f \in H_{\omega_0}$

$$|R_n^{(2)}(f)| = O(1) \frac{\omega(1/n)}{(1-q)^2 n}. \quad (46)$$

Руководствуясь леммой 2, через τ^* обозначим точку перегиба функции $Z_q(y(\tau))$, лежащую на промежутке $[y_1(0), y_1(\pi)]$. Тогда на участке $(y_1(0), \tau^*)$ функция $Z_q(y(\tau))$ убывает и выпукла вверх, а на участке $(\tau^*, y_1(\pi))$ убывает и выпукла

вниз. Пусть, далее, числа k_1 и k_2 такие, что точка x_{k_1} есть ближайшая к τ^* слева среди точек x_k , а точка x_{k_2} – ближайшая справа; пусть $k \in [2, k_1 - 1]$ и

$$\alpha_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} r_n^{(2)}(\tau) \cos(n-1)\tau d\tau.$$

В этом случае

$$\text{sign } \alpha_k = (-1)^k \quad (47)$$

и числа $|\alpha_k|$ не убывают. Действительно, пусть для определенности k – четное число. Тогда согласно (36)

$$\begin{aligned} |\alpha_k| - |\alpha_{k+1}| &= \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} r_n^{(2)}(\tau) \cos(n-1)\tau d\tau \right| - \left| \int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} r_n^{(2)}(\tau) \cos(n-1)\tau d\tau \right| \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} |Z_q(\tau) - Z_q(\tau_k)| |\cos(n-1)\tau| d\tau \\ &\quad - \int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} |Z_q(\tau) - Z_q(\tau_{k+1})| |\cos(n-1)\tau| d\tau \\ &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(|Z_q(\tau) - Z_q(\tau_k)| - \left| Z_q\left(\tau + \frac{\pi}{n-1}\right) - Z_q\left(\tau_k + \frac{\pi}{n-1}\right) \right| \right) \\ &\quad \times |\cos(n-1)\tau| d\tau. \end{aligned}$$

На участке $(y_1(0), x_{k_1})$ функция $Z_q(\tau)$ убывает и $Z_q''(\tau) \leq 0$. Поэтому, применяя лемму 3 при $a = x_k$, $h = k\pi/(n-1)$ и $g(\tau) = Z_q(\tau)$, убеждаемся, что в самом деле

$$|\alpha_k| \leq |\alpha_{k+1}|, \quad k = \overline{2, k_1 - 2}. \quad (48)$$

Если $k_2 \leq k < n-1$, то аналогично приходим к выводу, что

$$\text{sign } \alpha_k = (-1)^{k+1} \quad (49)$$

и

$$|\alpha_k| \geq |\alpha_{k+1}|, \quad k = \overline{k_2, n-2}. \quad (50)$$

Пусть

$$\Phi_1(x) = \int_{x_2}^x r_n^{(2)} \cos(n-1)\tau d\tau$$

и

$$\Phi_2(x) = \int_{x_{n-1}}^x r_n^{(2)} \cos(n-1)\tau d\tau.$$

Вследствие (47)–(50) заключаем, что функция $\Phi_1(x)$ на каждом промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ имеет единственный простой нуль $\bar{x}_k$, $k = \overline{2, k_1}$, а функция $\Phi_2(x)$ такие же нули имеет на каждом промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ при $k = \overline{k_2, n-2}$. Принимая во внимание эти построения и полагая

$$G(\tau) = f(y(\tau)) r_n^{(2)}(\tau) \cos(n-1)\tau,$$

согласно (35) имеем

$$R_n^{(2)}(f) = \int_{y_1(0)}^{y_1(\pi)} G(\tau) d\tau + \int_{y_1(\pi)}^{y_1(2\pi)} G(\tau) d\tau \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{J}_n^{(1)}(f) + \mathcal{J}_n^{(2)}(f). \quad (51)$$

При этом

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n^{(1)}(f) &= \int_{y_1(0)}^{x_2} G(\tau) d\tau + \int_{x_2}^{\bar{x}_{k_1-1}} G(\tau) d\tau + \int_{\bar{x}_{k_1-1}}^{\bar{x}_{k_2}} G(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_{\bar{x}_{k_2}}^{x_{n-1}} G(\tau) d\tau + \int_{x_{n-1}}^{y_1(\pi)} G(\tau) d\tau \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^5 i_j(f) \end{aligned} \quad (52)$$

и согласно (29)

$$\begin{aligned} y_1(0) &\leq x_2 = \frac{2\pi}{n-1} < x_{k_1-1} < \bar{x}_{k_1-1} < x_{k_1} < \tau^* < x_{k_2} < \bar{x}_{k_2} < x_{k_2+1} \\ &< x_{n-1} = \pi < x_n \leq y_1(\pi) = \pi + \frac{2+\beta}{2(n-1)}\pi. \end{aligned} \quad (53)$$

Поэтому с учетом (36) $\forall f \in H_{\omega_0}$ находим

$$\begin{aligned} |i_1(f)| &= \left| \int_{y_1(0)}^{x_2} f(y(\tau)) Z_q(y(\tau)) d\tau \right| \leq \omega\left(\frac{2\pi}{n-1}\right) \frac{2\pi}{n-1} \frac{1}{\sqrt{1+q^2-2q}} \\ &= O(1) \frac{\omega(1/n)}{(1-q)n}. \end{aligned} \quad (54)$$

На участках $[x_2, \bar{x}_{k_1-1}]$ и $[\bar{x}_{k_2}, x_{n-1}]$ применима лемма 1, в силу которой находим

$$|i_2(f)| + |i_4(f)| \leq \omega\left(\frac{4\pi}{n-1}\right) \int_{x_2}^{x_{n-1}} |r_n^{(2)}(\tau)| d\tau. \quad (55)$$

Но при $\tau \in [x_2, x_{2n}]$ согласно (39) и (36)

$$\begin{aligned} |r_n^{(2)}(\tau)| &\leq \max_{2 \leq k \leq 2n-1} |Z_q(y(x_{k+1})) - Z_q(y(x_k))| \\ &= \max_{2 \leq k \leq 2n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |Z'_q(y(\tau))| |y'(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, принимая во внимание оценку (22) и следующую из (37) и (13) оценку

$$|Z'_q(y(\tau))| \leq \frac{1}{(1-q)^2},$$

находим

$$|r_n^{(2)}(\tau)| = O(1) \frac{1}{(1-q)^2 n}, \quad \tau \in [x_2, x_{2n}]. \quad (56)$$

Поэтому

$$|i_2(f)| + |i_4(f)| = O(1) \frac{\omega(1/n)}{(1-q)^2 n}. \quad (57)$$

Вследствие (56) и (53)

$$|i_3(f)| = \left| \int_{\bar{x}_{k_1-1}}^{\bar{x}_{k_2}} G(\tau) d\tau \right| \leq \int_{\bar{x}_{k_1-1}}^{\bar{x}_{k_2}} |r_n^{(2)}(\tau)| d\tau = O(1) \frac{1}{(1-q)^2 n^2}$$

и

$$|i_5(f)| = \left| \int_{x_{n-1}}^{y_1(\pi)} G(\tau) d\tau \right| \leq \omega(\pi) \int_{\pi}^{y_1(\pi)} |r_n^{(2)}(\tau)| d\tau = O(1) \frac{1}{(1-q)^2 n^2}. \quad (58)$$

Объединяя соотношения (52)–(58), находим, что

$$|\mathcal{J}_n^{(1)}(f)| = O(1) \frac{\omega(1/n)}{(1-q)^2 n} \quad \forall f \in H_{\omega_0}. \quad (59)$$

Ясно, что такая же оценка справедлива и для величины $|\mathcal{J}_n^{(2)}(f)|$, откуда согласно (51) и следует соотношение (46).

Таким образом, согласно (34), (27) и (46)

$$\mathcal{J}_n(f) = \int_{x_2}^{x_{2n}} f(y(\tau)) l_n(\tau) \cos(n-1)\tau d\tau + O(1) \frac{\omega(1/n)}{(1-q)^2 n} \quad \forall f \in H_{\omega_0}. \quad (60)$$

Следовательно, в силу (18) и (60)

$$\mathcal{E}_n(C_\beta^q H_\omega) = \frac{q^n}{\pi} \sup_{f \in H_{\omega_0}} \left| \int_{x_2}^{x_{2n}} f(y(\tau)) l_n(\tau) \cos(n-1)\tau d\tau \right| + O(1) \frac{q^n \omega(1/n)}{(1-q)^2 n}. \quad (61)$$

Обозначая через $i_n^q(f)$ интеграл в этом выражении и учитывая (33), имеем

$$\begin{aligned} i_n^q(f) &= \sum_{k=2}^{2n-1} Z_q(y(\tau_k)) \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(y(\tau)) \cos(n-1)\tau d\tau \\ &= \sum_{k=2}^{2n-1} Z_q(y(\tau_k)) \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) \cos[(n-1)y_1(t)] y_1'(t) dt, \quad t_k = y(x_k). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\sup_{f \in H_{\omega_0}} |i_n^q(f)| \leq \sum_{k=2}^{2n-1} Z_q(y(\tau_k)) S_k(\omega), \quad (62)$$

где

$$S_k(\omega) = \sup_{f \in H_\omega} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) \cos[(n-1)y_1(t)] y_1'(t) dt \right|. \quad (63)$$

Для нахождения величин $S_k(\omega)$ воспользуемся следующим утверждением, известным под названием леммы Корнейчука–Стечкина (см. [37], а также [10; §1.3]).

ЛЕММА 4 (Корнейчука–Стечкина). Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы точка c , $a < c < b$, и суммируемая функция $\psi(t)$, которая почти всюду на (a, c) положительна (или отрицательна), почти всюду на (c, b) отрицательна (или соответственно положительна) и, кроме того,

$$\int_a^b \psi(t) dt = 0.$$

Пусть, далее, $\omega = \omega(t)$ – произвольный модуль непрерывности и

$$H_\omega[a, b] = \{f : |f(t) - f(t')| \leq \omega(|t - t'|), \quad t, t' \in [a, b]\}.$$

Тогда

$$\sup_{f \in H_\omega[a, b]} \left| \int_a^b f(t) \psi(t) dt \right| \leq \int_a^c |\psi(t)| \omega(\rho(t) - t) dt = \int_c^b |\psi(t)| \omega(t - \rho^{-1}(t)) dt, \quad (64)$$

где $\rho(x)$ – функция, определенная на $[a, c]$ посредством равенства

$$\int_a^x \psi(t) dt = \int_a^{\rho(x)} \psi(t) dt, \quad a \leq x \leq c \leq \rho(x) \leq b,$$

$\rho^{-1}(x)$ – функция, обратная к $\rho(x)$. Если $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности, то в (64) имеет место знак равенства, при этом верхнюю грань реализуют функции из класса $H_\omega[a, b]$ вида $K \pm f_0(x)$, где K – произвольная постоянная и

$$f_0(x) = \begin{cases} - \int_x^c \omega'(\rho(t) - t) dt, & x \in [a, c], \\ \int_c^x \omega'(t - \rho^{-1}(t)) dt, & x \in [c, b]. \end{cases}$$

На каждом промежутке $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 2, \dots, 2n - 1$, функция

$$\psi(t) = \cos[(n - 1)y_1(t)]y_1'(t) \quad (65)$$

непрерывна и меняет свой знак в единственной точке $c_k = y(\tau_k)$. При этом

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi(t) dt = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos(n - 1)\tau d\tau = 0.$$

Поэтому для нахождения величин $S_k(\omega)$ применима лемма 4. Пусть $\rho_k(t)$ – функция, определенная на промежутке $[t_k, c_k]$ равенством

$$\int_{t_k}^t \psi(v) dv = \int_{t_k}^{\rho_k(t)} \psi(v) dv, \quad t_k \leq t \leq c_k \leq \rho_k(t) \leq t_{k+1}. \quad (66)$$

Тогда согласно лемме 4 каков бы ни был модуль непрерывности $\omega(t)$,

$$S_k(\omega) \leq \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)| \omega(\rho_k(t) - t) dt. \quad (67)$$

Если при этом $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности, то в (67) имеет место равенство и верхнюю грань реализуют функции из класса H_ω вида $s_k \pm f_k(t)$, где s_k – любые постоянные,

$$f_k(t) = \begin{cases} -\int_t^{c_k} \omega'(\rho_k(v) - v) dv, & t \in [t_k, c_k], \\ \int_{c_k}^t \omega'(v - \rho_k^{-1}(v)) dv, & t \in [c_k, t_{k+1}], \end{cases}$$

$\rho_k^{-1}(v)$ – функция, обратная к $\rho_k(v)$.

Объединяя соотношения (62), (63) и (67), для любого модуля непрерывности $\omega = \omega(t)$ получаем

$$\sup_{f \in H_{\omega_0}} |i_n^q(f)| \leq \sum_{k=2}^{2n-1} Z_q(y(\tau_k)) \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)| \omega(\rho_k(t) - t) dt. \quad (68)$$

Пусть теперь $\omega(t)$ – выпуклый модуль непрерывности. Руководствуясь леммой 4, построим функцию $f^* \in H_{\omega_0}$, для которой будет выполняться равенство

$$i_n^q(f^*) = \sum_{k=2}^{2n-1} Z_q(y(\tau_k)) \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)| \omega(\rho_k(t) - t) dt + O(1) \frac{\omega(1/n)}{(1-q)^2 n}. \quad (69)$$

Функцию $f^*(\cdot)$ будем строить на основе функций $f_k(t)$, и сначала заметим, что для величин $d_k = t_{k+1} - t_k$, $t_k = y(x_k)$, справедливо равенство

$$d_k - d_{k+1} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(\tau) d\tau - \int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} y'(\tau) d\tau = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(y'(\tau) - y' \left(\tau + \frac{\pi}{n-1} \right) \right) d\tau. \quad (70)$$

Из (41) следует, что на участке $[y_1(0), y_1(\pi))$ функция $y'(\tau)$ возрастает, а на участке $(y_1(\pi), y_1(2\pi))$ – убывает. Поэтому из (70) заключаем, что числа d_k с увеличением номера k сначала возрастают, а затем убывают. Пусть $\bar{k}$ – значение номера k , при котором меняется характер указанной монотонности, т.е. числа d_k при $k = 2, \dots, \bar{k}$ возрастают, а при $k = \bar{k} + 1, \dots, 2n - 1$ убывают. Ясно, что

$$n - 1 < \bar{k} < n + 5.$$

Отметив это, положим

$$f_0(t) = \begin{cases} (-1)^k f_k(t) + \gamma_k, & t \in [t_k, t_{k+1}), k = 2, 3, \dots, \bar{k}, \\ (-1)^k f_k(t) + \delta_k, & t \in (t_k, t_{k+1}], k = \bar{k} + 1, \bar{k} + 2, \dots, 2n - 1, \end{cases}$$

где $\gamma_2 = \delta_{2n-1} = 0$, а остальные числа γ_k и δ_k подобраны так, чтобы функция $f_0(t)$ была непрерывной на промежутках $(t_2, t_{\bar{k}+1})$ и $(t_{\bar{k}+1}, t_{2n})$. Тогда через $f^*(t)$ обозначим 2π -периодическую функцию, которая на периоде $[0, 2\pi]$ определяется равенством

$$f^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, c_2] \cup [c_{2n-1}, 2\pi], \\ f_0(t), & t \in [c_2, t_{\bar{k}}] \cup [t_{\bar{k}+2}, c_{2n-1}], \\ m(t), & t \in [t_{\bar{k}}, t_{\bar{k}+2}], f_0(t_{\bar{k}+1} - 0) > 0, \\ M(t), & t \in [t_{\bar{k}}, t_{\bar{k}+2}], f_0(t_{\bar{k}+1} - 0) < 0, \end{cases} \quad (71)$$

где

$$\begin{aligned} m(t) &= \min\{f_0(t), f_0(t_{\bar{k}+1}^- - 0), f_0(t_{\bar{k}+1}^- + 0)\}, \\ M(t) &= \max\{f_0(t), f_0(t_{\bar{k}+1}^- - 0), f_0(t_{\bar{k}+1}^- + 0)\}. \end{aligned}$$

Функция $f^*(\cdot)$ является искомой. Действительно, непосредственные подсчеты показывают, что

$$i_n^q(f_0) = \sum_{k=2}^{2n-1} Z_q(y(\tau_k)) \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)| \omega(\rho_k(t) - t) dt. \quad (72)$$

Но функции $f_0(t)$ и $f^*(t)$ отличаются только на промежутках (t_2, c_2) , $(t_{\bar{k}}, t_{\bar{k}+2}^-)$ и (c_{2n-1}, t_{2n}) . Откуда сразу следует равенство $i_n^q(f^*) = i_n^q(f_0) + O(1) \frac{\omega(1/n)}{(1-q)^2 n}$, которое вместе с (72) дает (69), и остается показать, что $f^* \in H_{\omega_0}$.

Так как $f^*(0) = 0$, то нужно только проверить, что $\forall t', t'' \in [0, 2\pi]$

$$|f^*(t') - f^*(t'')| \leq \omega(|t' - t''|). \quad (73)$$

Согласно лемме 4 функции $f_k(t)$ удовлетворяют соотношению (73), если t' и t'' лежат на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$. Поэтому для $f^*(t)$ будет выполняться (73) всегда, когда обе точки t' и t'' одновременно находятся на одном из промежутков $[0, c_2]$, $[c_2, t_3]$, $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 3, 4, \dots, 2n-1$, $[t_{2n-1}, c_{2n-1}]$ и $[c_{2n-1}, 2\pi]$. На каждом из этих промежутков функция $f^*(t)$ монотонна, причем на соседних промежутках характер монотонности противоположный. Кроме того,

$$\begin{aligned} f_k(t_{k+1}) - f_k(t_k) &= f_k(\rho_k(t_k)) - f_k(t_k) = \int_{c_k}^{\rho_k(t_k)} \omega'(t - \rho_k^{-1}(t)) dt - f_k(t_k) \\ &= \int_{c_k}^{t_k} \omega'(\rho_k(z) - z) \rho'_k(z) dz + \int_{t_k}^{c_k} \omega'(\rho_k(z) - z) dz \\ &= - \int_{t_k}^{c_k} \omega'(\rho_k(z) - z) d(\rho_k(z) - z) = \omega(\rho_k(t_k) - t_k) = \omega(d_k). \end{aligned} \quad (74)$$

Поэтому на основании (71) и (74) с учетом монотонности чисел d_k делаем вывод, что справедливы включения

$$f^*[0, c_2] \subset f^*[c_2, t_3] \subset f^*[t_3, t_4] \subset \dots \subset f^*[t_{\bar{k}-1}, t_{\bar{k}}] \quad (75)$$

и

$$f^*[t_{\bar{k}+2}^-, t_{\bar{k}+3}^-] \supset \dots \supset f^*[t_{2n-2}, t_{2n-1}] \supset f^*[t_{2n-1}, c_{2n-1}] \supset f^*[c_{2n-1}, 2\pi], \quad (75')$$

где через $f^*[a, b]$ обозначена область значения функции $f^*(\cdot)$ на отрезке $[a, b]$. Теперь соотношение (73) становится очевидным, поскольку в силу (75) и (75') для любых точек t' и t'' найдется промежуток $[t_k, t_{k+1}]$, на котором можно указать точки $\bar{t}'$ и $\bar{t}''$ такие, что

$$|f^*(t') - f^*(t'')| \leq |f^*(\bar{t}') - f^*(\bar{t}'')|$$

и в то же время $|t' - t''| \geq |\bar{t}' - \bar{t}''|$. Поэтому соотношение (73) для произвольных t' и t'' является следствием того, что оно выполняется для функции $f_k(t)$ на промежутке $[t_k, t_{k+1}]$.

Таким образом, $f^* \in H_{\omega_0}$ и, значит, для выпуклых модулей непрерывности соотношение (68) является равенством с точностью до величин $O(1)\omega(1/n) \times (1-q)^{-2}n^{-1}$, т.е.

$$\sup_{f \in H_{\omega_0}} |i_n^q(f)| = \sum_{k=2}^{2n-1} Z_q(y(\tau_k)) \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\omega(\rho_k(t) - t) dt + O(1) \frac{\omega(1/n)}{(1-q)^2 n} \quad (76)$$

для любого выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$. Далее, полагая $t = y(\tau)$ и учитывая (65), имеем

$$\int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\omega(\rho_k(t) - t) dt = \int_{x_k}^{\tau_k} \cos[(n-1)\tau]\omega(\rho_k(y(\tau)) - y(\tau)) d\tau. \quad (77)$$

Пусть $\tau \in [x_k, \tau_k]$ при некотором $k = \overline{2, 2n-1}$. Тогда

$$\int_{x_k}^{\tau} \cos(n-1)v dv = \int_{x_k}^{2\tau_k - \tau} \cos(n-1)v dv$$

или, полагая $v = y_1(t)$ и вспоминая, что $y(x_k) = t_k$,

$$\int_{t_k}^{y(\tau)} \cos[(n-1)y_1(t)]y_1'(t) dt = \int_{t_k}^{y(2\tau_k - \tau)} \cos[(n-1)y_1(t)]y_1'(t) dt.$$

Сопоставляя это равенство и соотношение (66), заключаем, что

$$y(2\tau_k - \tau) = \rho_k(y(\tau)), \quad t_k \leq y(\tau) \leq c_k \leq \rho_k(y(\tau)) \leq t_{k+1}. \quad (78)$$

Таким образом, согласно (77) и (78)

$$\int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)|\omega(\rho_k(t) - t) dt = \left| \int_{x_k}^{\tau_k} \cos[(n-1)\tau]\omega(y(2\tau_k - \tau) - y(\tau)) d\tau \right|. \quad (79)$$

По формуле конечных приращений

$$y(2\tau_k - \tau) - y(\tau) = y'(\xi)2(\tau_k - \tau), \quad \xi \in [\tau, 2\tau_k - \tau] \subset [x_k, x_{k+1}], \quad (80)$$

и согласно (21)

$$y'(\xi) = 1 - \gamma_n, \quad (81)$$

где

$$\gamma_n = 1 - \frac{Z_{q,n}^2(y(\xi))}{Z_q^2(y(\xi))} = \frac{1 - q \cos y(\xi)}{(n-1)\left(\frac{n}{n-1} - \frac{2n-1}{n-1} q \cos y(\xi) + q^2\right)},$$

так что в силу (12)

$$0 < \gamma_n < \frac{1}{(1-q)(n-1)}. \quad (82)$$

Поэтому согласно (79)–(82)

$$\begin{aligned} \int_{t_k}^{c_k} |\psi(t)| \omega(\rho_k(t) - t) dt &= \left| \int_{x_k}^{\tau_k} \cos[(n-1)\tau] \omega((1-\gamma_n)2(\tau_k - \tau)) d\tau \right| \\ &= \int_0^{\pi/(2(n-1))} \sin[(n-1)\tau] \omega((1-\bar{\gamma}_n)2\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (83)$$

где $\bar{\gamma}_n$ – величина, удовлетворяющая условию

$$0 < \bar{\gamma}_n < \frac{1}{(1-q)(n-1)}. \quad (82')$$

Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть функция $\varphi(t)$ неотрицательна, возрастает и выпукла вверх на отрезке $[0, a]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1/2$,

$$\varphi((1-\varepsilon)t) = \varphi(t)(1-r(\varepsilon, t)), \quad (84)$$

где

$$0 \leq r(\varepsilon, t) \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}. \quad (85)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, согласно (84) и теореме о среднем значении при любом $t \in (0, a]$

$$r(\varepsilon, t) = 1 - \frac{\varphi((1-\varepsilon)t)}{\varphi(t)} = \frac{\varphi(t) - \varphi((1-\varepsilon)t)}{\varphi(t)} = \frac{\varphi'(\xi)\varepsilon t}{\varphi(t)}, \quad \xi \in [(1-\varepsilon)t, t].$$

Производная $\varphi'(t)$ не возрастает, поэтому

$$0 \leq r(\varepsilon, t) \leq \frac{\varphi'((1-\varepsilon)t)(1-\varepsilon)t}{\varphi((1-\varepsilon)t)} \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

И чтобы получить (85), остается заметить, что для любой положительной возрастающей и выпуклой вверх на $[0, a]$ функции $\varphi(t)$

$$\frac{t\varphi'(t)}{\varphi(t)} \leq 1.$$

Применяя это предложение к функции $\omega(t)$, при достаточно больших значениях n имеем

$$\omega((1-\bar{\gamma}_n)2\tau) = \omega(2\tau)(1-r_n(\tau)), \quad (86)$$

где

$$0 \leq r_n(\tau) \leq \frac{\bar{\gamma}_n}{1-\bar{\gamma}_n}. \quad (87)$$

Поэтому согласно (82'), (83), (86) и (87) находим

$$\begin{aligned}
 \int_{t_k}^{c_k} |\psi(\tau)| \omega(\rho_k(\tau) - \tau) d\tau &= \int_0^{\pi/(2(n-1))} \omega(2\tau) \sin(n-1)\tau d\tau \\
 &\quad - \int_0^{\pi/(2(n-1))} r_n(\tau) \omega(2\tau) \sin(n-1)\tau d\tau \\
 &= \frac{1}{n-1} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2\tau}{n-1}\right) \sin \tau d\tau + O(1) \frac{\omega(1/n)}{(1-q)^2 n^2} \\
 &= \frac{1}{n-1} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2\tau}{n}\right) \sin \tau d\tau + O(1) \frac{\omega(1/n)}{(1-q)^2 n^2}.
 \end{aligned}$$

Это вместе с (76) и (61) означает, что для любого выпуклого модуля непрерывности $\omega(t)$ при $n \rightarrow \infty$ справедливо равенство

$$\mathcal{E}_n(C_\beta^q H_\omega) = \frac{q^n}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t dt \cdot \frac{\pi}{n-1} \sum_{k=2}^{2n-1} Z_q(y(\tau_k)) + O(1) \frac{q^n \omega(1/n)}{(1-q)^2 n}, \quad (88)$$

и для доказательства равенства (6) в этом случае остается убедиться, что

$$I_q = \frac{\pi}{n-1} \sum_{k=2}^{2n-1} Z_q(y(\tau_k)) = 4\mathbf{K}(q) + O(1) \frac{1}{(1-q)^2 n}. \quad (89)$$

Согласно (33)

$$\int_{x_2}^{x_{2n}} l_n(\tau) d\tau = I_q.$$

Поэтому

$$I_q = \int_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} Z_q(y(\tau)) d\tau + R_n^{(2)}, \quad (90)$$

где

$$R_n^{(2)} = - \int_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} r_n^{(2)}(\tau) d\tau,$$

$r_n^{(2)}(t)$ — функция, определенная равенством (36).

Учитывая соотношения (29) и (56), получаем

$$|R_n^{(2)}| = O(1) \frac{1}{(1-q)^2 n}. \quad (91)$$

Далее имеем

$$\int_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} Z_q(y(\tau)) d\tau = \int_0^{2\pi} Z_q(t) dt + R_n^{(1)}, \quad (92)$$

где с учетом (24)

$$R_n^{(1)} = - \int_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} r_n^{(1)}(\tau) d\tau$$

и, следовательно, в силу (31)

$$|R_n^{(1)}| = O(1) \frac{1}{(1-q)^{2n}}. \quad (93)$$

Таким образом, согласно (90)–(93)

$$I_q = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-2q \cos t + q^2}} + O(1) \frac{1}{(1-q)^{2n}},$$

и для доказательства (89) остается заметить, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{1-q \cos t + q^2}} = 4\mathbf{K}(q).$$

Теорема доказана в случае выпуклых модулей непрерывности. Чтобы доказать ее и для произвольных модулей, возвратимся к соотношениям (68) и (83), объединяя которые получаем

$$\sup_{f \in H_{\omega_0}} |i_n^q(f)| \leq \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2\tau}{n-1}\right) \sin \tau \, d\tau \cdot \frac{1}{n-1} \sum_{k=2}^{2n-1} Z_q(y(\tau_k)).$$

Отсюда, учитывая (89) и (18), имеем

$$\mathcal{E}_n(C_\beta^q H_\omega) \leq \frac{4q^n}{\pi^2} \mathbf{K}(q) \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n} \omega\left(\frac{1}{n}\right). \quad (94)$$

В случае выпуклых модулей непрерывности равенство в соотношении (88) обеспечивалось наличием функции $f^* \in H_{\omega_0}$, которая строится на основании функций, экстремальных в лемме 4. Для произвольных модулей точное значение величины левой части (64) неизвестно. Поэтому мы не можем гарантировать равенство и в соотношении (94). Вместе с тем нетрудно показать, что величина $\mathcal{E}_n(C_\beta^q H_\omega)$ для произвольного модуля непрерывности не меньше половины правой части (94), т.е.

$$\mathcal{E}_n(C_\beta^q H_\omega) \geq \frac{2q^n}{\pi^2} \mathbf{K}(q) \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n} \omega\left(\frac{1}{n}\right). \quad (95)$$

Для этого воспользуемся следующей леммой Стечкина (см. [29], [11; лемма 1.1.1]) о выпуклой мажоранте.

ЛЕММА 5. *Для любого модуля непрерывности $\omega = \omega(t) \not\equiv 0$, заданного на $[0, a]$, существует выпуклый модуль непрерывности $\omega_*(t)$ такой, что $\forall t \in [0, a]$*

$$\omega(t) \leq \omega_*(t) < 2\omega(t),$$

причем константа 2 в правой части этого неравенства не может быть уменьшена.

Руководствуясь этой леммой, для заданного модуля непрерывности $\omega = \omega(t)$ построим модуль $\omega_*(t)$, удовлетворяющий условию $\frac{1}{2}\omega_*(t) < \omega(t)$. Тогда, полагая

$\frac{1}{2}\omega_*(t) = \bar{\omega}(t)$, будем иметь $H_{\bar{\omega}_0} \subset H_{\omega_0}$. Поскольку $\bar{\omega}(t)$ – выпуклый модуль, то в силу доказанного

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(C_\beta^q H_{\bar{\omega}}) &= \frac{4q^n}{\pi^2} \mathbf{K}(q) \int_0^{\pi/2} \bar{\omega}\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n} \bar{\omega}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\geq \frac{2q^n}{\pi^2} \mathbf{K}(q) \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n} \omega\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

И так как $\mathcal{E}_n(C_\beta^q H_\omega) \geq \mathcal{E}_n(C_\beta^q H_{\bar{\omega}})$, то отсюда следует (95). Объединяя соотношения (94) и (95), получаем все утверждения теоремы 1.

§3. Об аналоге теоремы 1 в пространстве L_p

Схема доказательства теоремы 1 и промежуточные соотношения, установленные в его процессе, позволяют получить оценки сверху величин $\rho_n(f; x)$, подобные оценкам (6) и в интегральных метриках. Условимся в следующих обозначениях.

Как обычно, L_p , $1 \leq p \leq \infty$, будет обозначать пространство функций $f \in L$ с конечной нормой $\|f\|_p$, где при $p \in [1, \infty)$

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p} = \left(\int_0^{2\pi} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p},$$

так что $L_1 = L$, а при $p = \infty$

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \|f\|_M = \text{ess sup } |f(t)|.$$

Через $\omega_p(t) = \omega_p(f; t)$ обозначается модуль непрерывности функции $f \in L_p$, $1 \leq p < \infty$, в пространстве L_p :

$$\omega_p(t) = \omega_p(f; t) = \sup_{|h| \leq t} \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_p, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Хорошо известно, что функция $\omega_p(t)$ обладает всеми основными свойствами, характеризующими модули непрерывности.

Пусть при фиксированном $p \in [1, \infty)$

$$H_{\omega_p} = \{\varphi \in L_p, \omega_p(f; t) \leq \omega(t)\}, \quad (96)$$

где $\omega = \omega(t)$ – заданный модуль непрерывности. Тогда через $L_\beta^q H_{\omega_p}$ обозначается множество функций, эквивалентных интегралам Пуассона (4), в которых $\varphi \in H_{\omega_p}$. Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q \in (0, 1)$, $\beta \in \mathbb{R}^1$, $1 \leq p < \infty$ и $\omega(t)$ – произвольный модуль непрерывности. Тогда для величины

$$\mathcal{E}_n(L_\beta^q H_{\omega_p})_p = \sup\{\|\rho_n(f; x)\|_p = \|f(x) - S_{n-1}(f; x)\|_p : f \in L_\beta^q H_{\omega_p}\}$$

при $n \rightarrow \infty$ выполняется неравенство

$$\mathcal{E}_n(L_\beta^q H_{\omega_p})_p \leq \frac{4q^n}{\pi^2} \mathbf{K}(q) \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + \frac{O(1)q^n}{(1-q)^2 n} \omega\left(\frac{1}{n}\right), \quad (97)$$

где $O(1)$ – величина, равномерно ограниченная по n , q и β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя схеме доказательства теоремы 1, обозначим через $f_\beta^q(\cdot)$ функцию $\varphi(\cdot)$ в представлении (4). Если $f \in L_\beta^q H_{\omega_p}$, то

$$\|f_\beta^q(\cdot + t) - f_\beta^q(\cdot + t')\|_p \leq \omega(|t - t'|) \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}^1$$

и для $\rho_n(f; x)$ выполняется равенство (7), согласно которому с учетом формулы (17) получаем аналог равенства (18):

$$\mathcal{E}_n(L_\beta^q H_{\omega_p})_p = \frac{q^n}{\pi} \sup_{f \in H_{\omega_p}} \left\| \int_0^{2\pi} \delta_x(t) Z_q(t) \cos\left(nt + \theta(t) + \frac{\beta\pi}{2}\right) dt \right\|_p, \quad (98)$$

$$\delta_x(t) = f(x+t) - f(x),$$

в котором величины $Z_q(t)$ и $\theta(t)$ определяются по-прежнему формулами (15) и (16), а $\beta \in [0, 4)$.

Обозначая через $\mathcal{J}_n(f)$ интеграл в правой части (98), получаем аналоги (25) и (26):

$$\mathcal{J}_n(f) = \int_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} \delta_x(y(\tau)) Z_q(y(\tau)) \cos(n-1)\tau d\tau + R_n^{(1)}(f)_p, \quad f \in H_{\omega_p}, \quad (99)$$

где

$$R_n^{(1)}(f)_p = \int_{y_1(0)}^{y_1(2\pi)} \delta_x(y(\tau)) r_n^{(1)}(\tau) \cos(n-1)\tau d\tau, \quad (100)$$

и нам предстоит показать, что $\forall f \in H_{\omega_p}$

$$\|R_n^{(1)}(f)_p\|_p = O(1) \frac{\omega(1/n)}{(1-q)^{2n}}. \quad (101)$$

Для этого воспользуемся следующими вспомогательными утверждениями — аналогами лемм 4 и 1 в пространствах L_p .

ЛЕММА 6. Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы точка c , $a < c < b$, и суммируемая функция $\varphi(t)$, обладающая тем свойством, что почти всюду на (a, c) $\varphi(t) > 0$ ($\varphi(t) < 0$), почти всюду на (c, b) $\varphi(t) < 0$ ($\varphi(t) > 0$) и, кроме того,

$$\int_a^b \varphi(t) dt = 0.$$

Пусть, далее, H_{ω_p} — класс функций, определяемых равенством (96) при произвольном фиксированном модуле непрерывности $\omega(t)$, и $y = y(t)$ — неубывающая на $\mathbb{R}^1$ функция, удовлетворяющая условиям

$$|y(t) - y(t')| \leq |t - t'| \quad \forall t, t' \in \mathbb{R}^1. \quad (102)$$

Тогда $\forall p \in [1, \infty)$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\omega_p}(\varphi, y) &= \sup_{f \in H_{\omega_p}} \left\| \int_a^b f(x + y(t)) \varphi(t) dt \right\|_p \leq \int_a^c |\varphi(t)| \omega(\rho(t) - t) dt \\ &= \int_c^b |\varphi(t)| \omega(\rho^{-1}(t) - t) dt, \end{aligned} \quad (103)$$

где $\rho(x)$ — функция, определенная на $[a, c]$ посредством равенств

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi(\rho(x)), \quad a \leq x \leq c \leq \rho(x) \leq b, \\ \Phi(x) &= \int_a^x \varphi(t) dt, \end{aligned} \quad (104)$$

$\rho^{-1}(x)$ — функция, обратная к $\rho(x)$.

Доказательство этого утверждения при $p = 1$ фактически имеется в [11; § 3.2]. При $p \in (1, \infty)$ оно получается аналогично случаю $p = 1$ с учетом обобщенного неравенства Минковского:

$$\left(\int_a^b \left| \int_c^d f(x, y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \int_c^d \left(\int_a^b |f(x, y)|^p dx \right)^{1/p} dy, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (105)$$

В условиях леммы функции $t = \rho(x)$ и $x = \rho^{-1}(t)$ строго монотонны и абсолютно непрерывны соответственно на $[a, c]$ и $[c, b]$ (см. [11; § 3.2]), причем

$$\rho(a) = b, \quad \rho(c) = c, \quad \rho^{-1}(c) = c, \quad \rho^{-1}(b) = a. \quad (106)$$

Эти факты позволяют производить замены переменных $t = \rho(x)$ и $x = \rho^{-1}(t)$ в интегралах и в силу (104) обеспечивают почти всюду равенства

$$\varphi(t) = \varphi(\rho(t))\rho'(t), \quad t \in (a, c), \quad \varphi(\rho^{-1}(t))(\rho^{-1}(t))' = \varphi(t), \quad t \in (c, b). \quad (107)$$

Полагая $t = \rho(\tau)$, с учетом (106) и (107) получаем

$$\begin{aligned} \int_c^b f(x + y(t))\varphi(t) dt &= - \int_a^c f(x + y(\rho(\tau)))\varphi(\rho(\tau))\rho'(\tau) d\tau \\ &= - \int_a^c f(x + y(\rho(\tau)))\varphi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, $\forall f \in H_{\omega_p}$ в силу (105) и (96)

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(x + y(t))\varphi(t) dt \right\|_p &= \left\| \int_a^c [f(x + y(t)) - f(x + y(\rho(t)))]\varphi(t) dt \right\|_p \\ &\leq \int_a^c \|f(\cdot + y(t)) - f(\cdot + y(\rho(t)))\|_p |\varphi(t)| dt \leq \int_a^c \omega(y(\rho(t)) - y(t)) |\varphi(t)| dt. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (102) получаем первое из соотношений (103). Равенство в правой части (103) получается посредством замены переменных.

Так как $\rho(t) - t \leq b - a$, то в условиях леммы 6 справедливо неравенство

$$\mathcal{E}_{\omega_p}(\varphi; y) \leq \omega(b - a) \int_a^c |\varphi(t)| dt.$$

С помощью этого неравенства и неравенства (105) из леммы 6 вытекает следующий аналог леммы 1 в пространстве L_p .

ЛЕММА 7. Пусть $\varphi(t)$ — суммируемая на $[a, b]$ функция и $\{x_k\}$, $k = \overline{1, N}$, $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_N \leq b$, — некоторый набор точек таких, что на каждом промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ функция удовлетворяет требованиям леммы 6, т.е. имеется точка c_k такая, что на промежутках $[x_k, c_k]$ и $[c_k, x_{k+1}]$ функция $\varphi(t)$ почти всюду сохраняет противоположные знаки и

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t) dt = 0.$$

Пусть, далее, $y(t)$ – неубывающая на $\mathbb{R}^1$ функция, удовлетворяющая условиям (102). Тогда если $f \in H_{\omega_p}$, $p \in [1, \infty)$, то

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(x+y(t))\varphi(t) dt \right\|_p &\leq \sup_{a \leq t \leq x_1} \|f(\cdot + y(t)) - f(\cdot)\|_p \int_a^{x_1} |\varphi(t)| dt \\ &+ \omega(\Delta) \int_{x_1}^{x_N} |\varphi(t)| dt + \sup_{x_N \leq t \leq b} \|f(\cdot + y(t)) - f(\cdot)\|_p \int_{x_N}^b |\varphi(t)| dt, \end{aligned}$$

где $\Delta = \max_k (x_{k+1} - x_k)$.

Применяя лемму 7 к правой части (100), находим

$$\begin{aligned} \|R_n^{(1)}(f)_p\|_p &\leq \sup_{y_1(0) \leq \tau \leq \tau_2} \|f(x+y(\tau)) - f(x)\|_p \int_{y_1(0)}^{\tau_2} |r_n^{(1)}(\tau)| d\tau \\ &+ \sup_{\tau_{n-1} \leq \tau \leq \tau_{n+3}} \|f(x+y(\tau)) - f(x)\|_p \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_{n+3}} |r_n^{(1)}(\tau)| d\tau \\ &+ \sup_{\tau_{2n-2} \leq \tau \leq y_1(2\pi)} \|f(x+y(\tau)) - f(x)\|_p \int_{\tau_{2n-2}}^{y_1(2\pi)} |r_n^{(1)}(\tau)| d\tau \\ &+ \omega\left(\frac{4\pi}{n-1}\right) \int_{\tau_2}^{\tau_{2n-1}} |r_n^{(1)}(\tau)| d\tau. \end{aligned} \quad (108)$$

Принимая во внимание соотношения (32), находим

$$\sup_{y_1(0) \leq \tau \leq \tau_2} \|f(x+y(\tau)) - f(x)\|_p \leq \omega(y(\tau_2)) = O(1)\omega\left(\frac{1}{n}\right), \quad (109)$$

$$\sup_{\tau_{n-1} \leq \tau \leq \tau_{n+3}} \|f(x+y(\tau)) - f(x)\|_p \leq \omega(\pi) \quad (110)$$

и

$$\begin{aligned} &\sup_{\tau_{2n-2} \leq \tau \leq y_1(2\pi)} \|f(x+y(\tau)) - f(x)\|_p \\ &= \sup_{\tau_{2n-2} \leq \tau \leq y_1(2\pi)} \|f(x+y(\tau)) - f(x+2\pi)\|_p = O(1)\omega\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \quad (111)$$

Поэтому, объединяя соотношения (31), (32) и (108)–(111), получаем (101). Следуя дальше схеме доказательства теоремы 1, получаем аналоги формул (34) и (35):

$$\mathcal{J}_n(f) = \int_{x_2}^{x_{2n}} \delta_x(y(\tau)) l_n(\tau) \cos(n-1)\tau d\tau + R_n^{(1)}(f)_p + R_n^{(2)}(f)_p, \quad f \in H_{\omega_p}, \quad (112)$$

где

$$R_n^{(2)}(f)_p = \int_{y_1(0)}^{y_2(2\pi)} \delta_x(y(\tau)) r_n^{(2)} \cos(n-1)\tau d\tau.$$

Поступая как и при доказательстве оценки (46), пользуясь при этом леммой 7 вместо леммы 1, получаем соотношение

$$\|R_n^{(2)}(f)_p\|_p = O(1) \frac{\omega(1/n)}{(1-q)^2 n}. \quad (113)$$

Сопоставляя соотношения (98), (99), (101), (112) и (113), приходим к аналогу формулы (61):

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n(L_\beta^q H_{\omega_p}) &= \frac{q^n}{\pi} \sup_{f \in H_{\omega_p}} \left\| \int_{x_2}^{x_{2n}} f(x+y(\tau)) l_n(\tau) \cos(n-1)\tau \, d\tau \right\|_p + O(1) \frac{q^n \omega(1/n)}{(1-q)^2 n} \\ &\leq \frac{q^n}{\pi} \sum_{k=2}^{2n-1} Z_q(y(\tau_k)) S_k(\omega)_p + O(1) \frac{q^n \omega(1/n)}{(1-q)^2 n}, \end{aligned} \quad (114)$$

где

$$S_k(\omega)_p = \sup_{f \in H_{\omega_p}} \left\| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x+y(\tau)) \cos(n-1)\tau \, d\tau \right\|_p.$$

Применяя лемму 6 при $\varphi(t) = \cos(n-1)t$, $x_k = k\pi/(n-1)$ и $c_k = k\pi/(n-1) + \pi/(2(n-1))$ и замечая, что в этом случае $\rho(x) = \rho_k(x) = (2k+1)\pi/(n-1) - x$, $x \in [x_k, c_k]$, получаем

$$\begin{aligned} S_k(\omega)_p &= \int_{x_k}^{c_k} |\cos(n-1)t| \omega\left(\frac{2k+1}{n-1}\pi - 2t\right) dt = \int_0^{\pi/(2(n-1))} \sin(n-1)t \omega(2t) dt \\ &= \frac{1}{n-1} \int_0^{\pi/2} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + O(1) \frac{\omega(1/n)}{n^2}. \end{aligned}$$

Подставляя это значение в (114) и учитывая равенство (89), получаем оценку (97).

Список литературы

1. Kolmogorov A. N. Zur Grössenordnung des Restliedes Fourierschen Reihen differenzierbaren Funktionen // Ann. Math. 1935. V. 36. P. 521–526.
2. Пинкевич В. Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4. №5. С. 521–528.
3. Никольский С. М. Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4. №6. С. 501–508.
4. Никольский С. М. О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4. №6. С. 509–520.
5. Никольский С. М. Асимптотическая оценка остатка при приближении суммами Фурье // Докл. АН СССР. 1941. Т. 22. №6. С. 386–389.
6. Никольский С. М. Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами // Труды МИАН. 1945. Т. 15. С. 1–76.
7. Никольский С. М. О линейных методах суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1948. Т. 12. №3. С. 259–278.
8. Никольский С. М. Ряд Фурье функций с данным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. 1946. Т. 52. №3. С. 191–193.
9. Никольский С. М. Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946. Т. 10. №3. С. 207–256.
10. Степанец А. И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Киев: Наукова думка, 1981.
11. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций. Киев: Наукова думка, 1987.
12. Nagy B. Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier // Acta Math. Hungar. 1948. V. 1. №3. P. 14–52.
13. Nagy B. Methodes de sommation des séries de Fourier. I // Acta Sci. Math. 1950. V. 12. P. 204–210.
14. Nagy B. Methodes de sommation des séries de Fourier. II // Časopis pro pěstování Mat. a Fjs. 1949. V. 74. P. 210–219.

15. *Nagy B.* Methodes de sommation des séries de Fourier. III // *Acta Sci. Math.* 1950. V. 13. P. 247–351.
16. *Nagy B.* Approximation der Funktionen durch die arithmetischen Mittel inhrer Fourieschen Reihen // *Mat. Lapok.* 1942. V. 19. P. 123–138.
17. *Теляковский С. А.* О приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1960. Т. 24. № 2. С. 213–242.
18. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. III // *Труды МИАН.* 1961. Т. 62. С. 61–97.
19. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. II // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1963. Т. 27. № 2. С. 253–272.
20. *Теляковский С. А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложения к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1964. Т. 28. № 6. С. 1209–1236.
21. *Теляковский С. А.* Приближение дифференцируемых функций частными суммами их рядов Фурье // *Матем. заметки.* 1968. Т. 4. № 3. С. 291–300.
22. *Стечкин С. Б.* О суммах Валье–Пуссена // *Докл. АН СССР.* 1951. Т. 80. № 4. С. 545–548.
23. *Стечкин С. Б.* О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1956. Т. 20. № 5. С. 643–648.
24. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Фурье для дифференцируемых функций // *Труды МИАН.* 1980. Т. 145. С. 126–151.
25. *Ефимов А. В.* О приближении некоторых классов непрерывных функций суммами Фурье и суммами Фейера // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1958. Т. 22. № 1. С. 81–116.
26. *Ефимов А. В.* О приближении непрерывных функций суммами Фурье // *УМН.* 1959. Т. 14. № 2. С. 183–188.
27. *Ефимов А. В.* Приближение функций с заданным модулем непрерывности суммами Фурье // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1959. Т. 23. № 1. С. 115–134.
28. *Ефимов А. В.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1960. Т. 24. № 2. С. 243–296.
29. *Ефимов А. В.* Линейные методы приближения непрерывных периодических функций // *Матем. сб.* 1961. Т. 54. № 1. С. 51–90.
30. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье // *Докл. АН СССР.* 1984. Т. 277. № 5. С. 1074–1077.
31. *Степанец А. И.* Уклонение сумм Фурье на классах бесконечно дифференцируемых функций // *Укр. матем. журн.* 1984. Т. 36. № 6. С. 750–758.
32. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1986. Т. 50. № 2. С. 101–136.
33. *Степанец А. И.* Отношение порядка для (ψ, β) -производных // *Укр. матем. журн.* 1985. Т. 37. № 5. С. 645–648.
34. *Степанец А. И.* Одновременное приближение периодических функций и их производных суммами Фурье // *Докл. АН СССР.* 1980. Т. 254. № 3. С. 543–544.
35. *Корнейчук Н. П.* Об оценке приближений класса H_α тригонометрическими многочленами. Исследование по современным проблемам конструктивной теории функций. М.: Физматгиз, 1961.
36. *Степанец А. И.* Приближение суммами Фурье интегралов Пуассона непрерывных функций // *Докл. РАН.* 2000. Т. 373. № 2. С. 171–173.
37. *Корнейчук Н. П.* О приближении периодических функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Бернштейна–Рогозинского // *Докл. АН СССР.* 1959. Т. 125. № 2. С. 258–261.