Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Степин, Волновые операторы для линеаризованного уравнения Больцмана в односкоростной теории переноса, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 1, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm539>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 16:25:48

УДК 517.9

С. А. Степин

Волновые операторы для линеаризованного уравнения Больцмана в односкоростной теории переноса

В работе изучается диссипативный интегро-дифференциальный оператор L , возникающий при линеаризации уравнения Больцмана в односкоростной теории переноса частиц. В предположениях, обеспечивающих конечность точечного спектра L , найдено скалярное кратное характеристической функции оператора L и указано условие отсутствия спектральных особенностей. С помощью техники нестационарной теории рассеяния и с использованием функциональной модели Сёкефальви-Надя и Фояша построены прямой и обратный волновые операторы со свойством полноты. Изучена структура оператора L в инвариантном подпространстве, отвечающем его непрерывному спектру.

Библиография: 21 название.

Линейная теория переноса излучения является частью общей кинетической теории, которая связана с фундаментальными принципами классической статистической механики (см. [1], [2]). Используемое в этой теории основное уравнение (уравнение переноса) представляет собой вариант линеаризованного кинетического уравнения Больцмана. Математическое исследование уравнения переноса в односкоростном случае, т.е. в предположении, что изменяется лишь направление распространения излучения при постоянной энергии кванта, впервые было проведено В. С. Владимировым [3]. Обзор различных аспектов теоретических исследований уравнения Больцмана и его применений содержится в [4]. Линейной теории переноса посвящены монографии [5], [6].

В настоящей работе изучается интегро-дифференциальный оператор, возникающий при линеаризации уравнения Больцмана в рамках односкоростной модели переноса нейтронов. Рассматривается случай плоской симметрии, когда количественные характеристики рассеяния нейтронов зависят лишь от одной пространственной координаты, скажем x . При этом процесс рассеяния описывается функцией распределения $\Psi(x, \mu, t)$, имеющей смысл плотности числа частиц, находящихся в момент времени t в точке с координатой x и таких, что косинус угла между скоростью частицы и осью x равен μ . Линеаризованное уравнение эволюции функции распределения $\Psi(x, \mu, t)$ имеет следующий вид (см., например, [4]):

$$\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial x} + \sigma \right) \Psi(x, \mu, t) = \sigma \frac{b(x)}{2} \int_{-1}^1 \Psi(x, \mu, t) d\mu. \quad (1)$$

Здесь v – скорость нейтронов, σ – величина, обратно пропорциональная средней длине свободного пробега нейтронов между столкновениями. Не ограничивая общности, будем считать скорость v и параметр σ единичными. Коэффициент $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ – среднее число частиц, появляющихся в результате столкновения нейтрона с ядром в точке с координатой x .

С уравнением (1) связан оператор

$$L = L_0 + iV = i\mu \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{b(x)}{2} \int_{-1}^1 \cdot d\mu,$$

действующий в пространстве $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R} \times [-1, 1])$, с областью определения $D(L) = \{\psi \in \mathcal{H} : \psi(\cdot, \mu) \text{ абсолютно непрерывна для п.в. } \mu \in [-1, 1], L_0\psi \in \mathcal{H}\}$, где

$$L_0 := i\mu \frac{\partial}{\partial x}, \quad V := b(x)K, \quad K := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \cdot d\mu.$$

В рассматриваемой здесь постановке вопрос об исследовании спектральных свойств и построении спектрального разложения для оператора L восходит к К. О. Фридрихсу (см. [7], [8]).

В серии работ [8]–[10] были детально изучены спектральные свойства оператора L в случае, когда функция $b(x)$ пропорциональна индикатору интервала. Для произвольной финитной неотрицательной функции $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ в [11] показано, что непрерывный спектр оператора L заполняет вещественную ось, точечный спектр состоит из нормальных полупростых собственных значений, принадлежащих $i\mathbb{R}_+$. В работе автора [12] показано, что при условиях $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ и $b(x) \geq 0$ для п.в. $x \in \mathbb{R}$ у оператора L сохраняется указанная выше структура спектра; при условии $b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ суммарная кратность $N(b)$ собственных значений оператора L конечна.

Для финитных функций $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ в работе [11] в представлении функциональной модели оператора L изучается компонента L_c , отвечающая его непрерывному спектру, и, в частности, получен ответ на вопрос, когда оператор L_c подобен самосопряженному. При этом установлено, что препятствием для такого подобия служит спектральная особенность оператора L , а также выделено множество $\mathcal{E} \subset L^\infty(\mathbb{R})$ такое, что оператор $L = L_0 + iV$ (в случае финитной $b(x)$) имеет спектральную особенность в том и только том случае, если $b(x) \in \mathcal{E}$.

В работе [12] применительно к рассматриваемой там ситуации получено новое (по сравнению с [11]) описание “исключительного” множества $\mathcal{E}$ в терминах однопараметрического семейства операторов $L(\tau) = L_0 + i\tau V$. А именно $b(x) \in \mathcal{E}$ в том и только том случае, если $N(\tau b) > N(b)$ для $\tau > 1$. При этом требование $b(x) \notin \mathcal{E}$ снова является необходимым и достаточным условием отсутствия спектральных особенностей у оператора $L = L_0 + iV$.

Цель настоящей работы – построение и изучение свойств волновых операторов, осуществляющих подобие L_c и L_0 в случае нефинитной функции $b(x)$. На этом пути оказывается продуктивным соединение техники нестационарной теории рассеяния и подхода, использующего функциональную модель Сёкефальви-Надя и Фояша. Отметим, что к оператору $L = L_0 + iV$ метод “гладкой теории возмущений” (см. [13]) неприменим.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $b(x) \geq 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$ и сходится интеграл

$$\int^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \left(\int_{|x| \geq t} b^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Тогда существует волновой оператор

$$\Omega = \text{s-}\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(itL) \exp(-itL_0).$$

Для плотного в $\mathcal{H}$ множества векторов φ матричные элементы $(\Omega\varphi, \psi)$, $\psi \in \mathcal{H}$, вычисляются по формуле

$$(\Omega\varphi, \psi) = (\varphi, \psi) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\sqrt{V} R_0(\tau + i0)\varphi, \sqrt{V} R^*(\tau - i0)\psi) d\tau.$$

Здесь и далее используются следующие обозначения: $\sigma(A)$ – спектр оператора A , $\sigma_c(A)$ – непрерывный спектр, $\sigma_p(A)$ – точечный спектр оператора A , $R(\lambda) := (L - \lambda I)^{-1}$, $R_0(\lambda) := (L_0 - \lambda I)^{-1}$, $R^*(\lambda) := (R(\lambda))^*$.

Как показывает следующее предложение, в случае, когда оператор L не имеет спектральных особенностей, существуют полные волновые операторы, реализующие подобие L_c и L_0 .

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того, $b(x)(\ln|x - y|)^2 b(y) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Предположим также, что оператор $L = L_0 + iV$ вполне несамосопряженный и $b(x) \notin \mathcal{E}$. Тогда $\Omega\mathcal{H} = (I - P)\mathcal{H}$, где P – проектор Рисса, отвечающий $\sigma_p(L)$. При этом на подпространстве $(I - P)\mathcal{H}$ существует ограниченный волновой оператор

$$\tilde{\Omega} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(itL_0) \exp(-itL)$$

и справедливо соотношение

$$L_c = \Omega L_0 \tilde{\Omega},$$

где L_c – сужение L на подпространство $(I - P)\mathcal{H}$.

Эта теорема для рассматриваемого в работе класса функций $b(x)$ дает ответ на вопрос, поставленный Фридрихсом, в том смысле, что с помощью прямого и обратного волновых операторов Ω и $\tilde{\Omega}$ явно строится спектральное представление оператора L . Требование полной несамосопряженности оператора L не является ограничительным с точки зрения теории возмущений (см. [14]) и налагается для простоты изложения.

Основные результаты настоящей работы анонсированы в заметке [15].

§1. Структура спектра оператора L

Здесь приведена сводка результатов из работы [12], а также некоторые вспомогательные сведения, которые потребуются в дальнейшем.

Пусть $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$ и $b(x) \geq 0$ п.в. $x \in \mathbb{R}$. Поскольку оператор $V \geq 0$ ограничен, то $L = L_0 + iV$ – максимальный диссипативный оператор (см. [16]) и, таким образом,

$$\sigma(L) \cap \mathbb{C}_- = \emptyset.$$

Важную роль при исследовании расположения спектра $\sigma(L)$ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ играет следующее тождество:

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) - iR_0(\lambda)\sqrt{V}(I + Q(\lambda))^{-1}\sqrt{V}R_0(\lambda), \quad (2)$$

где $Q(\lambda) = \sqrt{b}E(\lambda)\sqrt{b}$ и через $E(\lambda)$ обозначено сужение оператора $iKR_0(\lambda)$ на образ K , совпадающий с пространством $L^2(\mathbb{R})$, естественным образом вложенным

в $\mathcal{H}$. Известно (см. [8], [11]), что $Q(\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{C}_+$ представляет собой интегральный оператор с ядром

$$q(x, y; \lambda) := \frac{1}{2} \sqrt{b(x)} \operatorname{Ei}(i\lambda|x-y|) \sqrt{b(y)};$$

здесь $\operatorname{Ei}(z)$ – интегральная показательная функция, определяемая формулой

$$\operatorname{Ei}(z) = - \int_1^\infty \frac{e^{zt}}{t} dt = \ln(-z) + \gamma + \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n \cdot n!}, \quad (3)$$

где γ – постоянная Эйлера. Из тождества (2) следует, что

$$\sigma(L) \cap \mathbb{C}_+ = \{\lambda \in \mathbb{C}_+ : -1 \in \sigma(Q(\lambda))\}. \quad (4)$$

Оператор $E(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, унитарно эквивалентен (см. [9]) оператору умножения на функцию

$$\Lambda(s; \lambda) = \frac{i}{2s} \ln \frac{\lambda - s}{\lambda + s},$$

причем указанная эквивалентность осуществляется преобразованием Фурье по переменной x . Далее, поскольку $\operatorname{Re} \lambda \cdot \operatorname{Im} \Lambda(s; \lambda) < 0$ и $(Q(\lambda)\psi, \psi) = (E(\lambda)\sqrt{b}\psi, \sqrt{b}\psi)$, то

$$\operatorname{Re} \lambda \cdot \operatorname{Im}(Q(\lambda)\psi, \psi) < 0, \quad (5)$$

если $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$ и $\sqrt{b}\psi \neq 0$ как элемент $L^2(\mathbb{R})$, и, стало быть,

$$\sigma_p(L) \subset i\mathbb{R}_+.$$

Допустим, что $[Q(\lambda)]^l$ при некотором $l \in \mathbb{N}$ и всех $\lambda \in \mathbb{C}_+$ принимает значения в классе $\mathfrak{S}_\infty$ компактных операторов. Тогда согласно аналитической альтернативе Фредгольма оператор-функция $(I + Q(\lambda))^{-1}$ мероморфна в $\mathbb{C}_+$, причем ее вычеты в полюсах суть операторы конечного ранга. Ввиду соотношения (2) то же верно для резольвенты $R(\lambda)$, и поэтому спектр оператора L в открытой верхней полуплоскости представляет собой дискретное множество конечнократных собственных значений.

Следующее утверждение дает достаточное условие компактности оператора $Q(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, и, сверх того, принадлежности $Q(\lambda)$ классу $\mathfrak{S}_2$ операторов Гильберта–Шмидта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [12]. *Если $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ и $b(x) \geq 0$ п.в. $x \in \mathbb{R}$, то $Q(\lambda) \in \mathfrak{S}_2$ для каждого $\lambda \in \mathbb{C}_+$.*

Доказательство этого предложения основано на следующих оценках ядра $q(x, y; \lambda)$ интегрального оператора $Q(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$:

$$|q(x, y; \lambda)| \leq M \sqrt{b(x)b(y)}, \quad |x - y| \geq \delta, \quad (6)$$

$$|q(x, y; \lambda)| \leq \frac{1}{2} \sqrt{b(x)} (|\ln|x-y|| + K(\lambda)) \sqrt{b(y)}, \quad |x - y| \leq \delta, \quad (7)$$

где $M \geq 1$, $K(\lambda) = |\ln|\lambda|| + \operatorname{const}$, $\delta = \min\{|\operatorname{Re} \lambda|^{-1}, (\operatorname{Im} \lambda)^{-1}\}$, если $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$, и $\delta = (\operatorname{Im} \lambda)^{-1}$ при $\operatorname{Re} \lambda = 0$.

Отметим, что установленная в [10] применительно к рассматриваемому там случаю оценка

$$\|Q(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}^2 \leq \operatorname{const} |\operatorname{Re} \lambda|^{-1} \quad (8)$$

для $\lambda \in \mathbb{C}_+$ таких, что $|\operatorname{Re} \lambda| \geq 1$ и $\operatorname{Im} \lambda \leq 1$, справедлива и в предположении $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Доказательство этого факта вполне аналогично проведенному в [10] в случае, когда функция $b(x)$ пропорциональна индикатору интервала.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [12]. Пусть $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ и $b(x) \geq 0$ при н.в. $x \in \mathbb{R}$. Тогда непрерывный спектр оператора L заполняет вещественную ось, а точечный спектр состоит из нормальных полупростых собственных значений, принадлежащих $i\mathbb{R}_+$. Суммарная кратность $N(b)$ собственных значений оператора L допускает оценку

$$N(b) \leq 1 + \frac{1}{4} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} b(x) (\ln |x - y|)^2 b(y) dx dy.$$

§ 2. Построение прямого волнового оператора

Ниже с помощью метода Кука строится прямой волновой оператор Ω , сплетающий L и L_0 , и найдено стационарное представление для матричных элементов оператора Ω .

Через $U(t)$ обозначим однопараметрическое семейство операторов

$$U(t)\psi(x, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(I - \frac{iLt}{n} \right)^{-n} \psi(x, \mu)$$

(область определения $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, состоит из тех $\psi \in \mathcal{H}$, для которых существует указанный предел); при $t \geq 0$ операторы $U(t)$ образуют сжимающую полугруппу $U(t) = \exp(itL)$. Действие унитарной группы $U_0(t) = \exp(itL_0)$ задается следующей формулой

$$U_0(t)\psi(x, \mu) = \psi(x - \mu t, \mu).$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $b(x) \geq 0$ при н.в. $x \in \mathbb{R}$ и сходится интеграл

$$\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \left(\int_{|x| \geq t} b^2(x) dx \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Тогда существует волновой оператор $\Omega = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)U_0(-t)$, сплетающий L и L_0 : $L\Omega = \Omega L_0$. Для плотного в $\mathcal{H}$ множества векторов φ матричные элементы $(\Omega\varphi, \psi)$, $\psi \in \mathcal{H}$, вычисляются по формуле

$$(\Omega\varphi, \psi) = (\varphi, \psi) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (\sqrt{V} R_0(\tau + i0)\varphi, \sqrt{V} R^*(\tau - i0)\psi) d\tau. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Поскольку $\|U(t)U_0(-t)\| \leq 1$, $t \geq 0$, то достаточно доказать существование предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)U_0(-t)\varphi \quad (11)$$

для векторов φ из плотного в $\mathcal{H}$ множества

$$\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R} \times \{(-1, 0) \cup (0, 1)\}).$$

Согласно методу Кука (см., например, [17]) существование предела (11) обеспечивается сходимостью интеграла

$$\int_0^\infty \|VU_0(-t)\varphi\| dt < \infty.$$

Здесь $\varphi \in \mathcal{D}$ и, следовательно, $\varphi(s, \mu) = 0$ при $|s| \geq a$ и $|\mu| \leq \varepsilon$ для некоторых $a > 0$ и $\varepsilon > 0$. Положим $M = \max |\varphi(s, \mu)|$ и выполним оценку нормы вектора $VU_0(-t)\varphi$. При $t > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \|VU_0(-t)\varphi\|^2 &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} b^2(x) \left| \int_{-1}^1 \varphi(x + \mu t, \mu) d\mu \right|^2 dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} b^2(x) \int_{-1}^1 |\varphi(x + \mu t, \mu)|^2 d\mu dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} ds \int_{-1}^1 b^2(s - \mu t) |\varphi(s, \mu)|^2 d\mu \\ &\leq M^2 \int_{-a}^a ds \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^1 \right) b^2(s + \mu t) d\mu. \end{aligned}$$

Отсюда следует неравенство

$$\int_0^\infty \|VU_0(-t)\varphi\| dt \leq M\sqrt{2a} \int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t}} \left\{ \left(\int_{-a-t}^{a-\varepsilon t} + \int_{-a+\varepsilon t}^{a+t} \right) b^2(x) dx \right\}^{1/2},$$

где правая часть конечна при условии сходимости интеграла (9).

В результате установлены существование и ограниченность оператора $\Omega = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)U_0(-t)$, допускающего представление

$$\Omega = I - \int_0^\infty U(t)VU_0(-t) dt. \quad (12)$$

2) Проверим, что Ω сплетает операторы L и L_0 . В самом деле, для произвольного $t > 0$ имеем $U(t)\Omega = \Omega U_0(t)$. При $t \downarrow 0$ в равенстве

$$\frac{U(t) - I}{t} \Omega \varphi = \Omega \frac{U_0(t) - I}{t} \varphi, \quad \varphi \in D(L_0),$$

предел справа существует и равен $i\Omega L_0 \varphi$. Стало быть, существует предел слева

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{U(t) - I}{t} \Omega \varphi = iL\Omega \varphi,$$

где $\Omega \varphi \in D(L) = D(L_0)$ и $L\Omega \varphi = \Omega L_0 \varphi$ для $\varphi \in D(L_0)$.

3) Повторяя выкладки, проведенные в ходе доказательства первой части теоремы, для элементов φ из плотного в $\mathcal{H}$ множества $\mathcal{D}$ при $t > 0$ будем иметь:

$$\|\sqrt{V} U_0(\pm t)\varphi\|^2 \leq \frac{\text{const}}{t} \left(\int_{-a-t}^{a-\varepsilon t} + \int_{-a+\varepsilon t}^{a+t} \right) b(x) dx.$$

С использованием неравенства Буняковского–Коши отсюда получаем оценку

$$\|\sqrt{V} U_0(\pm t)\varphi\|^2 \leq \text{const} \frac{\sqrt{t+2a}}{t} \left\{ \left(\int_{-a-t}^{a-\varepsilon t} + \int_{-a+\varepsilon t}^{a+t} \right) b^2(x) dx \right\}^{1/2}$$

и, таким образом, $\|\sqrt{V} U_0(t)\varphi\| \in L^2(\mathbb{R})$ при условии сходимости интеграла (9). Учитывая известные (см. [13]) равенства

$$\int_{\mathbb{R}} \|\sqrt{V} R_0(k \pm i\varepsilon)\varphi\|^2 dk = 2\pi \int_0^\infty e^{-2\varepsilon t} \|\sqrt{V} U_0(\mp t)\varphi\|^2 dt,$$

где $\varepsilon > 0$, заключаем, что

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{\mathbb{R}} \|\sqrt{V} R_0(k \pm i\varepsilon)\varphi\|^2 dk < \infty.$$

Как следствие этого существуют предельные значения $\sqrt{V} R_0(\kappa + i0)\varphi$ для п.в. $\kappa \in \mathbb{R}$ и в среднем квадратичном имеет место сходимость $\sqrt{V} R_0(\kappa + i\varepsilon)\varphi \rightarrow \sqrt{V} R_0(\kappa + i0)\varphi$, когда $\varepsilon \downarrow 0$.

Далее, поскольку L – максимальный диссипативный оператор с ограниченной мнимой частью, то согласно [14] для произвольного вектора $\psi \in \mathcal{H}$:

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{\mathbb{R}} \|\sqrt{V} R^*(k - i\varepsilon)\psi\|^2 dk < \infty,$$

при п.в. $\kappa \in \mathbb{R}$ определены граничные значения $\sqrt{V} R^*(\kappa - i0)\psi$ и имеет место сходимость $\sqrt{V} R^*(\kappa - i\varepsilon)\psi \rightarrow \sqrt{V} R^*(\kappa - i0)\psi$ при $\varepsilon \downarrow 0$ в среднем квадратичном.

4) Согласно (12) для произвольных векторов $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ выполнено равенство

$$(\Omega\varphi, \psi) = (\varphi, \psi) - \int_0^\infty (\sqrt{V} U_0(-t)\varphi, \sqrt{V} U^*(t)\psi) dt,$$

где $U^*(t) = \exp(-itL^*)$. В силу известной формулы, связывающей экспоненту и резольвенту оператора, имеем

$$\begin{aligned} i \int_0^\infty e^{i\kappa t} e^{-\varepsilon t} \sqrt{V} U_0(-t)\varphi dt &= \sqrt{V} R_0(\kappa + i\varepsilon)\varphi, \\ i \int_0^\infty e^{i\kappa t} e^{-\varepsilon t} \sqrt{V} U^*(t)\psi dt &= \sqrt{V} R^*(\kappa - i\varepsilon)\psi. \end{aligned}$$

Таким образом, $\sqrt{V} R_0(\kappa + i\varepsilon)\varphi$ и $\sqrt{V} R^*(\kappa - i\varepsilon)\psi$ суть обратные преобразования Фурье вектор-функций $i\sqrt{2\pi}\rho(t)e^{-\varepsilon t}\sqrt{V} U_0(-t)\varphi$ и $i\sqrt{2\pi}\rho(t)e^{-\varepsilon t}\sqrt{V} U^*(t)\psi$, где $\rho(t)$ – функция Хевисайда.

Доказательство завершается следующей выкладкой, в которой используется равенство Парсеваля:

$$\begin{aligned} ((I - \Omega)\varphi, \psi) &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\varepsilon t} (\sqrt{V} U_0(-t)\varphi, \sqrt{V} U^*(t)\psi) \rho(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} (\sqrt{V} R_0(\kappa + i\varepsilon)\varphi, \sqrt{V} R^*(\kappa - i\varepsilon)\psi) d\kappa \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (\sqrt{V} R_0(\kappa + i0)\varphi, \sqrt{V} R^*(\kappa - i0)\psi) d\kappa. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Для сходимости интеграла (9) достаточным является, например, следующее условие: $b(x) = O(|x|^{-\alpha})$ при $|x| \rightarrow \infty$, где $\alpha > 1$.

При условии малости возмущения в рамках так называемой “гладкой теории” стационарное представление типа (10) для билинейной формы волнового оператора установлено в [13]; отметим, что рассматриваемая здесь операторная модель не укладывается в схему работы [13].

§3. Функциональная модель оператора L

Для определенности далее ограничимся рассмотрением случая, когда оператор $L = L_0 + iV$ вполне несамосопряженный, т.е. L не имеет нетривиальных приводящих подпространств, на которых он индуцирует самосопряженный оператор. Дадим краткое описание функциональной модели вполне несамосопряженного диссипативного оператора применительно к $L = L_0 + iV$. При этом будет использоваться так называемая симметричная форма записи модели (см. [14], [18]).

Обозначим $E = \text{clos}_{\mathcal{H}}(V\mathcal{H})$ и ведем в рассмотрение характеристическую функцию $S(\lambda): E \rightarrow E$ оператора L , задаваемую формулой

$$S(\lambda) = I + 2i\sqrt{V}(L^* - \lambda I)^{-1}\sqrt{V}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Аналитическая в $\mathbb{C}_+$ оператор-функция $S(\lambda)$ является там сжимающей и для п.в. $k \in \mathbb{R}$ имеет граничные значения $S(k) := S(k + i0)$ в смысле сильной сходимости. При $\lambda \in \mathbb{C}_+ \setminus \sigma(L)$ справедливо равенство

$$S^{-1}(\lambda) = I - 2i\sqrt{V}(L - \lambda I)^{-1}\sqrt{V}.$$

С операторным семейством $Q(\lambda): E \rightarrow E$ характеристическая функция $S(\lambda)$ связана соотношением

$$S(\lambda) = (I + Q(\lambda))(I - Q(\lambda))^{-1}. \quad (13)$$

Обозначим через $\mathfrak{L}$ гильбертово факторпространство функций на $\mathbb{R}$ со значениями в $E \oplus E$ и скалярным произведением

$$\left\langle \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \end{pmatrix} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \left(\begin{pmatrix} I & S^*(k) \\ S(k) & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(k) \\ g(k) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{f}(k) \\ \tilde{g}(k) \end{pmatrix} \right)_{E \oplus E} dk$$

(подразумевается, что в множестве двухкомпонентных вектор-функций проведено отождествление элементов с нулевой нормой разности). В $\mathfrak{L}$ рассмотрим подпространство

$$\mathfrak{H} = \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{L} : f + S^*g \in H^2(\mathbb{C}_-; E), Sf + g \in H^2(\mathbb{C}_+; E) \right\}.$$

Здесь $H^2(\mathbb{C}_{\pm}; E)$ — пространства Харди аналитических в $\mathbb{C}_{\pm}$ вектор-функций h со значениями в гильбертовом пространстве E , для которых

$$\sup_{\varepsilon > 0} \int_{\mathbb{R}} \|h(k \pm i\varepsilon)\|^2 dk < \infty;$$

такие функции отождествляются с классами эквивалентности своих граничных значений на вещественной оси, образующими подпространства в $L^2(\mathbb{R}; E)$. Неопосредственно проверяется, что ортопроектор $\mathcal{P}$ на $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{L}$ имеет вид

$$\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f - P_+(f + S^*g) \\ g - P_-(Sf + g) \end{pmatrix},$$

где $P_{\pm}$ — ортопроекторы на подпространства $H^2(\mathbb{C}_{\pm}; E)$ в $L^2(\mathbb{R}; E)$.

Вполне несамосопряженный оператор L унитарно эквивалентен генератору сжимающей полугруппы

$$Z_t = \mathcal{P}U_t|_{\mathfrak{H}}, \quad t \geq 0,$$

где $\mathcal{U}_t$ — унитарная группа в $\mathfrak{L}$, действующая по формуле

$$\mathcal{U}_t \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (k) = \exp(ikt) \begin{pmatrix} f(k) \\ g(k) \end{pmatrix}.$$

Генератор полугруппы Z_t называется *функциональной моделью* для L ; изометрический оператор, осуществляющий переход в модельное представление, обозначим через $J: \mathcal{H} \rightarrow \mathfrak{H}$.

Абсолютно непрерывное (внешнее) подпространство $\mathcal{N}_e$ диссипативного оператора L определяется как замыкание в $\mathcal{H}$ множества

$$\{\psi \in \mathcal{H} : \sqrt{V} R(\lambda)\psi \in H^2(\mathbb{C}_+; E)\}.$$

Сингулярное (внутреннее) подпространство $\mathcal{N}_i$ состоит из векторов $\psi \in \mathcal{H}$ таких, что

$$((R(k + i\varepsilon) - R(k - i\varepsilon))\psi, \varphi) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \downarrow 0,$$

для всех $\varphi \in \mathcal{H}$ при п.в. $k \in \mathbb{R}$. В модельном представлении оператора L имеем

$$\begin{aligned} J\mathcal{N}_e &= \text{clos}_{\mathfrak{H}} \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{N} = \left\{ \mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix}, \sqrt{I - S^*S}f \in L^2(\mathbb{R}; E) \right\}, \\ J\mathcal{N}_i &= \mathfrak{H} \ominus \left\{ \mathcal{P} \begin{pmatrix} -S^*g \\ g \end{pmatrix}, \sqrt{I - SS^*}g \in L^2(\mathbb{R}; E) \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы записать в модельном представлении волновой оператор Ω , рассмотрим линеал

$$\mathfrak{Q} = \mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{L} : f + S^*g + Sf + g = 0 \right\}$$

и, следуя [14], на элементах $\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{Q}$ зададим оператор $W(L, L_0)$ формулой

$$W(L, L_0) \mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Отметим, что для $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|Sf + g\|^2 &\leq (f, f) + (S^*g, f) + (Sf, g) + (g, g) \\ &= \left(\begin{pmatrix} I & S^* \\ S & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right)_{E \oplus E} \end{aligned}$$

и, стало быть,

$$\begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(Sf + g) \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 \\ L^2(\mathbb{R}; E) \end{pmatrix} \subset \mathfrak{L}.$$

Таким образом, оператор $W(L, L_0)$ корректно определен на $\mathfrak{Q}$, причем $W(L, L_0)\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{N}$.

ЛЕММА 1. *В предположениях теоремы 1 оператор $W(L, L_0)$ продолжается по непрерывности с $\mathfrak{Q}$ на все $\mathfrak{H}$ и это продолжение совпадает с оператором $J\Omega J^{-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно известным (см. [14]) формулам, задающим действие $U_0(t)$ и $U(t)$ в модельном представлении, для элементов $\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{Q}$ имеем

$$\begin{aligned} JU_0(t)J^{-1}\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} &= \mathcal{P} \exp(ikt) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \\ JU(t)J^{-1}W(L, L_0)\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} &= \mathcal{P} \exp(ikt) \begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Поскольку $\|U(t)\| \leq 1$ при $t \geq 0$, то

$$\begin{aligned} &\left\| JU(t)U_0(-t)J^{-1}\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} - W(L, L_0)\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{L}} \\ &\leq \left\| JU_0(-t)J^{-1}\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} - JU(-t)J^{-1}W(L, L_0)\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{L}} \\ &= \left\| \mathcal{P} \exp(-ikt) \begin{pmatrix} 0 \\ Sf + g \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{L}}, \end{aligned}$$

где $Sf + g \in L^2(\mathbb{R}; E)$. В силу соотношений $P_+ + P_- = I$ и $P_+ S^* P_- = (P_- S P_+)^* = 0$ для произвольного вектора $h \in L^2(\mathbb{R}; E)$ справедливы равенства

$$\mathcal{P} \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_+ S^* h \\ P_+ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P_+ S^* P_+ h \\ P_+ h \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} 0 \\ P_+ h \end{pmatrix}.$$

Учитывая это, выполним оценку

$$\left\| \mathcal{P} \exp(-ikt) \begin{pmatrix} 0 \\ Sf + g \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{L}} \leq \|P_+ \exp(-ikt)(Sf + g)\|_{L^2(\mathbb{R}; E)}$$

и заметим, что правая часть последнего неравенства стремится к нулю, когда $t \rightarrow +\infty$.

Таким образом, на своей области определения $\mathfrak{Q}$ оператор $W(L, L_0)$ представим в виде $W(L, L_0) = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} JU(t)U_0(-t)J^{-1}$. Остается учесть, что множество

$$J^{-1}\mathfrak{Q} = \{\psi \in \mathcal{H} : \sqrt{V} R_0(\lambda)\psi \in H^2(\mathbb{C}_{\pm}; E)\}$$

плотно в $\mathcal{H}$ (см. доказательство теоремы 1), или, что эквивалентно, $\mathfrak{Q}$ плотно в $\mathfrak{H}$. Стало быть, $W(L, L_0)$ продолжается по непрерывности на все $\mathfrak{H}$, и это продолжение совпадает с $J\Omega J^{-1}$. Попутно установлено, что $\Omega\mathcal{H} \subset \mathcal{N}_e$. Лемма доказана.

§ 4. Скалярное кратное характеристической функции

Дальнейшие рассуждения используют наличие скалярного кратного у характеристической функции $S(\lambda)$, а также и у оператор-функции $I + S(\lambda)$. Скалярным кратным ограниченной аналитической в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ оператор-функции $D(\lambda)$ называется ограниченная аналитическая скалярная функция $\delta(\lambda) \not\equiv 0$ такая, что

$$\Delta(\lambda)D(\lambda) = D(\lambda)\Delta(\lambda) = \delta(\lambda)I, \quad \text{Im } \lambda > 0,$$

где $\Delta(\lambda)$ – аналитическая в $\mathbb{C}_+$ ограниченная оператор-функция.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $b(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $b(x) \geq 0$ при п.в. $x \in \mathbb{R}$ и $b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Тогда $(S(\lambda) - I) \in \mathfrak{S}_2$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, и определители $\det(I - (S(\lambda) - I)^2)$ и $\det(I - (S(\lambda) - I)^2/4)$ являются скалярными кратными для $S(\lambda)$ и $I + S(\lambda)$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При сделанных относительно $b(x)$ предположениях оператор $Q(\lambda)$ принадлежит классу $\mathfrak{S}_2$ операторов Гильберта–Шмидта при любом $\lambda \in \mathbb{C}_+$ (см. предложение 1). Далее, имеем равенство

$$\operatorname{Re} Q(\lambda) = -\operatorname{Im} \lambda \cdot \sqrt{V} R_0(\bar{\lambda}) R_0(\lambda) \sqrt{V}: E \rightarrow E,$$

откуда видно, что $\operatorname{Re} Q(\lambda) \leq 0$, когда $\lambda \in \mathbb{C}_+$, т.е. числовой образ оператора $Q(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, принадлежит полуплоскости $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leq 0\}$. Оценка резольвенты оператора через расстояние до его числового образа применительно к $Q(\lambda)$ приводит к неравенству $\|(I - Q(\lambda))^{-1}\| \leq 1$, где $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Поскольку $S(\lambda) - I = 2Q(\lambda)(I - Q(\lambda))^{-1}$ в силу формулы (13), из сказанного выше следует, что $(S(\lambda) - I) \in \mathfrak{S}_2$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, причем

$$\|S(\lambda) - I\|_{\mathfrak{S}_2} \leq 2\|Q(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \quad (15)$$

Для доказательства второй части сформулированного утверждения достаточно убедиться, что

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}_+} \|S(\lambda) - I\|_{\mathfrak{S}_2} < \infty;$$

при этом согласно [19] оператор-функции $S(\lambda)$ и $I + S(\lambda)$ обладают скалярными кратными $\det(I - (S(\lambda) - I)^2)$ и $\det(I - (S(\lambda) - I)^2/4)$ соответственно. Проверка равномерной ограниченности $\mathfrak{S}_2$ -нормы оператора $S(\lambda) - I$ осуществляется по той же схеме, что и в случае финитной функции $b(x)$ (см. [11]).

Для значений $\lambda \in \mathbb{C}_+$, $|\operatorname{Re} \lambda| \geq 1$, $\operatorname{Im} \lambda \leq 1$, в силу оценки (8) норма $\|Q(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}$ равномерно ограничена. Если $\operatorname{Im} \lambda \geq 1$, то $|\operatorname{Ei}(i\lambda|x - y|)| \leq |\operatorname{Ei}(-|x - y|)|$ и, следовательно, справедливо неравенство

$$\|Q(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2} \leq \|Q(i)\|_{\mathfrak{S}_2}, \quad \operatorname{Im} \lambda \geq 1.$$

Согласно (15) одновременно с $\|Q(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}$ величина $\|S(\lambda) - I\|_{\mathfrak{S}_2}$ ограничена равномерно для значений $\lambda \in \mathbb{C}_+$ таких, что $\operatorname{Im} \lambda \geq 1$ или $|\operatorname{Re} \lambda| \geq 1$.

Докажем теперь, что норма $\|S(\lambda) - I\|_{\mathfrak{S}_2}$ ограничена, когда $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Для этого рассмотрим интегральный оператор $\tilde{Q}(\lambda)$ с ядром

$$\tilde{q}(x, y; \lambda) := q(x, y; \lambda) \chi(x - y),$$

где $q(x, y; \lambda)$ — ядро интегрального оператора $Q(\lambda)$, χ — индикатор промежутка $[-|\lambda|^{-1/2}, |\lambda|^{-1/2}]$. Согласно формуле (3) ядро $\tilde{q}(x, y; \lambda)$ допускает представление

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x, y; \lambda) &= \frac{1}{2} \sqrt{b(x)} (\ln|x - y|) \sqrt{b(y)} \chi(x - y) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sqrt{b(x)} (\ln(-i\lambda) + \gamma) \sqrt{b(y)} \chi(x - y) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{b(x)} \operatorname{Ein}(-i\lambda|x - y|) \sqrt{b(y)} \chi(x - y); \end{aligned} \quad (16)$$

здесь $\operatorname{Ein}(z)$ — дополнительная интегральная показательная функция, определяемая формулой

$$\operatorname{Ein}(z) = \int_0^z \frac{1 - e^{-t}}{t} dt = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n \cdot n!}.$$

Покажем, что $\|Q(\lambda) - \tilde{Q}(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Вследствие неравенств (6) и (7) имеем

$$|q(x, y; \lambda) - \tilde{q}(x, y; \lambda)|^2 \leq b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y)\{1 - \chi(x-y)\} + \tilde{K}(\lambda)^2 b(x)b(y)\{1 - \chi(x-y)\},$$

где $\tilde{K}(\lambda) = O(|\ln|\lambda||)$, $\lambda \rightarrow 0$. Поскольку $b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, то

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y)\{1 - \chi(x-y)\} dx dy \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Кроме того, при $|\lambda| < 1$ имеем

$$\begin{aligned} & \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} b(x)b(y)\{1 - \chi(x-y)\} dx dy \\ &= \iint_{|x-y| > |\lambda|^{-1/2}} b(x)b(y) dx dy \\ &\leq 4(\ln|\lambda|)^{-2} \iint_{|x-y| > |\lambda|^{-1/2}} b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y) dx dy \end{aligned}$$

и, стало быть,

$$\tilde{K}(\lambda)^2 \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} b(x)b(y)\{1 - \chi(x-y)\} dx dy \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Таким образом, получаем, что

$$\|Q(\lambda) - \tilde{Q}(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}^2 = \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} |q(x, y; \lambda) - \tilde{q}(x, y; \lambda)|^2 dx dy \rightarrow 0$$

при $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$.

Далее, представим разность $S(\lambda) - I$ в виде

$$S(\lambda) - I = 2\tilde{Q}(\lambda)(I - Q(\lambda))^{-1} + 2(Q(\lambda) - \tilde{Q}(\lambda))(I - Q(\lambda))^{-1}. \quad (17)$$

Из предыдущего следует, что второе слагаемое в правой части (17) стремится к нулю относительно $\mathfrak{S}_2$ -нормы, когда $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Рассмотрим первое слагаемое из правой части (17). В соответствии с формулой (16) имеем

$$2\tilde{Q}(\lambda)(I - Q(\lambda))^{-1} = (A(\lambda) - B(\lambda))(I - Q(\lambda))^{-1} + P(\lambda), \quad (18)$$

где $\text{rank } P(\lambda) = 1$, $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ — интегральные операторы с ядрами

$$\sqrt{b(x)} (\ln|x-y|) \sqrt{b(y)} \chi(x-y) \quad \text{и} \quad \sqrt{b(x)} \text{Ein}(-i\lambda|x-y|) \sqrt{b(y)} \chi(x-y)$$

соответственно. При этом

$$\|A(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}^2 \leq \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y) dx dy < \infty$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned} \|B(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}^2 &\leq \iint_{|x-y| \leq |\lambda|^{-1/2}} b(x)(e^{|\lambda||x-y|} - 1)b(y) dx dy \\ &\leq (e^{|\lambda|^{1/2}} - 1) \left(\int_{\mathbb{R}} b(x) dx \right)^2 \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поскольку $\|(I - Q(\lambda))^{-1}\| \leq 1$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, то вследствие (18) справедливо неравенство

$$\|P(\lambda)\| \leq 2\|\tilde{Q}(\lambda)(I - Q(\lambda))^{-1}\| + \|A(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2} + \|B(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}.$$

Учитывая, что норма левой части в соотношении (17) не превосходит 2, приходим к заключению об ограниченности величины $\|\tilde{Q}(\lambda)(I - Q(\lambda))^{-1}\|$ в окрестности $\lambda = 0$. Стало быть, норма $\|P(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2} = \|P(\lambda)\|$, а вместе с ней и $\|S(\lambda) - I\|_{\mathfrak{S}_2}$, остается ограниченной при $\lambda \rightarrow 0$.

Остается показать, что величина $\|S(\lambda) - I\|_{\mathfrak{S}_2}$ равномерно ограничена, если значения $\lambda \in \mathbb{C}_+$ отделены от 0 и ∞ ; при этом ввиду неравенства (15) достаточно проверить ограниченность нормы $\|Q(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}$. Пусть $q_n(x, y; \lambda) = q(x, y; \lambda)$, если $|x| \leq n$, $|y| \leq n$, и $q_n(x, y; \lambda) = 0$, если $|x| > n$ или $|y| > n$. Интегральный оператор $Q_n(\lambda)$ с ядром $q_n(x, y; \lambda)$ как функция со значениями в $\mathfrak{S}_2$ допускает (см. [11]) аналитическое продолжение на открытое множество, содержащее $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, и $\|Q(\lambda) - Q_n(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $\lambda \in \mathbb{C}_+$, если значения λ отделены от 0 и ∞ (в силу оценок (6) и (7)). Поэтому оператор-функция $Q(\lambda) \in \mathfrak{S}_2$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, продолжается по непрерывности на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, причем $Q(\kappa + i0) \in \mathfrak{S}_2$.

Таким образом, норма $\|Q(\lambda)\|_{\mathfrak{S}_2}$ и одновременно $\|S(\lambda) - I\|_{\mathfrak{S}_2}$ ограничены равномерно, если значения $\lambda \in \mathbb{C}_+$ отделены от 0 и ∞ . Доказательство закончено. Попутно было установлено существование предельных значений $S(\kappa + i0)$ для всех $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

§5. Условие отсутствия спектральных особенностей

Следуя [19], назовем точку λ_0 непрерывного спектра оператора L *спектральной особенностью*, если

$$\sup_{|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon} \|S^{-1}(\lambda)\| = \infty$$

для произвольного $\varepsilon > 0$. Ниже указаны условия на коэффициент $b(x)$, при которых оператор $L = L_0 + iV$ не имеет спектральных особенностей и предельные значения оператор-функции $S^{-1}(\lambda)$ на вещественной оси равномерно ограничены. При этом “исключительным” является подмножество $\mathcal{E} \subset L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, выделенное следующим условием

$$0 \leq b(x) \in \mathcal{E} \iff \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \{-1, \sigma(Q(i\varepsilon))\} = 0.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ [12]. Если $b(x) \notin \mathcal{E}$, то величина $N(\tau b)$ постоянна в окрестности значения $\tau = 1$; если же $b(x) \in \mathcal{E}$, то $N(\tau b) > N(b)$ при $\tau > 1$.

Согласно сформулированному утверждению увеличение числа собственных значений у оператора $L(\tau) = L_0 + i\tau V$ с ростом τ происходит при тех и только тех значениях параметра τ , для которых $\tau b \in \mathcal{E}$. А именно существует счетный набор $\{\tau_n\}$ такой, что $\tau b \in \mathcal{E}$ в том и только том случае, если $\tau \in \{\tau_n\}$, и рождение новых собственных значений оператора $L(\tau)$ происходит из нуля при $\tau = \tau_n$. Отметим, что сама точка $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $L(\tau_n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть выполнены условия предложения 3. Если функция $b(x)$ не принадлежит множеству $\mathcal{E}$, то оператор-функция $S(\kappa)$ обратима при $\kappa \neq 0$ и

$$\sup_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \|S^{-1}(\kappa)\| < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду соотношения (13) для $\lambda \in \mathbb{C}_+ \setminus \sigma(L)$ имеем

$$S^{-1}(\lambda) = 2(I + Q(\lambda))^{-1} - I. \quad (19)$$

Ниже будет установлена ограниченность нормы $\|(I + Q(\lambda))^{-1}\|$ в полосе $\Pi = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} \lambda \leq \delta\}$, где $\delta \in (0, 1)$ выбрано так, что $\Pi \cap \sigma_p(L) = \emptyset$. Такой выбор δ возможен, поскольку $N(b) < \infty$ при условии $b(x)(\ln|x-y|)^2 b(y) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ (см. предложение 2). В силу оценки (8) найдется $R > 0$ такое, что норма $\|(I + Q(\lambda))^{-1}\|$ равномерно ограничена, если $|\operatorname{Re} \lambda| > R$ и $0 < \operatorname{Im} \lambda \leq \delta$.

Рассмотрим теперь оператор-функцию $(I + Q(\lambda))^{-1}$ вблизи нуля. Покажем сначала, что

$$\operatorname{Re} Q(\lambda) - Q(i|\lambda|) \rightarrow 0$$

и величина $\|\operatorname{Im} Q(\lambda)\|$ ограничена, когда $\lambda \rightarrow 0$. Как видно из представления (16) ядра $\tilde{Q}(\lambda)$, для $\lambda \in \mathbb{C}_+$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Re} \tilde{Q}(\lambda) - \tilde{Q}(i|\lambda|)\| &\leq \|B(\lambda)\| + \|B(i|\lambda|)\|, \\ \|\operatorname{Im} \tilde{Q}(\lambda)\| &\leq \int_{\mathbb{R}} b(x) dx + \|B(\lambda)\|, \end{aligned}$$

где $B(\lambda)$ – оператор с ядром $\sqrt{b(x)} \operatorname{Ein}(-i\lambda|x-y|) \sqrt{b(y)} \chi(x-y)$. Поскольку $\|B(\lambda)\| \rightarrow 0$ и $\|Q(\lambda) - \tilde{Q}(\lambda)\| \rightarrow 0$, когда $\lambda \rightarrow 0$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$ (см. доказательство предложения 3), отсюда следует, что оператор-функция $\operatorname{Im} Q(\lambda)$ равномерно ограничена в $\mathbb{C}_+$ вблизи точки $\lambda = 0$ и $\operatorname{Re} Q(\lambda) - Q(i|\lambda|) \rightarrow 0$ относительно операторной нормы при $\lambda \rightarrow 0$.

Допустим, что норма $\|(I + Q(\lambda))^{-1}\|$ неограничена, когда $\lambda \rightarrow 0$, т.е. существуют последовательности $\{\varphi_n\} \subset E$, $\|\varphi_n\| = 1$, и $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{C}_+$ такие, что $\lambda_n \rightarrow 0$ и

$$(I + Q(\lambda_n))\varphi_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

При этом $(\operatorname{Im} Q(\lambda_n)\varphi_n, \varphi_n) \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$. Принимая во внимание равномерную ограниченность $\operatorname{Im} Q(\lambda)$ вблизи нуля и свойство (5) знакоопределенности $\operatorname{Im} Q(\lambda)$ (см. §1), заключаем, что $\operatorname{Im} Q(\lambda_n)\varphi_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Тогда $(I + \operatorname{Re} Q(\lambda_n))\varphi_n \rightarrow 0$ и одновременно

$$(I + Q(i|\lambda_n|))\varphi_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

С учетом самосопряженности операторов $Q(it)$, $t \in \mathbb{R}_+$, будем иметь

$$\operatorname{dist}\{-1, \sigma(Q(i|\lambda_n|))\} = \|(I + Q(i|\lambda_n|))^{-1}\|^{-1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

что противоречит условию $b(x) \notin \mathcal{E}$. Итак, при сделанных предположениях существует $\varepsilon > 0$ такое, что оператор-функция $(I + Q(\lambda))^{-1}$ равномерно ограничена для $\lambda \in \mathbb{C}_+$, $|\lambda| < \varepsilon$.

Далее воспользуемся тем фактом (см. доказательство предложения 3), что оператор-функция $Q(\lambda): E \rightarrow E$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, продолжается по непрерывности на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, причем $Q(\kappa + i0) \in \mathfrak{S}_\infty$, $\kappa \neq 0$. Свойство (5) знакоопределенности $\operatorname{Im} Q(\lambda)$, $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$, распространяется на предельные значения $Q(\kappa + i0)$ и, следовательно, $\ker(I + Q(\kappa + i0)) = \{0\}$, если $\kappa \neq 0$. Таким образом, оператор $(I + Q(\lambda))$ обратим для всех λ из замыкания Π , за исключением точки $\lambda = 0$, и, стало быть, норма $\|(I + Q(\lambda))^{-1}\|$ равномерно ограничена, если значения $\lambda \in \Pi$ отделены от 0 и ∞ .

Суммируя сказанное, с учетом (19) можно утверждать, что оператор-функция $S(\kappa)$ обратима при $\kappa \neq 0$ и справедлива оценка

$$\sup_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \|S^{-1}(\kappa)\| \leq 1 + 2 \sup_{\lambda \in \Pi} \|(I + Q(\lambda))^{-1}\| < \infty.$$

Отметим, что условие $b(x) \notin \mathcal{E}$ использовалось лишь при доказательстве ограниченности величины $\|S^{-1}(\kappa)\|$ в окрестности нуля.

§6. Существование левого обратного к Ω

В представлении функциональной модели зададим оператор $W(L_0, L)$ следующим образом (см. [14]). Область определения $W(L_0, L)$ состоит из тех элементов $\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathfrak{N}$, для которых найдется единственная вектор-функция h такая, что $\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in \Omega$ и

$$W(L_0, L) \mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}. \quad (20)$$

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия предложения 3 и $b(x) \notin \mathcal{E}$. Тогда оператор $W(L_0, L)$ определен и ограничен на множестве, плотном в $\mathfrak{N}$, а замыкание $\tilde{\Omega}$ оператора $J^{-1}W(L_0, L)J$ представляет собой левый обратный к Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 3 существует ограниченная аналитическая в $\mathbb{C}_+$ оператор-функция $\Delta(\lambda): E \rightarrow E$ такая, что

$$\Delta(\lambda)(I + S(\lambda)) = (I + S(\lambda))\Delta(\lambda) = d(\lambda)I,$$

где $d(\lambda) = \det(I - (S(\lambda) - I)^2/4)$. Одновременно для $\lambda \in \mathbb{C}_+$ и почти всюду на вещественной оси справедливы соотношения

$$\Delta^*(\lambda)(I + S^*(\lambda)) = (I + S^*(\lambda))\Delta^*(\lambda) = \overline{d(\bar{\lambda})}I, \quad (21)$$

причем $d(k + i0) \neq 0$ для п.в. $k \in \mathbb{R}$. Отсюда следует, что компонента h в правой части (20) однозначно определяется условием $\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix} \in \Omega$.

Покажем (ср. с [14]), что оператор $W(L_0, L)$ определен на векторах из подпространства $\mathfrak{N}$, имеющих вид $\mathcal{P}\theta_n \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, где $g = -Sf$ и $\sqrt{I - S^*S}f \in L^2(\mathbb{R}; E)$, а скалярная функция $\theta_n(k)$ — индикатор множества

$$\left\{ k \in \mathbb{R} : |d(k + i0)| > \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обозначим $Y_n(k) := \theta_n(k)\Delta^*(k+i0)/\overline{d(k+i0)}$ и заметим, что

$$\begin{pmatrix} \theta_n f \\ -Y_n(I+S)f \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}$$

всякий раз, когда $\sqrt{I-S^*S}f \in L^2(\mathbb{R}; E)$. В самом деле, $\theta_n \begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix} \in \mathfrak{L}$ и в силу (21) имеем

$$\begin{pmatrix} \theta_n f \\ -Y_n(I+S)f \end{pmatrix} - \theta_n \begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Y_n(I-S^*S)f \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 0 \\ L^2(\mathbb{R}; E) \end{pmatrix} \subset \mathfrak{L}.$$

Кроме того, согласно (21) выполнено соотношение

$$(I+S)\theta_n f - (I+S^*)Y_n(I+S)f = 0$$

и, таким образом,

$$W(L_0, L): \mathcal{P}\theta_n \begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix} \mapsto \mathcal{P} \begin{pmatrix} \theta_n f \\ -Y_n(I+S)f \end{pmatrix} \in \mathfrak{Q}.$$

Поскольку $d(k+i0) \neq 0$ при п.в. $k \in \mathbb{R}$, множество векторов вида $\mathcal{P}\theta_n \begin{pmatrix} f \\ -Sf \end{pmatrix}$, $\sqrt{I-S^*S}f \in L^2(\mathbb{R}; E)$, $n \in \mathbb{N}$, на которых определен оператор $W(L_0, L)$, плотно в $\mathfrak{Q}$.

Согласно определению (20) оператора $W(L_0, L)$ и известным формулам, задающим действие $U(t)$ и $U_0(t)$ в представлении функциональной модели, для векторов $\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ из области определения $W(L_0, L)$ имеем

$$\begin{aligned} JU(t)J^{-1}\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} &= \mathcal{P} \exp(ikt) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \\ JU_0(t)J^{-1}W(L_0, L)\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} &= \mathcal{P} \exp(ikt) \begin{pmatrix} f \\ h \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

При этом $(g-h) \in L^2(\mathbb{R}; E)$ и справедлива оценка (ср. с доказательством леммы 1)

$$\begin{aligned} &\left\| JU_0(t)U(-t)J^{-1}\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} - W(L_0, L)\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{L}} \\ &= \left\| JU(-t)J^{-1}\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} - JU_0(-t)J^{-1}W(L_0, L)\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{L}} \\ &= \left\| \mathcal{P} \exp(-ikt) \begin{pmatrix} 0 \\ g-h \end{pmatrix} \right\|_{\mathfrak{L}} \leq \|P_+ \exp(-ikt)(g-h)\|_{L^2(\mathbb{R}; E)}. \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в правой части последнего неравенства, стремится к нулю, когда $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, установлено, что на своей области определения оператор $W(L_0, L)$ представим в виде

$$W(L_0, L)\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \lim_{t \rightarrow \infty} JU_0(t)U(-t)J^{-1}\mathcal{P} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Далее, поскольку

$$\sup_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \|S^{-1}(k)\| < \infty$$

при выполнении условий предложения 4, то согласно [14] группа $U(t)$ равномерно ограничена на абсолютно непрерывном подпространстве оператора L . Как следствие этого оператор $J^{-1}W(L_0, L)J$ ограничен и продолжается по непрерывности на $J^{-1}\text{clos}_{\mathfrak{H}} \mathfrak{N} = \mathcal{N}_e$. Полученный в результате этого продолжения ограниченный оператор $\tilde{\Omega}$ представим в виде

$$\tilde{\Omega}\varphi = \lim_{t \rightarrow \infty} U_0(t)U(-t)\varphi, \quad \varphi \in \mathcal{N}_e.$$

Согласно формулам (14) и (20) оператор $\tilde{\Omega}$ является левым обратным к прямому волновому оператору $\Omega = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)U_0(-t): \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{N}_e$ и одновременно правым обратным на подпространстве $\mathcal{N}_e$. Лемма доказана.

§ 7. Факторизация скалярного кратного характеристической функции

Согласно предложению 3 существует ограниченная аналитическая в $\mathbb{C}_+$ оператор-функция $\Sigma(\lambda)$, удовлетворяющая соотношениям

$$\Sigma(\lambda)S(\lambda) = S(\lambda)\Sigma(\lambda) = m(\lambda)I, \quad \text{Im } \lambda > 0,$$

где $m(\lambda) = \det(I - (S(\lambda) - I)^2)$. Функция $m(\lambda) \in H^\infty(\mathbb{C}_+)$ допускает (см. [20]) внешне-внутреннюю каноническую факторизацию

$$m(\lambda) = m_1(\lambda) \cdot m_2(\lambda) \cdot m_3(\lambda).$$

Здесь $m_1(\lambda)$ – произведение Бляшке, построенное по нулям $m(\lambda)$:

$$m_1(\lambda) = \prod_n \frac{\lambda - \lambda_n}{\lambda - \overline{\lambda_n}};$$

$m_2(\lambda)$ – сингулярная внутренняя функция вида

$$m_2(\lambda) = e^{ia\lambda} \exp\left(i \int_{\mathbb{R}} \frac{t\lambda - 1}{\lambda + t} d\mu(t)\right),$$

где μ – конечная сингулярная мера и $a \geq 0$; $m_3(\lambda)$ – ограниченная в верхней полуплоскости внешняя функция, задаваемая следующей формулой

$$m_3(\lambda) = e^{i\omega} \exp\left\{\frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \ln(|m(\kappa + i0)|) \frac{\kappa\lambda + 1}{\lambda - \kappa} \frac{d\kappa}{1 + \kappa^2}\right\}, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

ЛЕММА 3. Пусть выполнены условия предложения 3. Если $b(x) \notin \mathcal{E}$, то характеристическая функция $S(\lambda)$ имеет скалярное кратное $m_1(\lambda) \cdot m_3(\lambda)$, где $m_1(\lambda)$ – конечное произведение Бляшке, построенное по набору $\{\lambda_n\} = \sigma_p(L) \subset i\mathbb{R}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нули определителя $m(\lambda)$ в верхней полуплоскости совпадают с собственными значениями оператора L . В самом деле, равенство $m(\lambda) = 0$ означает, что $(S(\lambda) - I)^2 \in \mathfrak{S}_1$ имеет собственное значение 1. Поскольку $\|S(\lambda)\| \leq 1$, это равносильно тому, что $\ker S(\lambda) \neq \{0\}$. Согласно соотношению (13) последнее выполнено в том и только том случае, когда $-1 \in \sigma(Q(\lambda))$, что в силу (4) эквивалентно $\lambda \in \sigma_p(L)$. В силу предложения 2 при сделанных предположениях произведение Бляшке $m_1(\lambda)$ содержит конечное число дробно-линейных сомножителей.

Определитель $m(\lambda)$ продолжается по непрерывности на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, поскольку оператор-функция $Q(\lambda) \in \mathfrak{S}_2$, $\lambda \in \mathbb{C}_+$, допускает продолжение по непрерывности в классе $\mathfrak{S}_2$ на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (см. доказательство предложения 3). Как отмечалось в доказательстве предложения 4, при $\kappa \neq 0$ имеем $\ker(I + Q(\kappa + i0)) = \{0\}$ и, следовательно, $m(\kappa + i0) \neq 0$, если $\kappa \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Согласно известному результату теории аналитических функций применительно к рассматриваемой ситуации внешний сомножитель $m_3(\lambda)$ одновременно с $m(\lambda)$ непрерывен вплоть до вещественной оси всюду, за исключением нуля, причем $|m_3(\kappa + i0)| = |m(\kappa + i0)|$, $\kappa \neq 0$. Отсюда следует, что $m_2(\lambda)$ продолжается по непрерывности на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, и поэтому носитель меры μ сосредоточен в нуле (см., например, [20; гл. 5]), т.е. сингулярный сомножитель в канонической факторизации $m(\lambda)$ имеет вид

$$m_2(\lambda) = \exp\left(ia\lambda - i\frac{c}{\lambda}\right),$$

где a и c — неотрицательные константы.

Покажем, что $m(i\tau) \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow \infty$. Для $\tau \geq 1$ справедливо неравенство $|q(x, y; i\tau)| \leq |q(x, y; i)|$, где $q(x, y; i) \in L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, и, кроме того, $q(x, y; i\tau) \rightarrow 0$, когда $\tau \rightarrow \infty$. По теореме Лебега о предельном переходе имеем

$$\|Q(i\tau)\|_{\mathfrak{S}_2} \rightarrow 0, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Отсюда в силу (15) следует, что $\|S(i\tau) - I\|_{\mathfrak{S}_2} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ и, стало быть,

$$m(i\tau) = \det(I - (S(i\tau) - I)^2) \rightarrow 1, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (22)$$

Последнее возможно лишь в том случае, если $a = 0$. Иначе $m_2(i\tau) \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow \infty$, что противоречит (22), поскольку в канонической факторизации $m(\lambda)$ сомножители $m_1(\lambda)$ и $m_3(\lambda)$ — ограниченные функции.

В силу условия $b(x) \notin \mathcal{E}$ оператор-функция $S^{-1}(\lambda) = (m(\lambda))^{-1}\Sigma(\lambda)$ равномерно ограничена в верхней полукрестности точки $\lambda = 0$ (см. доказательство предложения 4). Учитывая ограниченность $m_1(\lambda)$ и $m_3(\lambda)$ в $\mathbb{C}_+$, заключаем, что оператор-функция $(m_2(\lambda))^{-1}\Sigma(\lambda)$ аналитична и ограничена в верхней полуплоскости. Лемма доказана.

В следующем параграфе потребуются некоторые сведения об аналитических в круге сжимающих операторнозначных функциях (см. [16]). Ниже через $H^2(\mathfrak{A})$ обозначается класс Харди аналитических в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций $f(z)$ со значениями в гильбертовом пространстве $\mathfrak{A}$ таких, что

$$\sup_{r < 1} \int_0^{2\pi} \|f(re^{i\varphi})\|_{\mathfrak{A}}^2 d\varphi < \infty;$$

функции из $H^2(\mathfrak{A})$ отождествляются с классами эквивалентности своих граничных значений на окружности $|z| = 1$, образующими подпространство в $L^2(\mathfrak{A})$.

Аналитическая в круге $\mathbb{D}$ сжимающая оператор-функция $\Theta(z)$, действующая из гильбертова пространства $\mathfrak{A}$ в гильбертово пространство $\mathfrak{A}'$, называется *внешней*, если $\text{clos}_{L^2(\mathfrak{A}')} \Theta H^2(\mathfrak{A}) = H^2(\mathfrak{A}')$. Оператор-функция $\Theta(z): \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ называется *внутренней*, если отображение Θ из $H^2(\mathfrak{A})$ в $H^2(\mathfrak{A}')$ является изометрическим. Сжимающая оператор-функция $\Theta(z)$ называется **-внешней* (**-внутренней*), если аналитическая в $\mathbb{D}$ оператор-функция $\Theta^*(\bar{z}): \mathfrak{A}' \rightarrow \mathfrak{A}$ является внешней (соответственно внутренней).

Всякая сжимающая аналитическая оператор-функция $\Theta(z): \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$ единственным образом представляется в виде $\Theta(z) = \Theta^0(z) \oplus \text{const}$, где const означает изометрическую постоянную, а $\Theta^0(z)$ не содержит таких постоянных слагаемых. Оператор-функция $\Theta^0(z)$ называется *чистой частью* $\Theta(z)$.

§8. Свойство полноты волновых операторов

С помощью интеграла Рисса строится проектор

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\lambda) d\lambda$$

на линейную оболочку $\mathcal{H}_d := P\mathcal{H}$ собственных векторов оператора L параллельно подпространству $\mathcal{H}_c := (I - P)\mathcal{H}$; здесь $\Gamma \subset \mathbb{C}_+$ — положительно ориентированный замкнутый контур, разделяющий $\sigma_c(L)$ и $\sigma_d(L)$. Согласно [21] оператор L разложим относительно прямой суммы $\mathcal{H} = \mathcal{H}_c \dot{+} \mathcal{H}_d$:

$$PD(L) \subset D(L), \quad L\mathcal{H}_c \subset \mathcal{H}_c, \quad L\mathcal{H}_d \subset \mathcal{H}_d.$$

Ниже через L_c обозначается сужение L на подпространство $\mathcal{H}_c$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и, кроме того, $b(x)(\ln|x-y|)^2b(y) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Предположим, что оператор $L = L_0 + iV$ вполне несамосопряженный и $\lim_{\tau \rightarrow 1} N(\tau b) = N(b)$. Тогда $\Omega\mathcal{H} = \mathcal{H}_c$, на подпространстве $\mathcal{H}_c$ существует обратный волновой оператор $\tilde{\Omega} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U_0(t)U(-t)$ и справедливо соотношение

$$L_c = \Omega L_0 \tilde{\Omega}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Существование прямого волнового оператора $\Omega = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U(t)U_0(-t)$ установлено в теореме 1. Построенный в лемме 2 левый обратный $\tilde{\Omega} = s\text{-}\lim_{t \rightarrow \infty} U_0(t)U(-t)$ является одновременно правым обратным к Ω на абсолютно непрерывном подпространстве $\mathcal{N}_e$ оператора L и, таким образом, $\Omega\mathcal{H} = \mathcal{N}_e$. Ниже будет установлено, что подпространство $\mathcal{N}_e$ совпадает с $\mathcal{H}_c$.

Согласно [18] в рассматриваемой здесь ситуации $\mathcal{H} = \mathcal{N}_e \dot{+} \mathcal{N}_i$, причем проектор на $\mathcal{N}_i$ параллельно $\mathcal{N}_e$ ограничен (в силу предложения 4). Если $\varphi \in \mathcal{N}_e$, то вектор-функция $R(\lambda)\varphi$ аналитична в $\mathbb{C}_+$ (см. [14]) и, стало быть, $\varphi \in \mathcal{H}_c$, т.е. $\mathcal{N}_e \subset \mathcal{H}_c$. Покажем, что $\mathcal{N}_i \cap \mathcal{H}_c = \{0\}$, откуда будет следовать равенство $\mathcal{N}_e = \mathcal{H}_c$.

2) Обозначим через $T = (L - iI)(L + iI)^{-1}$ преобразование Кэли диссипативного оператора L и рассмотрим характеристическую функцию $\Theta_T(z)$ сжатия T :

$$\Theta_T(z) = -T + z(I - TT^*)^{1/2}(I - zT^*)^{-1}(I - T^*T)^{1/2},$$

действующую из $\mathfrak{D} = \text{clos}_{\mathcal{H}}(I - T^*T)^{1/2}\mathcal{H}$ в $\mathfrak{D}' = \text{clos}_{\mathcal{H}}(I - TT^*)^{1/2}\mathcal{H}$. Оператор-функция $\Theta_T(z): \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}'$ аналитична в круге $\mathbb{D}$, является там сжимающей и совпадает с $S(i(1+z)/(1-z))$ (см. [16; гл. 9]). В соответствии с этим и вследствие леммы 3 оператор-функция $\Theta_T(z)$ обладает скалярным кратным $\alpha(z) \cdot \delta(z)$, где $\alpha(z) = m_3(i(1+z)/(1-z))$ – ограниченная в $\mathbb{D}$ внешняя функция, задаваемая формулой

$$\alpha(z) = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\left| m \left(-\text{ctg} \frac{\varphi}{2} + i0 \right) \right| \right) \frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} d\varphi \right\},$$

а $\delta(z) = m_1(i(1+z)/(1-z))$ – конечное произведение Бляшке:

$$\delta(z) = \prod_n \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}, \quad z_n = \frac{\lambda_n - i}{\lambda_n + i} \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим так называемую $*$ -каноническую факторизацию характеристической функции $\Theta_T(z)$ (см. [16]):

$$\Theta_T(z) = \Theta_{*e}(z)\Theta_{*i}(z),$$

где $\Theta_{*e}(z)$ – $*$ -внешняя, $\Theta_{*i}(z)$ – $*$ -внутренняя оператор-функции. По теореме Сёкефальви-Надя и Фояша о внешне-внутренней факторизации оператор-функций, обладающих скалярным кратным, множитель $\Theta_{*i}(z)$ имеет скалярное кратное $\delta(z)$. Вследствие теоремы о триангуляции сжатия, порожденной факторизацией его характеристической функции (см. [16; гл. 7]), подпространство $\mathcal{N}_i$ инвариантно относительно T и характеристическая функция $\vartheta(z)$ сужения $T|_{\mathcal{N}_i}$ совпадает с чистой частью $\Theta_{*i}(z)$, а стало быть, обладает скалярным кратным $\delta(z)$.

3) Подпространство $\mathcal{G} = \mathcal{N}_i \cap \mathcal{H}_c = (I - P)\mathcal{N}_i$ инвариантно относительно T и $\mathcal{N}_i = \mathcal{H}_d \dot{+} \mathcal{G}$. Согласно общей теории функциональных моделей подпространству $\mathcal{G}$ отвечает факторизация характеристической функции $\vartheta(z)$ оператора $T|_{\mathcal{N}_i}$:

$$\vartheta(z) = \vartheta_2(z)\vartheta_1(z) \tag{23}$$

такая, что характеристическая функция $T|_{\mathcal{G}}$ совпадает с чистой частью $\vartheta_1(z)$. При этом подпространство $\mathcal{G}$ имеет в $\mathcal{N}_i$ конечную коразмерность и чистая часть $\vartheta_2(z)$ представляет собой сжимающую оператор-функцию в конечномерном пространстве, обладающую скалярным кратным. Поскольку в равенстве (23) левая часть $\vartheta(z)$ и сомножитель $\vartheta_2(z)$ обладают скалярными кратными, то и $\vartheta_1(z)$ обладает скалярным кратным. А именно $\vartheta_1(z)$ обладает скалярным кратным $\delta(z)$ и, следовательно, является внутренней оператор-функцией (см. [16; гл. 5]).

Учитывая, что $\sigma(L_c) \subset \mathbb{R}$, имеем $\sigma(T|_{\mathcal{H}_c}) \cap \mathbb{D} = \emptyset$ и, стало быть, $\sigma(T|_{\mathcal{G}}) \cap \mathbb{D} = \emptyset$; поэтому характеристическая функция $T|_{\mathcal{G}}$, совпадающая с чистой частью $\vartheta_1(z)$, обратима в $\mathbb{D}$. Таким образом, оператор-функция $\vartheta_1(z)$ обратима всюду в $\mathbb{D}$ и обладает скалярным кратным $\delta(z)$. Отсюда следует, что $\vartheta_1^{-1}(z)$ равномерно

ограничена и аналитична в $\mathbb{D}$ и, стало быть, $\vartheta_1(z)$ – внешняя. Оператор-функция, внутренняя и внешняя одновременно, является унитарной константой, что применительно к $\vartheta_1(z)$ возможно лишь в случае, когда $\mathcal{G} = \{0\}$.

4) Далее, согласно теореме 1 оператор Ω сплетает L и L_0 :

$$L\Omega = \Omega L_0, \quad \Omega D(L_0) \subset D(L_0) = D(L).$$

Поскольку $\Omega\mathcal{H} = \mathcal{H}_c$ и $\Omega D(L_0) \subset D(L_0)$, то $\Omega D(L_0) \subset D(L_0) \cap \mathcal{H}_c$. Покажем, что $\Omega D(L_0) = D(L_0) \cap \mathcal{H}_c$.

Отметим, что $R(\lambda)\mathcal{H}_c \subset \mathcal{H}_c$ и, следовательно, $U(t)\mathcal{H}_c \subset \mathcal{H}_c$. Ввиду этого для произвольных $t > 0$ и $\psi \in \mathcal{H}_c$ справедливо соотношение

$$\tilde{\Omega}\psi = U_0(-t)\tilde{\Omega}U(t)\psi$$

и, таким образом, $U_0(t)\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}U(t)$. Выполним предельный переход при $t \downarrow 0$ в равенстве

$$\tilde{\Omega} \frac{U(t) - I}{t} \psi = \frac{U_0(t) - I}{t} \tilde{\Omega} \psi,$$

где $\psi \in D(L_0) \cap \mathcal{H}_c$. Поскольку $L(D(L) \cap \mathcal{H}_c) \subset \mathcal{H}_c$, то предел слева существует и равен $i\tilde{\Omega}L\psi$. Одновременно существует предел справа

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{U_0(t) - I}{t} \tilde{\Omega} \psi = iL_0\tilde{\Omega}\psi,$$

причем $\tilde{\Omega}\psi \in D(L_0)$. Таким образом, $\tilde{\Omega}(D(L_0) \cap \mathcal{H}_c) \subset D(L_0)$ и, стало быть, $D(L_0) \cap \mathcal{H}_c \subset \Omega D(L_0)$.

В результате установлено совпадение $\Omega D(L_0) = D(L_0) \cap \mathcal{H}_c$. С учетом этого из сплетающего соотношения $L\Omega = \Omega L_0$ следует, что $L\psi = \Omega L_0\tilde{\Omega}\psi$ для произвольного $\psi \in D(L_0) \cap \mathcal{H}_c$, т.е. $L_c = \Omega L_0\tilde{\Omega}$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов. М.: ИЛ, 1960.
2. Боголюбов Н. Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, 1946.
3. Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса нейтронов // Труды МИАН. 1961. Т. 61. С. 1–158.
4. Черчиньяни К. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1978.
5. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
6. Шитов С. Б. Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ. М.: Атомиздат, 1973.
7. Ризтмайер Р. Принципы современной математической физики. М.: Мир, 1982.
8. Lehner J. The spectrum of the neutron transport operator for the infinite slab // J. Math. Mech. 1962. V. 11. №2. P. 173–181.
9. Lehner J., Wing G. M. On the spectrum of an unsymmetric operator arising in the transport theory of neutrons // Comm. Pure Appl. Math. 1955. V. 8. P. 217–234.
10. Lehner J., Wing G. M. Solution of the linearized Boltzmann transport equation for the slab geometry // Duke Math. J. 1956. V. 23. P. 125–142.
11. Куперин Ю. А., Набоко С. Н., Романов Р. В. Спектральный анализ односкоростного оператора переноса и функциональная модель // Функц. анализ и его прилож. 1999. Т. 33. №3. С. 47–58.

12. *Степин С. А.* Возмущение спектра и задача рассеяния в односкоростной теории переноса // Деп. в ВИНТИ. 07.02.2000. №285-В00. Москва, 2000.
13. *Kato T.* Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators // Math. Ann. 1966. V. 162. P. 258–279.
14. *Набоко С. Н.* Функциональная модель теории возмущений и ее приложения к теории рассеяния // Труды МИАН. 1980. Т. 147. С. 86–114.
15. *Степин С. А.* Возмущение спектра и волновые операторы в линейной теории переноса // УМН. 1999. Т. 54. №5. С. 175–176.
16. *Сёкефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
17. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 3. М.: Мир, 1982.
18. *Павлов Б. С.* Об условиях отделимости спектральных компонент диссипативного оператора // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39. №1. С. 123–148.
19. *Павлов Б. С.* Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шрёдингера и разложение по его собственным функциям // Матем. сб. 1977. Т. 120. №4. С. 511–536.
20. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. М.: ИЛ, 1963.
21. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
26.04.2000