Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Брудный, А. Л. Онищик, Треугольные когомологии де Рама компактных кэлеровых многообразий, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 2, 27–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 03:37:04

УДК 515.176

А. Ю. Брудный, А. Л. Онищик

Треугольные когомологии де Рама компактных кэлеровых многообразий

Изучаются когомологии де Рама $H_{DR}^1(M, G)$ гладкого многообразия M со значениями в группе Ли G . По определению это фактормножество множества плоских связностей в тривиальном гладком расслоении $M \times G$ по так называемой калибровочной эквивалентности. Рассматривается случай, когда M – компактное кэлерово многообразие, а G – разрешимая комплексная алгебраическая группа специального класса, который содержит борелевские подгруппы всех комплексных классических групп и, в частности, группу всех треугольных матриц. В этом случае дается описание множества $H_{DR}^1(M, G)$ в терминах когомологий многообразия M со значениями в (абелевых) пучках плоских сечений некоторых плоских расслоений на алгебры Ли со слоем $\mathfrak{g}$ (касательная алгебра группы G) или, что равносильно, в терминах гармонических форм на M , представляющих эти когомологии.

Библиография: 11 названий.

Введение

Работа посвящена изучению 1-когомологий де Рама $H_{DR}^1(M, G)$ гладкого многообразия M со значениями в группе Ли G . Если G неабелева, то $H_{DR}^1(M, G)$ не допускает естественной групповой структуры и обычно рассматривается как множество с отмеченной точкой. По определению это фактормножества плоских связностей в тривиальном главном расслоении $M \times G$ относительно так называемой калибровочной эквивалентности, причем отмеченной точкой является класс нулевой связности. В случае, когда G – линейная группа, речь идет о классификации вполне интегрируемых систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка на M с точностью до линейных (с функциональными коэффициентами) замен системы неизвестных функций.

Заметим, что множество 1-когомологий де Рама допускает две важные интерпретации. Во-первых, $H_{DR}^1(M, G)$ естественным образом вкладывается в множество 1-когомологий Чеха $H^1(M, G)$, причем образ интерпретируется как множество гладко (или топологически) тривиальных плоских главных расслоений с базой M и структурной группой G . В случае $G = \mathbb{R}$ это соответствие есть классический изоморфизм де Рама. Во-вторых, любая плоская связность определяет гомоморфизм голономии $\pi_1(M) \rightarrow G$, что приводит к инъективному отображению $H_{DR}^1(M, G) \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(M), G) / \text{Int } G$. Если G стягиваема (например, разрешима

Работа второго автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 98-01-00329).

и односвязна), то любое гладкое главное расслоение со структурной группой G тривиально и обе инъекции являются биекциями.

Мы рассматриваем случай, когда M — компактное кэлерово многообразие, а G — разрешимая комплексная линейная алгебраическая группа специального класса, содержащего борелевские подгруппы всех комплексных классических групп и, в частности, группу $T_n(\mathbb{C})$ всех невырожденных треугольных матриц порядка n . В этом случае мы даем описание множества $H_{DR}^1(M, G)$ в терминах когомологий многообразия M со значениями в (абелевых) пучках плоских сечений некоторых плоских расслоений на алгебры Ли со слоем $\mathfrak{g}$ (алгебра Ли группы G) или, что равносильно, в терминах гармонических форм на M , представляющих эти когомологии. Наш метод основан на использовании множества неабелевых когомологий Дольбо $H^{0,1}(M, G)$ многообразия M со значениями в G , которое определяется аналогично множеству когомологий де Рама, и существенно использует теорию Ходжа на компактном кэлеровом многообразии.

Исследование неабелевых когомологий де Рама и Дольбо имеет достаточно давнюю историю (см., в частности, работы [1]–[4], о связи которых с настоящей работой см. замечание 3.4). Основные результаты настоящей работы были получены в диссертации [5] первого автора в случае, когда $G = T_n(\mathbb{C})$. Отметим, что диссертация содержит приложения этих результатов к изучению фундаментальной группы компактного кэлерова многообразия (см. также [6]).

Работа делится на три параграфа. Первый из них содержит необходимые факты о неабелевых когомологиях де Рама и Дольбо. В частности, очень важна для дальнейшего описанная там техника подкручивания. Доказательства мы опускаем, отсылая читателя к [7], [8]. В §2 мы излагаем некоторые факты теории Ходжа для плоских векторных расслоений и применяем их к специальному случаю плоских расслоений, структурная группа которых есть группа треугольных матриц с унитарной диагональю. Параграф 3 содержит формулировки и доказательства основных результатов работы. Мы вводим в рассмотрение так называемое свойство Ходжа для разрешимых комплексных алгебраических групп. Лемма 3.1 дает метод для конструкции групп, обладающих этим свойством, а теорема 3.1 утверждает, что этот класс групп включает борелевские подгруппы редуктивных групп, все простые факторы которых являются классическими или имеют тип E_6, E_7 . Из того, что G обладает свойством Ходжа, вытекает, в частности, что естественное отображение $\Pi_{0,1}^*: H_{DR}^1(M, G) \rightarrow H^{0,1}(M, G)$ сюръективно, если M — компактное кэлерово многообразие. Теорема 3.2 описывает так называемые канонические представители классов когомологий де Рама в терминах гармонических форм со значениями в некоторых расслоениях на алгебры Ли. Окончательный результат об описании множества $H_{DR}^1(M, G)$ сформулирован в теореме 3.3. Последний пункт §3 содержит два дополнительных результата, которые доказываются так же, как теорема 3.3. Теорема 3.4 дает описание подкрученного варианта когомологий де Рама компактного кэлерова многообразия M со значениями в унипотентном радикале группы G , обладающей свойством Ходжа. В теореме 3.5 рассматривается ситуация, когда такая группа G является подгруппой некоторой алгебраической группы $\widehat{G}$. Мы описываем здесь фактормножество множества плоских связностей ω на $M \times \widehat{G}$ таких, что $\Pi_{0,1}\omega$ принимает свои значения в $\mathfrak{g}$, относительно калибровочной эквивалентности, определенной группой G .

§ 1. Когомологии де Рама и Дольбо со значениями в группе Ли

1.1. В этом пункте описывается нелинейный комплекс, который в классическом абелевом случае совпадает с начальной частью обычного комплекса де Рама гладкого многообразия. Мы следуем работам [7; § 4 и § 5] и [8; § 2].

Введем сначала некоторые обозначения. Пусть X – топологическое пространство и $\mathcal{F}$ – пучок (не обязательно абелевых) групп на X . Тогда определяется группа 0-когомологий $H^0(X, \mathcal{F})$, совпадающая с группой глобальных сечений $\Gamma(X, \mathcal{F})$. Определяется также множество 1-когомологий Чеха $H^1(X, \mathcal{F})$, которое в общем случае не является группой, а лишь множеством с отмеченной точкой. Пусть $\mathcal{U}$ – открытое покрытие пространства X . Обычным образом определяются группы p -коцепей $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, $p \geq 0$, и множество 1-коциклов

$$Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \{z \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : z_{ij}z_{jk} = z_{ik} \text{ в } U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset\}.$$

Имеется действие ρ группы $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ на $C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, заданное формулой

$$(\rho(a)(c))_{ij} = c_{ij}c_j^{-1}.$$

Подмножество $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ инвариантно относительно ρ . Образуя фактормножество $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) / \rho(C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$ и переходя к пределу по всем открытым покрытиям $\mathcal{U}$, получаем множество 1-когомологий $H^1(X, \mathcal{F})$. Его отмеченная точка ε есть класс единичного коцикла $e \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$.

Пусть теперь G – группа Ли. Для любого гладкого многообразия M обозначим через $\mathcal{F}_G$ пучок ростков гладких G -значных функций на M . В частности, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ есть структурный пучок многообразия M . Ясно, что $\mathcal{F}_G$ – пучок групп. Группа 0-когомологий $H^0(M, \mathcal{F}_G)$ – это группа F_G глобальных гладких функций $M \rightarrow G$, а множество 1-когомологий $H^1(M, \mathcal{F}_G)$ обычно отождествляется с множеством всех гладких главных расслоений с базой M и структурной группой G (рассматриваемых с точностью до изоморфизма). А именно, если $\mathcal{U} = (U_i)$ – открытое покрытие многообразия M , то любой $z \in Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}_G)$ определяет главное расслоение с функциями перехода z_{ij} , которое получается из $M \times G$ путем подкручивания с помощью z ; это и есть расслоение, соответствующее классу когомологий $\zeta \in H^1(M, \mathcal{F}_G)$ коцикла z . Единичный элемент $\varepsilon \in H^1(M, \mathcal{F}_G)$ соответствует тривиальному расслоению $M \times G$.

Очевидно, постоянный пучок G на M можно отождествить с подпучком в $\mathcal{F}_G$, состоящим из ростков *плоских* (т.е. локально постоянных) функций. Далее, группа $H^0(M, G)$ есть группа всех плоских функций $M \rightarrow G$. Множество $H^1(M, G)$ будет интерпретироваться как множество *плоских* главных расслоений с базой M и структурной группой G , т.е. главных расслоений с локально постоянными функциями перехода, рассматриваемых с точностью до соответствующего изоморфизма.

Пусть $\mathfrak{g}$ – касательная алгебра Ли группы G . Рассмотрим обычный $\mathfrak{g}$ -значный комплекс де Рама $(A_{\mathfrak{g}}, d)$, где $A_{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{p \geq 0} A_{\mathfrak{g}}^p$ – градуированное векторное пространство $\mathfrak{g}$ -значных гладких форм на M . Заметим, что $A_{\mathfrak{g}}$ есть градуированная супералгебра Ли относительно операции $[\cdot, \cdot]$, индуцированной коммутатором в $\mathfrak{g}$. При этом внешний дифференциал d является дифференцированием степени 1.

Чтобы получить искомый нелинейный комплекс, обозначим через $\varpi \in A_{\mathfrak{g}}^1$ каноническую 1-форму на G , сопоставляющую касательному вектору v в точке $g \in G$ вектор $d_g r_g^{-1}(v) \in \mathfrak{g}$, где $r_g: x \mapsto xg$ — правый сдвиг, отвечающий элементу g . Рассмотрим тройку групп $R_G = \{R_G^0, R_G^1, R_G^2\} = \{F_G, A_{\mathfrak{g}}^1, A_{\mathfrak{g}}^2\}$ и определим операторы кограницы $\delta_0: R_G^0 \rightarrow R_G^1$ и $\delta_1: R_G^1 \rightarrow R_G^2$ формулами

$$\delta_0(g) = g^*(\varpi), \quad g \in F_G, \quad (1.1)$$

$$\delta_1(\alpha) = d\alpha - \frac{1}{2}[\alpha, \alpha], \quad \alpha \in A_{\mathfrak{g}}^1. \quad (1.2)$$

Заметим, что группа $R_G^0 = F_G$ действует на градуированной алгебре $A_{\mathfrak{g}}$ при помощи автоморфизмов, индуцированных присоединенным представлением Ad группы G . Обозначая это действие через Ad , имеем

$$d(\text{Ad } g(\alpha)) = \text{Ad } g(d\alpha) + [\delta_0(g), \text{Ad } g(\alpha)]. \quad (1.3)$$

Легко проверить, что $\delta_0: F_G \rightarrow A_{\mathfrak{g}}^1$ есть *скрещенный гомоморфизм* относительно Ad , т.е.

$$\delta_0(gh) = \delta_0(g) + \text{Ad } g(\delta_0(h)). \quad (1.4)$$

Поэтому возникает следующее аффинное действие группы R_G^0 на $R_G^1 = A_{\mathfrak{g}}^1$ при помощи так называемых *калибровочных преобразований*:

$$\rho(g)(\alpha) = \text{Ad } g(\alpha) + \delta_0(g). \quad (1.5)$$

В дальнейшем G будет у нас подгруппой Ли линейной группы $\text{GL}_m(\mathbb{R})$. В этом случае операторы кограницы δ_p и действия Ad и ρ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_0(g) &= (dg)g^{-1}, \\ \delta_1(\alpha) &= d\alpha - \alpha \wedge \alpha, \\ \text{Ad } g(\alpha) &= g\alpha g^{-1}, \\ \rho(g)(\alpha) &= g\alpha g^{-1} + (dg)g^{-1}. \end{aligned}$$

Используя (1.3), легко проверить следующее соотношение:

$$\delta_1 \circ \rho(g) = \text{Ad } g \circ \delta_1. \quad (1.6)$$

Это значит, что тройка R_G вместе с отображениями δ_p , $p = 0, 1$, и действиями Ad и ρ является *неабелевым коцепным комплексом* в смысле [7], [8]. Он называется *комплексом де Рама со значениями в G* .

Определим множества коциклов

$$Z^p(R_G) = \text{Ker } \delta_p = \delta_p^{-1}(0), \quad p = 0, 1.$$

Тогда $Z^0(R_G)$ – подгруппа в F_G . Далее, подмножество $Z^1(R_G)$ инвариантно относительно ρ в силу (1.6). Определим *когомологии де Рама многообразия M со значениями в G* (или когомологии комплекса R_G) формулами

$$\begin{aligned} H_{DR}^0(M, G) &= H^0(R_G) = Z^0(R_G), \\ H_{DR}^1(M, G) &= H^1(R_G) = Z^1(R_G)/\rho(F_G). \end{aligned}$$

Имеем $H_{DR}^0(M, G) = H^0(M, G)$. Если группа G неабелева, то множество когомологий $H_{DR}^1(M, G)$ не допускает естественной групповой структуры. Мы рассматриваем его как множество с отмеченной точкой $\varepsilon = \rho(F_G)(0)$. Класс когомологий коцикла $\omega \in Z^1(R_G)$ будет обозначаться через $[\omega]$.

Между 1-когомологиями де Рама и Чеха имеется следующее соотношение (см. [7; §5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Имеем следующую точную последовательность множеств с отмеченными точками:*

$$e \rightarrow H_{DR}^1(M, G) \xrightarrow{\mu} H^1(M, G) \xrightarrow{i^*} H^1(M, \mathcal{F}_G). \quad (1.7)$$

Здесь i^* определяется вложением $i: G \rightarrow \mathcal{F}_G$, а μ действует следующим образом. Для любого коцикла $\omega \in Z^1(R_G)$ выберем такое открытое покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)$ многообразия M , что $\omega = \delta_0(c_i)$ в каждом U_i для некоторых гладких $c_i: U_i \rightarrow G$. Тогда $z_{ij} = c_i^{-1}c_j$ составляют коцикл $z = (z_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, G)$ и μ отображает $[\omega]$ в класс когомологий коцикла z .

Точность последовательности (1.7) означает, что μ биективно отображает множество $H_{DR}^1(M, G)$ на подмножество в $H^1(M, G)$, состоящее из плоских расслоений, тривиальных как гладкие расслоения. При этом $\mu([0]) = \varepsilon$.

Если G абелева, то (1.7) – точная последовательность групп и их гомоморфизмов. В частности, для $G = \mathbb{R}$ комплекс R_G есть часть классического комплекса де Рама и $\mu: H_{DR}^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow H^1(M, \mathbb{R})$ есть изоморфизм де Рама для 1-когомологий.

Аналогичным образом определяется неабелев аналог классического комплекса Дольбо (здесь мы следуем [7; §6]).

Пусть G – комплексная группа Ли. Для любого комплексного многообразия M обозначим через $\mathcal{O}_G$ пучок ростков G -значных голоморфных функций на M . В частности, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ есть структурный пучок многообразия M . Тогда $H^0(M, \mathcal{O}_G)$ – это группа всех G -значных голоморфных функций на M , а $H^1(M, \mathcal{O}_G)$ можно интерпретировать как множество всех голоморфных главных расслоений с базой M и структурной группой G , которые рассматриваются с точностью до голоморфных изоморфизмов, оставляющих на месте каждую точку из M . Единичный класс ε соответствует тривиальному расслоению $M \times G$.

В этом случае $A_{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{p,q \geq 0} A_{\mathfrak{g}}^{p,q}$ есть биградуированная комплексная супералгебра Ли, где $A_{\mathfrak{g}}^{p,q}$ – пространство форм типа (p, q) . Пусть $\Pi_{p,q}: A_{\mathfrak{g}}^{p+q} \rightarrow A_{\mathfrak{g}}^{p,q}$ – естественная проекция. Как обычно, обозначим

$$\partial\alpha = \Pi_{p+1,q}d\alpha, \quad \bar{\partial}\alpha = \Pi_{p,q+1}d\alpha, \quad \alpha \in A_{\mathfrak{g}}^{p,q}.$$

Тогда

$$d = \partial + \bar{\partial}, \quad \partial^2 = \bar{\partial}^2 = [\partial, \bar{\partial}] = 0.$$

Здесь ∂ и $\bar{\partial}$ являются операторами дифференцирования бистепени $(1, 0)$ и $(0, 1)$ соответственно. Мы получили биградуированные комплексы Дольбо $(A_{\mathfrak{g}}, \bar{\partial})$ и $(A_{\mathfrak{g}}, \partial)$. Обозначая через $\Omega_{\mathfrak{g}}^p$ и $\bar{\Omega}_{\mathfrak{g}}^p$ соответственно пучки голоморфных и анти-голоморфных p -форм на M , имеем классические изоморфизмы Дольбо

$$H^{p,q}(M, \mathfrak{g}) \stackrel{\text{def}}{=} H^q(A_{\mathfrak{g}}^{p,*}, \bar{\partial}) \simeq H^q(M, \Omega_{\mathfrak{g}}^p), \quad (1.8)$$

$$\bar{H}^{p,q}(M, \mathfrak{g}) \stackrel{\text{def}}{=} H^p(A_{\mathfrak{g}}^{*,q}, \partial) \simeq H^p(M, \bar{\Omega}_{\mathfrak{g}}^q). \quad (1.9)$$

Рассмотрим теперь тройку групп $\bar{R}_G = \{\bar{R}_G^0, \bar{R}_G^1, \bar{R}_G^2\} = \{F_G, A_{\mathfrak{g}}^{0,1}, A_{\mathfrak{g}}^{0,2}\}$ и определим операторы кограницы $\bar{\delta}_0: \bar{R}_G^0 \rightarrow \bar{R}_G^1$, $\bar{\delta}_1: \bar{R}_G^1 \rightarrow \bar{R}_G^2$ и действие $\bar{\rho}$ группы $\bar{R}_G^0$ на $\bar{R}_G^1$ формулами

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_0(g) &= \Pi_{0,1} g^*(\varpi), \\ \bar{\delta}_1(\alpha) &= \bar{\partial}\alpha - \frac{1}{2}[\alpha, \alpha], \\ \bar{\rho}(g)(\alpha) &= \text{Ad } g(\alpha) + \bar{\delta}_0(g). \end{aligned}$$

Мы получаем неабелев коцепной комплекс в смысле [7], [8], называемый *комплексом Дольбо со значениями в G* . Если G – подгруппа Ли в $\text{GL}_m(\mathbb{C})$, то

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_0(g) &= (\bar{\partial}g)g^{-1}, \\ \bar{\delta}_1(\alpha) &= \bar{\partial}\alpha - \alpha \wedge \alpha, \\ \bar{\rho}(g)(\alpha) &= g\alpha g^{-1} + (\bar{\partial}g)g^{-1}. \end{aligned}$$

Множества коциклов этого комплекса определяются формулами

$$Z^p(\bar{R}_G) = \text{Ker } \bar{\delta}_p = \bar{\delta}_p^{-1}(0), \quad p = 0, 1.$$

Тогда $Z^0(\bar{R}_G)$ есть подгруппа в F_G , а подмножество $Z^1(\bar{R}_G)$ инвариантно относительно $\bar{\rho}$. Определим *когомологии Дольбо со значениями в G* (или когомологии комплекса $\bar{R}_G$) формулами

$$\begin{aligned} H^0(\bar{R}_G) &= Z^0(\bar{R}_G), \\ H^{0,1}(M, G) &= H^1(\bar{R}_G) = Z^1(\bar{R}_G)/\bar{\rho}(F_G). \end{aligned}$$

Имеем следующее соотношение между 1-когомологиями Дольбо и Чеха (см. [7; §6]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. *Имеем следующую точную последовательность множеств с отмеченными точками:*

$$e \rightarrow H^{0,1}(M, G) \xrightarrow{\bar{\mu}} H^1(M, \mathcal{O}_G) \xrightarrow{i^*} H^1(M, \mathcal{F}_G). \quad (1.10)$$

Здесь i^* определяется вложением $i: \mathcal{O}_G \rightarrow \mathcal{F}_G$, а $\bar{\mu}$ действует следующим образом. Для любого коцикла $\omega \in Z^1(\bar{R}_G)$ выберем такое открытое покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)$ многообразия M , что $\omega = \bar{\delta}_0(c_i)$ в каждом U_i для некоторых гладких $c_i: U_i \rightarrow G$. Тогда $z_{ij} = c_i^{-1}c_j$ составляют коцикл $z = (z_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_G)$ и $\bar{\mu}$ отображает класс когомологий Дольбо $[\omega]$ формы ω в класс когомологий коцикла z .

Это означает, что $\bar{\mu}$ биективно отображает множество $H^{0,1}(M, G)$ на подмножество в $H^1(M, \mathcal{O}_G)$, состоящее из голоморфных расслоений, тривиальных как гладкие расслоения. При этом $\bar{\mu}([0]) = \varepsilon$.

Если G абелева, то (1.10) – точная последовательность групп и их гомоморфизмов. В частности, для $G = \mathbb{C}$ комплекс $\bar{R}_G$ есть часть классического комплекса Дольбо и $\bar{\mu}: H^{0,1}(M, \mathbb{C}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{O})$ есть изоморфизм Дольбо для $(0,1)$ -когомологий.

Конструкции комплексов де Рама и Дольбо определяют ковариантные функторы $G \mapsto R_G$ и $G \mapsto \bar{R}_G$ из категории вещественных (соответственно комплексных) групп Ли в категорию коцепных комплексов (см. [8]). В частности, любому гладкому гомоморфизму групп Ли $f: G \rightarrow Q$ отвечают гомоморфизм групп $f^*: H_{DR}^0(M, G) \rightarrow H_{DR}^0(M, Q)$ и гомоморфизм множеств с отмеченными точками $f^*: H_{DR}^1(M, G) \rightarrow H_{DR}^1(M, Q)$. Аналогично, любому голоморфному гомоморфизму комплексных групп Ли $f: G \rightarrow Q$ отвечает гомоморфизм множеств с отмеченными точками $f^*: H^{0,1}(M, G) \rightarrow H^{0,1}(M, Q)$.

1.2. Если группа G неабелева, то i^* в (1.7) и (1.10) не является гомоморфизмом групп, и потому слои этого отображения нельзя описать при помощи его ядра. Описание этих слоев дается с помощью подкрученных вариантов нелинейных комплексов де Рама и Дольбо.

Пусть $\mathcal{S}$ – пучок групп на X и $\mathcal{Aut}\mathcal{S}$ – пучок ростков автоморфизмов этого пучка. Выберем открытое покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)$ пространства X и фиксируем коцикл $z \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{Aut}\mathcal{S})$. Тогда мы можем подкрутить $\mathcal{S}$ при помощи z , получив при этом новый пучок групп $\mathcal{S}^z$ на X . Для этого мы склеим между собой любые два пучка $\mathcal{S} \mid U_i$ и $\mathcal{S} \mid U_j$ над $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, отождествляя $a_i \in (\mathcal{S} \mid U_i)_x$ с $a_j \in (\mathcal{S} \mid U_j)_x$, $x \in U_i \cap U_j$, при условии $a_i = z_{ij}(a_j)$. Подкрученный пучок $\mathcal{S}^z$ зависит с точностью до изоморфизмов только от класса когомологий $\zeta \in H^1(X, \mathcal{Aut}\mathcal{S})$, определяемого коциклом z . Например, если z когомологичен коциклу e , т.е. $z_{ij} = c_i c_j^{-1}$ для некоторой 0-коцепи $c \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{Aut}\mathcal{S})$, то из равенства $a_i = z_{ij}(a_j)$ следует, что $c_i^{-1}(a_i) = c_j^{-1}(a_j)$. Значит, соответствие $(a_i) \mapsto (c_i^{-1}(a_i))$ есть изоморфизм пучка $\mathcal{S}^z$ на $\mathcal{S}$. Заметим также, что любое сечение $s \in \Gamma(U, \mathcal{S}^z)$ задается 0-коцепью (s_i) , где $s_i \in \Gamma(U \cap U_i, \mathcal{S})$, удовлетворяющей условиям $s_i = z_{ij}(s_j)$ над $U \cap U_i \cap U_j \neq \emptyset$.

Та же конструкция применима к пучкам колец, векторных пространств и т.д. Аналогичным образом производится подкручивание расслоения при помощи коцикла со значениями в пучке его автоморфизмов. Рассмотрим некоторые частные случаи этой конструкции, важные для дальнейшего.

Пусть G – подгруппа Ли в $GL_m(\mathbb{R})$ и M – гладкое многообразие. Для некоторого открытого покрытия $\mathfrak{U} = (U_i)$ многообразия M фиксируем коцикл $z \in Z^1(\mathfrak{U}, G)$. Очевидно, z определяет плоское векторное расслоение $\mathbf{V} = \mathbf{V}(z)$ ранга m над M со структурной группой G , а именно расслоение со слоем $\mathbb{R}^m$ и плоскими функциями перехода z_{ij} , которое получается из $M \times \mathbb{R}^m$ путем подкручивания при помощи коцикла z . Обозначим через $A_{\mathbf{V}}^p$, $p \geq 0$, пространство гладких $\mathbf{V}$ -значных p -форм. Такая форма α задается по определению набором $\mathbb{R}^m$ -значных p -форм α_i в U_i , удовлетворяющим условиям $\alpha_i = z_{ij}(\alpha_j)$ над $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, т.е. является сечением пучка $\mathbb{R}^m$ -значных p -форм на M , подкрученного при помощи коцикла z . Очевидно, формула $(d\alpha)_i = d\alpha_i$ корректно определяет оператор $d: A_{\mathbf{V}}^p \rightarrow A_{\mathbf{V}}^{p+1}$, причем пара $(A_{\mathbf{V}}, d)$, где $A_{\mathbf{V}} = \bigoplus_{p \geq 0} A_{\mathbf{V}}^p$, является коцепным комплексом. Имеем $H^p(A_{\mathbf{V}}, d) \simeq H^p(M, \mathcal{C}_{\mathbf{V}})$, где $\mathcal{C}_{\mathbf{V}}$ – пучок ростков плоских сечений расслоения $\mathbf{V}$.

Пусть теперь G – подгруппа Ли в $GL_m(\mathbb{C})$, M – комплексное многообразие и $z \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_{GL_m(\mathbb{C})})$, причем значения функций z_{ij} принадлежат G . Тогда определяется голоморфное векторное расслоение $\mathbf{V} = \mathbf{V}(z)$ ранга m над M со структурной группой G . С ним связан биградуированный комплекс Дольбо $(A_{\mathbf{V}}, \bar{\partial})$, причем имеют место изоморфизмы Дольбо

$$H^{p,q}(M, \mathbf{V}) \stackrel{\text{def}}{=} H^q(A_{\mathbf{V}}^{p,*}, \bar{\partial}) \simeq H^q(M, \Omega_{\mathbf{V}}^p), \quad (1.11)$$

где $\Omega_{\mathbf{V}}^p$ – пучок $\mathbf{V}$ -значных голоморфных p -форм на M . В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда $z \in Z^1(\mathfrak{U}, G)$, т.е. когда расслоение $\mathbf{V}$ является плоским. В этом случае определен также биградуированный комплекс $(A_{\mathbf{V}}, \partial)$. При этом

$$\overline{H}^{p,q}(M, \mathbf{V}) \stackrel{\text{def}}{=} H^p(A_{\mathbf{V}}^{*,q}, \partial) \simeq H^p(M, \overline{\Omega}_{\mathbf{V}}^q), \quad (1.12)$$

где $\overline{\Omega}_{\mathbf{V}}^p$ – пучок $\mathbf{V}$ -значных антиголоморфных p -форм на M .

Чтобы определить подкрученный комплекс де Рама со значениями в группе Ли G , предположим, что задан коцикл $z \in Z^1(\mathfrak{U}, \text{Aut } G)$, где $\text{Aut } G$ – группа автоморфизмов группы Ли G . Рассмотрим подкрученный пучок групп G^z . Его можно реализовать как пучок $\mathcal{C}_E$ плоских сечений плоского расслоения на группы E , которое получается из $M \times G$ путем подкручивания с помощью коцикла z . Любой автоморфизм группы Ли G индуцирует автоморфизм пучка $\mathcal{F}_G$, и поэтому мы получаем подкрученный пучок $(\mathcal{F}_G)^z$, совпадающий с пучком $\mathcal{F}_E$ гладких сечений расслоения E . Мы имеем также коцикл d_z автоморфизмов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, приводящий к плоскому расслоению на алгебры Ли $\mathfrak{e}$ со слоем $\mathfrak{g}$, которое получается из $M \times \mathfrak{g}$ путем подкручивания. Рассмотрим комплекс де Рама $(A_{\mathfrak{e}}, d)$. Подкрученный нелинейный комплекс определяется как тройка $R_E = \{R_E^0, R_E^1, R_E^2\}$, где $R_E^0 = F_E = \Gamma(M, \mathcal{F}_E)$, $R_E^p = A_{\mathfrak{e}}^p$, $p = 1, 2$. Кограничные операторы и действия

группы F_E корректно определяются формулами

$$\begin{aligned} (\delta_0(f))_i &= (\delta_0(f_i)) & \text{для } f = (f_i) \in F_E, \\ (\delta_1(\alpha))_i &= (\delta_1(\alpha_i)) & \text{для } \alpha = (\alpha_i) \in A_\epsilon^1, \\ (\text{Ad } f(\alpha))_i &= (\text{Ad } f_i(\alpha_i)) & \text{для } \alpha = (\alpha_i) \in A_\epsilon^p, \\ (\rho(f)(\alpha))_i &= (\rho(f_i)(\alpha_i)) & \text{для } \alpha = (\alpha_i) \in A_\epsilon^1. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Как и выше, мы получаем неабелев коцепной комплекс. Определяются группа 0-когомологий $H_{DR}^0(M, E) = H^0(R_E) = Z^0(R_E)$ и множество 1-когомологий $H_{DR}^1(M, E) = H^1(R_E) = Z^1(R_E)/\rho(F_E)$. Группа $H_{DR}^0(M, E)$ совпадает с группой $H^0(M, \mathcal{C}_E)$ плоских сечений расслоения E . Обобщая (1.7), получаем следующую точную последовательность множеств с отмеченными точками:

$$e \rightarrow H_{DR}^1(M, E) \xrightarrow{\mu} H^1(M, \mathcal{C}_E) \xrightarrow{i^*} H^1(M, \mathcal{F}_G). \quad (1.14)$$

Будем обозначать через $\text{Int } h$ внутренний автоморфизм $x \mapsto h x h^{-1}$ группы H , определенный элементом $h \in H$. Предположим, что $\mathfrak{z} = \text{Int } z$, т.е. $\mathfrak{z}_{ij} = \text{Int } z_{ij}$, где $z = (z_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, G)$. Обозначим через P плоское главное расслоение со структурной группой G над M , соответствующее коциклу z . Тогда $E = \text{Int } P$ есть расслоение на группы, ассоциированное с P при помощи действия Int группы G на себе внутренними автоморфизмами, а $\epsilon = \text{Ad } P$ – расслоение на алгебры Ли, ассоциированное с P при помощи присоединенного представления Ad группы G на $\mathfrak{g}$. Векторное пространство $R_{\text{Int } P}^1 = A_{\text{Ad } P}^1$ можно интерпретировать как пространство связностей в P (рассматриваемое как гладкое главное расслоение), а $\delta_1(\alpha) \in R_{\text{Int } P}^2 = A_{\text{Ad } P}^2$ – как кривизну связности α , так что $Z^1(R_{\text{Int } P})$ отождествляется с множеством связностей нулевой кривизны (или *плоских* связностей). Далее, $R_{\text{Int } P}^0 = F_{\text{Int } P}$ отождествляется с группой гладких автоморфизмов главного расслоения P (индуцирующих тождественное преобразование базы M), а ρ – с действием этой группы на $A_{\text{Ad } P}^1$ при помощи калибровочных преобразований. По определению $H^1(R_{\text{Int } P}) = H_{DR}^1(M, \text{Int } P)$ есть фактормножество множества $Z^1(R_{\text{Int } P})$ по этому действию, а $H^0(R_{\text{Int } P}) = H^0(M, \mathcal{C}_{\text{Int } P})$ есть группа плоских автоморфизмов расслоения P .

Предположим, что $G \subset \text{GL}_n(\mathbb{C})$ – подгруппа Ли в $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ или $\text{GL}_n(\mathbb{C})$. Тогда $E = \text{Int } P$ можно рассматривать как подрасслоение плоского векторного расслоения $\text{End } \mathbf{V}(z)$, соответствующего коциклу $\text{Int } z = \text{Ad } z$. Группа F_E совпадает с некоторой подгруппой группы $\text{Aut } \mathbf{V}(z)$ автоморфизмов векторного расслоения $\mathbf{V}(z)$.

Рассмотрим теперь специальный случай, когда P тривиально как гладкое расслоение, т.е. когда класс когомологий ζ коцикла z лежит в $\text{Im } \mu$ (см. предложение 1.1). Мы можем считать, что $z_{ij} = c_i^{-1} c_j$, где $c_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F}_G)$. Тогда $\gamma = \delta_0(c_i)$ – это корректно определенная форма из $Z^1(R_G)$, причем $[\gamma]$ удовлетворяет условию $\mu([\gamma]) = \zeta$. Коцепь (c_i) определяет изоморфизм групп $t: R_E^0 \rightarrow R_G^0 = F_G$, заданный формулой

$$t((g_i)) = c_i g_i c_i^{-1} \quad \text{в } U_i. \quad (1.15)$$

Аналогично, имеем изоморфизм градуированных супералгебр Ли $\tau: A_{\mathfrak{e}} \rightarrow A_{\mathfrak{g}}$, заданный на формах степени p формулой

$$\tau_p((\alpha_i)) = \text{Ad } c_i(\alpha_i) \text{ в } U_i, \quad (\alpha_i) \in A_{\mathfrak{e}}^p. \quad (1.16)$$

Он не является изоморфизмом комплексов де Рама. Точнее, из (1.3) видно, что

$$\tau \circ d = (d - \text{ad } \gamma) \circ \tau,$$

где $\text{ad } \gamma: \alpha \mapsto [\gamma, \alpha]$ — присоединенный оператор в $A_{\mathfrak{g}}$, связанный с γ . Зададим теперь отображение $r_\gamma: A_{\mathfrak{e}}^1 \rightarrow A_{\mathfrak{g}}^1$ формулой

$$r_\gamma((\alpha_i)) = \tau_1(\alpha_i) + \gamma = \text{Ad } c_i(\alpha_i) + \gamma = \rho(c_i)(\alpha_i). \quad (1.17)$$

Очевидно, это корректно определенное биективное аффинное отображение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Пусть P тривиально как гладкое расслоение. Тогда в обозначениях, введенных в (1.15), (1.16), (1.17), справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \delta_1 \circ r_\gamma &= \tau_2 \circ \delta_1, \\ r_\gamma \circ \rho(g) &= \rho(t(g)) \circ r_\gamma, \quad g \in F_E. \end{aligned}$$

Таким образом, r_γ отображает $Z^1(R_E)$ на $Z^1(R_G)$ и индуцирует биекцию $r_\gamma^*: H_{DR}^1(M, E) \rightarrow H_{DR}^1(M, G)$, переводящую ε в $[\gamma]$.

Доказательство — непосредственная проверка. Это утверждение следует также из предложения 1.5 работы [8].

Определим теперь подкрученный вариант комплекса Дольбо. Пусть M — комплексное многообразие и G — комплексная группа Ли. Обозначим через $\text{Aut}_h G$ группу голоморфных автоморфизмов группы G и выберем $\mathfrak{z} \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}_{\text{Aut}_h G})$. Очевидно, пучок групп $\mathcal{O}_{\text{Aut}_h G}$ действует на $\mathcal{O}_G$ и $\mathcal{F}_G$. Применяя подкручивание при помощи коцикла $\mathfrak{z}$, получаем голоморфное расслоение на группы E , а также пучки $\mathcal{O}_E = (\mathcal{O}_G)^{\mathfrak{z}}$ и $\mathcal{F}_E = (\mathcal{F}_G)^{\mathfrak{z}}$ соответственно голоморфных и гладких сечений расслоения E . Коцикл $d\mathfrak{z}$ приводит к голоморфному расслоению $\mathfrak{e}$ на алгебры Ли со слоем $\mathfrak{g}$.

Соответствующий подкрученный вариант комплекса Дольбо $\overline{R}_G$ имеет вид $\overline{R}_E = \{\overline{R}_E^0, \overline{R}_E^1, \overline{R}_E^2\}$, где $\overline{R}_E^0 = F_E$, $\overline{R}_E^p = A_{\mathfrak{e}}^{0,p}$, $p = 1, 2$. Операторы кограницы и действия группы F_E определяются формулами, аналогичными (1.13). Группа 0-когомологий этого комплекса — это группа $\Gamma(M, \mathcal{O}_E)$ всех голоморфных сечений расслоения E ; множество 1-когомологий обозначается через $H^{0,1}(M, E)$. Рассмотрим случай, когда $\mathfrak{z} = \text{Int } z$, где $z = (z_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_G)$. Обозначим через P голоморфное главное расслоение над M , соответствующее z . Тогда $E = \text{Int } P$ есть ассоциированное с P расслоение на группы, а $\mathfrak{e} = \text{Ad } P$ — ассоциированное расслоение на алгебры Ли.

Пусть теперь P тривиально как гладкое расслоение, т.е. $z_{ij} = c_i^{-1}c_j$, где $c_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{F}_G)$. Тогда $\gamma = \overline{\delta}_0(c_i)$ — корректно определенная форма из $Z^1(\overline{R}_G)$, причем класс $[\gamma]$ удовлетворяет условию $\overline{\mu}([\gamma]) = \zeta$, где $\zeta \in H^1(M, \mathcal{O}_G)$ — класс

когомологий коцикла z . Как и в плоском случае, мы имеем изоморфизм групп $t: F_E \rightarrow F_G$, заданный формулой (1.15), и изоморфизм биградуированных супералгебр Ли $\tau: A_{\mathfrak{e}} \rightarrow A_{\mathfrak{g}}$, заданный формулой (1.16). При этом

$$\tau \circ \bar{\partial} = (\bar{\partial} - \text{ad } \gamma) \circ \tau.$$

Определим также отображение $\bar{\tau}_\gamma: A_{\mathfrak{e}}^{0,1} \rightarrow A_{\mathfrak{g}}^{0,1}$ формулой

$$\bar{\tau}_\gamma((\alpha_i)) = \tau_1(\alpha_i) + \gamma = \text{Ad } c_i(\alpha_i) + \gamma = \bar{\rho}(c_i)(\alpha_i). \quad (1.18)$$

Легко проверяется следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Пусть P тривиально как гладкое расслоение. Тогда имеют место следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_1 \circ \bar{\tau}_\gamma &= \tau_2 \circ \bar{\delta}_1, \\ \bar{\tau}_\gamma \circ \bar{\rho}(g) &= \bar{\rho}(t(g)) \circ \bar{\tau}_\gamma, \quad g \in \bar{R}_E^0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\bar{\tau}_\gamma$ отображает $Z^1(\bar{R}_E)$ на $Z^1(\bar{R}_G)$ и индуцирует биекцию $\bar{\tau}_\gamma^*: H^{0,1}(M, E) \rightarrow H^{0,1}(M, G)$, переводящую ε в $[\gamma]$.

В дальнейшем мы обычно будем рассматривать случай, когда E плоско, т.е. когда соответствующий коцикл z принадлежит $Z^1(\mathfrak{U}, \text{Aut}_h G)$.

1.3. Между комплексами де Рама и Дольбо со значениями в одной и той же комплексной группе Ли G имеется важное соотношение. Оно возникает благодаря наличию естественного вложения пучков $\iota_G: G \rightarrow \mathcal{O}_G$. Легко проверить, что тройка $\{\text{id}, \Pi_{0,1}, \Pi_{0,2}\}$ является гомоморфизмом комплекса де Рама в комплекс Дольбо. Это приводит к следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccccc} H_{DR}^1(M, G) & \xrightarrow{\mu} & H^1(M, G) & \xrightarrow{i^*} & H^1(M, \mathcal{F}_G) \\ \Pi_{0,1}^* \downarrow & & \downarrow \iota_G^* & & \parallel \\ H^{0,1}(M, G) & \xrightarrow{\bar{\mu}} & H^1(M, \mathcal{O}_G) & \xrightarrow{i^*} & H^1(M, \mathcal{O}_G) \end{array}, \quad (1.19)$$

где $\Pi_{0,1}^*$ индуцируется проекцией $\Pi_{0,1}$.

В более общей ситуации предположим, что мы имеем плоское расслоение на группы E , соответствующее коциклу $z \in Z^1(\mathfrak{U}, \text{Aut}_h G)$. Рассматривая E как голоморфное расслоение на группы Ли, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H_{DR}^1(M, E) & \xrightarrow{\mu} & H^1(M, \mathcal{C}_E) & \xrightarrow{i^*} & H^1(M, \mathcal{E}) \\ \Pi_{0,1}^* \downarrow & & \downarrow \iota_E^* & & \parallel \\ H^{0,1}(M, E) & \xrightarrow{\bar{\mu}} & H^1(M, \mathcal{O}_E) & \xrightarrow{i^*} & H^1(M, \mathcal{E}) \end{array}, \quad (1.20)$$

где отображение $\Pi_{0,1}^*$ индуцируется проекцией $\Pi_{0,1}$, а ι_E^* — естественным вложением $\iota_E: \mathcal{C}_E \rightarrow \mathcal{O}_E$.

Заметим также, что для любого $\gamma \in Z^1(R_G)$ следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} A_{\mathfrak{e}}^1 & \xrightarrow{r_\gamma} & A_{\mathfrak{g}}^1 \\ \Pi_{0,1} \downarrow & & \downarrow \Pi_{0,1} \\ A_{\mathfrak{e}}^{0,1} & \xrightarrow{\overline{r}_\chi} & A_{\mathfrak{g}}^{0,1} \end{array} . \quad (1.21)$$

Здесь $\mathfrak{e}$ – плоское расслоение на алгебры Ли, связанное с формой γ , и $\chi = \Pi_{0,1}\gamma$.

Рассмотрим теперь пример абелевой комплексной группы Ли $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times$, который будет полезен в дальнейшем. Заметим, что $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ содержит компактную подгруппу $U_1 = \{c \in \mathbb{C} : |c| = 1\}$.

ПРИМЕР 1.1. Вычислим группы $H_{DR}^1(M, \mathbb{C}^\times)$, $H^{0,1}(M, \mathbb{C}^\times)$ и $H_{DR}^1(M, U_1)$. Рассмотрим гомоморфизм $\mathrm{Exp}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$, заданный формулой $\mathrm{Exp} c = \exp(2\pi i c)$. Очевидно, $\mathrm{Exp}(\mathbb{R}) = U_1$. Точная последовательность

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{Exp}} \mathbb{C}^\times \longrightarrow 1$$

порождает следующую точную последовательность когомологий:

$$0 \longrightarrow H^1(M, \mathbb{Z}) \xrightarrow{j^*} H^1(M, \mathbb{C}) \xrightarrow{\mathrm{Exp}^*} H^1(M, \mathbb{C}^\times) \xrightarrow{\delta^*} H^2(M, \mathbb{Z}).$$

Хорошо известно, что $\mathrm{Ker} \delta^*$ – это в точности подгруппа плоских $\mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$ -расслоений, тривиальных как гладкие главные расслоения. В силу предложения 1.1 ее можно отождествить с $H_{DR}^1(M, \mathbb{C}^\times)$. Отсюда следует, что Exp^* индуцирует изоморфизм

$$H^1(M, \mathbb{C})/j^*(H^1(M, \mathbb{Z})) \rightarrow H_{DR}^1(M, \mathbb{C}^\times).$$

Аналогично описываются группы $H_{DR}^1(M, U_1)$ и $H^{0,1}(M, \mathbb{C}^\times)$. При этом получаем следующую коммутативную диаграмму, горизонтальные стрелки которой суть изоморфизмы, индуцированные Exp :

$$\begin{array}{ccc} H^1(M, \mathbb{R})/j^*(H^1(M, \mathbb{Z})) & \longrightarrow & H_{DR}^1(M, U_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(M, \mathbb{C})/j^*(H^1(M, \mathbb{Z})) & \longrightarrow & H_{DR}^1(M, \mathbb{C}^\times) \\ \downarrow & & \downarrow \Pi_{0,1}^* \\ H^1(M, \mathbb{C})/j^*(H^1(M, \mathbb{Z})) & \longrightarrow & H^{0,1}(M, \mathbb{C}^\times) \end{array} . \quad (1.22)$$

В частности, $H_{DR}^1(M, \mathbb{C}^\times)$ и $H^{0,1}(M, \mathbb{C}^\times)$ суть связные комплексные абелевы группы Ли, а $H_{DR}^1(M, U_1)$ – тор. Заметим, что группа $\mathrm{Pic} M = H^{0,1}(M, \mathbb{C}^\times)$ – это по определению *многообразие Пикара* комплексного многообразия M .

По-видимому, является важной следующая *проблема дополнения*: при каких условиях отображение $\Pi_{0,1}^*: H_{DR}^1(M, G) \rightarrow H^{0,1}(M, G)$ является сюръективным? Это означает, что для любой $\alpha \in Z^1(\overline{R}_G)$ должна найтись такая форма

$\beta \in Z^1(R_G)$, что $\Pi_{0,1}\beta = \alpha$. В п. 3.1 мы ответим на этот вопрос положительно в случае, когда M – компактное кэлерово многообразие, а G – борелевская подгруппа классической комплексной линейной группы (например, группа комплексных треугольных матриц $T_n(\mathbb{C})$). При этом будет использовано обобщение классической теории Ходжа. Сейчас мы рассмотрим простейший случай $G = \mathbb{C}^\times$ (см. п. 1.2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Пусть M – компактное кэлерово многообразие. Тогда гомоморфизм $\Pi_{0,1}^*: H_{DR}^1(M, \mathbb{C}^\times) \rightarrow H^{0,1}(M, \mathbb{C}^\times)$ сюръективен, а композиция гомоморфизмов*

$$H_{DR}^1(M, U_1) \rightarrow H_{DR}^1(M, \mathbb{C}^\times) \xrightarrow{\Pi_{0,1}^*} H^{0,1}(M, \mathbb{C}^\times)$$

из диаграммы (1.22) есть изоморфизм вещественных групп Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу коммутативности диаграммы (1.22) достаточно доказать аналогичные свойства для гомоморфизмов

$$H_{DR}^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow H_{DR}^1(M, \mathbb{C}) \xrightarrow{\Pi_{0,1}^*} H^{0,1}(M, \mathbb{C}). \quad (1.23)$$

Используя классическую теорию Ходжа (см. [9; гл. 0]), мы можем заменить в (1.23) пространства когомологий соответствующими пространствами гармонических форм:

$$\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^1 \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 \xrightarrow{\Pi_{0,1}^*} \mathbb{H}^{0,1}.$$

При этом $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^1$ отождествляется с подпространством в $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$, состоящим из форм вида $\omega - \bar{\omega}$, $\omega \in \mathbb{H}^{0,1}$. Отсюда следует наше утверждение.

В качестве следствия мы получаем следующий хорошо известный факт: группа $\text{Pic } M$ любого компактного кэлерова многообразия M есть комплексный тор.

Приведенное выше доказательство показывает, что любой класс когомологий из $H_{DR}^1(M, U_1)$, $H_{DR}^1(M, \mathbb{C}^\times)$ или $H^{0,1}(M, \mathbb{C}^\times)$ содержит гармоническую форму. Заметим также, что изоморфизм, обратный к $\Pi_{0,1}^*$, задается на уровне коциклов формулой $\omega \mapsto \omega - \bar{\omega}$, $\omega \in \mathbb{H}^{0,1}$.

§ 2. Когомологии со значениями в некоторых плоских векторных расслоениях

2.1. Пусть $\mathbf{V}$ – плоское комплексное векторное расслоение над комплексным многообразием M . Тогда мы имеем комплексы $\mathbf{V}$ -значных форм $(A_{\mathbf{V}}, d)$, $(A_{\mathbf{V}}, \partial)$ и $(A_{\mathbf{V}}, \bar{\partial})$ (см. п. 1.2). Предположим, что M – компактное эрмитово многообразие и что структурной группой расслоения $\mathbf{V}$ является U_n . Тогда на $\mathbf{V}$ можно определить плоскую эрмитову метрику. Эта метрика позволяет определить в комплексе $A_{\mathbf{V}}$ операторы Лапласа Δ , Δ_{∂} и $\Delta_{\bar{\partial}}$, заданные формулами

$$\Delta = dd^* + d^*d, \quad \Delta_{\partial} = \partial\partial^* + \partial^*\partial, \quad \Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial},$$

где d^* , ∂^* , $\bar{\partial}^*$ – операторы, формально сопряженные с d , ∂ , $\bar{\partial}$ соответственно. Обозначим через

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^r &= (\text{Ker } \Delta) \cap A_{\mathbf{V}}^r, \\ \mathbb{H}_{\partial}^{p,q} &= (\text{Ker } \Delta_{\partial}) \cap A_{\mathbf{V}}^{p,q}, \\ \mathbb{H}_{\bar{\partial}}^{p,q} &= (\text{Ker } \Delta_{\bar{\partial}}) \cap A_{\mathbf{V}}^{p,q}\end{aligned}$$

векторные пространства гармонических форм. Любая гармоническая форма ω является соответственно d -, ∂ - или $\bar{\partial}$ -замкнутой. По теореме Ходжа соответствие $\omega \mapsto [\omega]$ определяет следующие изоморфизмы:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}^r &\simeq H_{DR}^r(M, \mathbf{V}) \simeq H^r(M, \mathcal{C}_{\mathbf{V}}), \\ \mathbb{H}_{\partial}^{p,q} &\simeq \overline{H}^{p,q}(M, \mathbf{V}) \simeq \overline{H}^q(M, \Omega_{\mathbf{V}}^p), \\ \mathbb{H}_{\bar{\partial}}^{p,q} &\simeq H^{p,q}(M, \mathbf{V}) \simeq H^q(M, \Omega_{\mathbf{V}}^p).\end{aligned}$$

Мы будем использовать следующий факт, хорошо известный для обычных комплексных дифференциальных форм (см. [9; гл. 0]). В рассматриваемом случае доказательство вполне аналогично классическому (см. [1]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Предположим, что M – компактное кэлерово многообразие. Тогда*

$$\Delta = 2\Delta_{\partial} = 2\Delta_{\bar{\partial}}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathbb{H}^r = \bigoplus_{p+q=r} \mathbb{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}, \quad \mathbb{H}_{\bar{\partial}}^{p,q} = \mathbb{H}_{\partial}^{p,q}.$$

В дальнейшем (в условиях предложения 2.1) мы будем опускать индексы ∂ и $\bar{\partial}$ в обозначениях для пространств гармонических форм.

СЛЕДСТВИЕ 1. *В условиях предложения 2.1 векторные пространства $\mathbb{H}^{p,0}$ и $\mathbb{H}^{0,q}$ совпадают с пространствами голоморфных $\mathbf{V}$ -значных p -форм и антиголоморфных $\mathbf{V}$ -значных q -форм соответственно.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *При тех же предположениях имеем*

$$\begin{aligned}H_{DR}^r(M, \mathbf{V}) &\simeq \bigoplus_{p+q=r} H^{p,q}(M, \mathbf{V}) \simeq \bigoplus_{p+q=r} \overline{H}^{p,q}(M, \mathbf{V}), \\ H^r(M, \mathcal{C}_{\mathbf{V}}) &\simeq \bigoplus_{p+q=r} H^p(M, \Omega_{\mathbf{V}}^q) \simeq \bigoplus_{p+q=r} H^p(M, \overline{\Omega}_{\mathbf{V}}^q).\end{aligned}$$

Рассуждая так же, как в доказательстве леммы из [9; гл. 1, § 2], можно вывести из предложения 2.1 следующую “ $\partial\bar{\partial}$ -лемму”:

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\mathbf{V}$ – плоское комплексное векторное расслоение со структурной группой U_n над компактным кэлеровым многообразием. Предположим, что форма $\omega \in A_{\mathbf{V}}^{p,q}$ является d -замкнутой и ∂ - или $\bar{\partial}$ -точной, причем $p, q \geq 1$. Тогда существует такая $\psi \in A_{\mathbf{V}}^{p-1, q-1}$, что $\omega = \partial\bar{\partial}\psi$.

Пусть $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ – некоторая линейная комплексная группа Ли, и пусть $z = (z_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, G)$. Рассмотрим плоское расслоение на группы E , соответствующее коциклу $\text{Int } z$. Как было отмечено в п. 1.2, E можно рассматривать как подрасслоение плоского векторного расслоения $\mathbf{End } \mathbf{V}(z)$ со слоем $\text{End } \mathbb{C}^n$, определяемого коциклом $\text{Int } z = \text{Ad } z$. Применяя к последнему расслоению следствие 1, получаем

СЛЕДСТВИЕ 4. Предположим, что $z_{ij} \in U_n$ и что M – компактное кэлерово многообразие. Если $a \in E_E$ удовлетворяет условию $\Pi_{1,0}\delta_0(a) = 0$ или $\Pi_{0,1}\delta_0(a) = 0$, то $\delta_0(a) = 0$, т.е. a – плоское сечение.

2.2. Пусть G – связная разрешимая комплексная линейная алгебраическая группа. Хорошо известно (см., например, [10; § 4.2]), что G допускает полупрямое разложение $G = N \rtimes S$, где N – нормальная унипотентная алгебраическая группа (унипотентный радикал) группы G , а $S \simeq (\mathbb{C}^\times)^n$ – алгебраический тор. Соответственно для касательной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G имеем полупрямое разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \rtimes \mathfrak{s}$, где $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{s}$ – идеал и подалгебра в $\mathfrak{g}$, соответствующие подгруппам N и S . Обозначим через $p: G \rightarrow S$ естественную проекцию и через $q: S \rightarrow G$ – естественное вложение.

Пусть K – компактная вещественная форма тора S . Очевидно, $K \simeq U_1^n$. Мы будем также рассматривать вещественную алгебраическую подгруппу $G_K = N \rtimes K$ группы G .

Наиболее важным примером является подгруппа $G = T_n(\mathbb{C})$ в $GL_n(\mathbb{C})$, состоящая из верхних треугольных матриц. В этом случае $N = T_n^0(\mathbb{C})$ – это нормальная подгруппа унипотентных верхних треугольных матриц, а $S = D_n(\mathbb{C})$ – подгруппа диагональных матриц, естественно отождествляемая с $(\mathbb{C}^\times)^n$. Алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}_n(\mathbb{C})$ есть подалгебра верхних треугольных матриц в $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$. Далее, $\mathfrak{n}$ – это идеал нильпотентных верхних треугольных матриц, а $\mathfrak{s}$ – подалгебра диагональных матриц, естественно отождествляемая с $\mathbb{C}^n$. Кроме того, K есть подгруппа унитарных диагональных матриц, отождествляемая с U_1^n , а соответствующая ей подалгебра Ли $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{s}$ – это подалгебра чисто мнимых диагональных матриц. Комплекс де Рама $A_{\mathfrak{u}}$ отождествляется с комплексом $\mathfrak{s}$ -значных форм γ , удовлетворяющих условию $\bar{\gamma} = -\gamma$. Подгруппа $G_K = T_n(\mathbb{C})_K$ в $T_n(\mathbb{C})$ состоит из матриц с унитарной главной диагональю.

Пусть G – произвольная связная разрешимая комплексная линейная алгебраическая группа, и пусть V – алгебраический G -модуль, т.е. задано полиномиальное представление $\phi: G \rightarrow GL(V)$. Пусть $\mathfrak{U}$ – открытое покрытие комплексного многообразия M и $z \in Z^1(\mathfrak{U}, G_K)$. Рассмотрим соответствующее плоское векторное расслоение $\mathbf{V}(z)$ ранга n над M со структурной группой G_K . Тогда мы имеем комплекс де Рама $(A_{\mathbf{V}(z)}, d)$, а также комплексы Дольбо $(A_{\mathbf{V}(z)}, \bar{\partial})$ и $(A_{\mathbf{V}(z)}, \partial)$.

Проекция $p: G_K \rightarrow K$ индуцирует отображение $p^*: H^1(M, G_K) \rightarrow H^1(M, K)$. Последнее легко описывается на уровне коцепей. А именно, заданный коцикл

$z = (z_{ij})$ представляется в виде $z_{ij} = u_{ij}n_{ij}$, где $u_{ij} \in K$, $n_{ij} \in N$. Поскольку $u_{ij} = p(z_{ij})$, мы видим, что $u \in Z^1(\mathfrak{U}, K)$ и что p^* отображает класс когомологий коцикла z в класс коцикла u .

Предположим теперь, что $z_{ij} = g_i^{-1}g_j$ в $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, где $g_i: U_i \rightarrow G_K$ — гладкие функции. Тогда $\mathbf{V}(z)$ тривиально как гладкое векторное расслоение со структурной группой G_K . Имеем $g_i = u_i n_i$, где $u_i: U_i \rightarrow K$, $n_i: U_i \rightarrow N$, откуда

$$\begin{aligned} u_{ij} &= p(g_i)^{-1}p(g_j) = u_i^{-1}u_j, \\ z_{ij} &= n_i^{-1}u_{ij}n_j. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В частности, мы видим, что 0-коцепь (n_i) определяет изоморфизм плоских векторных расслоений $\mathbf{V}(z)$ и $\mathbf{V}(u)$ в категории гладких векторных расслоений со структурной группой G_K . В следующей лемме будет предполагаться, что эта коцепь удовлетворяет условию $\Pi_{0,1}\delta_0(n_i) = 0$ для всех i ; это означает, что соответствующий изоморфизм антиголоморфен.

ЛЕММА 2.1. Пусть $z \in Z^1(\mathfrak{U}, G_K)$ — коцикл Чеха на комплексном многообразии M , удовлетворяющий описанному выше условию тривиальности. Предположим, что M — компактное кэлерово многообразие и что $\Pi_{0,1}\delta_0(n_i) = 0$ для всех i . Тогда справедливы следующие утверждения.

- (i) Любой класс когомологий из $H^{0,q}(M, \mathbf{V}(z))$, $q \geq 0$, содержит d -замкнутую $\mathbf{V}(z)$ -значную $(0, q)$ -форму.
- (ii) Любая голоморфная $\mathbf{V}(z)$ -значная форма α является d -замкнутой. Если, кроме того, α ∂ -точна, то $\alpha = 0$.
- (iii) Если $\alpha \in A_{\mathbf{V}(z)}^{p,0}$ удовлетворяет условию $\partial\alpha = 0$ и если $\bar{\partial}\alpha = \partial\beta$ для некоторой $\beta \in A_{\mathbf{V}(z)}^{p-1,1}$, то существует такая $\gamma \in A_{\mathbf{V}(z)}^{p-1,0}$, что $\alpha + \partial\gamma$ голоморфна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать индукцию по $n = \dim V$. Предположим, что $n = 1$. Ясно, что $\phi(G_K) \subset U_1$, и поэтому $\mathbf{V}(z)$ — плоское линейное расслоение, определяемое коциклом $(\phi(z_{ij}))$, где $\phi(z_{ij}) \in U_1$. Значит, мы можем применить теорию Ходжа для плоских расслоений (см. п. 2.1). Очевидно, (i) следует из того, что любой класс когомологий Дольбо содержит гармоническую форму (см. предложение 2.1), а (ii) вытекает из следствия 1 предложения 2.1. Для доказательства утверждения (iii) заметим, что $d\partial\beta = d\bar{\partial}\alpha = 0$. Применяя следствие 3 того же предложения, мы видим, что $\partial\beta = \bar{\partial}\partial\gamma$, откуда $\bar{\partial}(\alpha - \partial\gamma) = 0$.

Для рассуждения по индукции нам потребуется следующая конструкция. По теореме Ли в пространстве V существует базис $e_1, \dots, e_n$, в котором ϕ записывается матрицей вида

$$\phi(g) = \begin{pmatrix} \phi_0(g) & * \\ 0 & \tilde{\phi}(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G,$$

где $\tilde{\phi}: G \rightarrow T_{n-1}(\mathbb{C})$ — линейное представление, для которого $\tilde{\phi}(g) \in D_{n-1}(\mathbb{C})$, $g \in S$, и потому $\tilde{\phi}(g) \in U_1^{n-1}$, $g \in K$. Точная последовательность G -модулей

$$0 \longrightarrow V^0 \longrightarrow V \longrightarrow \tilde{V} \longrightarrow 0,$$

где $V^0 = \langle e_1 \rangle$, $\tilde{V} = \langle e_2, \dots, e_n \rangle$, порождает следующие две точные последовательности плоских векторных расслоений:

$$0 \longrightarrow \mathbf{V}^0(z) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{V}(z) \xrightarrow{\varkappa} \tilde{\mathbf{V}}(z) \longrightarrow 0, \quad (2.2)$$

$$0 \longrightarrow \mathbf{V}^0(z) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{V}(u) \xrightarrow{\varkappa} \tilde{\mathbf{V}}(u) \longrightarrow 0. \quad (2.3)$$

Поскольку матрицы $\phi(u_{ij})$ диагональны, последовательность (2.3) расщепима.

Для любого $q \geq 0$ из (2.2) получается следующая точная последовательность пучков антиголоморфных q -форм:

$$0 \longrightarrow \overline{\Omega}_{\mathbf{V}^0(z)}^q \xrightarrow{\lambda} \overline{\Omega}_{\mathbf{V}(z)}^q \xrightarrow{\varkappa} \overline{\Omega}_{\tilde{\mathbf{V}}(z)}^q \longrightarrow 0. \quad (2.4)$$

Отображения n_i (см. (2.1)) определяют антиголоморфный изоморфизм последовательности (2.2) на расщепимую точную последовательность (2.3). Отсюда следует, что точная последовательность пучков (2.4) расщепима. Значит, для любого $p \geq 0$ мы получаем следующую расщепимую точную последовательность групп когомологий:

$$0 \longrightarrow H^p(M, \overline{\Omega}_{\mathbf{V}^0(z)}^q) \xrightarrow{\lambda^*} H^p(M, \overline{\Omega}_{\mathbf{V}(z)}^q) \xrightarrow{\varkappa^*} H^p(M, \overline{\Omega}_{\tilde{\mathbf{V}}(z)}^q) \longrightarrow 0. \quad (2.5)$$

Используя изоморфизм (1.12), можно интерпретировать (2.5) как следующую расщепимую точную последовательность:

$$0 \longrightarrow \overline{H}^{p,q}(M, \mathbf{V}^0(z)) \xrightarrow{\lambda^*} \overline{H}^{p,q}(M, \mathbf{V}(z)) \xrightarrow{\varkappa^*} \overline{H}^{p,q}(M, \tilde{\mathbf{V}}(z)) \longrightarrow 0. \quad (2.6)$$

Заметим также, что (2.2) порождает следующие расщепимые точные последовательности:

$$0 \longrightarrow A_{\mathbf{V}^0(z)}^{p,q} \xrightarrow{\lambda} A_{\mathbf{V}(z)}^{p,q} \xrightarrow{\varkappa} A_{\tilde{\mathbf{V}}(z)}^{p,q} \longrightarrow 0. \quad (2.7)$$

Перейдем теперь к индуктивному рассуждению. Предположим, что утверждения (i), (ii) и (iii) верны для векторных расслоений ранга $n - 1$.

(i) Мы будем считать, что $q \geq 1$, поскольку в случае $q = 0$ (i) совпадает с (ii). Пусть α — такая $\mathbf{V}(z)$ -значная $(0, q)$ -форма, что $\bar{\partial}\alpha = 0$, причем $\dim V = n$. Рассмотрим точную последовательность (2.7) для $p = 0$. По предположению индукции $\varkappa(\alpha) = \beta + \bar{\partial}\varphi$, где $d\beta = 0$ и $\varphi \in A_{\tilde{\mathbf{V}}(z)}^{0, q-1}$. Тогда $\varphi = \varkappa(\psi)$ для некоторой $\psi \in A_{\tilde{\mathbf{V}}(z)}^{0, q-1}$. Значит, $\beta = \varkappa(\alpha - \bar{\partial}\psi)$. Отсюда $\varkappa(\partial(\alpha - \bar{\partial}\psi)) = 0$ и $\partial(\alpha - \bar{\partial}\psi) = \lambda(\alpha')$, где α' — некоторая d -замкнутая $\mathbf{V}^0(z)$ -значная $(1, q)$ -форма. Используя (2.6), заключаем, что α' является ∂ -точной. Применяя следствие 3 предложения 2.1, видим, что $\alpha' = \partial\bar{\partial}\omega$ для некоторой $\omega \in A_{\mathbf{V}^0(z)}^{0, q-1}$. Отсюда следует, что $\partial(\alpha - \bar{\partial}(\psi + \lambda(\omega))) = 0$. Таким образом, $\alpha - \bar{\partial}(\psi + \lambda(\omega))$ есть искомая d -замкнутая форма.

(ii) Пусть α — голоморфная $\mathbf{V}(z)$ -значная p -форма, причем $\dim V = n$. По предположению индукции $d\varkappa(\alpha) = 0$, откуда $\varkappa(d\alpha) = \varkappa(\partial\alpha) = 0$. Отсюда следует, что $\partial\alpha = \lambda(\beta)$, где β — некоторая $\mathbf{V}^0(z)$ -значная голоморфная $(p + 1)$ -форма.

Из (2.6) заключаем, что β является ∂ -точной. Используя следствие 1 предложения 2.1, примененное к $\mathbf{V}^0(z)$ -значным формам, видим, что β гармонична и потому $\beta = 0$. Значит, $\partial\alpha = d\alpha = 0$.

Предположим, что $\alpha = \partial\gamma$. Тогда $\varkappa(\alpha) = \partial\varkappa(\gamma) = 0$ по предположению индукции. Значит, $\alpha = \lambda(\beta)$, где β – некоторая $\mathbf{V}^0(z)$ -значная голоморфная p -форма. Тогда из (2.6) следует, что β является ∂ -точной в $A_{\mathbf{V}^0(z)}$ и потому $\beta = 0$.

(iii) Предположим, что $\partial\alpha = 0$ и что $\bar{\partial}\alpha = \partial\beta$. Ясно, что $\varkappa(\alpha)$ удовлетворяет аналогичным условиям. По предположению индукции $\bar{\partial}(\varkappa(\alpha) + \partial\gamma_1) = 0$ для некоторой $\gamma_1 \in A_{\mathbf{V}(z)}^{p-1,0}$. Используя (2.7), мы можем выбрать $\gamma_2 \in A_{\mathbf{V}(z)}^{p-1,0}$ таким образом, чтобы $\varkappa(\gamma_2) = \gamma_1$. Тогда $\varkappa(\bar{\partial}(\alpha + \partial\gamma_2)) = 0$, откуда $\bar{\partial}(\alpha + \partial\gamma_2) = \lambda(\varphi)$ для некоторой $\mathbf{V}^0(z)$ -значной $(p, 1)$ -формы φ . Очевидно, $d\varphi = 0$ и из (2.6) следует, что φ является ∂ -точной. В силу следствия 3 предложения 2.1 $\varphi = \bar{\partial}\gamma_3$. Следовательно, $\bar{\partial}(\alpha + \partial(\gamma_2 - \gamma_3)) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть E – плоское расслоение на группы со слоем G , определяемое коциклом $\text{Int } z$. Если сечение $a \in F_E$ голоморфно, то a плоско.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждение аналогично доказательству следствия 4 предложения 2.1. А именно, фиксируем точное голоморфное представление ϕ группы G и рассмотрим соответствующее плоское векторное расслоение $\mathbf{V}(z)$. Тогда E есть подрасслоение плоского векторного расслоения $\mathbf{End } \mathbf{V}(z)$, определяемого коциклом $\text{Int } \phi(z)$. Затем применяем утверждение (ii) к охватывающему плоскому векторному расслоению.

§3. Когомологии со значениями в некоторых разрешимых алгебраических группах

3.1. Пусть M – компактное кэлерово многообразие. Как следует из классической теории Ходжа, любой класс когомологий из $H^{0,1}(M, \mathbb{C})$ содержит гармоническую (и следовательно, d -замкнутую) $(0, 1)$ -форму. Аналогичный факт имеет место для когомологий Дольбо со значениями в комплексном алгебраическом торе (см. предложение 1.5). В частности, для групп $\mathbb{C}^n$ и $(\mathbb{C}^\times)^n$ проблема дополнения, сформулированная в п. 1.3, допускает положительное решение. В этом пункте мы рассмотрим класс разрешимых комплексных алгебраических групп, обладающий аналогичным свойством.

Пусть G – связная разрешимая комплексная линейная алгебраическая группа. Мы будем использовать полупрямое разложение $G = N \rtimes S$, описанное в п. 2.2, сохраняя обозначения, введенные в этом пункте. Общие свойства когомологий де Рама и Дольбо со значениями в полупрямом произведении были установлены в [8; теоремы 2.2 и 2.4]. В частности, имеется следующая коммутативная диаграмма, строки которой точны:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{DR}^1(M, N) & \xrightarrow{i^*} & H_{DR}^1(M, G) & \xrightarrow{p^*} & H_{DR}^1(M, S) & \longrightarrow & \varepsilon \\ \Pi_{0,1}^* \downarrow & & \Pi_{0,1}^* \downarrow & & \downarrow \Pi_{0,1}^* & & \\ H^{0,1}(M, N) & \xrightarrow{i^*} & H^{0,1}(M, G) & \xrightarrow{p^*} & H^{0,1}(M, S) & \longrightarrow & \varepsilon \end{array} \quad (3.1)$$

Отображения i^* индуцированы вложением $i: N \rightarrow G$. Мы также имеем инъективные отображения $q^*: H_{DR}^1(M, S) \rightarrow H_{DR}^1(M, G)$ и $q^*: H^{0,1}(M, S) \rightarrow H^{0,1}(M, G)$ такие, что $p^* \circ q^* = \text{id}$. Будем отождествлять $H_{DR}^1(M, S)$ и $H^{0,1}(M, S)$ с их образами в $H_{DR}^1(M, G)$ и $H^{0,1}(M, G)$ соответственно. Поскольку K есть прямой сомножитель группы S , имеется также вложение $H_{DR}^1(M, K) \subset H_{DR}^1(M, S)$.

В силу предложения 1.5 $\Pi_{0,1}^*$ индуцирует изоморфизм групп $H_{DR}^1(M, K) \rightarrow H^{0,1}(M, S)$; он соответствует изоморфизму пространств $\mathfrak{k}$ -значных гармонических 1-форм и $\mathfrak{s}$ -значных гармонических $(0, 1)$ -форм $\mathbb{H}_{\mathfrak{k}}^1 \rightarrow \mathbb{H}_{\mathfrak{s}}^{0,1}$, заданному формулой $\chi - \bar{\chi} \mapsto \chi$.

Построим теперь некоторые подкрученные комплексы де Рама и Дольбо (см. п. 1.2). Фиксируем гармоническую форму $\gamma = -\bar{\chi} + \chi \in \mathbb{H}_{\mathfrak{k}}^{0,1}$, где $\chi \in \mathbb{H}_{\mathfrak{s}}^{0,1}$. Выберем открытое покрытие $\mathfrak{U} = (U_i)$ многообразия M такое, что $\gamma = \delta_0(u_i)$ в каждом U_i для некоторых гладких функций $u_i: U_i \rightarrow K$, и построим коцикл Чеха $z = (z_{ij})$, где $z_{ij} = u_i^{-1}u_j$ в любом $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Фиксируем также функции u_i и тем самым коцикл z . Обозначим через E плоское расслоение на группы, полученное из $M \times G$ путем подкручивания при помощи коцикла $\text{Int } z$, и через $\mathfrak{e}$ – соответствующее расслоение на алгебры Ли. Так как z принимает значения в K , то мы получаем также нормальное подрасслоение на группы $E_N \subset E$ со слоем N , соответствующее коциклу $\text{Int } z|_N$, причем E будет полупрямым произведением расслоения E_N и тривиального расслоения $M \times S$. Соответственно получаем полупрямое разложение $A_{\mathfrak{e}} = A_{\mathfrak{e}_N} \ltimes A_{\mathfrak{s}}$. Расслоения E и E_N мы будем называть *унитарными плоскими расслоениями на группы* со слоями G и N соответственно, связанными с формой γ .

Рассмотрим подкрученные комплексы де Рама и Дольбо R_E и $\bar{R}_E$. В силу предложения 1.3 отображение $r_{\gamma}: A_{\mathfrak{k}}^1 \rightarrow A_{\mathfrak{g}}^1$, определенное в п. 1.2, индуцирует биекцию $r_{\gamma}^*: H_{DR}^1(M, E) \rightarrow H_{DR}^1(M, G)$ такую, что $r_{\gamma}^*(\varepsilon) = \zeta$ есть класс когомологий формы γ . Аналогично (см. предложение 1.4) имеем отображение $\bar{r}_{\chi}: A_{\mathfrak{k}}^{0,1} \rightarrow A_{\mathfrak{g}}^{0,1}$, индуцирующее биекцию $\bar{r}_{\chi}^*: H^{0,1}(M, E) \rightarrow H^{0,1}(M, G)$ такую, что $\bar{r}_{\chi}^*(\varepsilon) = \xi$ есть класс когомологий формы χ . При этом имеет место следующая коммутативная диаграмма с точными строками (см. [8]):

$$\begin{array}{ccccccc} H_{DR}^1(M, E_N) & \xrightarrow{i^*} & H_{DR}^1(M, E) & \xrightarrow{p^*} & H_{DR}^1(M, S) & \longrightarrow & \varepsilon \\ \Pi_{0,1}^* \downarrow & & \Pi_{0,1}^* \downarrow & & \downarrow \Pi_{0,1}^* & & \\ H^{0,1}(M, E_N) & \xrightarrow{i^*} & H^{0,1}(M, E) & \xrightarrow{p^*} & H^{0,1}(M, S) & \longrightarrow & \varepsilon \end{array} \quad (3.2)$$

Здесь $H_{DR}^1(M, S)$ и $H^{0,1}(M, S)$ естественно вложены в $H_{DR}^1(M, E)$ и $H^{0,1}(M, E)$ соответственно. Из (1.21) видно, что правый квадрат этой диаграммы получается из правого квадрата диаграммы (3.1) при помощи биекций r_{γ}^{-1} и $\bar{r}_{\chi}^{-1}$.

Будем говорить, что группа G *обладает свойством Ходжа*, если для всякого унитарного плоского расслоения на группы E со слоем G над компактным кэлеровым многообразием M выполняется следующее условие: для любого $\sigma \in \text{Im } i^* = \text{Ker } p^* \subset H^{0,1}(M, E)$ существует форма $\eta \in \sigma$ такая, что

$$\eta \in A_{\mathfrak{e}_N}^{0,1}, \quad \delta_1(\eta) = 0. \quad (3.3)$$

ПРИМЕР 3.1. Как мы видели выше, алгебраический тор G обладает свойством Ходжа. То же верно при более общем предположении, что унитарный идеал N группы G абелев. Действительно, в этом случае любое унитарное плоское расслоение E_N со слоем N есть плоское векторное расслоение с унитарной структурной группой. В силу предложения 2.1 любой класс из $H^{0,1}(M, E_N)$ содержит d -замкнутую форму. Отсюда легко следует наше утверждение.

Переформулируем теперь свойство Ходжа на языке обычных комплексов де Рама и Дольбо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Группа G обладает свойством Ходжа тогда и только тогда, когда для любого компактного кэлерова многообразия M , любого фиксированного класса $\sigma \in H^{0,1}(M, G)$ и любой фиксированной гармонической формы $\chi \in \mathbb{H}_s^{0,1}$, представляющей класс $p^*(\sigma)$, существует форма $\beta \in Z^1(R_G)$ такая, что $\Pi_{0,1}\beta \in \sigma$, причем*

$$\beta_s = \chi - \bar{\chi}, \quad \beta_n \in A_n^{0,1}. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть заданы класс $\sigma \in H^{0,1}(M, G)$ и гармоническая форма $\chi \in \mathbb{H}_s^{0,1}$. Положим $\gamma = -\bar{\chi} + \chi$ и рассмотрим класс $\tilde{\sigma} = (\bar{r}_\chi^*)^{-1}(\sigma) \in H^{0,1}(M, E)$, где E — унитарное плоское расслоение на группы, соответствующее форме γ . Очевидно, $p^*(\sigma) = [\chi]$ тогда и только тогда, когда $p^*(\tilde{\sigma}) = \varepsilon$. Предположим, что $\eta \in \tilde{\sigma}$ удовлетворяет (3.3), и рассмотрим форму $\beta = r_\gamma(\eta) \in Z^1(R_G)$. Очевидно, $\beta = \text{Ad } u_i(\eta_i) + \gamma$ удовлетворяет (3.4) и $[\Pi_{0,1}\beta] = \bar{r}_\chi^*[\tilde{\sigma}] = [\sigma]$. Обратно, если $\beta \in Z^1(R_G)$ удовлетворяет (3.4) и $\Pi_{0,1}\beta \in \sigma$, то $\eta = r_\gamma^{-1}(\beta)$ удовлетворяет (3.3) и лежит в классе $\tilde{\sigma}$.

СЛЕДСТВИЕ. *Если группа G обладает свойством Ходжа, то проблема дополнения для G имеет положительное решение на любом компактном кэлеровом многообразии.*

Фиксируем теперь форму $\beta \in Z^1(R_G)$, удовлетворяющую (3.4). Эту форму также можно использовать для подкручивания комплекса R_G . Запишем $\beta = \delta_0(b_i)$ для некоторых гладких функций $b_i: U_i \rightarrow G$ в любом U_i . Эти функции можно выбрать так, чтобы $b_i = u_i n_i$ для некоторых гладких функций $n_i: U_i \rightarrow N$. Действительно, для формы $\eta = r_\gamma^{-1}(\beta)$ имеем $\eta_i = \rho(u_i)^{-1}(\beta) = \rho(u_i)^{-1}(\delta_0(b_i)) = \delta_0(u_i^{-1}b_i)$. С другой стороны, $\eta_i = \delta_0(n_i)$ для некоторых гладких $n_i: U_i \rightarrow N$. Значит, $n_i = u_i^{-1}b_i g_i$, где $g_i: U_i \rightarrow G$ удовлетворяют условию $\delta_0(g_i) = 0$. Тогда $b_i g_i = u_i n_i$ и $\delta_0(b_i g_i) = 0$. Заменяя b_i на $b_i g_i$, получаем требуемый результат. Построим теперь коцикл Чеха $w = (w_{ij}) \in Z^1(\mathfrak{U}, G)$, где

$$w_{ij} = b_i^{-1}b_j = n_i^{-1}z_{ij}n_i.$$

Рассмотрим плоское расслоение на группы E' и плоское расслоение на алгебры Ли $\mathfrak{e}'$ со слоями G и $\mathfrak{g}$, определяемое коциклами $(\text{Int } w_{ij})$ и $(\text{Ad } w_{ij})$ соответственно. Очевидно, $\beta = \delta_0(u_i n_i) = \gamma + \text{Ad } u_i(\delta_0(n_i))$, откуда

$$\eta_i = \text{Ad } u_i^{-1}(\beta - \gamma) = \delta_0(n_i)$$

и $\Pi_{1,0}\delta_0(n_i) = 0$. Значит, $\mathfrak{e}'$ удовлетворяет условиям леммы 2.1.

Мы будем также использовать отображение $r_\beta: A_{\mathfrak{e}'}^1 \rightarrow A_{\mathfrak{g}}^1$. Укажем явное выражение для отображения $r_\beta^{-1} \circ r_\gamma: \psi \mapsto \psi'$ пространства $A_{\mathfrak{e}}^1$ на $A_{\mathfrak{e}'}^1$. Очевидно, $\rho(u_i)(\psi_i) = r_\gamma(\psi) = r_\beta(\psi') = \rho(u_i n_i)(\psi'_i)$, откуда

$$\begin{aligned}\psi_i &= \rho(n_i)(\psi'_i), \\ \psi'_i &= \text{Ad } n_i^{-1}(\psi_i - \eta_i).\end{aligned}\tag{3.5}$$

Теперь мы хотим доказать, что некоторые разрешимые алгебраические группы G обладают свойством Ходжа. Ключевую роль будет играть следующий результат.

ЛЕММА 3.1. *Пусть $G = B \rtimes A$, где B – абелева унипотентная нормальная алгебраическая подгруппа и A – связная разрешимая алгебраическая подгруппа, обладающая свойством Ходжа. Тогда G обладает свойством Ходжа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем полупрямое разложение $A = N_0 \rtimes S$, где N_0 – унипотентный радикал группы A и S – алгебраический тор. Тогда $G = N \rtimes S$, где $N = B \rtimes N_0$. Ясно, что N – унипотентная алгебраическая подгруппа, а потому и унипотентный радикал группы G .

Пусть теперь M – компактное кэлерово многообразие. Фиксируем гармоническую форму $\chi \in A_s^{0,1}$, обозначим $\gamma = -\bar{\chi} + \chi$ и построим соответствующий коцикл Чеха z и унитарное плоское расслоение на группы E над M . Выберем класс $\sigma \in \text{Ker } p^* \subset H^{0,1}(M, E)$. Тогда $\sigma = [\alpha]$ для некоторой $\alpha \in Z^1(\bar{R}_{E_N})$. Так как A и B инвариантны относительно $\text{Int } z_{ij}$, то $E_N = E_B \rtimes E_{N_0}$, где E_B и E_{N_0} – подрасслоения, отвечающие подгруппам B и N_0 в N . Соответственно имеем $A_{\mathfrak{e}_n}^{0,1} = A_{\mathfrak{e}_b}^{0,1} \oplus A_{\mathfrak{e}_{n_0}}^{0,1}$, где $\mathfrak{e}_b$ и $\mathfrak{e}_{n_0}$ – соответствующие подрасслоения в $\mathfrak{e}_n$. Поэтому $\alpha = \alpha_b + \alpha_{\mathfrak{e}_{n_0}}$, где $\alpha_b \in A_{\mathfrak{e}_b}^{0,1}$, а $\alpha_{\mathfrak{e}_{n_0}} \in Z^1(\bar{R}_{E_{N_0}})$. Так как A обладает свойством Ходжа, то форма $\alpha_{\mathfrak{e}_{n_0}}$ когомологична в $\bar{R}_{E_A}$ некоторой форме $\eta_a \in Z^1(R_{E_{N_0}})$. Заменяя α когомологичным коциклом, мы можем считать, что $\alpha_{\mathfrak{e}_{n_0}} = \eta_a$.

Рассмотрим теперь форму $\beta_a = r_\gamma(\eta_a) \in Z^1(R_A)$. Очевидно, $\eta_a \in R_E^1$ удовлетворяет (3.3). Поэтому мы можем применить изложенную выше конструкцию плоского расслоения на группы E' со слоем G , используя форму β_a в качестве β . В частности, можно записать $\beta_a = \delta_0(a_i)$ в любом U_i , где $a_i = u_i n_i$ для некоторых гладких функций $n_i: U_i \rightarrow N_0$, удовлетворяющих условиям $\Pi_{1,0} \delta_0(n_i) = 0$. Тогда E' определяется коциклом $w \in Z^1(\mathfrak{U}, N_0 \rtimes K)$, заданным формулой $w_{ij} = a_i^{-1} a_j$. Поскольку $w_{ij} \in A$, имеем $E' = E'_B \rtimes E'_A$, где E'_B и E'_A – подрасслоения, отвечающие подгруппам B и A группы G . Используя (3.5), получаем

$$\alpha' = \text{Ad } n_i^{-1}(\alpha_i - \eta_i) = \text{Ad } n_i^{-1}((\alpha_b)_i),$$

откуда

$$\bar{\tau}_{\Pi_{0,1}\beta_a}^{-1}(\bar{\tau}_\chi(\alpha)) = \Pi_{0,1}\alpha' = \alpha' = \text{Ad } n_i^{-1}((\alpha_b)_i).$$

Итак, $\alpha' \in Z^1(\bar{R}_{E'_B})$. Поскольку B абелева, E'_B есть плоское векторное расслоение, определенное коциклом $\text{Int } w_{ij} \mid B$ и потому удовлетворяющее условиям леммы 2.1. В силу утверждения (i) этой леммы α' когомологична в $\bar{R}_{E'_B}$ некоторой

$(0, 1)$ -форме α'_1 такой, что $d\alpha'_1 = \delta(\alpha'_1) = 0$. Согласно (3.5) соответствующая форма $\alpha_1 \in Z^1(R_E)$ имеет вид

$$(\alpha_1)_i = \rho(n_i)((\alpha'_1)_i) = \text{Ad } n_i((\alpha'_1)_i) + \delta_0(n_i).$$

Поскольку $\Pi_{1,0}\delta_0(n_i) = 0$, эта форма удовлетворяет (3.3). Ясно, что $\alpha_1 \in \sigma$ и лемма 3.1 доказана.

Мы будем также использовать следующее замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Из определения свойства Ходжа непосредственно следует, что некоторые несложные модификации разрешимой алгебраической группы G сохраняют это свойство.

1) Если $G = N \rtimes S$ обладает свойством Ходжа, то то же верно для группы $\tilde{G} = N \rtimes \tilde{S}$, где $\tilde{S}$ – любой подтор в S .

2) Пусть $Z \subset S$ – центральная алгебраическая подгруппа в $G = N \rtimes S$. Группа G обладает свойством Ходжа тогда и только тогда, когда это верно для G/Z .

3) Если G_1 и G_2 обладают свойством Ходжа, то тем же свойством обладает $G_1 \times G_2$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть G – борелевская подгруппа редуктивной комплексной алгебраической группы $\hat{G}$, все неабелевы простые факторы которой имеют тип A_n , B_n , C_n , D_n , E_6 или E_7 . Тогда G обладает свойством Ходжа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по рангу (т.е. размерности максимального алгебраического подтора) n группы $\hat{G}$. Допустим, что наше утверждение доказано для групп $\hat{G}$ рангов $< n$, удовлетворяющих условиям теоремы, и пусть G – борелевская подгруппа редуктивной группы $\hat{G}$ ранга n , все неабелевы простые факторы которой имеют тип A_n , B_n , C_n , D_n , E_6 или E_7 . Используя предположение индукции и замечание 3.1, видим, что достаточно рассмотреть случай, когда $\hat{G}$ – простая группа одного из указанных типов. Хорошо известно (см. [11]), что любая из этих групп $\hat{G}$ содержит такую параболическую подгруппу P , что $\hat{G}/P$ – эрмитово симметрическое пространство, что равносильно абелевости унитарного радикала B группы P . При этом $P = B \rtimes Q$, где $Q = H\mathbb{C}^\times$ – локально прямое произведение, H – полупростая подгруппа ранга $n - 1$. Мы можем считать, что $G \subset P$, откуда $G = B \rtimes (G_1\mathbb{C}^\times)$, где G_1 – борелевская подгруппа группы H . Схема Дынкина группы H получается из схемы Дынкина группы $\hat{G}$ при отбрасывании одной из вершин, так что H содержит только простые факторы классических типов или типа E_6 (для $\hat{G} = E_7$, см. [11]). Применяя предположение индукции, видим, что G_1 обладает свойством Ходжа. Теперь теорема следует из замечания 3.1 и леммы 3.1.

СЛЕДСТВИЕ. Группа $T_n(\mathbb{C})$ обладает свойством Ходжа.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Остающиеся простые группы G_2 , F_4 и E_8 не содержат параболических подгрупп с абелевым унитарным радикалом. Нам неизвестно, обладают ли свойством Ходжа их борелевские подгруппы.

3.2. Теперь будем предполагать, что M – компактное кэлерово многообразие, а G – связная разрешимая комплексная алгебраическая группа, обладающая свойством Ходжа. Наша цель состоит в изучении множества $H_{DR}^1(M, G)$.

Мы сохраняем обозначения, введенные в п. 3.1. Фиксируем класс $\xi \in H^{0,1}(M, S)$, гармоническую форму $\chi \in A_s^{0,1}$, представляющую этот класс, и коцикл Чеха $z = (z_{ij})$ со значениями в K , соответствующий форме $\gamma = -\bar{\chi} + \chi$. При изучении множества $H_{DR}^1(M, G)$ удобно заменить R_G подкрученным комплексом R_E , где E – соответствующее плоское унитарное расслоение на группы.

Согласно определению свойства Ходжа любой класс $\sigma \in H^{0,1}(M, E)$, для которого $p^*\sigma = \varepsilon$, содержит форму η , удовлетворяющую (3.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *Форма η определена в своем классе когомологий комплекса R_E однозначно с точностью до преобразования вида $\text{Ad } a$, где a – плоское сечение расслоения E .*

Форма η гармонична и потому $d\eta = [\eta, \eta] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta_1 \in Z^1(R_{E_N})$ – другая $(0, 1)$ -форма такая, что $\eta_1 = \rho(a)(\eta) = \text{Ad } a(\eta) + \delta_0(a)$, где $a \in F_E$. Тогда, очевидно, $\Pi_{1,0}\delta_0(a) = 0$. В силу следствия 4 предложения 2.1 $\delta_0(a) = 0$.

Из условия $\delta_1(\eta) = 0$ следует $\partial\eta = 0$. Значит, форма η антиголоморфна и потому гармонична в силу следствия 1 предложения 2.1. Отсюда вытекает, что $d\eta = [\eta, \eta] = 0$.

Теперь мы фиксируем класс когомологий $\sigma \in H^{0,1}(M, E)$ такой, что $p^*\sigma = \varepsilon$, и форму $\eta \in \sigma$, удовлетворяющую (3.3). Мы хотим описать подмножество $(\Pi_{0,1}^*)^{-1}(\sigma) \subset H_{DR}^1(M, E)$. Оно непусто, так как содержит класс когомологий формы η . Форму $\omega \in Z^1(R_E)$ назовем *канонической*, если $\Pi_{0,1}\omega \in Z^1(E_N)$. Например, η является канонической формой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Любой класс когомологий $\tau \in H_{DR}^1(M, E)$ такой, что $\Pi_{0,1}^*(\tau) = \sigma$, содержит коцикл ω , который удовлетворяет условию $\Pi_{0,1}\omega = \eta$ и потому является канонической формой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу свойства Ходжа для любого $\alpha \in \tau$ существует такой $a \in F_E$, что

$$\eta = \bar{\rho}(a)(\Pi_{0,1}\alpha) = \Pi_{0,1}\rho(a)(\alpha) = \Pi_{0,1}\omega,$$

где $\omega = \rho(a)(\alpha) \in \tau$.

Рассмотрим форму $\beta = r_\gamma(\eta)$. Для получения дальнейшей информации о канонических формах мы будем использовать подкрученный комплекс $R_{E'}$, введенный в п. 3.1, и соответствие $r_\beta^{-1} \circ r_\gamma: \psi \mapsto \psi'$, описываемое формулами (3.5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Пусть ω – каноническая форма такая, что $\Pi_{0,1}\omega = \eta$. Обозначим $\alpha = \Pi_{1,0}\omega$. Тогда*

- (i) $\omega'_i = \text{Ad } n_i^{-1}(\alpha_i)$,
- (ii) ω' гармонична и удовлетворяет уравнениям $d\omega' = [\omega', \omega'] = 0$,
- (iii) $d\alpha = \bar{\partial}\alpha = [\eta, \alpha]$, $\partial\alpha = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (i) легко следует из (3.5). Так как ω' – форма типа $(1, 0)$, из равенства $\delta_1(\omega')$ следует $\bar{\partial}\omega' = 0$. Значит, ω' голоморфна и потому гармонична в силу следствия 1 предложения 2.1. Отсюда вытекает (ii). Наконец, (iii) следует из (ii) и из последнего утверждения предложения 3.2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Если ω и ω_1 – две канонические формы, принадлежащие одному и тому же классу τ , то $\omega_1 = \text{Ad } f(\omega)$ для некоторого $f \in H^0(M, \mathcal{C}_E)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 3.3 можно считать, что $\Pi_{0,1}\omega = \Pi_{0,1}\omega_1 = \eta$. Предположим, что $\omega_1 = \rho(f)(\omega)$, где $f \in F_E$. Используя (3.5), видим, что $\omega'_1 = \rho(f')(\omega')$, где $f' \in F_{E'}$ и $f_i = n_i f'_i n_i^{-1}$. Согласно предложению 3.4 ω' и ω'_1 – формы типа $(1, 0)$ и потому $\Pi_{0,1}\delta_0(f') = 0$. Ввиду следствия леммы 3.1 $\delta_0(f') = 0$. Тогда $\Pi_{1,0}\delta_0(f_i) = 0$, откуда $\delta_0(f_i) = 0$ в силу следствия 4 предложения 2.1. Таким образом, $\omega_1 = \text{Ad } f(\omega)$, где f – плоское сечение расслоения E .

3.3. Сохраняя введенные выше обозначения, мы опишем теперь множество канонических форм в терминах комплекса (A_ϵ, d) .

ТЕОРЕМА 3.2. *Любую каноническую форму $\omega \in Z^1(R_E)$ можно записать в виде $\omega = \psi + \partial h$, где $h \in A_\epsilon^0$ и $\psi \in A_\epsilon^1$ – однозначно определенная гармоническая форма. При этом форма $[\psi, \psi]$ когомологична нулю в (A_ϵ, d) .*

Обратно, пусть $\psi \in A_\epsilon$ – такая гармоническая форма, что $\Pi_{0,1}\psi \in A_{\epsilon_n}$ и $[\psi, \psi]$ когомологична нулю в (A_ϵ, d) . Тогда $\delta_1(\Pi_{1,0}\psi) = \delta_1(\Pi_{0,1}\psi) = 0$ и существует единственная форма $\omega \in Z^1(R_E)$ такая, что $\omega = \psi + \partial h$, где $h \in A_\epsilon^0$. Форма ω является канонической.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ω – каноническая форма. Можно считать, что $\omega = \alpha + \eta$, где $\alpha = \Pi_{0,1}\omega$. Согласно п. (iii) предложения 3.4 имеем $\partial\alpha = 0$. В силу предложения 2.1 $\alpha = \varphi + \partial h$, где $h \in A_\epsilon^0$ и $\varphi \in A_\epsilon^{1,0}$ гармоническая, т.е. голоморфная форма. Поскольку η гармонична в силу предложения 3.2, форма $\psi = \varphi + \eta$ также гармонична, причем $\omega = \psi + \partial h$. Согласно разложению Ходжа форма φ определена однозначно. Очевидно,

$$\begin{aligned} [\psi, \psi] &= [\omega - \partial h, \omega - \partial h] = [\omega, \omega] + [\partial h, \partial h - 2\omega] \\ &= 2d\omega + \partial[h, \partial h - 2\omega] = \partial(-2\bar{\partial}h + [h, \partial h - 2\omega]). \end{aligned}$$

Так как $d[\psi, \psi] = 0$, то из следствия 3 предложения 2.1 вытекает, что $[\psi, \psi]$ когомологична нулю.

Обратно, допустим, что мы имеем гармоническую форму $\psi \in A_\epsilon$ такую, что $\Pi_{0,1}\psi \in A_{\epsilon_n}$ и $[\psi, \psi] = d\lambda$, где $\lambda \in A_\epsilon^1$. Обозначим $\varphi = \Pi_{1,0}\psi$, $\theta = \Pi_{0,1}\psi$. Очевидно,

$$[\varphi, \varphi] = \partial\Pi_{1,0}\lambda, \quad (3.6)$$

$$[\theta, \theta] = \bar{\partial}\Pi_{0,1}\lambda, \quad (3.7)$$

$$2[\theta, \varphi] = \bar{\partial}\Pi_{1,0}\lambda + \partial\Pi_{0,1}\lambda. \quad (3.8)$$

Поскольку $[\varphi, \varphi]$ голоморфна, из предложения 2.1 и (3.6) следует, что $[\varphi, \varphi] = \partial\Pi_{1,0}\lambda = 0$. Аналогично, из (3.7) вытекает, что $[\theta, \theta] = \bar{\partial}\Pi_{0,1}\lambda = 0$. В частности,

$\delta_1(\varphi) = \delta_1(\theta) = 0$. Мы видим также, что $d\bar{\partial}\Pi_{1,0}\lambda = d\partial\Pi_{0,1}\lambda = 0$. Применяя следствие 3 предложения 2.1, выводим из (3.8), что

$$[\theta, \varphi] = \partial\bar{\partial}g \quad (3.9)$$

для некоторого $g \in A_{\mathfrak{e}}^0$.

В частности, мы видим, что θ обладает свойствами формы η из предложения 3.2. Мы можем положить $\theta = \eta$ и использовать отображение $r_{\beta}^{-1} \circ r_{\gamma}: \psi \mapsto \psi'$, описываемое формулами (3.5).

Применяя (3.5) к φ и используя (1.3) и (3.9), получаем

$$\text{Ad } n_i(d\varphi'_i) = -[\eta_i, \varphi_i - \eta_i] = -\partial\bar{\partial}g_i,$$

откуда

$$\begin{aligned} \partial\varphi' &= 0, \\ \bar{\partial}\varphi_i &= -\partial(\text{Ad } n_i^{-1}(\bar{\partial}g_i)), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $(\text{Ad } n_i^{-1}(\bar{\partial}g_i)) \in A_{\mathfrak{e}}^0$.

Будем теперь искать нужную нам форму ω . Запишем $\omega = \psi + \partial h = \alpha + \eta$, где $\alpha = \varphi + \partial h$ и $h \in A_{\mathfrak{e}}^0$ нужно выбрать так, чтобы $\delta_1(\omega) = 0$. Как и в п. (i) предложения 3.4, имеем $\omega'_i = \text{Ad } n_i^{-1}(\alpha_i)$. Так как $\partial\alpha = 0$, то из (1.3) вытекает, что $\partial\omega' = 0$. Сечение h можно выбрать так, чтобы $\bar{\partial}\omega' = 0$. Действительно,

$$\omega'_i = \text{Ad } n_i^{-1}(\varphi_i) + \text{Ad } n_i^{-1}(\partial h),$$

где в силу (3.5)

$$\text{Ad } n_i^{-1}(\varphi_i) = \varphi'_i + \text{Ad } n_i^{-1}(\eta_i).$$

Заметим, что $d(\text{Ad } n_i^{-1}(\eta_i)) = 0$. Действительно, из (3.5) следует, что $\psi' = -\text{Ad } n_i^{-1}(\eta_i)$ соответствует форме $\psi = 0$. Значит, $\delta_1(\psi') = 0$. Но $[\psi', \psi'] = 0$ в силу предложения 3.2, так что $d\psi' = 0$. Отсюда следует, что $d(\text{Ad } n_i^{-1}(\varphi_i)) = d\varphi'_i$. Из (3.10) видно, что $\partial(\text{Ad } n_i^{-1}(\varphi_i)) = 0$ и что форма $\bar{\partial}(\text{Ad } n_i^{-1}(\varphi_i))$ является ∂ -точной. В силу п. (iii) леммы 3.1 существует такое $h' \in A_{\mathfrak{e}}^0$, что форма

$$\text{Ad } n_i^{-1}(\varphi_i) + \partial h'_i = \text{Ad } n_i^{-1}(\varphi_i + \partial(\text{Ad } n_i(h'_i))).$$

голоморфна. Таким образом, сечение $h = (h_i)$, где $h_i = \text{Ad } n_i(h'_i)$, удовлетворяет нашим условиям.

Мы выбрали h так, чтобы $d\omega' = 0$. Но тогда

$$\begin{aligned} [\omega', \omega']_i &= \text{Ad } n_i^{-1}([\alpha_i, \alpha_i]) = \text{Ad } n_i^{-1}([\varphi_i + \partial h_i, \varphi_i + \partial h_i]) \\ &= \partial(\text{Ad } n_i^{-1}([h_i, 2\varphi_i + \partial h_i])). \end{aligned}$$

Поскольку эта форма голоморфна, из п. (ii) леммы 3.1 следует, что $[\omega', \omega'] = 0$, откуда $\delta_1(\omega') = 0$. Значит, $\delta_1(\omega) = 0$ и потому ω — каноническая форма.

Предположим теперь, что имеется другая форма ω_1 , удовлетворяющая нашим условиям и такая, что $\tilde{\omega}_1 = \psi + \partial h'$, где $h \in A_{\mathfrak{e}}^0$. Тогда из вышесказанного следует, что форма $\partial(h'_i - (h'_1)_i)$, где $(h'_1)_i = \text{Ad } n_i^{-1}((h_1)_i)$, голоморфна. В силу п. (ii) леммы 3.1 имеем $h' = h'_1$, откуда $\omega = \omega_1$.

3.4. Теперь мы можем сформулировать наш основной результат. Предположим, что M – компактное кэлерово многообразие. Фиксируем $\xi \in H^{0,1}(M, S)$, гармоническую форму χ , лежащую в этом классе, и коцикл Чеха $z = (z_{ij})$, представляющий класс $\mu([\gamma]) \in H^1(M, K)$, где $\gamma = -\overline{\chi} + \chi \in Z^1(R_K)$. Мы хотим описать подмножество

$$H_\xi = (\Pi_{0,1}^*)^{-1}((p_1^*)^{-1}(\xi)) \subset H_{DR}^1(M, G) \quad (3.11)$$

(см. (3.1)). Для этого заметим, что H_ξ отождествляется с множеством

$$\tilde{H}_\xi = (r_\gamma^*)^{-1}(H_\xi) = \text{Ker}(p^* \circ \Pi_{0,1}^*) \subset H_{DR}^1(M, E)$$

(см. (3.2)). Для описания последнего мы используем гармонические 1-формы из комплекса де Рама (A_ϵ, d) . Напомним, что пространство $\mathbb{H}_\epsilon^p$ гармонических p -форм изоморфно $H_{DR}^p(M, \epsilon) \simeq H^p(M, \mathcal{C}_\epsilon)$ (см. п. 2.1). Так как $\mathcal{C}_\epsilon$ – пучок алгебр Ли, то в когомологиях этого пучка имеется естественная операция $[\cdot, \cdot]$, соответствующая при изоморфизме де Рама коммутатору ϵ -значных форм. С другой стороны, имеется естественное действие группы плоских сечений $H_{DR}^0(M, E) \simeq H^0(M, \mathcal{C}_E)$ на $H_{DR}^p(M, \epsilon) \simeq H^p(M, \mathcal{C}_\epsilon)$, которое описывается действием Ad на ϵ -значных формах и сохраняет указанную операцию. Определим конические алгебраические подмножества $H_{DR}^1(M, \epsilon)_0 \subset H_{DR}^1(M, \epsilon)$ и $H^1(M, \mathcal{C}_\epsilon)_0 \subset H^1(M, \mathcal{C}_\epsilon)$ формулами

$$H_{DR}^1(M, \epsilon)_0 = \{u \in H_{DR}^1(M, \epsilon) : p^* \Pi_{0,1}^* u = 0, [u, u] = 0\},$$

$$H^1(M, \mathcal{C}_\epsilon)_0 = \{u \in H^1(M, \mathcal{C}_\epsilon) : p^* \iota_\epsilon^*(u) = 0, [u, u] = 0\},$$

где $\iota_\epsilon : \mathcal{C}_\epsilon \rightarrow \mathcal{C}_\epsilon$ – естественное вложение пучков (см. п. 1.3) и $p^* : H^{0,1}(M, \epsilon) \rightarrow H^{0,1}(M, \mathfrak{s})$, $p^* : H^1(M, \mathcal{C}_\epsilon) \rightarrow H^1(M, \mathcal{C}_\mathfrak{s})$ индуцируются естественной проекцией $p : \epsilon \rightarrow \mathfrak{s}$. Очевидно, они инвариантны относительно $H_{DR}^0(M, E)$ и $H^0(M, \mathcal{C}_E)$ соответственно. Нам потребуется также соответствующее подмножество пространства $\mathbb{H}_\epsilon^1$ гармонических ϵ -значных 1-форм. В силу следствия 2 предложения 2.1 $\mathbb{H}_\epsilon^1 = \mathbb{H}_\epsilon^{1,0} \oplus \mathbb{H}_\epsilon^{0,1}$, где первое слагаемое – это множество замкнутых $(1, 0)$ -форм, а второе – замкнутых $(0, 1)$ -форм. Очевидно, $\mathbb{H}_\epsilon^1$ инвариантно относительно $H_{DR}^0(M, E)$. Определим следующее инвариантное подмножество этого пространства:

$$\mathbb{H}_{\epsilon 0}^1 = \{\psi \in \mathbb{H}_\epsilon^1 : \Pi_{0,1} \psi \in \mathbb{H}_{\epsilon n}^{0,1}, [\psi, \psi] \text{ } d\text{-точна}\}.$$

Заметим, что все эти множества и группы когомологий с точностью до изоморфизма зависят только от класса ξ и не зависят от выбора коциклов χ и z .

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть M – компактное кэлерово многообразие и G – связная разрешимая комплексная алгебраическая группа, обладающая свойством Ходжа. Тогда

$$H_{DR}^1(M, G) = \bigsqcup_{\xi \in H^{0,1}(M, S)} H_\xi, \quad (3.12)$$

где H_ξ задается формулой (3.11).

Сопоставляя каждому классу когомологий $\tau \in H_\xi$ гармоническую часть канонической формы, представляющей класс $(r_\gamma^*)^{-1}(\tau) \in \tilde{H}_\xi \subset H_{DR}^1(M, E)$, а этой гармонической форме – соответствующий класс когомологий со значениями в $\mathcal{C}_\epsilon$, получаем следующие биекции:

$$H_\xi \rightarrow \mathbb{H}_{\epsilon 0}^1 / H_{DR}^0(M, E) \rightarrow H_{DR}^1(M, \epsilon)_0 / H_{DR}^0(M, E) \rightarrow H^1(M, \mathcal{C}_\epsilon)_0 / H^0(M, \mathcal{C}_E).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложение (3.12) очевидно. Ясно также, что

$$\tilde{H}_\xi = \bigsqcup_{\sigma \in \text{Ker } p^*} (\Pi_{0,1}^*)^{-1}(\sigma).$$

Согласно предложению 3.3 любой класс когомологий из $(\Pi_{0,1}^*)^{-1}(\sigma)$ содержит каноническую форму ω . По теореме 3.2 $\omega = \psi + \partial h$, где ψ — гармоническая часть формы ω и $h \in A_\epsilon^0$, причем соответствие $\omega \mapsto \psi$ есть биекция между множеством канонических форм из $(\Pi_{0,1}^*)^{-1}(\sigma)$ и множеством форм $\psi \in \mathbb{H}_{\epsilon,0}^1$, для которых $\Pi_{0,1}\psi \in \sigma$. В силу предложения 3.5 две канонические формы ω, ω_1 лежат в одном и том же классе когомологий тогда и только тогда, когда $\omega_1 = \text{Ad } a(\omega)$ для некоторого $a \in H_{DR}^0(M, E)$. При этом предположении имеем $\omega_1 = \text{Ad } a(\psi) + \partial(\text{Ad } a(h))$, откуда следует, что $\psi_1 = \text{Ad } a(\psi)$ есть гармоническая часть формы ω_1 . Обратно, если $\omega_1 = \psi_1 + \partial h_1$, где $\psi_1 = \text{Ad } a(\psi)$ гармонична и $a \in H_{DR}^0(M, E)$, то канонические формы $\text{Ad } a(\omega)$ и ω_1 имеют одну и ту же гармоническую часть и потому совпадают в силу теоремы 3.2. Таким образом, мы получаем биекцию между $\tilde{H}_\xi$ и $\mathbb{H}_{\epsilon,0}^1/H_{DR}^0(M, E)$. Учитывая коммутативность диаграммы (1.20), мы видим, что соответствия между гармоническими формами, когомологиями де Рама и когомологиями со значениями в $\mathcal{C}_E$ приводят к биекциям между $\mathbb{H}_{\epsilon,0}^1$, $H_{DR}^1(M, \epsilon)_0$ и $H^1(M, \mathcal{C}_\epsilon)_0$ и, значит, между $\mathbb{H}_{\epsilon,0}^1/H_{DR}^0(M, E)$, $H_{DR}^1(M, \epsilon)_0/H_{DR}^0(M, E)$ и $H^1(M, \mathcal{C}_\epsilon)_0/H^0(M, \mathcal{C}_E)$.

В заключение этого пункта сделаем два замечания.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Группа параметров $H^{0,1}(M, S)$ в (3.12) изоморфна компактному комплексному тору $(\text{Pic } M)^{\dim S}$ (см. пример 1.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Пусть M — компактное элерово многообразие, G — комплексная группа Ли, P — голоморфное главное расслоение с базой M и слоем G . Известно (см. [3], [4]), что если P задается коциклом z со значениями в максимальной компактной подгруппе K группы G (в частности, P плоско), то малые голоморфные деформации расслоения P плоски и параметризуются $\text{Ad } P$ -значными гармоническими $(0, 1)$ -формами ψ , удовлетворяющими условию $[\psi, \psi] = 0$, где $\text{Ad } P$ — расслоение на алгебры Ли, определенное коциклом $\text{Ad } z$. Условие, наложенное на z , равносильно тому, что гомоморфизм $\pi_1(M) \rightarrow G$, соответствующий расслоению P , принимает значения в K . Предположим теперь, что G — линейная алгебраическая группа. Параметризация гомоморфизмов, близких к данному, $\text{Ad } P$ -значными гармоническими формами позволяет доказать (см. [1]), что многообразие представлений $\text{Hom}(\pi_1(M), G)$ имеет, самое худшее, квадратичные особенности в точках, отвечающих гомоморфизмам со значениями в K . В [2] этот факт был доказан для всех вполне приводимых представлений. Теорему 3.3 можно рассматривать как глобальный результат в том же направлении.

3.5. Этот пункт содержит некоторые дополнения к нашему основному результату.

Заметим, во-первых, что те же самые методы позволяют описать множество $H_{DR}^1(M, E_N)$, где E_N , как и выше, обозначает унитарное плоское расслоение на группы со слоем N , определяемое некоторым коциклом $z \in Z^1(\mathcal{U}, K)$. Чтобы

сформулировать результат, введем алгебраические подмножества $H_{DR}^1(M, \mathfrak{e}_n)_0 \subset H_{DR}^1(M, \mathfrak{e}_n)$, $H^1(M, \mathcal{C}_{\mathfrak{e}_n})_0 \subset H^1(M, \mathcal{C}_{\mathfrak{e}_n})$ и $\mathbb{H}_{\mathfrak{e}_n 0}^1 \subset \mathbb{H}_{\mathfrak{e}_n}^1$ формулами

$$\begin{aligned} H_{DR}^1(M, \mathfrak{e}_n)_0 &= \{u \in H_{DR}^1(M, \mathfrak{e}_n) : [u, u] = 0\}, \\ H^1(M, \mathcal{C}_{\mathfrak{e}_n})_0 &= \{u \in H^1(M, \mathcal{C}_{\mathfrak{e}_n}) : [u, u] = 0\}, \\ \mathbb{H}_{\mathfrak{e}_n 0}^1 &= \{\psi \in \mathbb{H}_{\mathfrak{e}_n}^1 : [\psi, \psi] \text{ } d\text{-точно}\}. \end{aligned}$$

Далее, заметим, что класс $\tau \in H_{DR}^1(M, E)$ лежит в $\text{Im } i^* = \text{Ker } p^*$ тогда и только тогда, когда любая каноническая форма $\omega \in \tau$ удовлетворяет условию $\omega \in A_{\mathfrak{e}_n}$. Действительно, $\omega = \omega_n + \omega_s$, где $\omega_n \in A_{\mathfrak{e}_n}^1$ и $\omega_s \in A_s^{1,0}$. Если $p^*(\tau) = \varepsilon$, то $p(\omega) = \omega_s = \delta_0(a)$, где $a \in F_S$. Очевидно, $\Pi_{0,1}\delta_0(a) = 0$. Если M компактно, то отсюда следует, что $\delta_0(a) = 0$, так что $\omega = \omega_n$. Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 3.3, приводят к следующему результату.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть M – компактное кэлерово многообразие, G – связная разрешимая комплексная линейная алгебраическая группа, обладающая свойством Ходжа, N – ее унитарный радикал и E_N – унитарное плоское расслоение на группы со слоем N , определяемое коциклом $z \in Z^1(\mathfrak{U}, K)$. Если сопоставить каждому классу когомологий $\tau \in H_{DR}^1(M, E_N)$ гармоническую часть канонической формы, лежащей в $i^*(\tau)$, а этой гармонической форме – соответствующий класс когомологий де Рама и класс когомологий со значениями в $\mathcal{C}_{\mathfrak{e}_n}$, то получатся следующие биекции:

$$\begin{aligned} H_{DR}^1(M, E_N) &\rightarrow \mathbb{H}_{\mathfrak{e}_n 0}^1 / H_{DR}^0(M, E_N) \\ &\rightarrow H_{DR}^1(M, \mathfrak{e}_n)_0 / H_{DR}^0(M, E_N) \rightarrow H^1(M, \mathcal{C}_{\mathfrak{e}_n})_0 / H^0(M, \mathcal{C}_{E_N}). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. В частности, в простейшем случае $z = e$ мы получаем описание множества $H_{DR}^1(M, N)$ в терминах алгебры когомологий де Рама $H^1(M, \mathfrak{n})$. Так как группа N стягиваема, то имеется биекция между множествами $H_{DR}^1(M, N)$ и $\text{Hom}(\pi_1(M), N) / \text{Int } N$.

Теперь мы дадим обобщение теоремы 3.3, основанное на том факте, что свойство Ходжа связано только с $(0, 1)$ -частями наших матричных форм. Это наводит на мысль рассмотреть следующий неабелев коцепный комплекс. Пусть $\hat{G}$ – произвольная комплексная линейная алгебраическая группа и G – ее связная разрешимая алгебраическая подгруппа. Обозначим через $\hat{\mathfrak{g}} \supset \mathfrak{g}$ соответствующие алгебры Ли. Рассмотрим тройку $R_{\hat{G}, G} = \{R_{\hat{G}, G}^0, R_{\hat{G}, G}^1, R_{\hat{G}, G}^2\}$, определенную формулой

$$R_{\hat{G}, G}^0 = F_G, \quad R_{\hat{G}, G}^p = \{\alpha \in A_{\hat{\mathfrak{g}}}^p : \Pi_{0,p}\alpha \in A_{\mathfrak{g}}^{0,p}\}, \quad p = 1, 2.$$

Легко проверить, что $R_{\hat{G}, G}$ есть подкомплекс (в смысле [7], [8]) комплекса де Рама $R_{\hat{G}}$. С другой стороны, R_G – подкомплекс в $R_{\hat{G}, G}$, совпадающий с $R_{\hat{G}, G}$ в случае $\hat{G} = G$. Определяются группа 0-когомологий $H^0(R_{\hat{G}, G})$ (совпадающая с $H^0(R_G)$) и множество 1-когомологий $H^1(R_{\hat{G}, G}) = Z^1(R_{\hat{G}, G}) / \rho(F_G)$.

Как и в п. 1.3, $\Pi_{0,1}$ порождает гомоморфизм множеств с отмеченными точками $\Pi_{0,1}^*: H^1(R_{\hat{G}, G}) \rightarrow H^{0,1}(M, G)$. Предположим, что M – компактное кэлерово многообразие, а G обладает свойством Ходжа. Тогда $\Pi_{0,1}^*$ сюръективен.

Для описания множества $H^1(R_{\widehat{G},G})$ мы заменим $R_{\widehat{G},G}$ поджрученным комплексом. Пусть, как и выше, $G = N \rtimes S$ и K — компактная часть тора S . Фиксируем класс $\xi \in H^{0,1}(M, S)$, гармоническую форму χ , лежащую в этом классе, и коцикл Чеха $z = (z_{ij})$, представляющий класс $\mu([\gamma]) \in H^1(M, K)$, где $\gamma = -\overline{\chi} + \chi \in Z^1(R_K)$. Обозначим через $\widehat{E}$ плоское расслоение на группы со слоем G , определяемое коциклом $\text{Int } z$ со значениями в $\text{Aut } \widehat{G}$, и через $\widehat{\epsilon}$ — соответствующее расслоение на алгебры Ли. Ясно, что рассмотренные выше плоские расслоения E и ϵ являются подрасслоениями в $\widehat{E}$ и $\widehat{\epsilon}$ соответственно. Тогда можно определить подкомплекс $R_{\widehat{E},E}$ комплекса $R_{\widehat{E}}$, заданный формулами

$$R_{\widehat{E},E}^0 = F_E, \quad R_{\widehat{E},E}^p = \{\alpha \in A_{\widehat{\epsilon}}^p : \Pi_{0,p}\alpha \in A_{\epsilon}^{0,p}\}, \quad p = 1, 2.$$

Отображение $\Pi_{0,1}$ порождает гомоморфизм $\Pi_{0,1}^*: H^1(R_{\widehat{E},E}) \rightarrow H^{0,1}(M, E)$. При этом имеется следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} H^1(R_{\widehat{E},E}) & \xrightarrow{\Pi_{0,1}^*} & H^{0,1}(M, E) & \xrightarrow{p^*} & H^{0,1}(M, S) \\ r_\gamma^* \downarrow & & \overline{r}_\chi^* \downarrow & & \downarrow \overline{r}_\chi^* \\ H^1(R_{\widehat{G},G}) & \xrightarrow{\Pi_{0,1}} & H^{0,1}(M, G) & \xrightarrow{p^*} & H^{0,1}(M, S) \end{array},$$

где r_γ^* — биекция, индуцированная отображением $r_\gamma: R_{\widehat{E},E}^1 \rightarrow R_{\widehat{G},G}^1$.

Определим подмножество

$$\widehat{H}_\xi = (\Pi_{0,1}^*)^{-1}((p^*)^{-1}(\xi)) \subset H_{DR}^1(M, \widehat{G}). \quad (3.13)$$

Тогда

$$(r_\gamma^*)^{-1}(\widehat{H}_\xi) = \text{Ker}(p^* \circ \Pi_{0,1}^*) \subset H_{DR}^1(M, \widehat{E}).$$

Выберем $\tau \in (r_\gamma^*)^{-1}(\widehat{H}_\xi)$. Форма $\omega \in \tau$ называется *канонической*, если $\Pi_{0,1}\omega \in Z^1(E_N)$. Из наших предположений выводится, что каждый такой класс τ содержит каноническую форму, единственную с точностью до преобразования $\text{Ad } g$, где g — плоское сечение расслоения E . Наконец, определим следующее коническое подмножество пространства $\mathbb{H}_\epsilon^1$:

$$\mathbb{H}_{\epsilon 0}^1 = \{\psi \in \mathbb{H}_\epsilon^1 : \Pi_{0,1}\psi \in \mathbb{H}_{\epsilon n}^{0,1}, [\psi, \psi] \text{ } d\text{-точно}\}.$$

Тогда мы имеем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.5. *Пусть M — компактное кэлерово многообразие и пусть G обладает свойством Ходжа. Тогда*

$$H^1(R_{\widehat{G},G}) = \bigsqcup_{\xi \in H^{0,1}(M, S)} \widehat{H}_\xi,$$

где $\widehat{H}_\xi$ задается формулой (3.13).

Сопоставляя любому классу когомологий $\tau \in \widehat{H}_\xi$ гармоническую часть канонической формы, представляющей класс $(r_\gamma^*)^{-1}(\tau)$, получаем следующую биекцию:

$$\widehat{H}_\xi \rightarrow \mathbb{H}_{\epsilon 0}^1 / H_{DR}^0(M, E).$$

Доказательство в основном повторяет доказательство теоремы 3.3.

Список литературы

1. *Goldman W. M., Millson J. J.* The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds // Publ. Math. IHES. 1988. V. 67. P. 43–96.
2. *Simpson C. T.* Higgs bundles and local systems // Publ. Math. IHES. 1992. V. 75. P. 5–95.
3. *Онищик А. Л.* О деформациях расслоенных пространств // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161. № 1. С. 45–47.
4. *Онищик А. Л.* О деформациях голоморфных расслоенных пространств // Современные проблемы теории аналитических функций. М.: Наука, 1966. С. 236–239.
5. *Brudnyi A.* $\bar{\partial}$ -equations on compact Kähler manifolds and representations of fundamental groups. Research Thesis. Haifa: Technion, 1995.
6. *Brudnyi A.* Classification theorem for a class of flat connections and representations of Kähler group // Michigan Math. J. 1999. V. 46. № 3. P. 489–514.
7. *Онищик А. Л.* Некоторые понятия и применения теории неабелевых когомологий // Труды ММО. 1967. Т. 17. С. 45–88.
8. *Onishchik A. L.* On non-abelian cochain complexes // Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль: ЯрГУ, 1998. С. 171–197.
9. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. Т. 1. М.: Мир, 1982.
10. *Винберг Э. Б., Онищик А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М.: Наука, 1988.
11. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.

Негевский университет им. Бен Гуриона, Израиль;
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
E-mail: brudnyi@cs.bgu.ac.il; arkadiy@onishchik.msk.ru

Поступила в редакцию
16.02.2000