Общероссийский математический портал

К. Ю. Осипенко, Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди–Соболева, *Матем. сб.*, 2001, том 192, номер 2, 67–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm543>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:53:45

УДК 517.53

К. Ю. Осипенко

Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди–Соболева

В работе предложен общий подход к построению оптимальных методов восстановления линейных функционалов по известному решению двойственной экстремальной задачи, основанный на некоторой параметризации этого решения. С помощью предложенного подхода удастся решить ряд задач оптимального восстановления функций на классах Харди–Соболева – таких, как восстановление значений функции по информации о коэффициентах Фурье или о значениях в некоторой системе узлов в периодическом и непериодическом случаях.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Постановка задачи и метод параметризации

Пусть W – некоторое множество из линейного пространства X . Рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного функционала L на этом множестве по значениям линейных функционалов $l_1, \dots, l_n$. Положим для $x \in W$

$$Ix := (l_1x, \dots, l_nx).$$

Оператор $I: W \rightarrow K^n$, где $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ в зависимости от того, вещественное или комплексное линейное пространство X , называется *информационным* оператором. Величина

$$e(L, W, I) := \inf_{S: K^n \rightarrow K} \sup_{x \in W} |Lx - S(Ix)|$$

называется *погрешностью* оптимального восстановления функционала L на множестве W . Всякий метод S_0 , для которого

$$\sup_{x \in W} |Lx - S_0(Ix)| = e(L, W, I),$$

будем называть *оптимальным* методом восстановления.

С. А. Смоляком [1] было доказано, что в вещественном случае для выпуклого и центрально-симметричного множества W среди оптимальных методов восстановления существует линейный и имеет место равенство

$$e(L, W, I) = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix=0}} |Lx|. \quad (1)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-01-01181 и № 00-15-96109).

Аналогичный результат в комплексном случае для выпуклого и уравновешенного множества W был доказан в работе [2] (более общие постановки задач восстановления и соответствующие результаты можно найти в работе [3] и цитируемой там литературе).

Всякий элемент $x_0 \in W$, для которого $Ix_0 = 0$ и

$$|Lx_0| = \sup_{\substack{x \in W \\ Ix=0}} |Lx|,$$

будем называть *экстремальным*. Задача нахождения экстремального элемента чаще оказывается более простой, чем задача нахождения оптимального метода восстановления. Цель данной работы – предложить способ, позволяющий по экстремальному элементу (при наличии некоторой его параметризации) получать оптимальный метод восстановления, и построить ряд оптимальных методов восстановления, используя предложенную схему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – вещественное линейное пространство, W – выпуклое центрально-симметричное множество из X и x_0 – экстремальный элемент в задаче оптимального восстановления линейного функционала L на множестве W по значениям линейных функционалов $l_1x, \dots, l_nx$. Предположим, что при всех $M = (t_1, \dots, t_{s+n}) \in \mathbb{R}^{n+s}$ из некоторой окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^{n+s}$ существуют $x(M) \in X$ такие, что $x(M_0) = x_0$ и для заданных функций $\psi_1(M), \dots, \psi_s(M)$ таких, что $\psi_j(M_0) = 0$, $j = 1, \dots, s$, при всех M из окрестности M_0 , удовлетворяющих условию $\psi_j(M) = 0$, $j = 1, \dots, s$, $x(M) \in W$ (в случае $s = 0$ будем считать, что при всех M из окрестности M_0 $x(M) \in W$). Тогда если функции $\varphi(M) := Lx(M)$, $\varphi_j(M) := l_jx(M)$, $j = 1, \dots, n$, и $\psi_j(M)$, $j = 1, \dots, s$, имеют в окрестности M_0 непрерывные частные производные по всем аргументам и определитель матрицы

$$J(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_s}{\partial t_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_{n+s}} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_{n+s}} & \frac{\partial \psi_1}{\partial t_{n+s}} & \cdots & \frac{\partial \psi_s}{\partial t_{n+s}} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля в точке M_0 , то единственным линейным оптимальным методом восстановления является метод

$$Lx \approx \sum_{j=1}^n C_j l_j x,$$

где $C_1, \dots, C_n$ – решения системы

$$J(M_0)\mathbf{C} = \text{grad } \varphi|_{M_0},$$

в которой $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_{n+s})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$Lx \approx \sum_{j=1}^n C_j l_j x$$

— оптимальный метод восстановления. Тогда в силу того, что x_0 — экстремальный элемент, имеем при всех $x \in W$

$$\left| Lx - \sum_{j=1}^n C_j l_j x \right| \leq |Lx_0|.$$

Следовательно, при всех M из некоторой окрестности M_0 таких, что $\psi_j(M_0) = 0$, $j = 1, \dots, s$, выполнено неравенство

$$\left| \varphi(M) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(M) \right| \leq |\varphi(M_0)|.$$

Поскольку $\varphi_j(M_0) = 0$, $j = 1, \dots, n$, то отсюда легко вытекает, что функция

$$\varphi(M) - \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(M)$$

имеет относительный экстремум в точке M_0 . Метод Лагранжа приводит к необходимым условиям

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t_m} - \sum_{j=1}^n C_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_m} - \sum_{j=1}^s C_{n+j} \frac{\partial \psi_j}{\partial t_m} = 0, \quad m = 1, \dots, n + s,$$

из которых однозначно определяются $C_1, \dots, C_n$.

Приведем один простейший пример. Пусть $\mathcal{H}_\infty^\mathbb{R}$ — пространство функций, аналитических в единичном круге

$$D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

ограниченных в нем и вещественных на интервале $(-1, 1)$. В качестве множества W рассмотрим $H_\infty^\mathbb{R}$ — множество функций из $\mathcal{H}_\infty^\mathbb{R}$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{z \in D} |f(z)| \leq 1.$$

Для задачи оптимального восстановления функций из $H_\infty^\mathbb{R}$ в точке $\tau \in (-1, 1)$ по их значениям в нуле двойственная экстремальная задача (1) решается сразу же с помощью леммы Шварца:

$$\sup_{\substack{f \in H_\infty^\mathbb{R} \\ f(0)=0}} |f(\tau)| = |\tau|.$$

Тем самым функция $f_0(z) = z$ является экстремальной для рассматриваемой задачи. Положим

$$f_1(z, t) = \frac{z + t}{1 + tz}.$$

Легко убедиться, что $f_1(z, t) \in H_\infty^\mathbb{R}$ при всех $t \in (-1, 1)$. Кроме того, $f_1(z, 0) = f_0(z)$ и $f_1(0, t) = t$. Из теоремы 1 получаем, что единственным линейным оптимальным методом восстановления является метод

$$f(\tau) \approx \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}(0, 0) \right)^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial t}(\tau, 0) f(0) = (1 - \tau^2) f(0).$$

Более общие результаты относительно рассмотренной задачи можно найти в [2] и [4] (они также могут быть получены предлагаемым методом).

§ 2. Восстановление по коэффициентам Фурье

Классом Харди–Соболева $H_{\infty, \beta}^r$ будем называть множество 2π -периодических функций, аналитических в полосе $S_\beta := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \beta\}$ и удовлетворяющих условию $|f^{(r)}(z)| \leq 1$, $z \in S_\beta$. Через $H_{\infty, \beta}^{r, \mathbb{R}}$ будем обозначать класс функций из $H_{\infty, \beta}^r$, вещественных на вещественной оси. В случае $r = 0$ эти классы будем обозначать через $H_{\infty, \beta}$ и $H_{\infty, \beta}^\mathbb{R}$ соответственно.

Положим

$$\begin{aligned} a_j(f) &:= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \cos jx \, dx, \quad j = 0, 1, \dots, \\ b_j(f) &:= \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \sin jx \, dx, \quad j = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $\mathbb{T} := [0, 2\pi)$. Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения $f(\xi)$, $f \in H_{\infty, \beta}^r$, $\xi \in \mathbb{T}$, по значениям информационного оператора

$$If = (a_0(f), a_1(f), \dots, a_{n-1}(f), b_1(f), \dots, b_{n-1}(f)).$$

В силу инвариантности рассматриваемого класса относительно сдвига погрешность оптимального восстановления не зависит от точки ξ . Будем обозначать ее через $e(H_{\infty, \beta}^r, I)$.

Решение исследуемой задачи дается в терминах теории эллиптических функций. Напомним некоторые определения из этой теории. Полными эллиптическими интегралами первого рода для модулей k и $k' := \sqrt{1 - k^2}$ называются величины

$$K := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \quad K' := \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}.$$

В дальнейшем будем считать, что k выбрано из условия

$$\frac{\pi K'}{2K} = \beta.$$

При этом k определяется равенством (см., например, [5])

$$k = 4e^{-\beta} \left(\frac{\sum_{m=0}^{\infty} e^{-2\beta m(m+1)}}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\beta m^2}} \right)^2.$$

Мы будем использовать стандартные обозначения $\operatorname{sn}(z, k)$, $\operatorname{cn}(z, k)$ и $\operatorname{dn}(z, k)$ для эллиптических функций Якоби, опуская зависимость их от модуля, когда последний равен k .

Положим

$$\Phi_{n,0}^{\beta} := \sqrt{\lambda} \operatorname{sn} \left(\frac{2n\Lambda}{\pi} z, \lambda \right), \quad \Phi_{n,r}^{\beta} := D_r * \Phi_{n,0}, \quad r \geq 1,$$

где Λ – полный эллиптический интеграл первого рода для модуля λ , определяемого равенством

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = 2n \frac{K'}{K} = \frac{4\beta n}{\pi},$$

$$D_r(t) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(mt - \pi r/2)}{m^r}, \quad r = 1, 2, \dots,$$

– ядро Бернулли, а

$$(f * g)(z) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(z-t)g(t) dt.$$

Функции $\Phi_{n,r}^{\beta}$, введенные в работе [6], обладают свойствами, аналогичными свойствам идеальных сплайнов Эйлера (см., например, [7; гл. 2, §2.3]). Идеальные сплайны Эйлера являются решениями ряда классических экстремальных задач на классах Соболева (о точных значениях поперечников, о неравенстве для производных колмогоровского типа и др.), а функции $\Phi_{n,r}^{\beta}$ оказываются решениями аналогичных задач для аналитических функций из классов Харди–Соболева. Из работы [6] следует, что

$$\Phi_{n,r}^{\beta}(z) = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda} \Lambda n^r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin((2m+1)nz - \pi r/2)}{(2m+1)^r \operatorname{sh}((2m+1)2n\beta)},$$

$$\|\Phi_{n,r}^{\beta}\|_{\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda} \Lambda n^r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m(r+1)}}{(2m+1)^r \operatorname{sh}((2m+1)2n\beta)}, \quad r = 0, 1, \dots$$

(через $\|\cdot\|_{\infty}$ мы обозначаем стандартную норму в $L_{\infty}(\mathbb{T})$).

В [8] было доказано, что

$$e(H_{\infty,\beta}^r, I) = \|\Phi_{n,r}^{\beta}\|_{\infty},$$

а экстремальной функцией для задачи оптимального восстановления значения $f(0)$ на классе $H_{\infty,\beta}^r$ по информационному оператору I является функция

$$\varphi_{n,r}^{\beta}(z) := \begin{cases} \Phi_{n,r}^{\beta} \left(z + \frac{\pi}{2n} \right), & r = 2l, \\ \Phi_{n,r}^{\beta}(z), & r = 2l + 1. \end{cases}$$

Однако вопрос о самом оптимальном методе восстановления остался открытым. Пользуясь теоремой 1, мы построим линейный оптимальный метод восстановления для этой задачи.

Докажем сначала один вспомогательный результат. Положим

$$\operatorname{ctn} z := \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z}{\operatorname{sn} z}.$$

ЛЕММА 1. При всех $0 \leq t_1 < \dots < t_{2n} < 2K$ система функций

$$1, \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_1\right), \dots, \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_{2n}\right)$$

является чебышёвской на множестве $\mathbb{T} \setminus \{\pi t_1/K, \dots, \pi t_{2n}/K\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существуют вещественные числа $C_0, C_1, \dots, C_{2n}$, не все равные нулю, для которых функция

$$C_0 + \sum_{j=1}^{2n} C_j \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_j\right)$$

имеет $2n + 1$ нулей на множестве $\mathbb{T} \setminus \{\pi t_1/K, \dots, \pi t_{2n}/K\}$. Тогда функция

$$\begin{aligned} g(z) = & C_0 \prod_{j=1}^{2n} \operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_j\right) \\ & + \sum_{m=1}^{2n} C_m \operatorname{cn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_m\right) \operatorname{dn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_m\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{2n} \operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}z - t_j\right) \end{aligned}$$

должна иметь не менее $2n + 1$ нулей на $\mathbb{T}$. Функция $g(z)$ — эллиптическая функция с периодами $2\pi, 2\pi K'/K$. Из теоремы Лиувилля (см. [5; гл. 1, п. 4]) следует, что число нулей $g(z)$ в параллелограмме периодов, подсчитанное с учетом кратностей, совпадает с числом полюсов. Число полюсов у функции $g(z)$ в параллелограмме периодов не превосходит $2n + 1$. Поскольку число нулей с учетом кратности 2π -периодической функции $g(z)$ должно быть четным, то оно не превосходит $2n$, что противоречит сделанному предположению.

Положим

$$\sigma(z) := \operatorname{sn}\left(\frac{2n\Lambda}{\pi}z, \lambda\right) \operatorname{ctn} \frac{K}{\pi}z.$$

ТЕОРЕМА 2. Для всех $\xi \in \mathbb{T}$ метод

$$f(\xi) \approx d_0 \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} d_j (a_j(f) \cos j\xi + b_j(f) \sin j\xi),$$

где

$$d_j = \frac{2}{na_j(\sigma)} \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \operatorname{ctn} \frac{2m-1}{2n} K \cos j \frac{2m-1}{2n} \pi, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

является оптимальным на классе $H_{\infty,\beta}$. При $r \geq 1$ для всех $\xi \in \mathbb{T}$ оптимальным методом на классе $H_{\infty,\beta}^r$ является метод

$$f(\xi) \approx \frac{a_0(f)}{2} + \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{j^r d_{jr}}{a_j(\sigma)} (a_j(f) \cos j\xi + b_j(f) \sin j\xi),$$

где

$$d_{jr} = \begin{cases} (-1)^{r/2} \sum_{m=1}^n (D_r * \sigma) \left(\frac{2m-1}{2n} \pi \right) \cos j \frac{2m-1}{2n} \pi, & r = 2l, \\ (-1)^{(r-1)/2} \sum_{m=1}^{n-1} \left((D_r * \sigma) \left(\frac{m}{n} \pi \right) - (D_r * \sigma)(\pi) \right) \sin j \frac{m}{n} \pi, & r = 2l + 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала задачу об оптимальном восстановлении значения $f(0)$ на классе $H_{\infty,\beta}^{r,\mathbb{R}}$ по информационному оператору

$$I_0 f := (a_0(f), a_1(f), \dots, a_{n-1}(f)).$$

Имеем

$$e(H_{\infty,\beta}^{r,\mathbb{R}}, I_0) = \sup_{\substack{f \in H_{\infty,\beta}^{r,\mathbb{R}} \\ I_0 f = 0}} |f(0)| \geq |\varphi_{n,r}^\beta(0)|.$$

С другой стороны, если $f \in H_{\infty,\beta}^{r,\mathbb{R}}$ и $I_0 f = 0$, то, положив

$$f_0(z) := \frac{f(z) + f(-z)}{2},$$

получаем, что $f_0 \in H_{\infty,\beta}^{r,\mathbb{R}}$, $I_0 f_0 = 0$ и, кроме того, поскольку f_0 четная функция, $b_m(f) = 0$, $m \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$f(0) = f_0(0) \leq \sup_{\substack{f \in H_{\infty,\beta}^{r,\mathbb{R}} \\ I f = 0}} |f(0)| = |\varphi_{n,r}^\beta(0)|.$$

Тем самым

$$e(H_{\infty,\beta}^{r,\mathbb{R}}, I_0) = |\varphi_{n,r}^\beta(0)|.$$

С помощью первого главного преобразования эллиптических функций $(2n)$ -й степени можно показать (см. [9]), что

$$\varphi_{n,0}^\beta(z) = \sqrt{\lambda} \operatorname{sn} \left(\frac{2n\Lambda}{\pi} z + \Lambda, \lambda \right) = k^n \prod_{m=1}^{2n} \operatorname{sn} \left(\frac{K}{\pi} z - \frac{2m-1}{2n} K \right).$$

Положим для $M = (t_1, \dots, t_n)$

$$h_M(z) := k^n \prod_{m=1}^n \operatorname{sn} \left(\frac{K}{\pi} z - t_m \right) \prod_{m=n+1}^{2n} \operatorname{sn} \left(\frac{K}{\pi} z - \frac{2m-1}{2n} K \right).$$

Тогда при всех $M \in [0, 2K)^n$ $h_M \in H_{\infty, \beta}^{\mathbb{R}}$, а для

$$t_m^0 := \frac{2m-1}{2n}K$$

и $M_0 := (t_1^0, \dots, t_n^0)$ $h_{M_0} = \varphi_{n,0}^\beta$.

Пусть $r = 0$. Покажем, что определитель матрицы $J(M_0)$, состоящей из элементов

$$\left. \frac{\partial a_j(h_M)}{\partial t_m} \right|_{M_0} = a_j \left(\left. \frac{\partial h_M}{\partial t_m} \right|_{M_0} \right), \quad m = 1, \dots, n, \quad j = 0, \dots, n-1,$$

отличен от нуля. Если предположить противное, то найдутся вещественные числа $C_1, \dots, C_n$, не все равные нулю, такие, что для функции

$$g = \sum_{m=1}^n C_m \left. \frac{\partial h_M}{\partial t_m} \right|_{M_0}$$

будут выполнены равенства $a_0(g) = \dots = a_{n-1}(g) = 0$. Следовательно, для четной функции $g_0(z) := g(z) + g(-z)$ будут выполняться равенства

$$a_0(g_0) = a_1(g_0) = b_1(g_0) = \dots = a_{n-1}(g_0) = b_{n-1}(g_0) = 0.$$

Поскольку

$$\left. \frac{\partial h_M}{\partial t_m} \right|_{M_0}(z) = -h_M(z) \operatorname{ctn} \left(\frac{K}{\pi} z - t_m^0 \right),$$

то в силу четности функции h_{M_0} имеем

$$\begin{aligned} g_0(z) &= -h_{M_0}(z) \sum_{m=1}^n C_m \left(\operatorname{ctn} \left(\frac{K}{\pi} z - t_m^0 \right) - \operatorname{ctn} \left(\frac{K}{\pi} z + t_m^0 \right) \right) \\ &= -h_{M_0}(z) \sum_{m=1}^n C_m \left(\operatorname{ctn} \left(\frac{K}{\pi} z - t_m^0 \right) - \operatorname{ctn} \left(\frac{K}{\pi} z - \tau_m^0 \right) \right), \end{aligned}$$

где $\tau_m^0 = 2K - t_m^0$. Положим

$$F := g_0 - C_0 h_{M_0},$$

где $C_0 = g_0(0)/h_{M_0}(0)$. Для функции F выполняются равенства

$$a_0(F) = a_1(F) = b_1(F) = \dots = a_{n-1}(F) = b_{n-1}(F) = 0.$$

В силу того, что тригонометрическая система

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos(n-1)x, \sin(n-1)x$$

является чебышёвской, функция F должна иметь не менее $2n$ перемен знака на $\mathbb{T}$ (см. [10; с. 41]). Кроме того, функция $F(z)$ в силу четности имеет нуль при $z = 0$

без перемены знака. Тем самым у функции F не менее $2n + 1$ различных нулей на $\mathbb{T}$, что противоречит лемме 1.

Из теоремы 1 (при $s = 0$) вытекает, что для нахождения оптимального метода остается решить систему

$$\sum_{j=0}^{n-1} C_j a_j \left(\frac{\partial h_M}{\partial t_m} \Big|_{M_0} \right) = \frac{\partial h_M(0)}{\partial t_m} \Big|_{M_0} = \sqrt{\lambda} \operatorname{ctn} \frac{2m-1}{2n} K, \quad m = 1, \dots, n. \quad (2)$$

Имеем

$$\begin{aligned} a_j \left(\frac{\partial h_M}{\partial t_m} \Big|_{M_0} \right) &= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} h_{M_0}(z) \operatorname{ctn} \left(\frac{K}{\pi} z - t_m^0 \right) \cos jz \, dz \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} h_{M_0} \left(z + \frac{2m-1}{2n} \pi \right) \operatorname{ctn} \frac{K}{\pi} z \cos j \left(z + \frac{2m-1}{2n} \pi \right) \, dz \\ &= (-1)^{m+1} \sqrt{\lambda} a_j(\sigma) \cos j \frac{2m-1}{2n} \pi. \end{aligned}$$

Из того что определитель системы (2) отличен от нуля, вытекает, что $a_j(\sigma) \neq 0$, $j = 0, \dots, n-1$. Тем самым система (2) эквивалентна системе

$$\sum_{j=0}^{n-1} C_j a_j(\sigma) \cos j \frac{2m-1}{2n} \pi = (-1)^{m+1} \operatorname{ctn} \frac{2m-1}{2n} K, \quad m = 1, \dots, n. \quad (3)$$

В силу ортогональности системы функций $1, \cos x, \dots, \cos(n-1)x$ на сетке $\frac{2m-1}{2n} \pi$, $m = 1, \dots, n$, получаем, что $C_0 = d_0/2$, $C_j = d_j$, $j = 1, \dots, n-1$.

Пусть теперь $r \geq 1$. Рассмотрим функцию

$$h_{P,r}(z) := \begin{cases} \frac{t_0}{2} + (D_r * h_M)(z), & r = 2l, \\ \frac{t_0}{2} + (D_r * h_M) \left(z - \frac{\pi}{2n} \right), & r = 2l + 1, \end{cases}$$

где $P = (t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. При всех P таких, что

$$\psi(P) := a_0(h_M) = 0,$$

$h_{P,r} \in H_{\infty,\beta}^{r,\mathbb{R}}$ и, кроме того, для $P_0 := (0, t_1^0, \dots, t_n^0)$ $h_{P_0,r} = \varphi_{n,r}^\beta$. Из теоремы 1 (теперь уже с $s = 1$) следует, что для нахождения оптимального метода восстановления надо решить систему

$$\sum_{j=0}^{n-1} C_j \frac{\partial a_j(h_{P,r})}{\partial t_m} \Big|_{P_0} + C_n \frac{\partial \psi}{\partial t_m} = \frac{\partial h_{P,r}(0)}{\partial t_m} \Big|_{P_0}, \quad m = 0, \dots, n. \quad (4)$$

Имеем (все частные производные вычисляются в точке P_0):

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_0(h_{P,r})}{\partial t_0} &= 1, \quad \frac{\partial a_j(h_{P,r})}{\partial t_0} = 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t_0} = 0, \\ \frac{\partial a_0(h_{P,r})}{\partial t_m} &= 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t_m} = (-1)^{m+1} \sqrt{\lambda} a_0(\sigma), \quad m = 1, \dots, n, \\ \frac{\partial a_j(h_{P,r})}{\partial t_m} &= \begin{cases} (-1)^{r/2+m+1} \frac{\sqrt{\lambda} a_j(\sigma)}{j^r} \cos j \frac{2m-1}{2n} \pi, & r = 2l, \\ (-1)^{r/2+m-1/2} \frac{\sqrt{\lambda} a_j(\sigma)}{j^r} \sin j \frac{m}{n} \pi, & r = 2l+1, \end{cases} \\ &\quad j = 1, \dots, n-1, \quad m = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

При $r = 2l$ система (4) принимает вид: $C_0 = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{r/2} \frac{a_j(\sigma)}{j^r} C_j \cos j \frac{2m-1}{2n} \pi + a_0(\sigma) C_n &= (D_r * \sigma) \left(\frac{2m-1}{2n} \pi \right), \\ m &= 1, \dots, n, \end{aligned}$$

и решается аналогично системе (2).

Если $r = 2l+1$, то система (4) сводится к следующей: $C_0 = \frac{1}{2}$,

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{(r-1)/2} \frac{a_j(\sigma)}{j^r} C_j \sin j \frac{m}{n} \pi - a_0(\sigma) C_n = (D_r * \sigma) \left(\frac{m}{n} \pi \right), \quad m = 1, \dots, n.$$

Пользуясь ортогональностью системы функций $\sin x, \dots, \sin(n-1)x$ на сетке $m\pi/n$, $m = 1, \dots, n-1$, получаем решение этой системы.

Докажем, что построенный метод (обозначим его через S) является оптимальным на классе $H_{\infty,\beta}^r$. Предположим, что найдется функция $f_0 \in H_{\infty,\beta}^r$, для которой

$$|f_0(0) - S(I_0 f_0)| > e(H_{\infty,\beta}^r, I_0). \quad (5)$$

Тогда для функции $\overline{f_0(\bar{z})} \in H_{\infty,\beta}^r$ также выполнено неравенство (5). Без ограничения общности можно считать, что $f_0(0) - S(I_0 f_0) > 0$. Следовательно, для функции

$$g(z) := \frac{f_0(z) + \overline{f_0(\bar{z})}}{2} \in H_{\infty,\beta}^{r,\mathbb{R}}$$

имеем

$$g(0) - S(I_0 g) > e(H_{\infty,\beta}^r, I_0) \geq e(H_{\infty,\beta}^{r,\mathbb{R}}, I_0),$$

что невозможно в силу оптимальности метода S на классе $H_{\infty,\beta}^{r,\mathbb{R}}$.

Для нахождения оптимального метода восстановления значения $f(\xi)$ достаточно рассмотреть оптимальный метод восстановления в нуле для функции $F(z) = f(z + \xi)$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для всех $\xi \in \mathbb{T}$ метод

$$f(\xi) \approx \frac{1}{n} \sum_{|j| \leq n-1} \left(\sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \operatorname{ctn} \frac{2m-1}{2n} K \cos j \frac{2m-1}{2n} \pi \right) \frac{e^{ij\xi}}{c_j(\sigma)} c_j(f)$$

является оптимальным методом восстановления на классе $H_{\infty, \beta}$ по значениям коэффициентов Фурье

$$c_j(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) e^{-ij t} dt, \quad |j| \leq n-1.$$

При $r \geq 1$ для всех $\xi \in \mathbb{T}$ оптимальным методом на классе $H_{\infty, \beta}^r$ является метод

$$f(\xi) \approx c_0(f) + \frac{1}{n} \sum_{\substack{|j| \leq n-1 \\ j \neq 0}} |j|^r d_{|j|^r} \frac{e^{ij\xi}}{c_j(\sigma)} c_j(f).$$

§3. Восстановление по значениям в точках

Рассмотрим теперь задачу оптимального восстановления значения $f(\xi)$, $f \in H_{\infty, \beta}^r$, $\xi \in \mathbb{T}$, по значениям информационного оператора

$$I_\tau := (f(\tau_1), \dots, f(\tau_{2n})),$$

где $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_{2n})$, $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{2n} < 2\pi$. Будем считать, что $r \geq 1$ (при $r = 0$ решение рассматриваемой задачи было получено в [8]).

Докажем сначала ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 2. При всех $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{2n} < 2\pi$ найдутся такие $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_{2n} < 2\pi$, что для функции $f_0 \in H_{\infty, \beta}^r$, имеющей вид

$$f_0 = c + D_r * B_0,$$

где $c \in \mathbb{R}$, а

$$B_0(t) = k^n \prod_{j=1}^{2n} \operatorname{sn} \left(\frac{K}{\pi} (t - \theta_j) \right),$$

$$a_0(B_0) = 0 \text{ и } f_0(\tau_1) = \dots = f_0(\tau_{2n}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что произведением Бляшке порядка m для области $\Omega \subset \mathbb{C}$ называется функция вида

$$B(z) = \varepsilon \exp \left(- \sum_{j=1}^m P(z, \zeta_j) \right),$$

где $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ — точки из Ω , $|\varepsilon| = 1$, $P(z, \zeta) = u(z, \zeta) + iv(z, \zeta)$, $u(z, \zeta)$ — функция Грина области Ω с особенностью в точке ζ , а $v(z, \zeta)$ — сопряженная к $u(z, \zeta)$ функция (в общем случае многозначная). Обозначим через $\mathcal{B}_{2n}$ множество однозначных произведений Бляшке в кольце $\Omega_\beta = \{z \in \mathbb{C} : e^{-\beta} < |z| < e^\beta\}$ степени не

выше $2n$, вещественных на единичном круге $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. В работе [11] с помощью обобщенной задачи Неванлинны–Пика было построено нечетное и непрерывное в топологии равномерной сходимости на компактах из Ω_β отображение $\sigma : S^{2n} \rightarrow \mathcal{B}_{2n}$, где

$$S^{2n} = \left\{ x = (x_0, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1} : \sum_{j=0}^{2n+1} |x_j|^2 = 1 \right\}.$$

Положим для $x \in S^{2n}$

$$\sigma_0(x) = (a_0(B), f_B(\tau_2) - f_B(\tau_1), \dots, f_B(\tau_{2n}) - f_B(\tau_1)),$$

где $B(t) = \sigma(x)(e^{it})$, а $f_B = D_r * B$. Тогда отображение $\sigma_0 : S^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ является нечетным и непрерывным, а следовательно, по теореме Борсука существует $x_0 \in S^{2n}$, для которого $\sigma_0(x_0) = 0$. Тем самым построена функция $\widehat{B}(t) := \sigma(x_0)(e^{it})$, для которой $a_0(\widehat{B}) = 0$, и функция $\widehat{f} := a + D_r * \widehat{B}$, для которой при $a = -(D_r * \widehat{B})(\tau_1)$

$$\widehat{f}(\tau_1) = \dots = \widehat{f}(\tau_{2n}) = 0.$$

Поскольку $\widehat{f}^{(r)} = \widehat{B}$, то из теоремы Ролля вытекает, что $\widehat{B}$ имеет не менее $2n$ различных нулей на $\mathbb{T}$, а в силу того, что $\sigma(x_0) \in \mathcal{B}_{2n}$, $\widehat{B}$ имеет ровно $2n$ нулей на $\mathbb{T}$. Остается заметить, что из вида произведений Бляшке для кольца с нулями на единичной окружности (см. [9]) вытекает равенство

$$\widehat{B}(t) = \varepsilon B_0(t),$$

где $\varepsilon = 1$ или -1 . Положив $f_0 = \varepsilon \widehat{f}$, получим утверждение леммы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{2n} < 2\pi$ и f_0 — функция из леммы 2. Тогда для любого $\xi \in \mathbb{T}$ и любой функции $f \in H_{\infty, \beta}^r$ такой, что $f(\tau_1) = \dots = f(\tau_{2n}) = 0$, выполнено неравенство

$$|f(\xi)| \leq |f_0(\xi)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что при некотором $\xi \in \mathbb{T} \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_{2n}\}$ найдется функция $g \in H_{\infty, \beta}^r$, для которой $g(\tau_1) = \dots = g(\tau_{2n}) = 0$ и $|g(\xi)| > |f_0(\xi)|$. Так как для функции $\widehat{g}(z) = g(z) \exp(-i \arg g(\xi))$ выполнены те же условия, можно без ограничения общности считать, что $g(\xi) > 0$. Положим

$$g_0(z) := \frac{g(z) + \overline{g(\bar{z})}}{2}.$$

Очевидно, что $g_0 \in H_{\infty, \beta}^{r, \mathbb{R}}$ и $g_0(\xi) = g(\xi)$. Рассмотрим функцию

$$F := f_0 - \rho g_0, \quad \rho = \frac{f_0(\xi)}{g_0(\xi)}.$$

Эта функция имеет нули в точках $\tau_1, \dots, \tau_{2n}, \xi$. Следовательно, по теореме Ролля $F^{(r)}$ имеет не менее $2n+1$ нулей на $\mathbb{T}$. Отсюда вытекает, что однозначная и аналитическая в кольце Ω_β функция $F^{(r)}\left(\frac{1}{i} \ln w\right)$ имеет в этом кольце не менее $2n+1$ нулей. Поскольку произведение Бляшке на границе Ω_β удовлетворяет условию

$$\left| B_0\left(\frac{1}{i} \ln w\right) \right| = 1, \quad w \in \partial\Omega_\beta,$$

а $f_0^{(r)} = B_0$, то при $w \in \partial\Omega_\beta$

$$\left| f_0^{(r)}\left(\frac{1}{i} \ln w\right) - F^{(r)}\left(\frac{1}{i} \ln w\right) \right| = \left| \rho g_0^{(r)}\left(\frac{1}{i} \ln w\right) \right| \leq |\rho| < 1 = \left| f_0^{(r)}\left(\frac{1}{i} \ln w\right) \right|.$$

Так как у $B_0\left(\frac{1}{i} \ln w\right)$ ровно $2n$ нулей в области Ω_β , то по теореме Руше точно такое же число нулей должно быть и у функции $F^{(r)}\left(\frac{1}{i} \ln w\right)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *При всех $\xi \in \mathbb{T}$ метод*

$$f(\xi) \approx \sum_{j=1}^{2n} C_j(\xi) f(\tau_j),$$

в котором $C_1(\xi), \dots, C_{2n}(\xi)$ являются решениями системы

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 \\ f_1(\tau_1) & \dots & f_1(\tau_{2n}) & a_0(g_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{2n}(\tau_1) & \dots & f_{2n}(\tau_{2n}) & a_0(g_{2n}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(\xi) \\ C_2(\xi) \\ \vdots \\ C_{2n+1}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ f_1(\xi) \\ \vdots \\ f_{2n}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где

$$f_m = (D_r * g_m), \quad g_m(t) = B_0(t) \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(t - \theta_m)\right), \quad m = 1, \dots, 2n,$$

а функция B_0 с нулями θ_m определена в лемме 2, является оптимальным на классе $H_{\infty, \beta}^r$. При этом для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$e(\xi, H_{\infty, \beta}^r, I_\tau) = |(D_r * B_0)(\xi) - (D_r * B_0)(\tau_1)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\theta_0 := -(D_r * B_0)(\tau_1)$ и

$$B_P(t) := k^n \prod_{j=1}^{2n} \operatorname{sn}\left(\frac{K}{\pi}(t - t_j)\right), \quad f_P := t_0 + D_r * B_P,$$

где $P = (t_0, t_1, \dots, t_{2n})$. Тогда при $P = P_0 := (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{2n})$ в силу соотношения двойственности (1) и предложения 1 функция f_{P_0} является экстремальной в задаче оптимального восстановления значения $f(\xi)$ на классе $H_{\infty, \beta}^r$, а также и на классе $H_{\infty, \beta}^{r, \mathbb{R}}$. Положим

$$\tau_0 := \xi, \quad \varphi_j(P) := f_P(\tau_j), \quad j = 0, \dots, 2n, \quad \psi(P) := a_0(B_P).$$

Имеем

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_0} = 1, \quad j = 0, \dots, 2n, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t_0} = 0$$

и при всех $m = 1, \dots, 2n$

$$\left. \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_m} \right|_{P_0} = -\frac{K}{\pi} f_m(\tau_j), \quad j = 0, \dots, 2n, \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial t_m} \right|_{P_0} = -\frac{K}{\pi} a_0(g_m).$$

Из теоремы 1 вытекает, что коэффициенты оптимального метода восстановления определяются из системы (6) при условии, что определитель этой системы отличен от нуля. Если предположить противное, то должны найтись вещественные $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2n}$, не все равные нулю, для которых функция

$$g = \alpha_0 + D_r * \left(\sum_{j=1}^{2n} \alpha_j g_j \right)$$

обращается в нуль в точках $\tau_1, \dots, \tau_{2n}$ и, кроме того,

$$a_0 \left(\sum_{j=1}^{2n} \alpha_j g_j \right) = 0.$$

Пусть $\tau_0 \in \mathbb{T} \setminus \{\tau_1, \dots, \tau_{2n}\}$. Рассмотрим функцию

$$F := g - \rho f_{P_0}, \quad \rho = \frac{g(\tau_0)}{f_{P_0}(\tau_0)}.$$

Функция F имеет нули в точках $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{2n}$. Следовательно, по теореме Ролля $F^{(r)}$ имеет не менее $2n + 1$ нулей на $\mathbb{T}$. Имеем

$$F^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j g_j(t) - \rho B_0(t) = B_0(t) \left(\sum_{j=1}^{2n} \alpha_j \operatorname{ctn}\left(\frac{K}{\pi}(t - \theta_j)\right) - \rho \right).$$

Из леммы 1 вытекает, что $F^{(r)}$ не может иметь более чем $2n$ нулей на $\mathbb{T}$. Полученное противоречие доказывает, что определитель системы (6) отличен от нуля.

Для доказательства оптимальности построенного метода на классе $H_{\infty, \beta}^r$ можно воспользоваться теми же рассуждениями, которые были проведены в доказательстве теоремы 2.

Обозначим матрицу системы (6) через A . Тогда оптимальный метод, построенный в теореме 3, будет иметь вид

$$f(\xi) \approx (A^{-1} \mathbf{G}(\xi), \mathbf{f}) = (\mathbf{G}(\xi), (A^*)^{-1} \mathbf{f}),$$

где $\mathbf{G}(\xi) = (1, f_1(\xi), \dots, f_{2n}(\xi))$, $\mathbf{f} = (f(\tau_1), \dots, f(\tau_{2n}), 0)$, а A^* — матрица, сопряженная к A (здесь $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{2n+1}$). Тем самым оптимальный метод может быть записан в виде

$$f(\xi) \approx d_0 + \sum_{m=1}^{2n} d_m (D_r * g_m)(\xi),$$

где $d_0, d_1, \dots, d_{2n}$ — решения системы

$$\begin{cases} d_0 + \sum_{m=1}^{2n} d_m (D_r * g_m)(\tau_j) = f(\tau_j), & j = 1, \dots, 2n, \\ \sum_{m=1}^{2n} d_m a_0(g_m) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Пусть X_{2n}^θ — множество функций вида

$$c_0 + \sum_{n=1}^{2n} c_m (D_r * g_m),$$

где $c_1, \dots, c_{2n}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{2n} c_m a_0(g_m) = 0.$$

Тогда, учитывая (7), получаем

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_{2n} < 2\pi$, а $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_{2n} < 2\pi$ определены леммой 2. Тогда функция $g(\xi) \in X_{2n}^\theta$, интерполирующая f в точках $\tau_1, \dots, \tau_{2n}$, является оптимальным методом восстановления значения $f(\xi)$, $\xi \in \mathbb{T}$, на классе $H_{\infty, \beta}^r$ по значениям в точках $\tau_1, \dots, \tau_{2n}$.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления для равномерной сетки

$$\tau_m^0 := \frac{m-1}{n} \pi, \quad m = 1, \dots, 2n.$$

Положим

$$t_{mr} := \begin{cases} \tau_m^0, & r = 2l, \\ \tau_m^0 + \frac{\pi}{2n}, & r = 2l + 1, \end{cases} \quad m = 1, \dots, 2n.$$

ТЕОРЕМА 4. При всех $\xi \in \mathbb{T}$ метод

$$f(\xi) \approx \widehat{f}_1 + \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{2n} \left(\sum_{j=2}^{2n} \frac{\widehat{f}_j}{\widehat{c}_j} e^{-i(m-1)(j-1)\pi/n} \right) (D_r * \sigma)(\xi - t_{mr}),$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{f}_j &= \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{2n} f(\tau_m^0) e^{i(m-1)(j-1)\pi/n}, \\ \widehat{c}_j &= \frac{1}{2n} \sum_{m=1}^{2n} (D_r * \sigma)(t_{mr}) e^{i(m-1)(j-1)\pi/n}, \end{aligned} \quad j = 1, \dots, 2n,$$

является оптимальным методом восстановления на классе $H_{\infty, \beta}^r$, использующим информацию о значениях функции в равномерной сетке τ_m^0 , $m = 1, \dots, 2n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r = 2l$. Тогда $\Phi_{n,r}^\beta(\tau_m^0) = 0$, $m = 1, \dots, 2n$. Поскольку

$$\Phi_{n,r}^\beta = (D_r * \varphi_{n,0}^\beta) \left(z - \frac{\pi}{2n} \right),$$

а

$$\varphi_{n,0}^\beta \left(z - \frac{\pi}{2n} \right) = -k^n \prod_{m=1}^{2n} \operatorname{sn} \left(\frac{k}{\pi} (z - \tau_m^0) \right),$$

то для системы точек τ_m^0 точки θ_m из леммы 2 совпадают с τ_m^0 . Тем самым

$$g_m(z) = (-1)^{m+1} \sqrt{\lambda} \sigma(z - \tau_m^0).$$

Система (7) в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\begin{cases} d_0 + \sqrt{\lambda} \sum_{m=1}^{2n} (-1)^{m+1} d_m (D_r * \sigma)(\tau_j^0 - \tau_m^0) = f(\tau_j), & j = 1, \dots, 2n, \\ \sum_{m=1}^{2n} (-1)^{m+1} d_m = 0. \end{cases}$$

Положив $x_0 = d_0$, $x_m = \sqrt{\lambda} (-1)^{m+1} d_m$, $c_m = (D_r * \sigma)(\tau_m^0)$ и пользуясь периодичностью и четностью функции $D_r * \sigma$, приходим к системе

$$\begin{pmatrix} 1 & c_1 & c_2 & \dots & c_{2n} \\ 1 & c_{2n} & c_1 & \dots & c_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & c_2 & c_3 & \dots & c_1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{2n-1} \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\tau_1^0) \\ f(\tau_2^0) \\ \vdots \\ f(\tau_{2n}^0) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Сложив первые $2n$ равенств этой системы и пользуясь последним равенством, находим, что $x_0 = \widehat{f}_1$. Далее решение легко может быть найдено с помощью равенства

$$U^*CU = \begin{pmatrix} \widehat{c}_1 & & & \\ & \widehat{c}_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \widehat{c}_{2n} \end{pmatrix},$$

где

$$U = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{i(j-1)(m-1)\pi/n} \right\}_{j,m=1}^{2n}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{2n} \\ c_{2n} & c_1 & \dots & c_{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_2 & c_3 & \dots & c_1 \end{pmatrix}.$$

Если $r = 2l + 1$, то

$$\Phi_{n,r}^\beta \left(\tau_m^0 + \frac{\pi}{2n} \right) = 0, \quad m = 1, \dots, 2n.$$

Поскольку

$$\Phi_{n,r}^\beta \left(z + \frac{\pi}{2n} \right) = (D_r * \varphi_{n,0}^\beta)(z),$$

а

$$\varphi_{n,0}^\beta(z) = k^n \prod_{m=1}^{2n} \operatorname{sn} \left(\frac{K}{\pi} \left(z - \left(\tau_m^0 + \frac{\pi}{2n} \right) \right) \right),$$

то точки θ_m из леммы 2 совпадают в этом случае с точками $\tau_m^0 + \frac{\pi}{2n}$. Следовательно,

$$g_m(z) = (-1)^m \sqrt{\lambda} \sigma \left(z - \left(\tau_m^0 + \frac{\pi}{2n} \right) \right).$$

Далее рассуждения проводятся аналогично четному случаю.

§ 4. Непериодический случай

В непериодическом случае классом Харди–Соболева H_∞^r будем называть множество функций, аналитических в единичном круге $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и удовлетворяющих условию $|f^{(r)}(z)| < 1, z \in D$. Через $H_\infty^{r,\mathbb{R}}$ обозначим класс функций из H_∞^r , вещественных в интервале $(-1, 1)$. При $r = 0$ класс H_∞^r будем обозначать через H_∞ .

Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения $f(\xi), \xi \in (-1, 1)$, по значениям информационного оператора

$$I_\tau f = (f(\tau_1), \dots, f(\tau_{n+r})),$$

где $-1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n+r} < 1$. В случае $r = 0$ решение рассматриваемой задачи было получено в работе [2], поэтому будем считать, что $r \geq 1$.

Для функций f , аналитических в единичном круге, положим

$$(T_r f)(z) := \int_0^z \frac{(z - \zeta)^{r-1}}{(r-1)!} f(\zeta) d\zeta.$$

Очевидно, что $(T_r f)^{(r)} = f$, и, следовательно, $T_r f \in H_\infty^r$ при всех $f \in H_\infty$.

Из работы [12] вытекает следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При всех $-1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n+r} < 1$ найдутся такие $\tau_1 < z_1 < \dots < z_n < \tau_{n+r}$, что для функции $f_0 \in H_\infty^r$, имеющей вид*

$$f_0 = P_{r-1} + T_r B_0,$$

где P_{r-1} — полином степени $r-1$, а B_0 — произведение Бляшке порядка n

$$B_0(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - z_j}{1 - \bar{z}_j z},$$

выполняются равенства

$$f_0(\tau_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n+r.$$

Кроме того, при всех $\xi \in (-1, 1)$

$$\sup_{\substack{f \in H_\infty^r \\ f(\tau_1) = \dots = f(\tau_{n+r}) = 0}} |f(\xi)| = |f_0(\xi)|. \quad (8)$$

Из равенства (8) сразу следует, что для погрешности оптимального восстановления значения $f(\xi)$ на классе H_∞^r справедливо равенство

$$e(\xi, H_\infty^r, I_\tau) = |f_0(\xi)|.$$

Оптимальный метод восстановления и в этом случае может быть получен с помощью теоремы 1.

ТЕОРЕМА 5. *При всех $\xi \in (-1, 1)$ метод*

$$f(\xi) \approx \sum_{j=1}^{n+r} C_j(\xi) f(\tau_j),$$

в котором $C_1(\xi), \dots, C_{n+r}(\xi)$ являются решениями системы

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \tau_1 & \dots & \tau_{n+r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau_1^{r-1} & \dots & \tau_{n+r}^{r-1} \\ (T_r g_1)(\tau_1) & \dots & (T_r g_1)(\tau_{n+r}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (T_r g_n)(\tau_1) & \dots & (T_r g_n)(\tau_{n+r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(\xi) \\ C_2(\xi) \\ \vdots \\ C_{n+r}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \\ \vdots \\ \xi^{r-1} \\ (T_r g_1)(\xi) \\ \vdots \\ (T_r g_n)(\xi) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$g_m(z) = B_0(z) \frac{1 - z^2}{(z - z_m)(1 - \bar{z}_m z)}, \quad m = 1, \dots, n,$$

а функция B_0 с нулями z_m определена в предложении 2, является оптимальным на классе H_∞^r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $P = (a_0, a_1, \dots, a_{r-1}, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+r}$ положим

$$f_P(z) := \sum_{j=0}^{r-1} a_j z^j + (T_r B_P)(z),$$

где

$$B_P(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - t_j}{1 - t_j z}.$$

Пусть полином P_{r-1} из предложения 2 имеет вид

$$P_{r-1} = \sum_{j=0}^{r-1} a_j^0 z^j.$$

Тогда при $P = P_0 := (a_0^0, a_1^0, \dots, a_{r-1}^0, z_1, \dots, z_n)$ функция f_{P_0} является экстремальной в задаче оптимального восстановления значения $f(\xi)$ на классах H_∞^r и $H_\infty^{r, \mathbb{R}}$. Положим $\tau_0 := \xi$,

$$\varphi_j(P) := f_P(\tau_j), \quad j = 0, \dots, n+r.$$

Имеем при всех $j = 0, \dots, n+r$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j}{\partial a_m} &= \tau_j^m, & m &= 0, \dots, r-1, \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial t_m} &= (T_r g_m)(\tau_j), & m &= 1, \dots, n+r. \end{aligned}$$

Для получения оптимального метода на классе $H_\infty^{r, \mathbb{R}}$ остается применить теорему 1, предварительно проверив, что определитель системы (9) отличен от нуля. Если предположить, что этот определитель равен нулю, то найдутся $C_1, \dots, C_{n+r}$, не все равные нулю, такие, что функция

$$F(z) := \sum_{j=0}^{r-1} C_{j+1} z^j + \sum_{j=1}^n C_{j+r} (T g_j)(z)$$

обращается в нуль в точках $\tau_1, \dots, \tau_{n+r}$. Тогда по теореме Ролля найдутся точки $\tau_1 < \xi_1 < \dots < \xi_n < \tau_{n+r}$, в которых $F^{(r)}$ обращается в нуль. Тем самым

$$F^{(r)} = \sum_{j=1}^n C_{j+r} g_j(\xi_m) = 0, \quad m = 1, \dots, n.$$

В [13] было доказано, что система функций

$$\frac{1}{(z - \xi_m)(1 - \xi_m z)}, \quad m = 1, \dots, n,$$

является чебышёвской на множестве $(-1, 1) \setminus \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$. Следовательно, $g_1, \dots, g_n$ — чебышёвская система на множестве $(-1, 1)$ и $C_{r+1} = \dots = C_{n+r} = 0$. Отсюда вытекает, что и $C_1 = \dots = C_r = 0$.

Доказательство оптимальности построенного метода на классе H_∞^r проводится по той же схеме, которая использовалась в теореме 2.

Для фиксированных $-1 < z_1 < \dots < z_n < 1$ положим

$$X_{n+r}^z := \text{span}\{1, z, \dots, z^{r-1}, (T_r g_1)(z), \dots, (T_r g_n)(z)\}.$$

Аналогично следствию 2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $-1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n+r} < 1$, а $\tau_1 < z_1 < \dots < z_n < \tau_{n+r}$ определены предложением 2. Тогда функция $g(\xi) \in X_{n+r}^z$, интерполирующая f в точках $\tau_1, \dots, \tau_{n+r}$, является оптимальным методом восстановления значения $f(\xi)$, $\xi \in (-1, 1)$, на классе H_∞^r по значениям в точках $\tau_1, \dots, \tau_{n+r}$.

Список литературы

1. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них // Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1965.
2. Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Матем. заметки. 1976. Т. 19. № 1. С. 29–40.
3. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Матем. заметки. 1991. Т. 50. № 6. С. 85–93.
4. Fisher S. D., Micchelli C. A. The n -width of sets of analytic functions // Duke Math. J. 1980. V. 47. № 4. P. 789–801.
5. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970.
6. Osipenko K. Yu. Exact values of n -widths of Hardy–Sobolev classes // Constr. Approx. 1997. V. 13. P. 17–27.
7. Корнейчук Н. П. Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.
8. Osipenko K. Yu., Wilderotter K. Optimal information for approximating periodic functions // Math. Comput. 1997. V. 66. № 220. P. 1579–1592.
9. Осипенко К. Ю. Об n -поперечниках, оптимальных квадратурных формулах и оптимальном восстановлении функций, аналитических в полосе // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 55–79.
10. Pinkus A. n -Widths in approximation theory. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
11. Wilderotter K. Optimal approximation of periodic analytic functions with integrable boundary values // J. Approx. Theory. 1996. V. 84. № 2. P. 236–246.
12. Fisher S. D. Envelopes, widths, and Landau problems for analytic functions // Constr. Approx. 1989. V. 5. № 2. P. 171–187.
13. Bojanov B. D., Grozev G. R. A note on the optimal recovery of functions in H^∞ // J. Approx. Theory. 1988. V. 53. № 1. P. 67–77.